

glaptev@yandex.ru

Г.И. Лаптев, Г.Г. Лаптев

Уравнения математической физики

Рекомендовано

Учебно-методическим объединением по образованию в области
химической технологии и биотехнологии в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по химико-технологическим направлениям и биотехнологии

Москва 2003

Предисловие

Изучая конкретный физический процесс, исследователь стремится описать его в математических терминах (например, хорошо известны законы Ньютона движения материальной точки). Получающиеся математические задачи могут быть самыми разнообразными. Среди них выделяют дифференциальные уравнения с частными производными. Именно этой группе задач присваивают термин математическая физика, а способы их решения называют методами математической физики. Следует подчеркнуть, что при описанном подходе исследуется не сам реальный физический процесс, а некоторая его модель (идеальный процесс), записанная в форме математических соотношений. От математической модели требуется, чтобы она сохраняла основные черты реального процесса и в то же время была достаточно простой, поддающейся решению известными методами. Соответствие математической модели реальному процессу необходимо затем проверять опытным путем.

Уравнения математической физики возникли из рассмотрения важнейших задач, таких, как распространение звука в газах, волн в жидкостях, тепла в физических телах. В наше время активно изучаются такие явления, как перенос нейтронов в атомных реакторах, гравитация и электромагнитные эффекты, происхождение и развитие Вселенной. Все эти разделы физики создают математические модели, которые приводят к уравнениям с частными производными. Таким образом, уравнения математической физики — это раздел математики, который непосредственно связан с изучением наиболее сложных явлений природы. Методы математической физики составляют часть более общей теории уравнений с частными производными.

Цель книги — оказать помощь студентам в изучении основ математической физики. Здесь выводятся типичные уравнения и демонстрируются методы их решения. К этим уравнениям приводят многие задачи теории и практики. Число самих уравнений ограничено, но каждое из них описывает широкий круг явлений природы. Подобная универсальность уравнений математической физики постоянно подчеркивается многими учеными.

Курс математической физики охватывает обширный материал, поэтому в книге реализован классический учебный принцип восхождения от простого к сложному. Первая часть, состоящая из двух глав, посвящена методически более простому материалу, связанному с изучением уравнений с двумя независимыми переменными. Сюда относятся уравнение малых колебаний струны, уравнение распространения тепла в стержне и уравнение Лапласа для плоских областей. Вторая часть пособия, состоящая из трех глав, посвящена изучению уравнений с тремя и более переменными.

При написании книги авторы ставили перед собой несколько целей, в частности, мы стремились создать курс, доступный студентам нематематических специальностей, так как в настоящее время происходит осознание необходимости использования математического аппарата во всех науках, даже в таких казалось бы сугубо гуманитарных дисциплинах, как история и психология. Далее, у студентов часто создается впечатление, что в математике уже все открыто. Таким студентам важно показать, что математика постоянно развивается и огромное число задач еще только предстоит исследовать. Поэтому мы включили в пособие краткое введение в область математики, которая является одним из актуальных направлений современной теории нелинейных дифференциальных уравнений и в то же время ряд ее результатов доступен студентам, прослушавшим курс высшей математики.

Мы включили также материал, подготовленный для магистров горно-строительного факультета Тульского государственного университета и посвященный уравнениям, встречающимся при моделировании различных экологических процессов в шахтах.

Книга разбита на главы, а главы — на разделы. Каждый раздел соответствует примерно одной лекции, однако многие разделы можно прорабатывать на практическом или семинарском занятии.

Внутри каждого раздела применяется независимая нумерация формул, что позволяет использовать книгу непосредственно как основу для чтения лекций.

Пособие ориентировано на активное овладение предметом, поэтому большое внимание уделяется детальному решению и разбору учебных примеров и задач. При написании книги авторы использовали учебную литературу по уравнениям математической физики, указанную в списке литературы. Необходимо отметить, что наибольшее влияние на книгу оказали следующие учебники: *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.; *Пикунин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1995. 224 с.

Авторы выражают благодарность заведующему кафедрой высшей математики МГСУ профессору Г.С. Жуковой за постоянный интерес и поддержку в процессе написания книги.

ГЛАВА 1

Эволюционные уравнения с двумя переменными

В этой главе на конкретных примерах мы показываем, как проводится исследование физических задач с помощью дифференциальных уравнений с частными производными. Многие явления природы существенно изменяются во времени, и тогда их относят к эволюционным, что отражено в заголовке главы.

Наиболее известными примерами эволюционных процессов являются колебания струны и перенос тепла из нагретых частей тела в более холодные. Каждый человек постоянно сталкивается с подобными явлениями и без труда воспринимает их физическую сторону. Именно для таких процессов в данной главе строятся математические модели в форме дифференциальных уравнений с частными производными и демонстрируются некоторые методы их решения.

1.1. Простейшие уравнения с частными производными

Уравнением с частными производными называют такое уравнение, в которое входят неизвестная функция, зависящая от нескольких переменных, и ее частные производные. Зависимость неизвестной функции от многих переменных существенно усложняет решение уравнений с частными производными. Очень мало таких уравнений решается в явном виде. Приведем примеры уравнений, допускающих достаточно простое решение. При этом все функции предполагаются непрерывными.

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Ищется функция двух переменных $u = u(x, y)$. В этом особенность задачи. Интегрируя уравнение по переменной x , получаем $u = C$. Здесь C — любая постоянная по отношению к x , но она может зависеть произвольно от второй переменной y . Другими словами, ответ следует писать в виде $u(x, y) = C(y)$, где $C(y)$

— произвольная функция переменной y . Прямой подстановкой в уравнение убеждаемся, что указанная функция действительно дает решение рассматриваемого уравнения: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} C(y) = 0$.

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$. Аналогично предыдущему примеру получаем ответ в виде

$$u(x, y) = \int f(x) dx + C(y).$$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Запишем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ и введем новую неизвестную функцию $v = \frac{\partial u}{\partial y}$. Исходное уравнение примет вид $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Такое уравнение рассмотрено выше. Оно имеет решение $v = C(y)$, где C — произвольная функция. Так как $v = \frac{\partial u}{\partial y}$, то получается уравнение $\frac{\partial u}{\partial y} = C(y)$, также изученное ранее. Его решение

$$u(x, y) = \int C(y) dy + \varphi(x).$$

Здесь $\varphi(x)$ — еще одна произвольная функция. Заметим, что интеграл $\int C(y) dy = \psi(y)$ является произвольной функцией, ибо таковой является функция $C(y)$ под знаком интеграла. Тем самым каждое решение рассматриваемого уравнения можно представить в виде

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \quad (1)$$

где φ, ψ — произвольные функции своих аргументов. Полученное выражение (1) называется общим решением исходного уравнения.

4. Рассмотрим обобщение первого примера. Разыскивается функция $u = u(x, y)$ двух переменных, удовлетворяющая уравнению

$$a_m \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \dots + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_0 u = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты этого уравнения считаются числами. Составим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_m z^{(m)}(x) + \dots + a_1 z'(x) + a_0 z(x) = 0. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $z_1(x), \dots, z_m(x)$ — фундаментальная система решений обыкновенного дифференциального уравнения (3). Зададим произвольные функции $C_1(y), \dots, C_m(y)$. Тогда функция двух переменных

$$u(x, y) = z_1(x)C_1(y) + \dots + z_m(x)C_m(y) \quad (4)$$

является решением дифференциального уравнения (2) с частными производными.

Теорема доказывается прямой подстановкой функции (4) в уравнение (2). Для примера проверим, что первое слагаемое $u_1(x, y) = z_1(x)C_1(y)$ в формуле (4) является решением уравнения (2). По условию теоремы функция $z_1(x)$ удовлетворяет тождеству $\sum_{k=0}^m a_k z_1^{(k)}(x) = 0$. Вычислим

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{\partial^k u_1}{\partial x^k} = \sum_{k=0}^m a_k z_1^{(k)}(x) C_1(y) = 0,$$

что и утверждалось. Тем самым функция $u_1(x, y)$ является решением уравнения (2). Формула (4) содержит m произвольных функций и поэтому называется общим решением уравнения (2).

5. $\frac{\partial u}{\partial x} = u$. Это частный случай уравнения (2). Соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение $z' = z$ имеет единственное фундаментальное решение $z_1(x) = e^x$. Согласно теореме 1 общее решение рассматриваемого уравнения представляется формулой $u(x, y) = e^x C(y)$, где $C(y)$ — произвольная функция.

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Это снова частный случай уравнения (2). Решим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение $z'' - z' = 0$ с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $k^2 - k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$, которые порождают фундаментальную систему решений $z_1(x) = 1$, $z_2(x) = e^x$. Согласно теореме 1 общее решение рассматриваемого уравнения представляется формулой

$$u(x, y) = C_1(y) + e^x C_2(y),$$

где C_1, C_2 — произвольные функции.

7. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$. Несмотря на внешнюю простоту этого примера, решить его достаточно трудно. Для изучения подобных уравнений разработано несколько методов. Приведем один из них, основанный на введении новых независимых переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ в предположении, что соответствующий якобиан отличен от нуля. Используем формулы замены переменных для частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Приведенные равенства подставим в исходное уравнение и перепишем его в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0. \quad (5)$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$. Получилось снова исходное уравнение, однако теперь достаточно найти какое-нибудь частное решение. Например, можно считать $\xi = x + y$, $\eta = x$. В результате уравнение (5) примет простой вид $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, откуда $u = \varphi(\xi)$, где φ — произвольная функция. Так как $\xi = x + y$, то окончательно получаем ответ $u(x, y) = \varphi(x + y)$, где φ — произвольная функция сложного аргумента $x + y$.

Разобранные примеры показывают, что общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольных функций в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от произвольных постоянных.

Для дифференциальных уравнений с частными производными в основном сохраняется терминология, принятая для обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, если в уравнение входит производная наивысшего порядка n , то уравнению присваивают порядок n . Если сама функция и все ее производные входят в уравнение линейно, то уравнение называют *линейным*. В курсе уравнений математической физики рассматриваются только линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Далее изучаются простейшие типы таких уравнений, обычно называемые классическими уравнениями математической физики: волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности.

Сделаем еще следующее замечание. Пусть задано уравнение с частными производными. Его решение определяется совсем не просто. Существует несколько различных определений. Наиболее естественным выглядит определение классического решения, которое приводится далее. Напомним, что уравнение содержит частные производные искомой функции. Для их вычисления необходимо предполагать, что функция $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, определена не только в точке x , но и в некоторой ее окрестности. Объединение всех окрестностей приводит к открытому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Обычно предполагают, что искомая функция $u(x)$ должна быть определена в некоторой области пространства \mathbb{R}^n , а также непрерывна там вместе со своими частными производными, участвующими в уравнении. В результате приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, определенная в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, называется *классическим решением* уравнения с частными производными, если эта функция непрерывна в Ω вместе с частными производными, участвующими в уравнении, и при подстановке в уравнение обращает его в тождество для каждого $x \in \mathbb{R}^n$.

Именно такие решения строились в примерах, разобранных выше. При этом область Ω совпадала с плоскостью \mathbb{R}^2 переменных x, y .

В дальнейшем к вопросу об определении решения дифференциального уравнения с частными производными мы будем неоднократно возвращаться.

1.2. Приведение уравнений второго порядка с двумя переменными к каноническому виду

Теория уравнений с частными производными начинается с классификации, которая создана для уравнений и систем высокого порядка со многими независимыми переменными. В нашем курсе мы ограничимся линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами и с двумя независимыми переменными. Такие уравнения имеют вид

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = 0. \quad (1)$$

Равенство (1) напоминает общее уравнение кривой второго порядка на плоскости. По этой причине для дифференциальных уравнений применяется та же терминология, что и для кривых на плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение (1) называется:

- *гиперболическим*, если $b^2 - ac > 0$;
- *параболическим*, если $b^2 - ac = 0$;

— *эллиптическим*, если $b^2 - ac < 0$.

Желая упростить уравнение (1), преобразуем его к новым переменным. Для рассматриваемых здесь линейных уравнений достаточно считать, что новые переменные зависят от x, y линейно:

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (2)$$

Выразим частные производные через новые переменные по известным формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Полученный результат удобно представить в символической форме:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Такая запись дает возможность достаточно легко вычислить вторые частные производные:

$$\begin{array}{l} a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \right. \\ 2b \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u = \alpha\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \right. \\ c \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u = \left(\beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \right. \end{array}$$

Все выписанные соотношения подставим в уравнение (1). Получится длинное выражение. Чтобы его сократить, сохраним только те слагаемые, которые содержат вторые частные производные, сгруппировав их следующим образом:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2, \\ B &= a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta, \\ C &= a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2. \end{aligned} \quad (4)$$

В формуле (3) символом $F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ обозначены слагаемые, которые содержат частные производные не выше первого порядка. Уравнение (3) упростится, если хотя бы один его коэффициент обратится в нуль. Это возможно, однако в зависимости от знака числа $b^2 - ac$ возникают различные варианты. Рассмотрим их по очереди.

ЛЕММА 1. Пусть $b^2 - ac > 0$. По первым трем коэффициентам дифференциального уравнения (1) составим квадратное уравнение $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$, предполагая, что $a, c \neq 0$. Это уравнение имеет два действительных различных корня λ_1 и λ_2 . В формулах (2) для замены переменных полагаем $\alpha/\beta = \lambda_1$ и $\gamma/\delta = \lambda_2$. Тогда новые коэффициенты A, C обратятся в нуль, и уравнение (3) примет вид

$$2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (4) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{A}{\beta^2} &= a \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2b \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + c, \\ \frac{C}{\delta^2} &= a \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + 2b \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + c. \end{aligned} \tag{5}$$

Квадратное уравнение $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ имеет два различных вещественных корня, так как его дискриминант $D = b^2 - ac$ положителен по условию. Полагая $\alpha/\beta = \lambda_1$ и $\gamma/\delta = \lambda_2$, согласно формулам (5) обратим в нуль коэффициенты A и C , что и утверждалось. Заметим, что при указанном выборе параметров для замены переменных получаем соотношение

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \beta\delta \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right) = \beta\delta(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0,$$

которое показывает, что выполнено последнее из условий (2). Это завершает доказательство леммы. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полученное в лемме 1 уравнение после деления на число $2B$ примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, который называется

каноническим для уравнений гиперболического типа. Для рассматриваемого случая можно подобрать и такую замену, чтобы получилось уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$, которое также считается каноническим.

ЛЕММА 2. Пусть $b^2 - ac = 0$. Тогда квадратное уравнение $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ имеет единственный корень $\lambda_1 = -b/a$. Полагая $\alpha/\beta = \lambda_1$ в формулах (2), обратим в нуль коэффициенты A и B . В результате уравнение примет вид

$$C \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как дискриминант $D = b^2 - ac = 0$, то квадратное уравнение $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ имеет точно один корень $\lambda_1 = -b/a$. Полагая $\alpha/\beta = \lambda_1 = -b/a$, согласно первой из формул (5) получим $A = 0$. Коэффициент C обратить в нуль не удастся, однако при рассматриваемых условиях получается следующее равенство:

$$\begin{aligned} B &= \beta \left(a \frac{\alpha}{\beta} \gamma + b \frac{\alpha}{\beta} \delta + b\gamma + c\delta \right) = \\ &= \beta \left[a \left(-\frac{b}{a} \right) \gamma + b \left(-\frac{b}{a} \right) \delta + b\gamma + c\delta \right] = -\frac{\beta\delta}{a} D = 0. \end{aligned}$$

Это есть утверждение леммы. \square

Заметим, что полученное в лемме 2 уравнение после деления на число C примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$, который называется каноническим для уравнений параболического типа.

Рассмотрим последний вариант, когда $b^2 - ac < 0$. Из формул (4) следует, что коэффициенты A и C являются знакоопределенными квадратичными формами, и потому их нельзя обратить в нуль. В этом случае ограничиваются меньшей задачей, именно обращают в нуль коэффициент B . Это всегда возможно, так как в него входят четыре независимых параметра. Более того, можно подобрать такую замену переменных, чтобы выполнялось равенство $A = C$. В результате уравнение (3) примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$, который называется каноническим для уравнений эллиптического типа. Оформим полученный результат в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (1) невырожденным линейным преобразованием координат можно привести к одной из следующих канонических форм:

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, или $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, если уравнение гиперболическое;

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, если уравнение эллиптическое;

$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, если уравнение параболическое.

Приведем примеры решения конкретных уравнений.

ПРИМЕР 1. Привести к каноническому виду и решить уравнение

$$16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Сравнивая представленное уравнение с (1), приходим к равенствам: $a = 16$, $b = 8$, $c = 3$. Отсюда $b^2 - ac = 16 > 0$. Следовательно, данное уравнение относится к гиперболическому типу. Применим к нему лемму 1, для чего составим квадратное уравнение $16\lambda^2 + 16\lambda + 3 = 0$, которое имеет два корня: $\lambda_1 = -1/4$, $\lambda_2 = -3/4$. В формулах (2) для замены переменных полагаем $\alpha/\beta = -1/4$, $\gamma/\delta = -3/4$. Выбираем простейший вариант: $\alpha = 1$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$, $\delta = -4$. Формулы (2) принимают вид: $\xi = x - 4y$, $\eta = 3x - 4y$. Согласно лемме 1 рассматриваемое уравнение в новых переменных упростится, приняв форму $2B \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Сократив на $2B$, получим $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Это уравнение решено в разделе 1.1 в общем виде: $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, где φ , ψ — произвольные функции. Подставляя сюда выражения для ξ , η , получаем общее решение исходного уравнения:

$$u(x, y) = \varphi(x - 4y) + \psi(3x - 4y).$$

ПРИМЕР 2. Привести к каноническому виду и решить уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Сравнение с уравнением (1) приводит к равенствам: $a = c = 1$, $b = -1$, так что $b^2 - ac = 0$. Следовательно, решаемое уравнение принадлежит к параболическому типу. Применим к нему лемму 2. Квадратное уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет

единственный корень $\lambda = 1$. В формулах замены переменных (2) полагаем $\alpha/\beta = 1$. Достаточно считать $\alpha = \beta = 1$. Заметим, что на коэффициенты γ, δ ограничений не накладывается, кроме одного: определитель $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$. Учитывая это, для второй переменной η выберем простейший вариант $\eta = x$. Формулы (2) примут вид $\xi = x + y, \eta = x$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Подставляя эти замены в исходное уравнение, приведем его к форме $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$. Такие уравнения решались в предыдущем разделе. Составим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение $z'' + z' = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$ и $k_2 = -1$, которые порождают фундаментальную систему решений $z_1(\eta) = 1$ и $z_2(\eta) = e^{-\eta}$. Общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ получаем в виде $u = C_1(\xi) + e^{-\eta}C_2(\xi)$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$u(x, y) = C_1(x + y) + e^{-x}C_2(x + y),$$

где C_1, C_2 — произвольные функции своего аргумента.

ПРИМЕР 3. Привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения $u_{xx} = \tau^2 u_{yy}$, где τ — положительный параметр.

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение в виде $u_{xx} - \tau^2 u_{yy} = 0$. Сравнивая с общей формулой (1), приходим к равенствам: $a = 1, b = 0, c = -\tau^2$. Отсюда $b^2 - ac = \tau^2 > 0$. Следовательно, данное уравнение относится к гиперболическому типу. Согласно лемме 1 составим квадратное уравнение $\lambda^2 - \tau^2 = 0$. Оно имеет два вещественных корня $\lambda_1 = \tau$ и $\lambda_2 = -\tau$. В формулах (2) для замены переменных полагаем $\alpha/\beta = \tau, \gamma/\delta = -\tau$.

Выбираем простейший вариант: $\alpha = \tau, \beta = 1, \gamma = -\tau, \delta = 1$. Формулы (2) принимают вид: $\xi = \tau x + y, \eta = -\tau x + y$. В новых переменных рассматриваемое уравнение переходит в соотношение $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, которое решено в предыдущем разделе в виде $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, где φ, ψ — произвольные функции. Подставляя сюда выражения для ξ и η , получаем общее решение исходного уравнения

$$u(x, y) = \varphi(y + \tau x) + \psi(y - \tau x).$$

1.3. Уравнение колебаний струны

Приведем классический пример, показывающий, как конкретная физическая задача изучается с помощью дифференциального уравнения с частными производными. Рассмотрим туго натянутую однородную металлическую струну, закрепленную на концах. Если ее вывести из положения равновесия, то она начнет колебаться. Наша задача — описать этот процесс математически.

Для любого физического явления можно предложить много математических моделей. Для поставленной здесь задачи общепринятой моделью является следующая. Струна в положении равновесия имитируется отрезком горизонтальной оси $0 \leq x \leq l$. Колебания предполагаются поперечными. Это значит, что струна движется в одной плоскости и при этом каждая точка струны перемещается только в вертикальном направлении (нет смещений в сторону). Величину отклонения точки x струны в момент времени t обозначим $u(t, x)$. Таким образом, положение струны описывается функцией двух переменных t, x . График функции $u(t, x)$ при фиксированном значении времени t дает зрительный образ струны в этот момент. Ради такой наглядности колебания струны выбраны в качестве первой задачи математической физики.

Так как задача о колебаниях струны поставлена в рамках механики, то мы должны использовать методы этой науки. В частности, применим метод сечений, суть которого состоит в следующем. Выделим участок струны $M_1 M_2$ в момент t и освободим его от связей, заменив их реакциями связей, которые для струн называются натяжениями. Обозначим эти натяжения \overline{T}_1 и \overline{T}_2 (рис. 1.1). Отметим, что натяжения направлены по касательной к струне в точке приложения. Считаем также, что никакие внешние силы на струну не действуют. В частности, пренебрегаем действием силы тяжести.

Теперь можно приступить непосредственно к выводу уравнения. Введем острый угол α (см. рис. 1.1), который касательная составляет с горизонтальной осью. Вычислим сумму внешних сил, действующих на выделенный участок струны, в проекции на вертикальную ось:

$$F = (\text{пр } \overline{T}_2)_{Ou} + (\text{пр } \overline{T}_1)_{Ou} = T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = \Delta(T \sin \alpha).$$

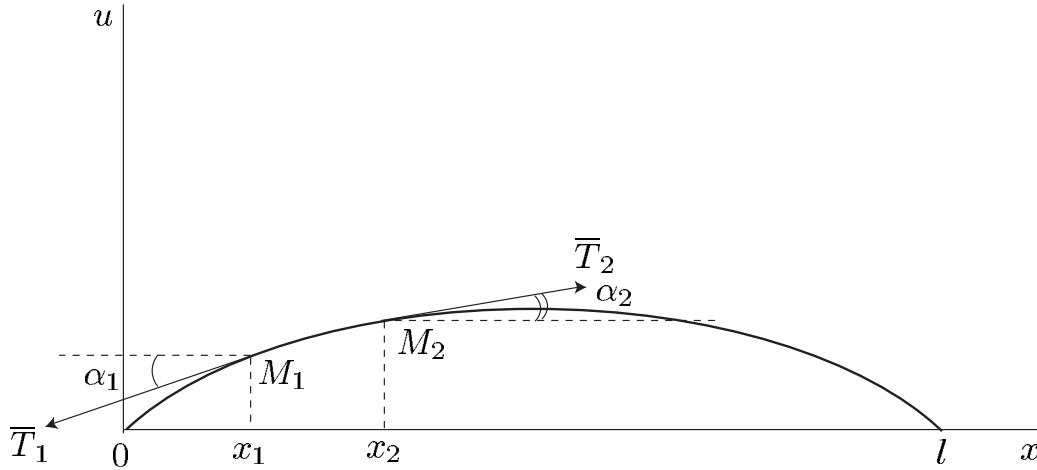


Рис. 1.1.

Получили приращение функции $T \sin \alpha$. Применим формулу Лагранжа для приращения функции, что дает

$$F = \frac{\partial}{\partial x}(T \sin \alpha) \Delta x,$$

где α — некоторая внутренняя точка: $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Участок $M_1 M_2$ сделаем столь малым, чтобы его можно было принять за материальную точку с линейным размером dx . Масса такой точки легко вычисляется через плотность: $m = \rho dx$. Введение материальной точки дает возможность применить основное уравнение динамики (второй закон Ньютона): $ma = F$, где a — ускорение точки. Так как пройденный точкой путь определяется смещением этой точки, т.е. функцией $u(t, x)$, то по физическому смыслу второй производной по времени ускорение $a = u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$. Подставляя все вычисленные величины в уравнение Ньютона, получаем

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T \sin \alpha) dx. \quad (1)$$

Чтобы вывести уравнение относительно одной неизвестной u , следует выразить плотность ρ , натяжение T и угол α через смещение u . В результате получится трудное нелинейное уравнение, которое еще не умеют решать аналитически. Поэтому введем следующее упрощающее предположение: колебания струны считаются малыми. Более точно, предположим, что можно пренебречь вариациями плотности ρ и натяжения T , которые возникают в процессе движения. Другими словами, указанные величины считаем неизменными: $\rho(x) \equiv \rho$, $T(x) \equiv T$, и равными тем значениям, которые

они имеют в положении равновесия (подчеркнем, что это предположение относится только к длине вектора $\overline{T}(x)$, но не к его направлению, которое вполне может меняться). В результате такого предположения уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sin \alpha), \quad a^2 = \frac{T}{\rho}. \quad (2)$$

Уравнение остается нелинейным за счет функции $\sin \alpha$. Снова применим предположение, что колебания струны являются малыми. В частности, мало меняется угол α : $\alpha \approx 0$. Напомним, что для малых величин известны следующие соотношения эквивалентности: $\alpha \sim \sin \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha$. Это дает возможность заменить в уравнении (2) $\sin \alpha$ на $\operatorname{tg} \alpha$, который согласно геометрическому смыслу производной совпадает с $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. Другими словами, применим приближенное равенство $\sin \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$. Подставляя его в уравнение (2), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Это и есть уравнение малых поперечных колебаний струны. Часто оно называется также одномерным волновым уравнением. Отметим, что уравнение (3) относится к гиперболическому типу.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Каждый человек не раз наблюдал колебания струн и, видимо, отмечал, что струны имеют специфические особенности, например издают разные звуки. Это значит, что каждая струна требует индивидуального подхода и метода решения. Известно несколько математических моделей колебаний струн. Они отличаются предположениями, которые кладутся в основу модели. Полученное уравнение (3) — самое простое и одновременно наиболее универсальное, так как оно описывает широкий круг малых колебательных процессов. Вот некоторые из них:

- продольные и крутильные колебания тонкого стержня;
- электрические колебания в контурах;
- электромагнитные колебания в однородной среде;
- акустические волны в трубах;
- малые волны в жидкости и на воде.

Этим далеко не исчерпывается перечень физических процессов, описываемых волновым уравнением.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выводе уравнения колебаний струны мы предполагали колебания малыми, что выражается, в частности, в приближенном равенстве $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$. Когда такое приближение можно считать правильным? Напомним, что α — угол, который касательная к струне составляет с горизонтальной осью. Используем формулу

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \approx \sin \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right). \quad (4)$$

При углах $\alpha = \frac{\pi}{20}$, что соответствует 8° , имеем: $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{20} \right) = 0.01$. Тем самым при углах до 8° в приближенном равенстве $1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \approx 1$ допускается ошибка, не превосходящая одного процента. На практике линейное приближение считается правильным при углах отклонения до 16° , а иногда и более, если не требуются длинные интервалы времени. В музыкальных инструментах углы отклонения струн существенно меньше указанных выше предельных значений, поэтому теория струн музыкальных инструментов построена на основе волнового уравнения и хорошо развита. Весьма эффективно волновое уравнение используется для изучения колебаний в канатах подъемных установок в лифтах и шахтах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вновь используем формулу (4) в таком варианте:

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}}.$$

Это выражение подставим в уравнение (2), что дает:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right).$$

Получилось нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными, теория которого еще создается учеными нашего времени.

1.4. Задача Коши для уравнения колебаний струны

Изучим подробнее уравнение колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Напомним, что такое уравнение уже рассматривалось в разделе 1.2 как пример 3. Уравнение относится к гиперболическому типу, и

его общее решение после естественных переобозначений переменных принимает вид

$$u(t, x) = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \quad (1)$$

где φ, ψ — произвольные функции. Представление решения уравнения колебаний струны в форме равенства (1) получило название *формулы Даламбера*.

Мы установили следующий факт: если функция $u(t, x)$ является решением уравнения колебаний струны, то ее можно представить по формуле (1) при подходящем выборе функций φ, ψ . С формальной точки зрения приведенное утверждение еще не означает, что функция вида (1) всегда является решением уравнения колебаний струны. Другими словами, формула Даламбера требует дополнительной проверки, которая заключается в том, что равенство (1) подставляется в уравнение колебаний струны, в результате чего должно получиться тождество. Указанная подстановка возможна лишь при дополнительном предположении, что функции φ и ψ допускают производные первого и второго порядка. При таком предположении получаем:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \varphi''(x + at) a^2 + \psi''(x - at) a^2, \\ u_{xx} &= \varphi''(x + at) + \psi''(x - at). \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, т.е. функция $u(t, x)$, представленная по формуле Даламбера, действительно является классическим решением уравнения колебаний струны при дополнительном условии: функции φ и ψ допускают непрерывные производные первого и второго порядков. Однако формула (1) сохраняет смысл для любых непрерывных функций φ и ψ , даже если эти функции не имеют производных первого и второго порядков. В этом случае сумму (1) называют *обобщенным решением* уравнения колебаний струны. Обобщенные решения часто возникают в учебных примерах и в реальных прикладных задачах.

Заметим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в формуле Даламбера считаются определенными для всех $x \in \mathbb{R}$, в результате чего формула Даламбера имеет смысл для всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$. С физической точки зрения процесс колебаний струны нас интересует только с

некоторого момента времени $t = t_0$. Для простоты обычно считают началом процесса время $t = 0$, и потому формулу Даламбера достаточно рассматривать только для $t \geq 0$. Напомним, что в определении решения дифференциального уравнения с частными производными вводится область Ω , на которой решается уравнение. Исходя из сказанного, в уравнении колебаний струны обычно полагают $\Omega = \{t > 0, x \in \mathbb{R}\}$, что приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Классическим решением* уравнения колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ называется функция $u(t, x)$ двух переменных, определенная и непрерывная в области $\Omega = \{t > 0, x \in \mathbb{R}\}$, имеющая в указанной области непрерывные частные производные до второго порядка включительно, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество в каждой точке $(t, x) \in \Omega$.

Из формулы Даламбера получается бесконечно много частных решений уравнения колебаний струны вследствие произвольности функций φ и ψ . При решении конкретной задачи требуется как правило одно решение. Чтобы выделить его из бесконечного числа, необходимо наложить на решение дополнительные условия, которые могут быть чрезвычайно разнообразными. Математически наиболее простой является задача с начальными условиями, называемая также задачей Коши. Она ставится для бесконечной струны и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (2)$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ предполагаются известными. С точки зрения механики они задают начальное положение струны и скорость каждой точки в начальный момент времени. Постановка задачи Коши оправдана, если струна очень длинная и изучаются колебания где-то в ее середине, так что концы струны оказывают слабое влияние на процесс. Задача Коши допускает явное решение через заданные функции f и g . Так как искомое решение удовлетворяет уравнению колебаний струны, то его можно представить в виде равенства (1). Вычислим частную производную

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\varphi'(x + at) - a\psi'(x - at),$$

и подставим в нее и в формулу (1) значение $t = 0$. Используя дополнительные условия из (2), получим:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = a\varphi'(x) - a\psi'(x) = g(x).$$

Запишем последнее равенство в такой форме:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}G(x), \quad G(x) = \int g(x) dx.$$

В результате система примет вид $\varphi + \psi = f$, $\varphi - \psi = \frac{1}{a}G$. Отсюда легко получить ее решение:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{a}G \right), \quad \psi = \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{a}G \right).$$

Подставляя найденные выражения в формулу Даламбера (1), получим

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}[G(x + at) - G(x - at)]. \quad (3)$$

Последняя разность в (3) — это приращение первообразной $G(x)$ функции $g(x)$. Такое приращение можно представить по формуле Ньютона–Лейбница в виде определенного интеграла, в результате чего равенство (3) принимает вид

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds. \quad (4)$$

Полученное представление решения называется *формулой Даламбера–Эйлера*. Эта формула выведена в предположении, что решение задачи Коши (2) существует. Формула Даламбера–Эйлера доказывает единственность решения задачи Коши (2). В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (2), то оно необходимо представлялось бы той же формулой (4), т.е. совпало бы с первым решением, что и означает единственность решения. Однако факт существования решения задачи Коши (2) еще необходимо установить. Для этого следует подставить формулу (4) в уравнение колебаний струны и начальные условия. Указанные действия не представляют труда и легко выполняются, но для этого требуются дополнительные предположения, именно функция $f(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой, а функция

$g(x)$ — один раз непрерывно дифференцируемой. Следует подчеркнуть, что формула Даламбера – Эйлера является единственной простой формулой в теории уравнений с частными производными.

Подведем итог.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u(t, x)$ называется классическим решением задачи Коши (2), если она имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в области $\Omega = \{t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ и удовлетворяет в Ω уравнению колебаний струны, а также непрерывна и непрерывно дифференцируема по t на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет начальным условиям.

Изложенное выше приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема для $x \in \mathbb{R}$, а функция $g(x)$ — один раз непрерывно дифференцируема. Тогда задача Коши (2) имеет и притом единственное классическое решение. Это решение можно представить по формуле Даламбера – Эйлера (4).

Заметим, что формула Даламбера – Эйлера сохраняет смысл, если функция $f(x)$ всего лишь непрерывна на оси \mathbb{R} , а функция $g(x)$ локально суммируема. В этом случае функцию $u(t, x)$, представленную формулой (4), называют *обобщенным решением* задачи Коши (2).

Приведем примеры решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.

ПРИМЕР 1. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь $a = 1$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 0$, так что по формуле (4)

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[(x+t)^2 + (x-t)^2] = x^2 + t^2.$$

Получено семейство парабол. Положение струны для трех моментов времени ($t = 0, 1, 2$) показано на рис. 1.2. Отметим, что вершина параболы движется с ускорением при возрастании времени t . Такое поведение характерно для туго натянутой тетивы лука после того как ее отпустили.

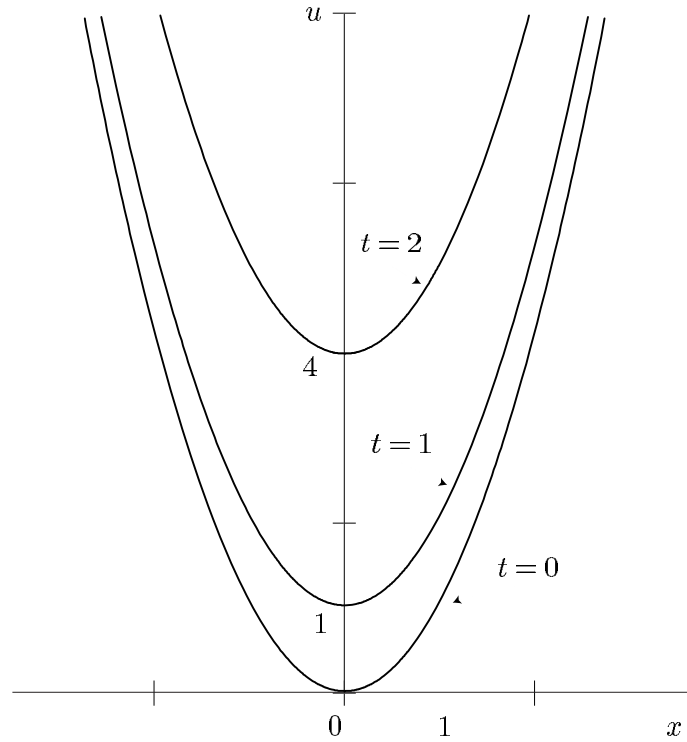


Рис. 1.2.

ПРИМЕР 2. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь $a = 2$, $f(x) = 0$, $g(x) = x$, так что $G(x) = \frac{x^2}{2}$. По формуле (3) получаем ответ:

$$u(t, x) = \frac{1}{8}[(x + 2t)^2 + (x - 2t)^2] = xt.$$

Геометрически здесь представлено семейство прямых, зависящих от параметра t . Положение струны для некоторых моментов времени показано на рис. 1.3. Струна поворачивается вокруг начала координат как твердое тело.

ПРИМЕР 3. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь $a = 1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0$, так что по формуле (3)

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\sin(x + t) + \sin(x - t)] = \sin x \cos t.$$

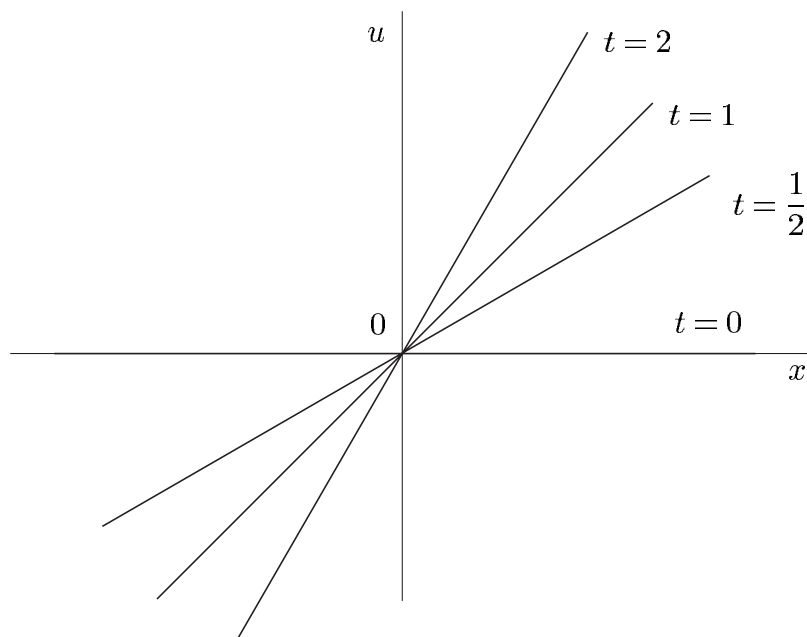


Рис. 1.3.

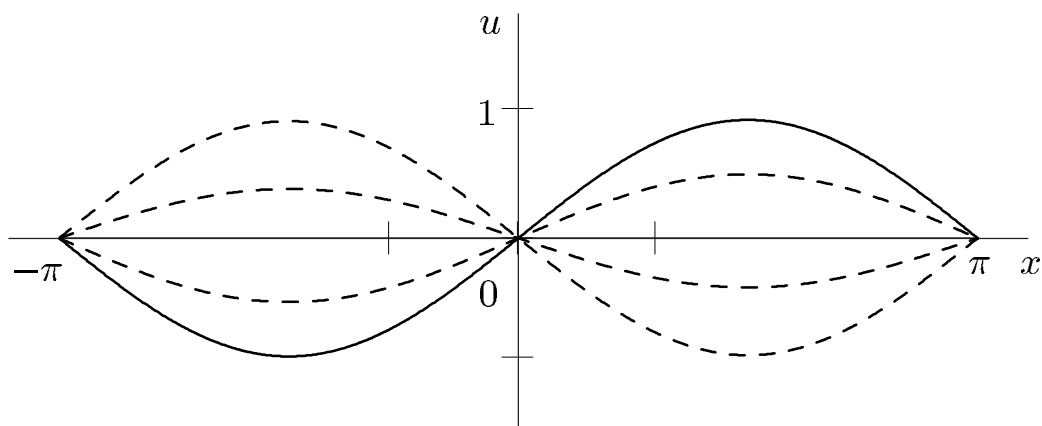


Рис. 1.4.

Положение части струны для нескольких моментов времени показано на рис. 1.4. Из чертежа очевидно, что здесь колебания струны соответствуют привычному зрительному образу.

ПРИМЕР 4. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь $a = 1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, так что $G(x) = \sin x$. По формуле (3) получаем ответ:

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\sin(x+t) + \sin(x-t)] + \frac{1}{2}[\sin(x+t) - \sin(x-t)] = \sin(x+t).$$

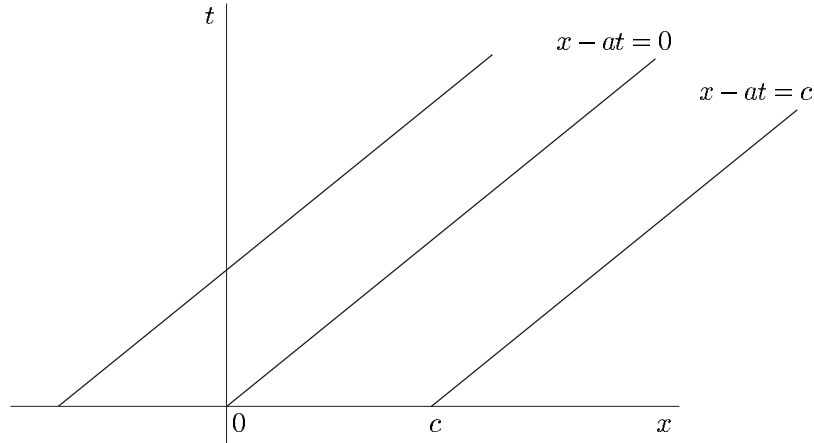


Рис. 1.5.

Аргумент $x + t$ означает геометрически сдвиг функции влево по оси Ox на величину t . Струна движется вдоль оси Ox , создавая зрительный образ бегущей волны.

В приведенных примерах указаны типичные волновые процессы, характерные для бесконечной струны.

1.5. Метод бегущих волн для струны

В этом разделе изучается геометрическая структура решений уравнения колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Напомним, что общее решение этого уравнения может быть представлено формулой Даламбера

$$u(t, x) = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \quad (1)$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Рассмотрим последнее слагаемое $\psi(x - at)$. Оно зависит от составного аргумента $x - at$, который содержит две независимые переменные x, t . Приравняв аргумент $x - at$ константе, в плоскости (x, t) получим прямую с уравнением $x - at = c$. При изменении константы c получается семейство параллельных прямых (рис. 1.5).

На фиксированной прямой $x - at = c$ функция $\psi(x - at)$ сохраняет постоянное значение, так как $\psi(x - at) = \psi(c)$ — постоянная. Мы видим, что введенные прямые имеют важное геометрическое значение, и потому они получили специальное название — характеристики уравнения колебаний струны. Благодаря им можно достаточно просто строить график функции $\psi(x - at)$ как поверхность в пространстве трех переменных ψ, x, t . При $t = 0$ график функции

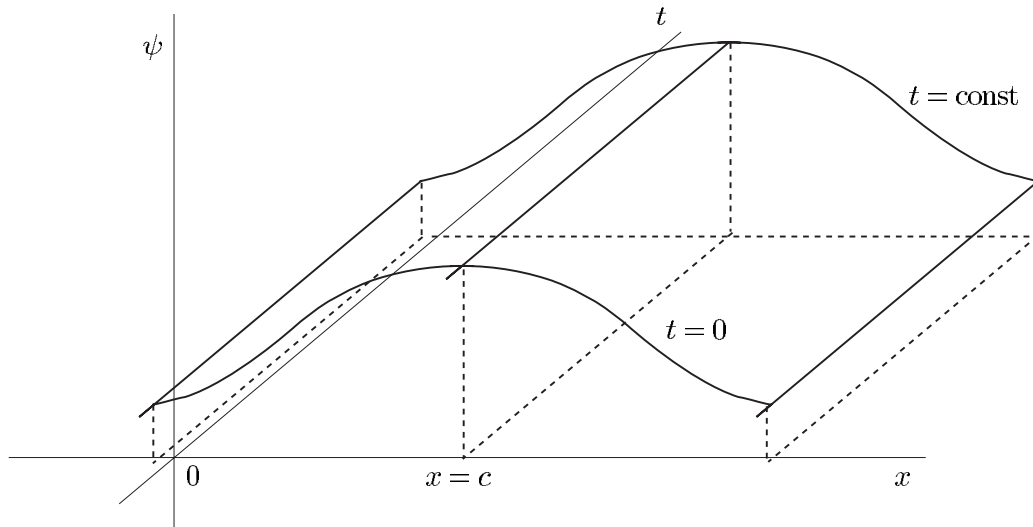


Рис. 1.6.

$\psi(x)$ считаем известным. Фиксируем точку $x = c$ и проведем из нее характеристику с уравнением $x - at = c$ в плоскости (x, t) . Над всей этой характеристикой функция $\psi(x - at) = \psi(c)$ сохраняет постоянное значение. Геометрически это значит, что над всей характеристикой на высоте $\psi(c)$ расположена параллельная прямая, которая составляет часть поверхности $\psi(x - at)$. Применяя это рассуждение к каждой точке графика функции $\psi(x)$, обнаруживаем, что вся поверхность $\psi(x - at)$ состоит из горизонтальных прямых, которые в совокупности образуют график функции $\psi(x - at)$ в трехмерном пространстве (рис. 1.6).

Если полученную указанным способом поверхность пересечь вертикальной плоскостью с уравнением $t = \text{const}$, то в сечении получится кривая, которая в точности повторяет график функции $\psi(x)$, сдвинутый вдоль характеристик. Другими словами, функция $\psi(x)$ переносится вдоль характеристик без изменения формы как твердая конструкция. Учитывая простоту изложенного построения, всем элементам слагаемого $\psi(x - at)$ присвоены специальные термины. Именно, само выражение $\psi(x - at)$ — это прямая волна, разность $x - at$ — фаза волны, число a — фазовая скорость, плоскость переменных (x, t) — фазовая плоскость. Если следить за прямой волной в проекции на плоскость (x, ψ) параллельно оси Ot в различные моменты времени, то создается впечатление, что график функции $\psi(x)$ движется вправо вдоль оси Ox , не меняя формы, что и привело к названию — прямая волна.

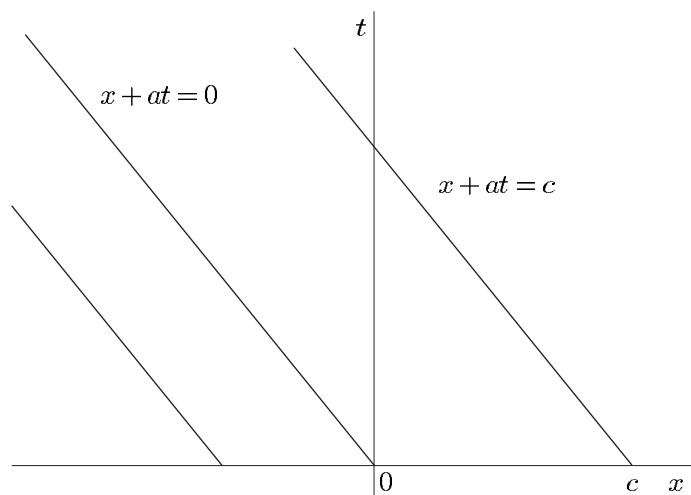


Рис. 1.7.

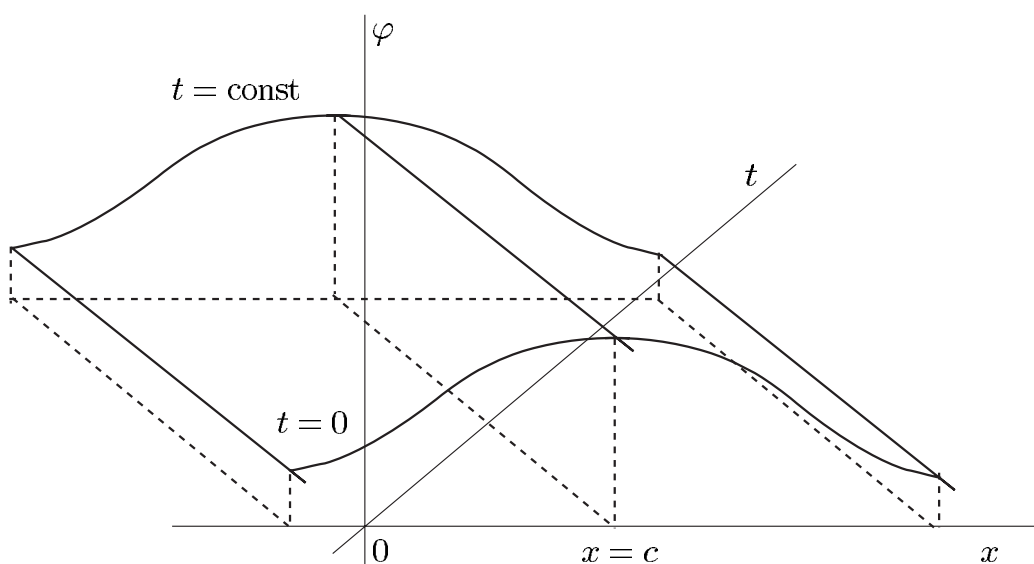


Рис. 1.8.

Перейдем к слагаемому $\varphi(x + at)$ общего решения (1). Введем прямые с уравнением $x + at = c$, где c — произвольная постоянная (рис. 1.7).

Эти прямые также называются характеристиками уравнения колебаний струны. На каждой из них функция $\varphi(x + at)$ остается неизменной, так как $\varphi(x + at) = \varphi(c)$ — постоянная, если $x + at = c$. Геометрически это значит, что над всей характеристикой на высоте $\varphi(c)$ расположена параллельная прямая, которая принадлежит поверхности $\varphi(x + at)$ в пространстве переменных φ, x, t . Тем самым вся поверхность $\varphi(x + at)$ построена из горизонтальных прямых (рис. 1.8).

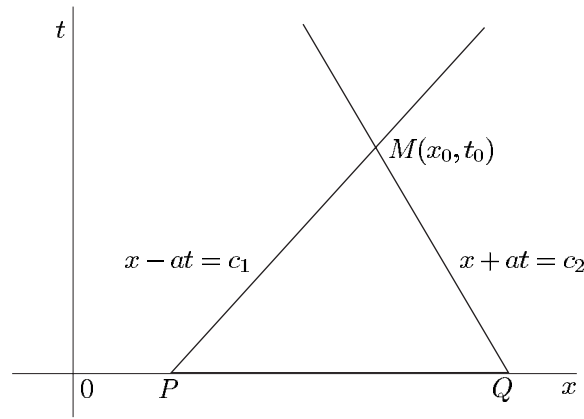


Рис. 1.9.

При пересечении построенной поверхности вертикальной плоскостью $t = \text{const}$ получается кривая, которая повторяет график функции $\varphi(x)$ путем сдвига его вдоль новых характеристик. По аналогии с прямой волной слагаемое $\varphi(x + at)$ получило название обратной волны, а сумма $x + at$ — фазы обратной волны. Спроектируем обратную волну в разные моменты времени на плоскость (x, φ) . Создается впечатление, что график функции $\varphi(x)$ движется влево вдоль оси Ox , не меняя формы, что и привело к названию — обратная волна.

Применим изложенные выше построения к формуле Даламбера — Эйлера, которая представляет решение задачи Коши для уравнения колебаний струны. В фазовой плоскости зафиксируем точку $M(x_0, t_0)$. Через нее проходят две характеристики с уравнениями

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2. \quad (2)$$

Эти характеристики пересекают ось Ox в двух точках P и Q (рис. 1.9).

Треугольник PQM , ограниченный с боков характеристиками, называется характеристическим. Найдём координаты точек P и Q . Заметим, что точка M лежит на каждой из двух характеристик (2), и потому ее координаты обязаны удовлетворять обоим уравнениям (2), что даёт равенства: $x_0 - at_0 = c_1$, $x_0 + at_0 = c_2$. Тем самым числа c_1 и c_2 вполне определены. Уравнения (2) принимают вид

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0. \quad (3)$$

Чтобы найти координаты точек пересечения этих двух прямых с осью Ox , достаточно считать $t = 0$ в уравнениях (3). Получаем точки пересечения $P(x_0 - at_0; 0)$ и $Q(x_0 + at_0; 0)$. Запишем формулу Даламбера – Эйлера в рассматриваемой точке $M(x_0, t_0)$:

$$u(t_0, x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + at_0) + f(x_0 - at_0)] + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} g(s) ds.$$

Подставим сюда точки плоскости вместо их координат, считая, что интеграл вычисляется по отрезку PQ , и получим

$$u(M) = \frac{1}{2}[f(P) + f(Q)] + \frac{1}{2a} \int_{PQ} g(s) ds.$$

Таким образом, чтобы получить решение задачи Коши для уравнения колебаний струны в фиксированной точке M , достаточно знать функцию $f(x)$ в двух точках P и Q , а функцию $g(x)$ — на отрезке PQ . При этом точки P и Q получаются как пересечения с осью Ox двух характеристик, проходящих через точку M .

Изложенная выше геометрическая картина дает возможность строить решения уравнения колебаний струны графически. Описываемый далее способ построения решения получил название метода бегущих волн.

Пусть задана функция $\psi(x)$. График функции $\psi(x - at)$ при фиксированном времени t получается сдвигом графика функции $\psi(x)$ вправо по оси Ox на величину at . Аналогично график функции $\varphi(x + at)$ получается сдвигом графика функции $\varphi(x)$ влево по оси Ox на величину at . Сумма двух графиков, полученных сдвигами, представляет решение уравнения колебаний струны в соответствии с формулой (1). Для реального построения решения приходится ограничиваться отдельными моментами времени.

Чтобы применить метод бегущих волн, необходимо знать начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Напомним, что они получены в разделе 1.4 в виде

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(f + \frac{1}{a} G \right), \quad \psi = \frac{1}{2} \left(f - \frac{1}{a} G \right); \quad G(x) = \int_0^x g(s) ds. \quad (4)$$

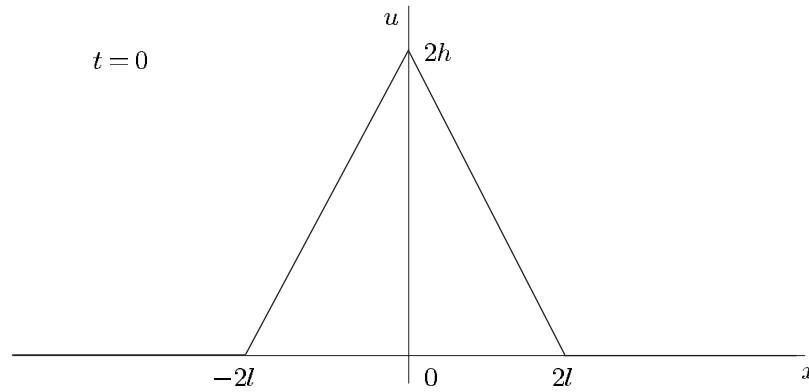


Рис. 1.10.

Эти формулы упрощаются, если одна из заданных функций равна нулю. Так, если $g(x) \equiv 0$, то получаем $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2}f(x)$. Если $f(x) \equiv 0$, то имеем $\varphi(x) = \frac{1}{2a}G(x) = -\psi(x)$.

Объединяя приведенные выше построения, приходим к следующей последовательности действий в методе бегущих волн. Сначала вычисляем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по формулам (4), используя заданные начальные функции $f(x)$ и $g(x)$. Далее фиксируем время t и сдвигаем график функции $\varphi(x)$ влево по оси Ox на величину at , а график функции $\psi(x)$ — вправо по оси Ox на величину at . Таким способом получаем графики функций $\varphi(x + at)$ и $\psi(x - at)$, которые складываем. Результатом является график решения $u(t, x)$ в фиксированный момент t . Ясно, что предложенная конструкция особенно удобна в тех случаях, когда начальные данные задаются графически. Применим метод бегущих волн к решению конкретных примеров.

ПРИМЕР 1. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = f(x); \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

где функция $f(x)$ задана графиком на рис. 1.10.

РЕШЕНИЕ. По формулам (4) находим $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2}f(x)$. Графические построения приводят к решению, которое представлено на рис. 1.10, 1.11, 1.12 для трех моментов времени.

Из рис. 1.10, 1.11, 1.12 следует такой вывод. Начальное возмущение струны (щипок) разделяется на две волны той же длины, но вдвое меньшей амплитуды. Волны расходятся в противоположных направлениях, создавая прямую и обратную волны. После прохождения волны струна возвращается в положение равновесия.

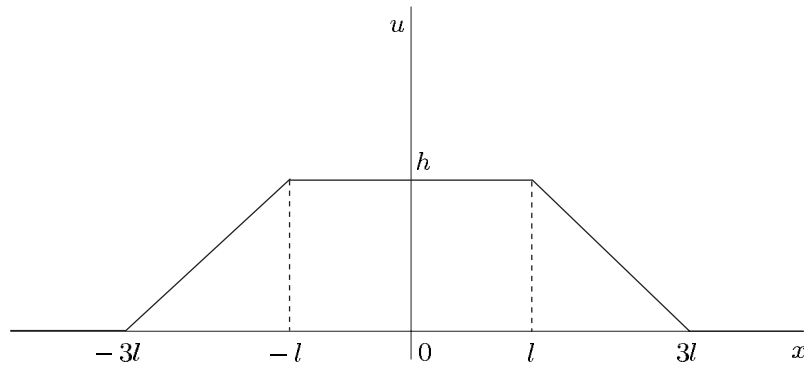


Рис. 1.11.

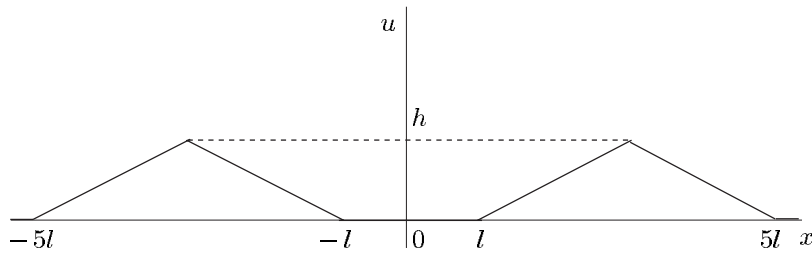


Рис. 1.12.

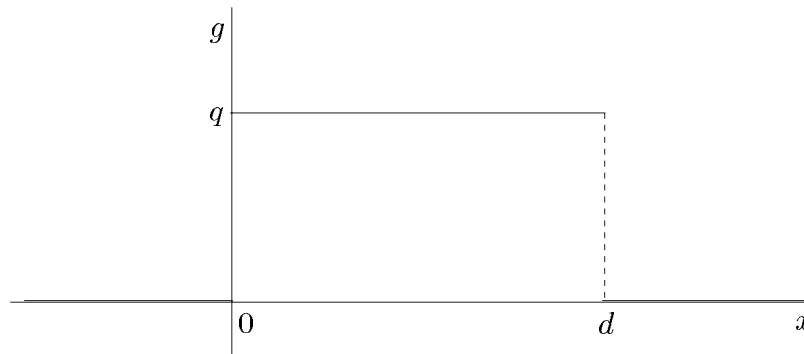


Рис. 1.13.

ПРИМЕР 2. Решить задачу Коши:

$$u_{tt} = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = 0; \quad u_t|_{t=0} = g(x),$$

где функция $g(x)$ задана графиком на рис. 1.13.

РЕШЕНИЕ. На рис. 1.14 представлена первообразная $G(x) = \int_0^x g(s) ds$ заданной функции. Заметим, что функция $g(x)$ имитирует следующую ситуацию: струна покоится, и в момент $t = 0$ по ее участку $[0, d]$ ударяет плоский молоточек.

Графические построения приводят к решению, которое представлено на рис. 1.15 в некоторый момент $t > 0$.

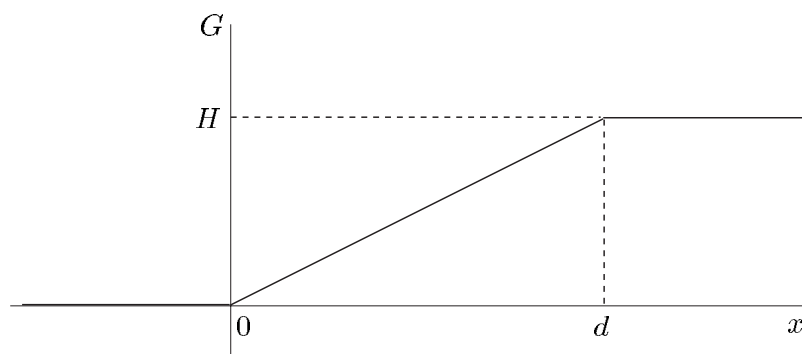


Рис. 1.14.

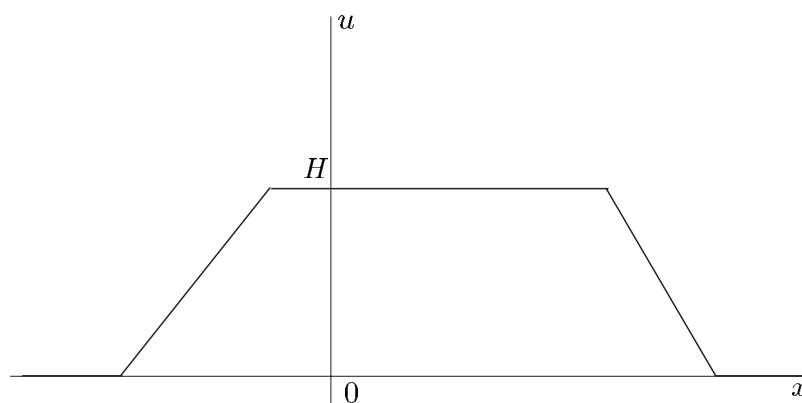


Рис. 1.15.

Струна с течением времени переходит в новое положение, так что качественное воздействие начальной формы и начальной скорости различно. При локальном возмущении формы струна вернется в положение равновесия после прохождения волны. Под воздействием ударной нагрузки струна перейдет в новое положение, т.е. ведет себя по отношению к стороннему наблюдателю как твердое тело (после достаточно продолжительного времени). Все сказанное верно только для бесконечной либо незакрепленной струны, так как закрепленная струна не может перейти в новое положение и будет совершать колебания, которые мы привыкли наблюдать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теория уравнений с частными производными начала создаваться в восемнадцатом столетии практически одновременно с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнение струны вывел английский математик А. Тейлор в 1715 г. Формулу общего решения малых колебаний опубликовал знаменитый французский ученый Ж. Даламбер в 1750 г. Через год Л. Эйлер предложил решение задачи с начальными условиями.

В практике вычислений достаточно получить ответ в виде формулы, и на этом задача считается решенной. С точки зрения математики каждая формула требует исследования. В первую очередь необходимо выяснить, будет ли полученный ответ удовлетворять условиям поставленной задачи. Для задачи Коши вопрос можно сформулировать следующим образом: какие требования следует наложить на функции $f(x)$ и $g(x)$, чтобы формула Даламбера – Эйлера представляла решение задачи Коши? Для ответа достаточно подставить указанную формулу в уравнение струны, для чего, в свою очередь, необходимо вычислить производные u_{tt} , u_{xx} . В результате оказывается, что функция $f(x)$ должна иметь вторую производную, функция $g(x)$ — первую.

Обратимся к примерам 1 и 2. В точках излома и разрыва функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производных, следовательно, построенная по ним функция $u(t, x)$ не может служить решением задачи Коши. Здесь выявлено явное противоречие: с одной стороны, есть формула для решения, которая хорошо согласуется с опытными данными, с другой — эта формула не удовлетворяет волновому уравнению. Указанное противоречие явилось огромной движущей силой в математике и привело к существенному развитию понятия функции. В семнадцатом веке функциями считались только многочлены и их отношения — рациональные функции. В конце семнадцатого века наряду с созданием дифференциального и интегрального исчисления были введены степенные ряды, которые значительно раздвинули границы запаса функций. Даламбер считал этот запас вполне достаточным. Эйлер же предложил дать право на существование любой функции, если она может быть получена «свободным движением руки». В результате в начале девятнадцатого века было выработано понятие функции как отображения одного числового множества в другое (Н.И. Лобачевский).

Однако это определение еще не снимает противоречия с решениями уравнения колебаний струны по формуле Даламбера – Эйлера, ибо там требуется дифференцировать разрывную функцию. Только в двадцатом веке появились обобщенные функции как производные от разрывных функций. Теорию обобщенных функций создал российский математик академик С.Л. Соболев в середине 30-х гг. двадцатого столетия. Благодаря его работам мы

теперь говорим, что функции из примеров 1 и 2 удовлетворяют волновому уравнению как обобщенные функции в смысле Соболева.

1.6. Примеры краевых задач на собственные значения

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений главное внимание уделяется поиску общего решения, зависящего от произвольных постоянных, из которого можно получить бесконечно много частных решений, если фиксировать произвольные постоянные. В приложениях как правило требуется только одно решение дифференциального уравнения. Чтобы выделить это единственное решение из бесконечного числа, привлекаются дополнительные условия, которые делятся на несколько типов. Например, задачей Коши называется система из дифференциального уравнения и дополнительных условий, заданных в начале отрезка. Часто дополнительные условия задаются на обоих концах отрезка, на котором разыскивается функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, и в этом случае задача называется краевой, или граничной.

Иногда в коэффициенты уравнения вводится параметр, значения которого также неизвестны. В этом случае дифференциальное уравнение совместно с граничными условиями называется краевой задачей на собственные значения, или задачей Штурма–Лиувилля. Теория задач на собственные значения создана для линейных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами. Мы ограничимся только примерами уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которые допускают решение в явном виде.

Рассмотрим простейшее уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y''(x) + \lambda y(x) = 0$. Здесь $y(x)$ — неизвестная функция на заданном отрезке $[a, b]$ и λ — числовой параметр, который также предполагается неизвестным. Введенное уравнение дополняется условиями первой краевой задачи $y(a) = 0, y(b) = 0$, или условиями второй краевой задачи $y'(a) = 0, y'(b) = 0$. Указанные условия являются частными случаями более общих краевых условий, которые задаются равенствами:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$$

где коэффициенты α , β , γ , δ считаются заданными. Возможны и другие варианты краевых условий. Например, так называемая периодическая краевая задача имеет вид: $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. Ее решения можно продолжить периодически на всю ось.

В простых случаях метод решения краевых задач аналогичен методу решения задачи Коши. Именно, сначала находим общее решение дифференциального уравнения, а затем подставляем общее решение в краевые условия. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных. Приведем примеры.

ПРИМЕР 1. Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие указанным краевым условиям:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (1)$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что функция $y(x) \equiv 0$ является решением задачи (1), поэтому ищем решения, отличные от тождественного нуля. Как уже отмечалось ранее, λ — числовой параметр, который подлежит определению вместе с функцией $y(x)$. Рассмотрим возникающие здесь варианты.

1) $\lambda = \omega^2 > 0$ (считаем также $\omega > 0$). Дифференциальное уравнение задачи (1) принимает вид $y'' + \omega^2 y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет два корня $k_{1,2} = \pm \omega i$. Общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения можно представить формулой

$$y(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x. \quad (2)$$

Из условия $y(0) = 0$ сразу находим $C_2 = 0$ и $y = C_1 \sin \omega x$. Из условия $y(\pi) = 0$ получаем уравнение $C_1 \sin \omega \pi = 0$. Если считать $C_1 = 0$, то получаем решение $y(x) = 0$, которое не представляет интереса. Поэтому предполагаем, что $\sin \omega \pi = 0$, откуда находим $\omega = \omega_n = n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Каждому значению $\omega_n = n$ соответствует решение $y_n(x) = C_n \sin nx$. Мы пришли к следующему результату. Краевая задача (1) допускает ненулевые решения для счетного числа значений параметра $\lambda_n = n^2$, которые в совокупности называются спектром задачи (1). Каждому значению спектра $\lambda_n = n^2$ соответствует ненулевое решение $y_n(x) = C_n \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$,

которое называется собственной функцией, отвечающей собственному значению λ_n .

2) $\lambda = 0$. Рассматриваемое уравнение принимает вид $y'' = 0$, откуда $y = C_1 + C_2x$. Краевые условия задачи (1) приводят к равенствам: $y(0) = C_1 = 0$, $y(\pi) = C_2\pi = 0$, которые показывают, что задача (1) допускает только нулевое решение.

3) $\lambda = -\omega^2 < 0$. Дифференциальное уравнение задачи (1) принимает вид $y'' - \omega^2 y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\omega$, по которым выписываем общее решение

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}. \quad (3)$$

Подстановка общего решения $y(x)$ в краевые условия задачи (1) приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\omega\pi} + C_2 e^{-\omega\pi} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

У однородной системы ненулевые решения возможны только при условии, что определитель системы равен нулю. Вычисляя определитель системы (4), приходим к уравнению $2 \operatorname{sh} \omega\pi = 0$, откуда $\omega = 0$, что противоречит условию $-\omega^2 < 0$. Следовательно, рассматриваемый вариант задачи (1) не допускает ненулевых решений.

Подведем общий итог. Спектр задачи (1) состоит из собственных чисел $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, которым соответствуют собственные функции $y_n(x) = C_n \sin nx$, где C_n — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 2. Найти ненулевые решения краевой задачи

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(2) = 0. \quad (5)$$

РЕШЕНИЕ. Снова необходимо различать варианты, зависящие от знака параметра λ .

1) $\lambda = \omega^2 > 0$. Используя общее решение (2), вычислим производную

$$y'(x) = C_1 \omega \cos \omega x - C_2 \omega \sin \omega x.$$

Подстановка y и y' в краевые условия задачи (5) приводит к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \sin \omega + C_2 \cos \omega = 0, \\ C_1 \cos 2\omega - C_2 \sin 2\omega = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Так как система (6) однородна, то для поиска ненулевых решений определитель системы необходимо приравнять нулю, что приводит к уравнению

$$\sin \omega \sin 2\omega + \cos \omega \cos 2\omega = 0,$$

откуда $\cos \omega = 0$. Последнее уравнение при условии $\omega > 0$ имеет счетное число решений $\omega = \omega_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Квадраты $\omega_n^2 = \lambda_n$ составляют спектр задачи (5). Если числа $\omega = \frac{\pi}{2} + \pi n$ подставить в первое уравнение системы (6), то получим равенство $C_1 = 0$, из которого вытекает, что в общем решении (2) следует сохранить только второе слагаемое, так что решением задачи (5) являются функции $y_n(x) = C_n \cos \omega_n x$, $\omega_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

2) $\lambda = 0$. Общее решение $y(x) = C_1 + C_2 x$ при подстановке в краевые условия (5) приводит к нулевому решению.

3) $\lambda = -\omega^2 < 0$. Воспользуемся общим решением (3) и вычислим производную

$$y'(x) = C_1 \omega e^{\omega x} - C_2 \omega e^{-\omega x}.$$

Подстановка $y(x)$ из (3) и $y'(x)$ в краевые условия задачи (5) приводит к системе:

$$\begin{cases} C_1 e^{\omega} + C_2 e^{-\omega} = 0, \\ C_1 e^{2\omega} - C_2 e^{-2\omega} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

определитель которой $e^{\omega} + e^{-\omega} = 2 \operatorname{ch} \omega$ не обращается в нуль, и потому система (7) допускает только нулевое решение, порождающее нулевое решение задачи (5).

Подведем итог. Краевая задача (5) имеет спектр, состоящий из счетного числа собственных значений:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Каждому собственному значению λ_n отвечает одна собственная функция с точностью до произвольного множителя:

$$y_n(x) = C_n \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1.7. Колебания ограниченной струны

В задаче Коши для уравнения колебаний струны, изученной ранее, предполагается, что струну можно считать бесконечной. Гораздо чаще приходится иметь дело со струнами конечной длины, и тогда необходимо задавать законы движения концов струны. Например, если струна закреплена на концах и помещена на отрезок $[0, l]$ оси Ox , то задача о свободных колебаниях такой струны имеет вид:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Условия (2) называются начальными, а условия (3) — краевыми, или граничными. В целом система (1)–(3) из пяти уравнений составляет смешанную, или начально-краевую, задачу для уравнения колебаний струны. Для решения указанной системы был разработан специальный метод, который по имени автора называется методом Фурье. Исходя из идеи решения, метод Фурье часто именуют методом разделения переменных. Суть метода состоит в том, что первоначально разыскиваются решения специальной структуры в форме произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $u(t, x) = T(t)X(x)$. Заметим, что $u_{tt} = T''(t)X(x)$ и $u_{xx} = T(t)X''(x)$. Подстановка двух последних равенств в уравнение струны (1) приводит его к виду

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x).$$

Обе части нового уравнения делим на произведение $a^2 T(t)X(x)$ и получаем

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (= -\lambda^2). \quad (4)$$

В левой части равенства (4) стоит функция одной переменной t , а в правой части — функция другой переменной x . В дальнейшем будут часто встречаться подобные соотношения, поэтому выделим следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Тождество $\varphi(t) = \psi(x)$, где t, x — независимые переменные, изменяющиеся в пределах заданных отрезков $[0, \tau]$ и $[0, l]$ соответственно, и где φ и ψ — непрерывные функции своих*

аргументов, возможно только тогда, когда обе функции равны единой константе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем x , например $x = 0$. Получаем: $\varphi(t) = \psi(0) = \text{const}$. Аналогично, полагая $t = 0$, получаем: $\psi(x) = \varphi(0) = \text{const}$, что и утверждалось. \square

Вернемся к уравнению (4). Единая константа там обозначена $-\lambda^2$ и указана в скобках. Введение знака минус объясняется результатами предыдущего раздела 1.6. Соотношения (4) разобьем на два уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (5)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (6)$$

Мы получили важный вывод, который следует запомнить: при разделении переменных вместо одного уравнения с частными производными по двум переменным получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения с единым параметром, который также подлежит определению. При этом требуются решения, отличные от тождественного нуля.

Вспомним о граничных условиях (3). Подставим в них решение предполагаемой структуры $u(t, x) = T(t)X(x)$. В результате получим следующие равенства:

$$u|_{x=0} = T(t)X(x)|_{x=0} = T(t)X(0) = 0, \quad (7)$$

$$u|_{x=l} = T(t)X(x)|_{x=l} = T(t)X(l) = 0. \quad (8)$$

Тождество (7) возможно только при условии $X(0) = 0$, а тождество (8) — только при условии $X(l) = 0$, так как в противном случае следует считать $T(t) \equiv 0$, что приводит к противоречию с постановкой задачи. Мы пришли к следующему заключению: дифференциальное уравнение (5) следует дополнить краевыми условиями $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$, так что в целом получается краевая задача на собственные значения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (9)$$

Образцы подобных задач решались в предыдущем разделе, поэтому будем кратки. Характеристическое уравнение $k^2 + \lambda^2 = 0$

дифференциального уравнения задачи (9) имеет два чисто мнимых корня, и потому общее решение самого дифференциального уравнения имеет вид $X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Используя граничное условие $X(0) = 0$, получаем $C_2 = 0$, так что остается равенство $X(x) = C_1 \sin \lambda x$, которое при подстановке в граничное условие $x(l) = 0$ приводит к уравнению $\sin \lambda l = 0$. Отсюда находим счетное число значений $\lambda_n = \pi n/l$, $n = 1, 2, 3, \dots$, квадраты которых в совокупности составляют спектр задачи (9). Каждому значению λ_n соответствует свое решение $X_n(x) = C_n \sin \pi n x/l$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), зависящее от произвольной постоянной C_n .

Обратимся к уравнению (6). Оно решается аналогично через характеристическое уравнение $k^2 + a^2 \lambda^2 = 0$, откуда $k_{1,2} = \pm i \lambda a$. Общее решение уравнения (6) можно представить формулой $T(t) = A \cos a \lambda t + B \sin a \lambda t$. Значения параметра $\lambda = \pi n/l$ уже получены в результате решения задачи (9). Указанные значения $\lambda = \pi n/l$ следует подставить в функцию $T(t)$, что приводит к счетному числу решений, зависящих от произвольных постоянных A_n и B_n :

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Итак, мы нашли счетное число решений каждого из дифференциальных уравнений (5) и (6). Согласно идее метода разделения переменных строим столько же решений уравнения колебаний струны (1), имеющих форму произведения для $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$u_n(t, x) = T_n(t) X_n(x) = \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Очевидно, что каждая из приведенных функций $u_n(t, x)$ является бесконечно дифференцируемой на замкнутом множестве $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$ для любых значений параметров A_n и B_n . Прямой подстановкой в уравнение колебаний струны (1) убеждаемся, что каждая функция $u_n(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) на том же замкнутом множестве Π , а также краевым условиям (3). Тем самым справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Уравнение колебаний струны допускает счетное число частных решений с разделенными переменными, причем, каждое решение удовлетворяет краевым условиям (3) и является*

бесконечно дифференцируемой функцией на замкнутом множестве $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$.

Заключительная идея метода Фурье состоит в том, чтобы использовать линейность уравнения. Если найдено несколько решений линейного однородного уравнения, то их сумма также является решением того же уравнения. Согласно лемме 2 уравнение колебаний струны допускает счетное число решений, и потому их сумма объявляется решением того же уравнения. Другими словами, ряд вида

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (10)$$

называется общим решением в форме Фурье уравнения свободных колебаний закрепленной на концах струны.

Вычислим еще частную производную функции $u(t, x)$ по переменной t , предполагая, что новый ряд сходится:

$$u_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} \left(-a_n \sin \frac{\pi n a t}{l} + b_n \cos \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Вспомним о начальных условиях (2). Подставляя в них формулы для $u(t, x)$ и $u_t(t, x)$, получаем равенства:

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x), \quad (11)$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} = g(x). \quad (12)$$

Будем считать известными разложения заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0, l]$ по функциям $\sin \frac{\pi n x}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Напомним, что коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ вычисляются по формулам:

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad g_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (13)$$

а сами ряды Фурье указанных функций имеют вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (14)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (15)$$

Ряды (11) и (14) представляют одну и ту же функцию $f(x)$, и потому коэффициенты в этих рядах совпадают, так что $a_n = f_n$. Ряды (12) и (15) также совпадают, что приводит к равенствам $\pi n a b_n / l = g_n$, откуда $b_n = l g_n / (\pi n a)$ ($n = 1, 2, \dots$). Найденные значения a_n , b_n подставляем в ряд (10) и получаем решение всей задачи о колебаниях струны (1)–(3).

Подведем общий итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить задачу (1)–(3) о колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами методом Фурье, следует вычислить коэффициенты Фурье f_n и g_n заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ по формулам (13), определить числа $a_n = f_n$, $b_n = l g_n / (\pi n a)$, и подставить их в общее решение (10).*

Представленное утверждение предлагает способ построения в общем случае обобщенного решения задачи (1)–(3). Получаемый с его помощью ряд необходимо изучать на сходимость и дифференцируемость. Приведем пример.

ПРИМЕР 1. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < 1, & & t > 0, \\ u|_{x=0} &= u|_{x=1} = 0, & u|_{t=0} &= x(x-1), & u_t|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Сравнение с абстрактной постановкой задачи (1)–(3) показывает, что $a = 1$, $l = 1$, $f(x) = x(x-1)$, $g(x) = 0$. Вычисляем коэффициенты Фурье функций f и g по формулам (13):

$$\begin{aligned} f_n &= 2 \int_0^1 x(x-1) \sin \pi n x \, dx = \begin{cases} \frac{-8}{\pi^3 (2k-1)^3}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ g_n &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Решение примера можно представить рядом

$$u(t, x) = \frac{-8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \cos \pi(2k-1)t \sin \pi(2k-1)x. \quad (16)$$

Выясним условия сходимости ряда (16). Он мажорируется сходящимся числовым рядом $\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-3}$. Согласно теореме Вейерштрасса, функциональный ряд (16) сходится равномерно на множестве $\Pi = \{0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$, определяя непрерывную функцию двух переменных. Частные производные u_t и u_x мажорируются сходящимся числовым рядом $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2}$, и потому функции u_t и u_x также непрерывны в Π . Вторые частные производные представляются рядом

$$u_{tt} = u_{xx} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cos \pi(2k-1)t \sin \pi(2k-1)x, \quad (17)$$

который не имеет сходящейся числовой мажоранты в Π . Ряд (17) сходится к разрывной функции. Действительно, полагая $t = 0$ в (17), получаем

$$u_{tt}(0, x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{2k-1}.$$

Используем известное разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, x = 1. \end{cases}$$

Тогда можно записать:

$$u_{tt}(0, x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, x = 1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно видно, что функция $u_{tt}(0, x)$ терпит разрыв на концах отрезка $0 \leq x \leq 1$. Из представления (17) следует, что функция $u_{tt}(t, x)$ периодична по t с периодом 2, и потому она имеет разрывы на концах отрезка $0 \leq x \leq 1$ для всех значений $t = 2m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Приведенные свойства решения (16) сравним с определением классического решения начально-краевой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть на отрезке $[0, l]$ заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$. Функция $u(t, x)$ называется классическим решением смешанной задачи (1)–(3), если она является классическим решением уравнения колебаний струны в области $\Omega = \{t > 0, 0 < x < l\}$, т.е. имеет в Ω непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, а также определена и непрерывна на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$ вместе с частной производной u_t и удовлетворяет начальным и краевым условиям (2)–(3).

Вернемся к примеру 1. Трудно проверить, являются ли функции u_{tt} и u_{xx} , представленные рядом (17), непрерывными в открытой области $\Omega = \{t > 0, 0 < x < l\}$, поэтому ограничимся констатацией того факта, что пример 1 допускает по крайней мере обобщенное решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, однако начальные и граничные условия удовлетворяются в классическом смысле, так как функции $u(t, x)$ и $u_t(t, x)$ непрерывны на замкнутом множестве $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$.

1.8. Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня

1.8.1. Вывод уравнения теплопроводности. Процесс распространения тепла в пространстве может быть описан температурой $u(t, P)$, являющейся функцией времени t и точки $P(x, y, z)$. Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой. Рассматривая введенную функцию $u(t, x, y, z)$ как скалярное поле, можно утверждать, что скорость и направление переноса тепла определяются градиентом $\text{grad } u$ температуры. В линейном приближении (закон Фурье) предполагается, что количество тепла Q , протекающее через малую площадку $d\sigma$ в единицу времени, пропорционально потоку градиента температуры через эту площадку, т.е.

$$Q(d\sigma) \equiv dQ = -k(n \text{ grad } u)d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Здесь k — коэффициент теплопроводности среды, n — нормаль к площадке $d\sigma$, $\partial u / \partial n$ — производная по направлению нормали. В

случае однородной и изотропной среды, который здесь предполагается, коэффициент k является постоянным и выбирается положительным, что определяет знак минус в приведенных соотношениях, так как количество тепла уменьшается в направлении возрастания температуры.

Выделим произвольный объем V , ограниченный поверхностью σ . Для определенности допустим, что поток тепла идет в область V , т.е. нормаль n направлена внутрь области. Согласно сказанному выше, количество тепла, протекающего через поверхность σ , пропорционально потоку градиента температуры и выражается формулой

$$\begin{aligned} Q &= \iint_{\sigma} dQ = -k \iint_{\sigma} n \operatorname{grad} u \, d\sigma = \\ &= k \iiint_V \operatorname{div} \operatorname{grad} u \, dV = k \iiint_V \Delta u \, dV. \end{aligned} \quad (1)$$

В равенствах (1) применена формула Остроградского и введен оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выберем объем V настолько малым, чтобы его можно было принять за материальную точку. Формула (1) по теореме о среднем в интегральном исчислении примет вид

$$dQ = k \Delta u \, dV. \quad (2)$$

Тепло, полученное по этой формуле, идет на повышение температуры объема dV . Из физики известно, что количество тепла dQ , отнесенное к единице времени и требующееся для увеличения температуры объема dV на величину du , пропорционально массе тела и скорости увеличения температуры, т.е.

$$dQ = cm \frac{\partial u}{\partial t} = c\rho \, dV \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3)$$

где c — коэффициент теплоемкости тела. Сравнивая формулы (2) и (3), приходим к соотношению, которое называется уравнением

теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}. \quad (4)$$

1.8.2. Уравнение теплопроводности для стержня. Если длина тела V доминирует над другими его размерами, то тело называют стержнем и при математической идеализации совмещают с отрезком оси Ox . Уравнение (4) в этом специальном случае принимает вид $u_t = a^2 u_{xx}$ и относится к параболическому типу. Напомним, что для уравнения колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ нам удалось получить общее решение. Для внешне схожего с ним уравнения теплопроводности в стержне получить общее решение через элементарные функции не удастся. В подобных случаях ограничиваются поиском специального решения, зависящего от параметра. Убедимся, что уравнению теплопроводности в стержне удовлетворяет следующая довольно специфическая функция, называемая фундаментальным решением одномерного уравнения теплопроводности для $t > t_0$:

$$G(t - t_0, x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}. \quad (5)$$

Здесь ξ и t_0 — параметры. Вычислим частные производные:

$$\begin{aligned} G_x &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x - \xi}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}, \\ G_{xx} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{-1}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}, \\ G_t &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{-a^2}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что $G_t = a^2 G_{xx}$, что и утверждалось. Подчеркнем, что в соотношении (5) величины a , t_0 и ξ считаются константами по отношению к переменным t, x . Докажем теперь принцип суперпозиции в интегральной форме.

ТЕОРЕМА 1 (принцип суперпозиции в интегральной форме). Пусть задано однородное уравнение $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ для $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$, и пусть известно его решение $G(t, x, \xi)$, зависящее от параметра $\xi \in \mathbb{R}$, так что для каждого значения $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо

тождество $G_t - a^2 G_{xx} = 0$. Считая известной и непрерывной функцию $f(\xi)$, составим несобственный интеграл

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (6)$$

и допустим, что он сходится абсолютно и равномерно по t, x на каждом замкнутом множестве $t \geq t_1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ вместе с частными производными u_t , u_x , u_{xx} .

Тогда функция $u(t, x)$, представленная интегралом (6), также является решением того же уравнения, т.е. выполняется тождество $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ для $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как интеграл (6) сходится абсолютно и равномерно вместе с аналогичными интегралами для частных производных u_t , u_x , u_{xx} , то указанные производные можно вычислять под знаком интеграла. Другими словами, справедливо равенство

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_t - a^2 G_{xx}) f(\xi) d\xi \equiv 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad (7)$$

так как по условию $G_t - a^2 G_{xx} \equiv 0$. Тождество (7) доказывает теорему 1. \square

Применим теорему (1) к функции $G(t, x, \xi)$, представленной формулой (5). Более точно, введем интеграл Пуассона

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} f(\xi) d\xi, \quad (8)$$

считая функцию $f(\xi)$ непрерывной и ограниченной на оси $\xi \in R$: $|f(\xi)| \leq M$. Согласно теореме 1 достаточно показать, что интеграл (8) сходится абсолютно и равномерно вместе с частными производными u_t , u_x , u_{xx} . Укажем его мажоранту, для чего введем замену для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = y, \quad \xi = x + 2a\sqrt{t}y, \quad d\xi = 2a\sqrt{t}dy, \quad y \in (-\infty; \infty).$$

Интеграл Пуассона (8) примет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x + 2a\sqrt{t}y) dy. \quad (9)$$

Благодаря условию $|f(\xi)| \leq M$ из (9) получаем:

$$|u(t, x)| \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Приведенная оценка показывает, что интеграл Пуассона (8) мажорируется сходящимся интегралом, не содержащим параметров t и x . Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что интеграл (9) представляет непрерывную функцию в замкнутой области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Полагая $t = 0$ в (9), получаем равенство

$$u(0, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \cdot f(x) = f(x).$$

Аналогично можно показать, что интегралы для частных производных u_t , u_x , u_{xx} сходятся абсолютно и равномерно в области $t \geq t_1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ для любого $t_1 > 0$.

Мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на оси \mathbb{R} . Тогда интеграл Пуассона (8) представляет непрерывную функцию $u(t, x)$ в области $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, и эта функция удовлетворяет уравнению $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ в области $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, при $t = 0$ справедливо равенство $u(0, x) = f(x)$. Другими словами, функция $u(t, x)$ является классическим решением следующей задачи Коши:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad u(0, x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1.9. Распространение тепла в конечном стержне

Если длина стержня невелика, то влиянием его концов на процесс распространения тепла нельзя пренебречь, и тогда необходимо задавать законы изменения температуры на концах стержня. Поместим стержень на отрезок $[0, l]$ оси Ox , и пусть на его концах

поддерживается нулевая температура. Соответствующая математическая постановка задачи имеет вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (t > 0, \quad 0 < x < l), \quad u|_{x=0}, \quad u|_{x=l} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (2)$$

К выписанной системе уравнений применим метод Фурье. Ищем решения в форме произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $u(t, x) = T(t)X(x)$. Подставив это произведение в уравнение теплопроводности (1), получим равенство $T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$, которое после деления на $a^2 T(t)X(x)$ примет вид

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (= -\lambda^2). \quad (3)$$

Левая часть равенства (3) зависит только от переменной t , правая — только от x . Переменные независимы, поэтому совпадать две функции различных аргументов могут лишь в случае, если они не зависят от своих переменных, т.е. являются постоянными. Эта единая постоянная обозначена $-\lambda^2$ и указана в скобках.

Из соотношений (3) вытекают два уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (4)$$

Каждое из них — это обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для первого из уравнений (4) характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + \lambda^2 = 0$, откуда $k = \pm i\lambda$, так что общее решение

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \quad (5)$$

Попытаемся удовлетворить граничным условиям $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, или $T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0$. Считая функцию $T(t)$ отличной от тождественного нуля, приходим к системе уравнений $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, или, с учетом равенства (5),

$$C_1 = 0, \quad C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0,$$

так что окончательно $C_2 \sin \lambda l = 0$. Если считать $C_2 = 0$, то получим $X(x) \equiv 0$, что нас не удовлетворяет, поэтому полагаем $\sin \lambda l = 0$ и получаем счетное число равенств $\lambda l = \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$)

и счетное число значений параметра $\lambda_n = \pi n/l$. Каждому значению λ_n соответствует решение $X_n(x) = \sin \pi n x/l$ ($n = 1, 2, \dots$). Заметим, что при выборе положительного знака при параметре λ^2 в соотношениях (3) мы получили бы единственное решение $X(x) \equiv 0$.

Итак, первое из уравнений (4) решено. Перейдем ко второму. Его характеристическое уравнение при найденных значениях $\lambda = \lambda_n$ имеет вид $k + a^2 \lambda_n^2 = 0$, откуда $k = -a^2 \lambda_n^2$, так что общее решение находим по формуле $T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$.

Подведем промежуточный итог. Разделив уравнение теплопроводности при первом краевом условии (1) на два обыкновенных дифференциальных уравнения, мы получили решение каждого из двух новых уравнений, и поэтому решение исходного уравнения теплопроводности находим как произведение

$$u_n(t, x) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, n = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Нетрудно проверить непосредственно, что каждая из функций (6) действительно является классическим решением задачи (1), что приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача (1) допускает счетное число частных решений (6) с разделенными переменными, причем каждое решение зависит от своей произвольной постоянной C_n ($n = 1, 2, \dots$).*

Напомним, что ведущая идея метода Фурье заключается в том, чтобы искать решение смешанной задачи (1)–(2) в форме бесконечной суммы, т.е. в виде функционального ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (7)$$

Если ряд (7) сходится как числовой для каждого значения $x \in [0, l]$ и каждого $t \geq 0$, то он называется общим решением в форме Фурье краевой задачи (1). Для решения смешанной задачи (1)–(2) следует еще удовлетворить начальному условию (2), для чего подставим общее решение (7) в соотношение (2). Получим равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (8)$$

которое можно рассматривать как разложение заданной функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, l]$, используя известные формулы для коэффициентов

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Подведем общий итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить первую начально-краевую задачу (1)–(2) для уравнения теплопроводности в стержне методом Фурье, следует вычислить коэффициенты Фурье заданной функции $f(x)$ по формулам (9) и подставить их в общее решение (7).*

Напомним, что полученный в результате применения предложения 1 функциональный ряд необходимо проанализировать на сходимость и дифференцируемость. Приведем примеры.

ПРИМЕР 1. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = 16u_{xx} \quad (t > 0, \quad 0 < x < 4), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=4} = 0, \quad (10)$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} x^2/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4. \end{cases} \quad (11)$$

РЕШЕНИЕ. Сравнение с задачей (1)–(2) показывает, что функция $f(x)$ из начального условия (2) представлена формулами (11). Чтобы воспользоваться формулами (9) для вычисления коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$, следует интеграл по отрезку $[0, 4]$ разбить на сумму двух интегралов по отрезкам $[0, 2]$ и $[2, 4]$ соответственно:

$$C_n = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{x^2}{2} \sin \frac{\pi n x}{4} dx + \int_2^4 (4 - x) \sin \frac{\pi n x}{4} dx \right).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2}{2} \sin \frac{\pi n x}{4} dx &= -2 \left(\frac{4}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{2} + \\ &+ 2 \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{2} + \left(\frac{4}{\pi n} \right)^3 \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right), \\ \int_2^4 (4-x) \sin \frac{\pi n x}{4} dx &= 2 \left(\frac{4}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{2} + \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}$$

И тогда

$$C_n = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi n} \right)^3 \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Подставляя вычисленные коэффициенты в общее решение (7), получаем ответ задачи (10)–(11):

$$u(t, x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(3 \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - 1 \right) \right) e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{4}. \quad (13)$$

Ряд (13) мажорируется сходящимся числовым рядом $c \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, где c — некоторая постоянная, и потому функциональный ряд (13) сходится равномерно в замкнутой области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, определяя непрерывную функцию двух переменных. Если $t > 0$, то члены ряда (13), а также члены рядов, полученных из него дифференцированием по t и x , приобретают быстро убывающие множители $e^{-\pi^2 n^2 t}$, в результате чего ряд (13) определяет бесконечно дифференцируемую функцию двух переменных. При $t = 0$ из (13) получается ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \pi n x / 4$, который совпадает с функцией (11), так как является рядом Фурье этой функции.

Таким образом, ряд (13) представляет бесконечно дифференцируемую функцию в открытой области $t > 0$, $0 < x < l$, и эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности (10). В замкнутой области $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$ ряд (13) определяет непрерывную функцию, которая удовлетворяет однородным краевым условиям (10) и начальному условию (11). Изложенное выше означает,

что функция $u(t, x)$, представленная рядом (13), является классическим решением задачи (10)–(11). Подчеркнем следующий факт. Если $t > 0$, то ряд (13) сходится очень быстро, и для многих задач можно ограничиться всего двумя его первыми членами, так что

$$u(t, x) \approx \frac{8}{\pi^2} \left(\left(3 - \frac{4}{\pi} \right) e^{-\pi^2 t} \sin \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{\pi} e^{-4\pi^2 t} \sin \frac{\pi x}{2} \right), \quad t > 0.$$

Предложение 1 показывает, что решение смешанной краевой задачи для конечного стержня получается в форме сложного математического образования, каким является функциональный ряд (7).

В теории необходимо в первую очередь изучить сходимость полученного ряда, что приводит к довольно громоздкому обоснованию. На практике часто пользуются формулами, выходящими за границы условий их применимости. Это допустимо, но в предположении, что результаты расчета проверяются путем согласования с опытными данными. Напомним в этой связи, что вся математическая модель является идеализацией физического процесса и требует экспериментальной проверки.

ПРИМЕР 2. В качестве второго примера рассмотрим задачу об остывании равномерно нагретого до температуры $u_0 > 0$ стержня длины l при нулевой температуре на краях. Речь идет о следующей математической задаче:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 = \text{const.}$$

РЕШЕНИЕ. Сравнение с постановкой задачи (1)–(2) показывает, что начальная функция $f(x) \equiv u_0$. Разложение этой функции в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, l]$ хорошо известно из теории рядов Фурье:

$$u_0 = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

Решение всего примера представимо рядом

$$u(t, x) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l},$$

который при $t = 0$ сходится условно. Однако для приложений важны только большие значения времени t , и тогда вполне достаточно сохранить всего одно слагаемое. В таком случае говорят, что

наступил регулярный режим, который определяется формулой

$$u(t, x) \approx \frac{4u_0}{\pi} e^{-a^2 \pi^2 l^{-2} t} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В восемнадцатом и девятнадцатом веках паровая машина стала энергетической основой машинного производства. Теоретически исследовать работу паровых машин, найти способы повышения их коэффициента полезного действия — такова была одна из главных задач науки. Требования, предъявленные в связи с этим к математике, нашли свое выражение в условиях конкурса, объявленного в 1811 г. Парижской академией наук: создать математическую теорию законов распределения тепла и сравнить результаты этой теории с данными опытов. Победителем конкурса оказался будущий академик Ж.-Б. Фурье (1768–1830).

Подобно многим ученым — его современникам, Фурье был выходцем из небогатой семьи, окончил военную школу, преподавал в ней. Основные научные заслуги его связаны с решением задачи распределения тепла. Распространение тепла, как и света, Фурье представлял в виде потока элементарных частиц, свободно проникающих через среду. На этой основе он вывел уравнение теплопроводности и для его решения разработал метод разделения переменных, известный теперь как метод Фурье. Он систематически применял разложение функций в тригонометрические ряды, которые, хотя и были известны ранее, получили название рядов Фурье.

Волновое уравнение и уравнение теплопроводности описывают нестационарные процессы, соответствующие переходным режимам. Во многих задачах установившиеся режимы представляют гораздо больший интерес, поэтому соответствующие им задачи для уравнения Лапласа встречаются в приложениях много чаще.

Созданная к настоящему времени теория уравнений с частными производными чрезвычайно обширна. Тем не менее она почти целиком относится к линейным уравнениям. Развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными — задача будущего.

1.10. Колебания прямоугольной мембраны

При решении многих технических задач (строительство зданий, проектирование приборов) часто необходимо знать поведение однородных плоских изделий, которые с определенной долей приближения можно рассматривать как мембраны. Говоря в дальнейшем о мембране, будем считать, что задана упругая свободно изгибающаяся натянутая пленка. Пусть в состоянии покоя мембрана занимает некоторую область D в плоскости xOy , а затем, будучи выведена из состояния покоя, начинает колебаться так, что все ее точки двигаются перпендикулярно плоскости xOy (поперечные колебания мембраны).

Отклонения точек мембраны от плоскости xOy будем обозначать через u . Величина отклонения зависит от точки (x, y) мембраны и от времени t , функция $u(t, x, y)$ и является искомой. При фиксированных x, y эта функция дает закон колебания точки (x, y) мембраны; при этом частные производные $\partial u / \partial t$ и $\partial^2 u / \partial t^2$ определяют соответственно скорость и ускорение движущейся точки. Если зафиксировать t , то поверхность $u = u(t, x, y)$ представляет форму мембраны в момент времени t , причем с изменением t эта форма, очевидно, будет изменяться.

Действуя по аналогии с выводом уравнения колебаний натянутой струны, можно показать, что при описанных выше условиях свободные колебания мембраны описываются двумерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in D,$$

которое в компактной записи имеет вид:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (1)$$

Представленное уравнение допускает бесконечно много решений. Чтобы выделить единственное решение из бесконечного семейства, требуются дополнительные условия. Рассмотрим простейший вариант, предполагая край мембраны закрепленным, что соответствует краевому условию

$$u|_S = 0, \quad (2)$$

где S — граница области D . Кроме того, считаем, что точкам мембраны приданы начальные отклонения и начальные скорости. Это значит, что заданы функции

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad u_t|_{t=0} = g(x, y), \quad (3)$$

определенные в области D . Система уравнений (1)–(3) называется начально-краевой, или смешанной, задачей для уравнения колебаний мембраны.

Для решения задачи (1)–(3) применяются различные способы, зависящие от геометрической формы мембраны. Рассмотрим подробно случай, когда мембрана в состоянии покоя имеет форму прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = m$. Задача о колебаниях такой мембраны в подробной записи имеет вид:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in D, \quad (4)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=m} = 0, \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad u_t|_{t=0} = g(x, y). \quad (6)$$

Поставленную задачу будем решать методом разделения переменных. Так как различных аргументов насчитывается три, то ищем решение в форме произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента:

$$u(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y). \quad (7)$$

Сначала займемся краевыми условиями. Из первого условия (5) следует, что $T(t)X(0)Y(y) = 0$. Так как нас интересуют решения, отличные от тождественного нуля, то необходимо $X(0) = 0$. Аналогично получаются остальные условия, налагаемые на функции $X(x)$ и $Y(y)$. Выписав их все вместе, получим:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0. \quad (8)$$

Перейдем к дифференциальному уравнению. Очевидны равенства, в которых для сокращения опущены аргументы:

$$u_{tt} = T''XY, \quad u_{xx} = TX''Y, \quad u_{yy} = TXY''.$$

Подставляя выражения для выписанных производных в уравнение (4), находим

$$T''XY = a^2TX''Y + a^2TXY'',$$

или после деления на a^2TXY :

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (= -\mu^2). \quad (9)$$

Левая часть равенства (9) зависит только от переменной t , а правая — от независимых переменных x и y . Нам известно, что подобные равенства от различных аргументов возможны лишь в том случае, если каждая из частей равенства — это единая постоянная, которая обозначена $-\mu^2$ и указана в скобках в (9). Из соотношений (9) находим два новых уравнения:

$$T''(t) + a^2\mu^2T(t) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2. \quad (11)$$

В левой части уравнения (11) стоят дроби, каждая из которых зависит только от своей переменной, и потому каждая дробь есть величина постоянная, т.е.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\nu^2. \quad (12)$$

Постоянные $-\lambda^2$ и $-\nu^2$ выбраны отрицательными, так как в противном случае функции $X(x)$ и $Y(y)$ не могли бы удовлетворять краевым условиям (8). В соотношениях (12) освободимся от знаменателей и к полученным уравнениям припишем соответствующие краевые условия (8). В результате получаем две краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (13)$$

$$Y''(y) + \nu^2Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0. \quad (14)$$

Согласно результатам раздела 1.6 каждая из задач (13)–(14) допускает счетное число решений, которые имеют вид:

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi kx}{l}, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{l} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$Y_n(y) = \sin \frac{\pi ny}{m}, \quad \nu_n = \frac{\pi n}{m} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из совместного рассмотрения уравнения (11) и соотношений (12) вытекает, что $\mu^2 = \lambda^2 + \nu^2$. Так как для значений λ найдена последовательность $\lambda_k = \pi k/l$, а для значений ν — новая последовательность $\nu_n = \pi n/m$, то для чисел μ_{kn}^2 получаем двойную последовательность

$$\mu_{kn}^2 = \lambda_k^2 + \nu_n^2 = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{m}\right)^2 \quad (k, n = 1, 2, 3 \dots). \quad (15)$$

Для выписанных чисел μ_{kn}^2 , и только для них, следует решать обыкновенное дифференциальное уравнение (10). Другими словами, вместо одного уравнения (10) пишем счетное число уравнений

$$T''(t) + a^2 \mu_{kn}^2 T(t) = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3 \dots),$$

которые представим в несколько преобразованном виде:

$$T''(t) + \omega_{kn}^2 T(t) = 0, \quad \omega_{kn}^2 = a^2 \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right),$$

откуда получаем

$$T_{kn}(t) = a_{kn} \cos \omega_{kn} t + b_{kn} \sin \omega_{kn} t \quad (k, n = 1, 2, 3 \dots).$$

Введенные выше числа ω_{kn} называются собственными частотами колебаний мембраны. Подведем промежуточный итог. Преобразовав уравнение колебаний мембраны в объединение трех обыкновенных дифференциальных уравнений, мы нашли счетное число решений каждого из этих трех уравнений в форме функций $X_k(x)$, $Y_n(y)$ и $T_{kn}(t)$. Чтобы получить решения уравнения мембраны, согласно представлению (7) следует составить тройные произведения указанных функций, что приводит к двойной последовательности

$$u_{kn}(t, x, y) = (a_{kn} \cos \omega_{kn} t + b_{kn} \sin \omega_{kn} t) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m}, \quad (16)$$

где $k, n = 1, 2, \dots$. Нетрудно проверить прямым вычислением, что каждая из функций u_{kn} действительно является решением уравнения колебаний прямоугольной мембраны, т.е. справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение колебаний прямоугольной мембраны (4) допускает счетное число частных решений (16), которые удовлетворяют краевым условиям (5).*

Итак, мы получили бесконечно много частных решений уравнения (4). Следуя идее метода суперпозиции, сумму всех этих решений, т.е. двойной ряд

$$u(t, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{kn} \cos \omega_{kn} t + b_{kn} \sin \omega_{kn} t) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m}, \quad (17)$$

назовем общим решением в форме Фурье уравнения (4) при краевых условиях (5), предполагая, что ряд (17) сходится как числовой для каждого $t \geq 0$, $x \in [0, l]$ и $y \in [0, m]$.

Убедимся, что из общего решения можно получить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Подставив в общее решение (17) значение $t = 0$ и приравняв результат функции f , согласно начальному условию (6), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m} = f(x, y).$$

Запишем параллельно разложение заданной функции $f(x, y)$ двух переменных в двойной ряд Фурье по синусам в прямоугольнике $[0, l] \times [0, m]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn} \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m} = f(x, y).$$

Из сравнения двух последних равенств следует, что $a_{kn} = f_{kn}$. Напомним формулы для вычисления коэффициентов двойного ряда Фурье по синусам:

$$f_{kn} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m} dx dy. \quad (18)$$

Вернемся к общему решению (17) и вычислим его частную производную по t , предполагая, что допустимо почленное дифференцирование ряда. Получаем

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-a_{kn} \omega_{kn} \sin \omega_{kn} t + b_{kn} \omega_{kn} \cos \omega_{kn} t) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m}.$$

В приведенном выражении для u_t полагаем $t = 0$ и результат приравниваем функции $g(x, y)$ согласно второму начальному условию (6):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} \omega_{kn} \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m} = g(x, y).$$

Отсюда по аналогии с формулами (18) получаем, что $b_{kn} \omega_{kn} = g_{kn}$, где

$$g_{kn} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m g(x, y) \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n y}{m} dx dy. \quad (19)$$

Подведем общий итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы методом Фурье решить первую начально-краевую задачу (4)–(6) для уравнения колебаний мембраны, следует вычислить коэффициенты Фурье заданных функций f и g по формулам (18) и (19), найти коэффициенты $a_{kn} = f_{kn}$ и $b_{kn} = g_{kn}/\omega_{kn}$ и подставить их в общее решение (17).*

Как обычно, полученный двойной ряд необходимо изучить на сходимость и дифференцируемость.

ПРИМЕР 1. Найти колебания квадратной мембраны с размерами $l = m = 1$, если всем точкам ее приданы одинаковые начальные скорости v_0 .

РЕШЕНИЕ. Начальные условия при указанных предположениях имеют вид: $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = v_0$. Отсюда следует, что все коэффициенты $a_{kn} = 0$. Коэффициенты g_{kn} найдем по формуле (19), полагая в ней

$$g(x, y) = v_0, \quad l = m = 1, \quad \omega_{kn} = \pi a \sqrt{k^2 + n^2}.$$

Тогда

$$b_{kn} = \frac{4v_0}{\pi a \sqrt{k^2 + n^2}} \int_0^1 \int_0^1 \sin \pi k x \sin \pi n y dx dy.$$

Двойной интеграл очевидным образом разбивается на произведение двух определенных интегралов, каждый из которых легко вычисляется. Получаем:

$$\begin{aligned} b_{kn} &= \frac{4v_0}{\pi^3 a k n \sqrt{k^2 + n^2}} \cos \pi k x \Big|_0^1 \cos \pi n y \Big|_0^1 = \\ &= \frac{4v_0}{\pi^3 a k n \sqrt{k^2 + n^2}} (\cos k\pi - 1)(\cos n\pi - 1). \end{aligned}$$

Если хотя бы одно из чисел k или n четно, то $b_{kn} = 0$, так как тогда по крайней мере одна из скобок равна нулю. Поэтому считаем, что $k = 2i - 1$ и $n = 2j - 1$ — это нечетные числа. При этом

$$b_{2i-1, 2j-1} = \frac{16v_0}{\pi^3 a (2i-1)(2j-1) \sqrt{(2i-1)^2 + (2j-1)^2}} \quad (i, j \in \mathbb{N}),$$

так что решение примера имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{2i-1, 2j-1} \times \\ &\times \sin(t\pi a \sqrt{(2i-1)^2 + (2j-1)^2}) \sin(2i-1)\pi x \sin(2j-1)\pi y. \end{aligned}$$

Представленный двойной ряд для функции $u(t, x, y)$ мажорируется сходящимся числовым рядом

$$c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{ij \sqrt{i^2 + j^2}}, \quad c = \text{const},$$

и потому функция $u(t, x, y)$ непрерывна на замкнутом множестве $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$. Однако ряды первых частных производных уже не имеют сходящихся числовых мажорант, определяя в общем разрывные функции u_t , u_x , u_y . Подобное поведение производных естественно, так как при постановке задачи не были учтены условия согласования входных данных на границе квадрата. В частности, предполагалось, что всем точкам квадрата приданы начальные скорости $v_0 \neq 0$. Напомним, что края мембраны закреплены, и потому начальные скорости для точек на краю квадрата обязаны равняться нулю, что приводит к противоречивому равенству $v_0 = 0$. Математическим выражением указанного противоречия являются разрывы первых частных производных решения, что отмечено выше.

ГЛАВА 2

Уравнения в полярной системе координат

Распределение тепла в теле называется стационарным, если температура в каждой точке тела не зависит от времени t . В этом случае производная $u_t = 0$, и уравнение теплопроводности $u_t = \Delta u$ переходит в уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. В последнее уравнение не входит время, поэтому начальные условия не задаются. Если на границе σ тела V поддерживается заданная температура f , то внутри тела установится определенная температура. Соответствующая математическая задача называется задачей Дирихле, или первой краевой, и имеет вид: $\Delta u = 0$; $u|_{\sigma} = f$. Такая задача хорошо изучена, разработаны различные методы ее решения. Она имеет большое практическое значение. Особенно важны те случаи, когда решение удастся найти в замкнутой форме.

Если на поверхности тела температура неизвестна, но задан тепловой поток в каждой точке поверхности, который пропорционален производной по нормали, то получается вторая краевая задача, или задача Неймана: $\Delta u = 0$, $\partial u / \partial n|_{\sigma} = g$.

Далее приводятся решения наиболее типичных задач, связанных с оператором Лапласа в круге или в кольце.

2.1. Уравнение Лапласа в кольце

В приложениях чаще других встречается уравнение Лапласа на плоскости:

$$\Delta u = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Пусть задана кольцевая область K , ограниченная двумя окружностями радиусов R_1 и R_2 с общим центром в начале координат. Для определенности считаем $R_1 < R_2$. Поставим задачу: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую внутри кольца K уравнению Лапласа (1). Для решения задачи перейдем к полярной системе координат: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Кольцо K в новой системе

координат описывается простыми соотношениями: $R_1 < r < R_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Оператор Лапласа также необходимо преобразовать к новым переменным. Соответствующие вычисления проводились в курсе математического анализа, поэтому просто напомним результат: уравнение $\Delta u = 0$ в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2)$$

Применим метод разделения переменных. Это значит, что ищем решение уравнения (2) в форме произведения $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, предполагая, что $R_1 < r < R_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Подставив функцию $u = R\Phi$ в уравнение (2), получим

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Обе части этого уравнения разделим на выражение $R(r)\Phi(\varphi)/r^2$ и результат перепишем в таком виде:

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \quad (= \lambda^2). \quad (3)$$

Левая часть уравнения (3) зависит только от переменной r , а правая часть — только от переменной φ , следовательно, обе части равны постоянному числу, обозначенному λ^2 и указанному в (3) в скобках. Из соотношений (3) получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения, которые запишем в несколько преобразованном виде:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi); \quad (4)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda^2 R(r) = 0 \quad (\lambda \geq 0). \quad (5)$$

В задаче (4) дополнительные условия выражают тот факт, что значения функции $\Phi(\varphi)$ повторяются через каждое 2π . Другими словами, ищутся периодические решения. Задачу (4) решаем по известной схеме. Сначала считаем параметр λ положительным: $\lambda > 0$. Из характеристического уравнения $k^2 + \lambda^2 = 0$ находим корни $k = \pm i\lambda$, по которым строим общее решение $\Phi(\varphi) = C_1 \cos \lambda\varphi + C_2 \sin \lambda\varphi$. Подставив его в краевые условия, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1

и C_2 :

$$\begin{cases} C_1(\cos 2\pi\lambda - 1) + C_2 \sin 2\pi\lambda = 0, \\ -C_1 \sin 2\pi\lambda + C_2(\cos 2\pi\lambda - 1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Так как система однородна, то для существования ненулевого решения необходимо потребовать, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} \cos 2\pi\lambda - 1 & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение $\cos 2\pi\lambda = 1$, имеющее счетное число решений $\lambda_n = n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Чтобы вычислить постоянные C_1 и C_2 , найденные значения $\lambda_n = n$ подставляем в систему (6) и получаем тождества $0 = 0$, которые означают, что в качестве решений системы (6) подходят любые C_1 и C_2 . Следует подчеркнуть, что эти постоянные могут меняться вместе с параметром $\lambda_n = n$, и потому в дальнейшем решения задачи (4) будем писать в виде

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Случай $\lambda = 0$ требует отдельного изучения. Задача (4) принимает вид:

$$\Phi''(\varphi) = 0; \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi); \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi).$$

Общее решение уравнения $\Phi'' = 0$ имеет вид $\Phi(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$. Чтобы удовлетворить условиям периодичности, необходимо считать $B_0 = 0$. В качестве решения остается константа $\Phi_0(\varphi) = A_0$. Полученный результат будет часто использоваться, поэтому выделим его в отдельное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Периодическая краевая задача (4) имеет счетное число собственных значений $\lambda_n^2 = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и счетное число собственных функций:*

$$\Phi_0(\varphi) = A_0; \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Перейдем к решению задачи (5). Это дифференциальное уравнение Эйлера, так как в каждом слагаемом порядок производной совпадает со степенью множителя r . Решение уравнения Эйлера для $\lambda > 0$ следует искать в виде $R(r) = r^\alpha$, что после подстановки

в уравнение и сокращения на общий множитель r^α приводит к алгебраическому уравнению, которое легко решается:

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda^2 = 0, \quad \alpha^2 - \lambda^2 = 0, \quad \alpha = \pm \lambda.$$

Отсюда получаем частные решения уравнения Эйлера r^λ и $r^{-\lambda}$, а также общее решение $R(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$). Снова необходимо выделить случай $\lambda = 0$, когда уравнение Эйлера принимает вид $r^2 R'' + rR' = 0$. Замена $R' = z$ приводит к уравнению первого порядка, которое решается методом разделения переменных:

$$rz' + z = 0, \quad r \frac{dz}{dr} + z = 0, \quad \frac{dz}{z} + \frac{dr}{r} = 0, \quad \ln |z| + \ln r = \ln |C|.$$

Отсюда $zr = C$, так что $R' = z = C/r$. Общее решение имеет вид $R(r) = C \ln r + D$.

Уравнение Эйлера также будет часто встречаться, поэтому выделим полученный результат.

ТЕОРЕМА 2. *Общее решение уравнения Эйлера (5) имеет вид:*

$$\begin{aligned} R(r) &= C \ln r + D & (\lambda = 0), \\ R(r) &= Cr^\lambda + Dr^{-\lambda} & (\lambda > 0). \end{aligned}$$

Напомним, что уравнения (4) и (5) должны решаться при одних и тех же значениях λ . Так как решения периодической задачи (4) получены только для $\lambda = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то решения задачи (5) также следует использовать только для указанных значений λ , что приводит к счетной системе функций:

$$\begin{aligned} R_0(r) &= C_0 \ln r + D_0 & (n = 0), \\ R_n(r) &= C_n r^n + D_n r^{-n} & (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \tag{8}$$

Решения задач (4) и (5), представленные формулами (7) и (8), запишем парами для каждого номера $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad R_0(r) &= C_0 \ln r + D_0, & \Phi_0(\varphi) &= A_0; \\ n > 0 : \quad R_n(r) &= C_n r^n + D_n r^{-n}, & \Phi_n(\varphi) &= A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить прямым вычислением, что попарные произведения выписанных функций являются частными решениями

уравнения Лапласа в кольце. Эти произведения для удобства последующих преобразований будем писать в таком виде:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & u_0(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r; \\ n > 0 : \quad & u_n(r, \varphi) = (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно принципу суперпозиции сумма всех частных решений (9) называется общим решением уравнения Лапласа в кольце при условии сходимости полученного ряда

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi]. \quad (10)$$

Далее мы увидим, что с помощью этой формулы можно строить решения краевых задач для уравнения Лапласа в кольце.

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (10) необходимо решать дополнительно в каждом конкретном случае. Напомним также, что сходимость ряда к непрерывной функции еще не гарантирует ее дифференцируемость, что необходимо для подстановки в уравнение Лапласа. Поэтому ряд (10) представляет собой обобщенное решение задачи. Рассуждения о сходимости отпадают, если ограничиться конечными суммами частных решений (9). Каждая конечная сумма является классическим решением уравнения Лапласа в предельном кольце $K = \{0 < r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, так как допускает непрерывные вторые частные производные (и даже бесконечное число частных производных). Например, классическое решение задает функция

$$u(r, \varphi) = \ln r + 4r^3 \cos 3\varphi - \frac{2}{r^5} \sin 5\varphi.$$

2.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге и во внешности круга

2.2.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Рассмотрим важный частный случай, когда кольцо вырождается в круг, что соответствует внутреннему радиусу $R_1 = 0$. Внешний радиус обозначим $R = R_2$. Дополним уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ краевым условием $u|_{r=R} = f(\varphi)$, считая функцию $f(\varphi)$ известной и

периодической с периодом 2π . В целом система из уравнения Лапласа и указанного краевого условия называется задачей Дирихле для уравнения Лапласа в круге. В полярной системе координат эта задача имеет вид:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0 \quad (0 < r < R), \quad u|_{r=R} = f(\varphi). \quad (1)$$

Напомним формулу общего решения уравнения Лапласа в кольце, полученную в предыдущем разделе:

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi]. \quad (2)$$

Участвующие в (2) функции $\ln r$ и r^{-n} ($n = 1, 2, \dots$) неограничены в центре круга. При физических постановках задач считается, что такие решения не могут быть реализованы, и потому коэффициенты при указанных функциях полагают равными нулю. В результате общее решение уравнения Лапласа в круге принимает вид

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\varphi + c_n r^n \sin n\varphi). \quad (3)$$

Чтобы определить коэффициенты a_n , c_n , используем краевое условие, полагая $r = R$ в формуле (3) и результат приравнявая функции $f(\varphi)$. Получаем

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R^n \cos n\varphi + c_n R^n \sin n\varphi).$$

Параллельно запишем разложение заданной функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi). \quad (4)$$

В силу единственности разложения функции в ряд Фурье приходим к равенствам:

$$a_0 = f_0, \quad a_n R^n = f_n^c, \quad c_n R^n = f_n^s \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда находим $a_n = \frac{1}{R^n} f_n^c$, $c_n = \frac{1}{R^n} f_n^s$. Подставляя эти значения в общее решение для круга (3), получаем ответ:

$$u(r, \varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi). \quad (5)$$

Коэффициенты f_0 , f_n^c , f_n^s вычисляются по известным формулам теории рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, & f_n^c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ f_n^s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге методом Фурье, следует вычислить коэффициенты Фурье заданной функции $f(\varphi)$ по формулам (6) и подставить их в формулу (5).*

Чтобы выяснить гладкость обобщенного решения, в конкретных примерах ряд (5) следует изучать на сходимость и дифференцируемость.

2.2.2. Внешняя задача Дирихле для круга. Рассмотрим другой частный случай, когда кольцо вырождается во внешность круга, что соответствует внешнему радиусу $R_2 = \infty$. Внутренний радиус обозначим $R = R_1$. Уравнение Лапласа дополним краевым условием на границе $r = R$. Получаем задачу Дирихле для уравнения Лапласа во внешности круга $r > R$:

$$\Delta u = 0, \quad \text{или} \quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad u|_{r=R} = f(\varphi). \quad (7)$$

В формулу (2) общего решения уравнения Лапласа в кольце входят функции $\ln r$ и r^n ($n = 1, 2, 3, \dots$), которые неограниченно возрастают при $r \rightarrow \infty$. Поэтому коэффициенты при указанных функциях считаются равными нулю, что приводит к следующей формуле общего решения уравнения Лапласа во внешности круга:

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{r^n} \cos n\varphi + \frac{d_n}{r^n} \sin n\varphi \right). \quad (8)$$

Чтобы использовать граничное условие, подставим в (8) значение $r = R$ и результат приравняем функции $f(\varphi)$:

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{R^n} \cos n\varphi + \frac{d_n}{R^n} \sin n\varphi \right).$$

Сравнение с рядом Фурье (4) для функции $f(\varphi)$ приводит к равенствам:

$$a_0 = f_0, \quad \frac{b_n}{R^n} = f_n^c, \quad \frac{d_n}{R^n} = f_n^s \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда $b_n = R^n f_n^c$, $d_n = R^n f_n^s$. Подставляя эти значения в общее решение (8), получаем ответ

$$u(r, \varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi), \quad (9)$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам (6).

ПРИМЕР 1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 3, \quad u|_{r=3} = \varphi^2 \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

РЕШЕНИЕ. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(\varphi) = \varphi^2$, считая ее заданной на отрезке $[0, 2\pi]$. При $n = 0$ получаем:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} \varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^2.$$

Если $n = 1, 2, 3, \dots$, то интегрирование по частям приводит к равенствам:

$$f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{n^2},$$

$$f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \sin n\varphi d\varphi = -\frac{4\pi}{n}.$$

Решение примера представимо рядом для $r < 3$:

$$u(r, \varphi) = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3} \right)^n \left(\frac{1}{n^2} \cos n\varphi - \frac{\pi}{n} \sin n\varphi \right). \quad (10)$$

Выясним условия сходимости ряда (10). Он мажорируется суммой $A + B \sum_{n=1}^{\infty} (r/3)^n$, составленной из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, и потому сходится равномерно по φ для каждого значения $r < 3$. Ряды для частных производных функции $u(r, \varphi)$ мажорируются рядами, которые получаются дифференцированием ряда $B \sum_{n=1}^{\infty} (r/3)^n$, что обеспечивает равномерную сходимость указанных рядов для $r \leq r_0 < 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Отсюда следует, что все частные производные функции $u(r, \varphi)$ определены в каждой точке круга $r < 3$, т.е. эта функция бесконечно дифференцируемая по r и φ внутри указанного круга. Фиксируем аргумент φ и пусть $r \rightarrow 3 - 0$. В пределе получаем функцию

$$u|_{r=3} = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos n\varphi - \frac{\pi}{n} \sin n\varphi \right), \quad (11)$$

которая является разложением в ряд Фурье функции φ^2 , определенной на интервале $[0, 2\pi)$ и продолженной периодически на всю ось. Эта функция терпит разрыв в точках, кратных 2π , и непрерывна в остальных точках. Другими словами, рассматриваемая функция удовлетворяет условиям Дирихле, и поэтому ее ряд Фурье (11) сходится к ней самой в каждой точке интервала $(0, 2\pi)$, а в точках 0 и 2π он сходится к среднему значению $\frac{(2\pi)^2}{2} = 2\pi^2$. Суммируя изложенное, получаем такие предельные значения на окружности $r = 3$:

$$u|_{r=3} = \begin{cases} \varphi^2, & 0 < \varphi < 2\pi, \\ 2\pi^2, & \varphi = 0, \varphi = 2\pi. \end{cases}$$

Подведем итог. Функция $u(r, \varphi)$, представленная рядом (10), является непрерывной всюду в замкнутом круге $r \leq 3$, за исключением точки с координатами $(r, \varphi) = (3, 0)$, в которой она терпит разрыв. Можно показать, что в любой окрестности указанной точки функция $u(r, \varphi)$ принимает любые значения из интервала $(0, 4\pi^2)$. Внутри круга $r < 3$ эта функция бесконечно дифференцируема по переменным r, φ и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

ПРИМЕР 2. Решить внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad (r > 3), \quad u|_{r=3} = \varphi^2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

РЕШЕНИЕ. Коэффициенты Фурье функции $f(\varphi) = \varphi^2$, ограниченной на интервал $[0, 2\pi)$, уже вычислены в предыдущем примере, поэтому сразу пишем ответ, в котором следует считать переменную $r > 3$:

$$u(r, \varphi) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{r}\right)^n \left(\frac{1}{n^2} \cos n\varphi - \frac{\pi}{n} \sin n\varphi \right).$$

Для каждого $r > 3$ представленный ряд мажорируется суммой бесконечного числа членов убывающей геометрической прогрессии $A + B \sum_{n=1}^{\infty} (3/r)^n$ и потому определяет бесконечно дифференцируемую функцию по переменным r и φ . При $r = 3$ снова получаем ряд Фурье функции φ^2 , изученный в примере 1. Если $r \rightarrow \infty$, то очевидно, что $u(r, \varphi) \rightarrow \frac{4}{3}\pi^2$. Отсюда следует, что функция $u(r, \varphi)$ непрерывна в замкнутой области $r \geq 3$, за исключением точки с координатами $(r, \varphi) = (3, 0)$, в которой функция терпит разрыв. Вне круга $r > 3$ эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

2.3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце

Для эллиптических уравнений, к которым относится уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, чаще всего ставится первая краевая задача, когда считаются известными значения решения на границе области. Получающаяся система из уравнения Лапласа и первого краевого условия называется задачей Дирихле для уравнения Лапласа. Если областью, в которой ищется решение, является кольцо K , то граница области состоит из двух окружностей. Радиусы этих окружностей обозначим R_1 и R_2 . Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_1 < r < R_2; \\ u|_{r=R_1} &= f(\varphi), \quad u|_{r=R_2} = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \tag{1}$$

Общее решение уравнения $\Delta u = 0$ в кольце получено в разделе 2.1 в форме ряда:

$$u(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi]. \tag{2}$$

В этот ряд подставим значение $r = R_1$ и результат приравняем функции $f(\varphi)$:

$$f(\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) \cos n\varphi + (c_n R_1^n + d_n R_1^{-n}) \sin n\varphi].$$

Запишем также разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi).$$

В силу единственности разложения функции в ряд Фурье коэффициенты двух разложений обязаны совпадать, что приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 \ln R_1 = f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \\ a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = f_n^c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = f_n^s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{3}$$

А теперь в общее решение (2) подставим значение $r = R_2$ и результат приравняем функции $g(\varphi)$:

$$g(\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}) \cos n\varphi + (c_n R_2^n + d_n R_2^{-n}) \sin n\varphi].$$

Запишем разложение функции $g(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$g(\varphi) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^c \cos n\varphi + g_n^s \sin n\varphi).$$

Из сравнения двух последних рядов получаем равенства:

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 \ln R_2 = g_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = g_n^c &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = g_n^s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) должны решаться совместно, поэтому их удобно объединить в такие пары:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = f_0, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = g_0, \end{cases} \quad (5)$$

(система решается относительно неизвестных a_0 и b_0);

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = f_n^c, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = g_n^c, \end{cases} \quad (6)$$

(система решается относительно неизвестных a_n и b_n);

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = f_n^s, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = g_n^s, \end{cases} \quad (7)$$

(система решается относительно неизвестных c_n и d_n , где $n = 1, 2, \dots$).

Объединяя вышеизложенное, приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить задачу Дирихле (1) для уравнения Лапласа в кольце методом Фурье, следует вычислить коэффициенты Фурье заданных функций f и g , считая их определенными на интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$, затем решить системы линейных алгебраических уравнений (5)–(6), и найденные значения коэффициентов a_n , b_n , c_n , d_n подставить в общее решение (2).*

ПРИМЕР 1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad 1 < r < e, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=1} &= 2, \quad u|_{r=e} = 1. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что любая постоянная является собственным разложением в ряд Фурье, в котором все коэффициенты, кроме первого, равны нулю. В частности, так как $f(\varphi) = 2$, то $f_0 = 2$, $f_n^c = 0$, $f_n^s = 0$. Аналогично из равенства $g(\varphi) = 2$ получаем $g_0 = 1$, $g_n^c = 0$, $g_n^s = 0$. Системы (5)–(7) принимают вид:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln 1 = 2, \\ a_0 + b_0 \ln e = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_n + b_n = 0, \\ a_n e^n + b_n e^{-n} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_n + d_n = 0, \\ c_n e^n + d_n e^{-n} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ для $n = 1, 2, \dots$. Остается решить первую систему, которую перепишем в упрощенном виде: $a_0 = 2$, $a_0 + b_0 = 1$. Отсюда $a_0 = 2$, $b_0 = -1$, и подстановка этих чисел в общее решение (2) приводит к ответу поставленной задачи:

$$u(r, \varphi) = 2 - \ln r, \quad 1 < r < e.$$

Из явного вида функции $u(r, \varphi)$ следует, что она является классическим решением задачи.

ПРИМЕР 2. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=1} &= 2 \cos^2 \varphi, \quad u|_{r=2} = 4 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Заданные функции

$$f(\varphi) = 2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi, \quad g(\varphi) = 4 \sin^2 \varphi = 2 - 2 \cos 2\varphi$$

являются тригонометрическими многочленами, т.е. вырожденными рядами Фурье. Их коэффициенты Фурье задаются равенствами:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \quad f_2^c = 1, \quad f_n^c = 0 \quad (n = 1, 3, 4, \dots), \quad f_n^s = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \\ g_0 &= 2, \quad g_2^c = -2, \quad g_n^c = 0 \quad (n = 1, 3, 4, \dots), \quad g_n^s = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Из бесконечного набора систем (5)–(7) остаются только две:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad & a_0 + b_0 \ln 1 = 1, \quad a_0 + b_0 \ln 2 = 2; \\ n = 2: \quad & a_2 + b_2 = 1, \quad a_2 2^2 + b_2 2^{-2} = -2. \end{aligned}$$

Решения приведенных систем имеют вид: $a_0 = 1$, $b_0 = 1/\ln 2$, $a_2 = -3/5$, $b_2 = 8/5$. Подстановка в общее решение (2) дает ответ:

$$u(r, \varphi) = 1 + \frac{\ln r}{\ln 2} + \frac{1}{5} \left(\frac{8}{r^2} - 3r^2 \right) \cos 2\varphi.$$

Так как функция $u(r, \varphi)$ представлена конечной суммой частных решений, то она является классическим решением задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В общем случае предложение 1 приводит к обобщенному решению задачи (1). Для выяснения его гладкости полученный ряд необходимо изучать на сходимость и дифференцируемость. Эта часть анализа решения отпадает, если вместо ряда получается конечная сумма.

2.4. Уравнение Пуассона в кольце

До сих пор мы изучали однородное уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Почти так же часто встречается неоднородное уравнение $\Delta u = F$, которое называется уравнением Пуассона. Изучим это уравнение в кольце K , граница которого состоит из двух концентрических окружностей радиусов r_1 и r_2 с центром в начале координат. Для определенности считаем $r_1 < r_2$. Запишем уравнение Пуассона в полярных координатах:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = F(r, \varphi). \quad (1)$$

По аналогии с уравнением Лапласа ищем решение уравнения Пуассона в форме ряда:

$$u(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(r) \cos n\varphi + B_n(r) \sin n\varphi). \quad (2)$$

Предположим, что ряд (2) допускает почленное дифференцирование, тогда

$$\begin{aligned} u_r &= A_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'(r) \cos n\varphi + B_n'(r) \sin n\varphi), \\ u_{rr} &= A_0''(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n''(r) \cos n\varphi + B_n''(r) \sin n\varphi), \\ u_{\varphi\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 A_n(r) \cos n\varphi - n^2 B_n(r) \sin n\varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Все приведенные равенства подставим в уравнение (1) и результат запишем в виде:

$$\left(A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n'' + \frac{1}{r} A_n' - \frac{n^2}{r^2} A_n \right) \cos n\varphi + \left(B_n'' + \frac{1}{r} B_n' - \frac{n^2}{r^2} B_n \right) \sin n\varphi \right] = F(r, \varphi).$$

Параллельно выпишем разложение функции $F(r, \varphi)$ в ряд Фурье по переменной φ , считая аргумент r параметром:

$$F_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n^c(r) \cos n\varphi + F_n^s(r) \sin n\varphi) = F(r, \varphi).$$

Сравнение одноименных коэффициентов в двух последних равенствах приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) &= F_0(r), \\ A_n''(r) + \frac{1}{r} A_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} A_n(r) &= F_n^c(r), \\ B_n''(r) + \frac{1}{r} B_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} B_n(r) &= F_n^s(r). \end{aligned} \tag{4}$$

Остается напомнить формулы для коэффициентов Фурье на интервале $[0, 2\pi)$ в применении к заданной функции $F(r, \varphi)$, зависящей от параметра r :

$$\begin{aligned} F_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) d\varphi, \\ F_n^c(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots), \\ F_n^s(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{5}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (4) допускают бесконечно много решений. Чтобы выделить единственное решение из бесконечного семейства, требуются дополнительные

условия. Обычно они задаются на границе кольца, т.е. на окружностях $r = r_1$ и $r = r_2$, и в этом случае дополнительные условия называются краевыми, или граничными. Краевые условия могут быть весьма разнообразными. Рассмотрим для примера задачу

$$\Delta u = F, \quad u|_{r=r_1} = f(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=r_2} = g(\varphi), \quad (6)$$

когда на внутренней окружности считается известной сама функция $u(r, \varphi)$, а на внешней — ее производная по нормали к окружности. Нормаль считается внешней по отношению к области. Геометрически очевидно, что при указанном выборе направления нормали это направление совпадает с возрастанием аргумента r . Другими словами, справедливо равенство: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=r_2} = \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_2}$. При переходе к полярной системе координат задача (6) принимает следующий вид:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = F(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad (7)$$

$$u|_{r=r_1} = f(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_2} = g(\varphi). \quad (8)$$

Напомним, что решение уравнения Пуассона (7) разыскивается в форме ряда (2). Подставим в этот ряд значение $r = r_1$ и результат приравняем функции $f(\varphi)$ согласно первому из условий (8):

$$A_0(r_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(r_1) \cos n\varphi + B_n(r_1) \sin n\varphi) = f(\varphi).$$

Запишем также разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi) = f(\varphi).$$

Из сравнения двух последних равенств получаем дополнительные условия на конце $r = r_1$:

$$\begin{aligned} A_0(r_1) &= f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \\ A_n(r_1) &= f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots), \\ B_n(r_1) &= f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично в производную u_r , которая представлена формулой (3), подставим значение $r = r_2$ и результат приравняем функции $g(\varphi)$ согласно второму краевому условию (8):

$$A_0'(r_2) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'(r_2) \cos n\varphi + B_n'(r_2) \sin n\varphi) = g(\varphi).$$

Параллельно запишем ряд Фурье функции $g(\varphi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^c \cos n\varphi + g_n^s \sin n\varphi) = g(\varphi).$$

Сравнение двух последних равенств приводит к дополнительным условиям на конце $r = r_2$:

$$\begin{aligned} A_0'(r_2) &= g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi, \\ A_n'(r_2) &= g_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots), \\ B_n'(r_2) &= g_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (10)$$

Подведем общий итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить краевую задачу (6) для уравнения Пуассона в кольце методом Фурье, следует записать ее в полярной системе, вычислить коэффициенты Фурье*

функции $F(r, \varphi)$ по переменной φ на отрезке $[0, 2\pi]$ по формулам (5), а также коэффициенты Фурье функций $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ по формулам (9) и (10), затем решить обыкновенные дифференциальные уравнения (4), приписав к ним краевые условия, взятые из соотношений (9) и (10), и результаты подставить в общее решение (2).

ПРИМЕР 1. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце:

$$\Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u|_{r=1} = 0, \quad u_r|_{r=2} = 2, \quad (11)$$

РЕШЕНИЕ. Следуем схеме, описанной в предложении 1.

1) Вводим полярную систему $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, тогда

$$\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}{r} = r \cos 2\varphi.$$

Таким образом, при переходе к полярной системе задача (11) принимает следующий вид:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = r \cos 2\varphi. \quad (12)$$

Сравнение задачи (12) с абстрактной постановкой (7)–(8) показывает, что

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad F(r, \varphi) = r \cos 2\varphi, \quad f(r) = 0, \quad g(r) = 2. \quad (13)$$

2) Из равенств (13) вытекает, что процесс вычисления коэффициентов Фурье заданных функций $F(r, \varphi)$, $f(\varphi)$ и $g(\varphi)$ отпадает, ибо все указанные функции представлены как тригонометрические многочлены переменной $\varphi \in [0, 2\pi]$, так что их коэффициенты Фурье задаются равенствами:

$$\begin{aligned} F_2^c(r) &= r, & F_n^c(r) &= 0 \quad (n \neq 2), & F_n^s(r) &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ f_0 &= 0, & f_n^c &= 0, & f_n^s &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ g_0 &= 2, & g_n^c &= 0, & g_n^s &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Приведенные равенства для коэффициентов показывают, что из всей системы (4) решать следует только два дифференциальных

уравнения:

$$n = 0 : \quad A_0''(r) + \frac{1}{r}A_0'(r) = 0, \quad A_0(1) = 0, \quad A_0'(2) = 2; \quad (14)$$

$$n = 2 : \quad A_2''(r) + \frac{1}{r}A_2'(r) - \frac{4}{r^2}A_2(r) = r, \\ 1 \leq r \leq 2, \quad A_2(1) = 0, \quad A_2'(2) = 0. \quad (15)$$

3) Задачу (14) решаем заменой $A_0'(r) = z(r)$, откуда $z'(r) + \frac{1}{r}z(r) = 0$. Применяв метод разделения переменных, получаем $z(r) = c/r$, где c — произвольная постоянная. Отсюда искомая функция $A_0(r) = c \ln r + c_1$. Используя краевые условия, получаем решение задачи (14):

$$A_0(r) = 4 \ln r.$$

4) Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений ищем решение уравнения (15) в виде суммы $A_2(r) = y_0 + y_n$, в которой слагаемые служат решениями следующих уравнений:

$$y_0''(r) + \frac{1}{r}y_0'(r) - \frac{4}{r^2}y_0(r) = 0, \quad (16)$$

$$y_n''(r) + \frac{1}{r}y_n'(r) - \frac{4}{r^2}y_n(r) = r. \quad (17)$$

Уравнение (16) — это уравнение Эйлера, решения которого ищем в виде степени $y_0(r) = r^\alpha$. Подставляя последнее равенство в уравнение (16), получаем $\alpha^2 = 4$, откуда $\alpha_{1,2} = \pm 2$. Следовательно, $y_0(r) = c_1 r^2 + c_2 r^{-2}$.

Решение уравнения (17) ищем также в виде степени аргумента $y_n = Ar^\beta$. Подставляя в уравнение (17), приходим к соотношению $A(\beta^2 - 4)r^{\beta-2} = r$, откуда однозначно получаем $\beta = 3$ и $A = \frac{1}{5}$. Окончательно $y_n = r^3/5$.

Итак, найдены слагаемые y_0 и y_n , в сумме составляющие искомую функцию

$$A_2(r) = c_1 r^2 + \frac{c_2}{r^2} + \frac{r^3}{5}.$$

Чтобы определить произвольные пока постоянные c_1 и c_2 , воспользуемся граничными условиями задачи (15), которые приводят

к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{5} &= 0, \\ 4c_1 - \frac{1}{4}c_2 + \frac{12}{5} &= 0. \end{aligned}$$

Решая указанную систему, получаем: $c_1 = -\frac{49}{85}$, $c_2 = \frac{32}{85}$.

Выписываем ответ задачи (15):

$$A_2(r) = -\frac{49}{85}r^2 + \frac{32}{85}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{5}r^3.$$

Найденные значения коэффициентов подставляем в общее решение (2):

$$u(r, \varphi) = 4 \ln r + \left(\frac{1}{5}r^3 - \frac{49}{85}r^2 + \frac{32}{85}\frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi. \quad (18)$$

Получилась конечная сумма, поэтому анализ на сходимость ряда не требуется. Нетрудно проверить прямым вычислением, что представленная формулой (18) функция $u(r, \varphi)$ действительно является решением рассматриваемого примера.

2.5. Цилиндрические функции

В приложениях часто возникают дифференциальные уравнения, решения которых не выражаются в элементарных функциях. Примером служит уравнение Бесселя

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \lambda^2)y(x) = 0, \quad (1)$$

где λ — заданная постоянная, которая для определенности предполагается неотрицательной: $\lambda \geq 0$. Решения уравнения (1) называются бесселевыми, или цилиндрическими, функциями и встречаются в самых разнообразных вопросах физики и техники. Уравнение Бесселя является линейным, но имеет переменные коэффициенты, вырождающиеся при $x = 0$. Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений решения уравнения (1) существуют там, где коэффициенты не вырождаются, т.е. для $x < 0$ и $x > 0$. В приложениях обычно считают переменную x положительной, что и предполагается в дальнейшем.

Чтобы получить первое представление о цилиндрических функциях, допустим, что аргумент $x \rightarrow 0$, так что $x^2 - \lambda^2 \rightarrow -\lambda^2$. Заменим уравнение (1) новым уравнением:

$$x^2 w'' + x w' - \lambda^2 w = 0. \quad (2)$$

Так как коэффициенты уравнений (1) и (2) близки при $x \rightarrow 0$, то их решения также близки, т.е. справедливо приближенное равенство

$$y(x) \approx w(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (3)$$

Уравнение Эйлера (2) решается в элементарных функциях. Его линейно независимые частные решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda > 0 : \quad & w_1(x) = x^\lambda, & w_2(x) = x^{-\lambda}; \\ \lambda = 0 : \quad & w_1(x) = 1, & w_2(x) = \ln x. \end{aligned}$$

Из соотношений (3) вытекают следующие приближения для частных решений уравнения Бесселя при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lambda > 0 : \quad & y_1(x) \approx x^\lambda, & y_2(x) \approx x^{-\lambda}; \\ \lambda = 0 : \quad & y_1(x) \approx 1, & y_2(x) \approx \ln x. \end{aligned}$$

Решения уравнения Бесселя с асимптотикой x^λ ($\lambda \geq 0$) называются бесселевыми функциями первого рода. Обозначать их будем символом $Z_\lambda(x)$. Решения уравнения Бесселя с асимптотикой $x^{-\lambda}$ для $\lambda > 0$ и $\ln x$ для $\lambda = 0$ обозначим $Y_\lambda(x)$. Тогда общее решение уравнения (1) можно представить в виде:

$$y(x) = C_1 Z_\lambda(x) + C_2 Y_\lambda(x).$$

Изучим более детально функции Бесселя первого рода $Z_\lambda(x)$. Вместо приближенного соотношения $Z_\lambda(x) \approx x^\lambda$ ($x \rightarrow 0$) запишем точное равенство $Z_\lambda(x) = x^\lambda z(x)$, в котором функция $z(x)$ пока не определена. Она не выражается в элементарных функциях, поэтому ищем ее в форме степенного ряда:

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad Z_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}. \quad (4)$$

Введем оператор Эйлера $Ly = x^2 y'' + x y' - \lambda^2 y$. Тогда уравнение Бесселя можно представить в виде:

$$Ly + x^2 y = 0. \quad (5)$$

Оператор Эйлера L выделен потому, что он оставляет инвариантными степенные функции x^α . Действительно, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, так что

$$L(x^\alpha) = \alpha(\alpha-1)x^\alpha + \alpha x^\alpha - \lambda^2 x^\alpha = (\alpha^2 - \lambda^2)x^\alpha.$$

Отсюда непосредственно видно, что под воздействием оператора L функция x^α приобретает только числовой множитель. В частности

$$L(x^{k+\lambda}) = k(k+2\lambda)x^{k+\lambda},$$

следовательно,

$$L(Z_\lambda(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L(x^{k+\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+2\lambda)a_k x^{k+\lambda}. \quad (6)$$

Вычислим еще произведение

$$x^2 Z_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2+\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+\lambda}. \quad (7)$$

Функция $Z_\lambda(x)$ по определению удовлетворяет уравнению (5). Другими словами, выполняется тождество $L(Z_\lambda(x)) + x^2 Z_\lambda(x) = 0$, которое с учетом соотношений (6) и (7) имеет вид:

$$(1+2\lambda)a_1 x^{1+\lambda} + \sum_{k=2}^{\infty} (k(k+2\lambda)a_k + a_{k-2})x^{k+\lambda} = 0. \quad (8)$$

Так как функции $x^{k+\lambda}$ ($k = 1, 2, \dots$) линейно независимы, то равенство (8) возможно только в том случае, если все коэффициенты ряда равны нулю, т.е.

$$(1+2\lambda)a_1 = 0, \quad k(k+2\lambda)a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (9)$$

По условию параметр $\lambda \geq 0$ и потому $a_1 = 0$. Из рекуррентного соотношения (9) следует, что тогда равны нулю все коэффициенты a_k с нечетными индексами $k = 2m+1$ ($m = 1, 2, \dots$). Для коэффициентов a_k с четными индексами $k = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$) из того же рекуррентного соотношения (9) получаем:

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{2m(2m+2\lambda)} = \frac{-a_{2m-2}}{m(m+\lambda)2^2}.$$

Последовательное понижение индексов с помощью приведенной формулы для a_{2m} приводит к равенству

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{m!(m+\lambda) \dots (1+\lambda) 2^{2m}} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

при подстановке которого в ряд (4) для функции $Z_\lambda(x)$ получаем

$$Z_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_0}{m!(m+\lambda) \dots (1+\lambda)} \frac{x^{2m+\lambda}}{2^{2m}}.$$

В дальнейшем будем использовать функции $Z_\lambda(x)$ только целого порядка $\lambda = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и в этом случае выбираем $a_0 = (n! 2^n)^{-1}$. В результате получаются однозначно определенные функции, которым присвоено специальное обозначение $J_n(x)$. Другими словами, считаем по определению

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Заметим, что представленные ряды сходятся для всех значений $x \in \mathbb{R}$, в чем можно убедиться, применив, например, признак Дирихле сходимости рядов.

ПРИМЕР 1. Полагая в (10) $n = 0$, приходим к равенству

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

которое представим в развернутой форме:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (11)$$

Этот ряд можно использовать для реального вычисления значений функции $J_0(x)$ при относительно малых значениях аргумента. Так как ряд в (11) — знакочередующийся, то ошибка при его применении не превосходит первого отброшенного члена ряда. Ниже представлена небольшая таблица значений функции $J_0(x)$, вычисленных по формуле (11) с точностью до 0,01:

x	0	1	2	3
$J_0(x)$	1	0,76	0,22	−0,26

ПРИМЕР 2. Полагая в (10) $n = 1$, получаем ряд

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1},$$

или в развернутой форме:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{x}{2}\right)^7 + \dots$$

Представим небольшую таблицу значений функции $J_1(x)$, вычисленных по указанной формуле с точностью до 0,01:

x	0	1	2	3	4
$J_1(x)$	0	0,44	0,58	0,34	-0,07

2.6. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций

Введем произведение двух функций

$$x^n J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \frac{x^{2m+2n}}{2^{2m+n}},$$

и вычислим от него производную

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n-1)!(m+n)} \frac{(2m+2n)x^{2m+2n-1}}{2^{2m+n}}.$$

Сократив на $2m+2n$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n-1)!} \frac{x^{2m+2n-1}}{2^{2m+n-1}} = \\ &= x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n-1} = x^n J_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Мы вывели важное тождество, связывающее цилиндрические функции различных порядков:

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Аналогично доказывается еще одно тождество:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_n(x)}{x^n} \right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Отметим два интересных частных случая. При $n = 0$ из (2) следует: $J'_0(x) = -J_1(x)$. При $n = 1$ формула (1) дает: $(x J_1(x))' = x J_0(x)$.

Запишем тождество (1) в развернутом виде:

$$nx^{n-1}J_n(x) + x^n J'_n(x) = x^n J_{n-1}(x),$$

или после деления на x^n :

$$\frac{n}{x}J_n(x) + J'_n(x) = J_{n-1}(x). \quad (3)$$

Аналогично поступаем с тождеством (2), выполнив дифференцирование в его левой части и проведя естественные упрощения:

$$J'_n(x) - \frac{n}{x}J_n(x) = -J_{n+1}(x). \quad (4)$$

Складывая и вычитая тождества (3) и (4), получаем новые:

$$\begin{aligned} 2J'_n(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \\ \frac{2n}{x}J_n(x) &= J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Последняя из приведенных формул применяется для понижения порядка заданной функции $J_n(x)$ до значений $n = 0$ и $n = 1$, для которых созданы подробные таблицы.

Выделим из полученных выше тождеств те, которые будут активно использоваться.

ТЕОРЕМА 1. *Бесселевы функции первого рода связаны следующими рекуррентными соотношениями:*

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

ПРИМЕР 1. Полагая $n = 1$ в формуле (5), получаем тождество

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x).$$

ПРИМЕР 2. Полагая $n = 2$ в формуле (5) и используя результат примера 1, получаем

$$J_3(x) = \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x) = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x).$$

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int x J_0(x) dx$.

РЕШЕНИЕ. Применяя тождество $x J_0(x) = (x J_1(x))'$, вычисляем

$$\int x J_0(x) dx = \int d(x J_1(x)) = x J_1(x) + C.$$

ПРИМЕР 4. Вычислить интеграл: $\int x^3 J_0(x) dx$.

РЕШЕНИЕ. Используем тождество $x J_0(x) = (x J_1(x))'$ и формулу интегрирования по частям. Получаем:

$$\int x^3 J_0(x) dx = \int x^2 d(x J_1(x)) = x^3 J_1(x) - 2 \int x^2 J_1(x) dx.$$

Из формулы (6) при $n = 2$ следует, что $x^2 J_1(x) = (x^2 J_2(x))'$, и потому

$$\int x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + C.$$

Вспоминая результат примера 1, находим окончательно:

$$\int x^3 J_0(x) dx = x(x^2 - 4)J_1(x) + 2x^2 J_0(x) + C.$$

Как уже отмечалось, цилиндрические функции $J_n(x)$ определены для всех $x \geq 0$, и потому желательно знать их поведение при $x \rightarrow \infty$. Вернемся к уравнению Бесселя, считая $\lambda = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (7)$$

и произведем в нем замену неизвестной функции:

$$y = \frac{z}{\sqrt{x}}, \quad y' = \frac{z'}{\sqrt{x}} - \frac{z}{2x\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{z''}{\sqrt{x}} - \frac{z'}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{4} \frac{z}{x^2\sqrt{x}}.$$

Подставив эти равенства в уравнение (7), приведем его к виду:

$$z'' + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2}\right) z = 0. \quad (8)$$

Согласно предположению $x \rightarrow \infty$, и потому множитель в круглых скобках уравнения (8) стремится к числу 1. Запишем уравнение с предельными коэффициентами:

$$w'' + w = 0. \quad (9)$$

Так как коэффициенты уравнений (8) и (9) близки при $x \rightarrow \infty$, то их решения также близки, т.е. справедливо приближенное равенство:

$$z(x) \approx w(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (9) представим в виде

$$w(x) = a \cos x + b \sin x = A \cos(x + \delta),$$

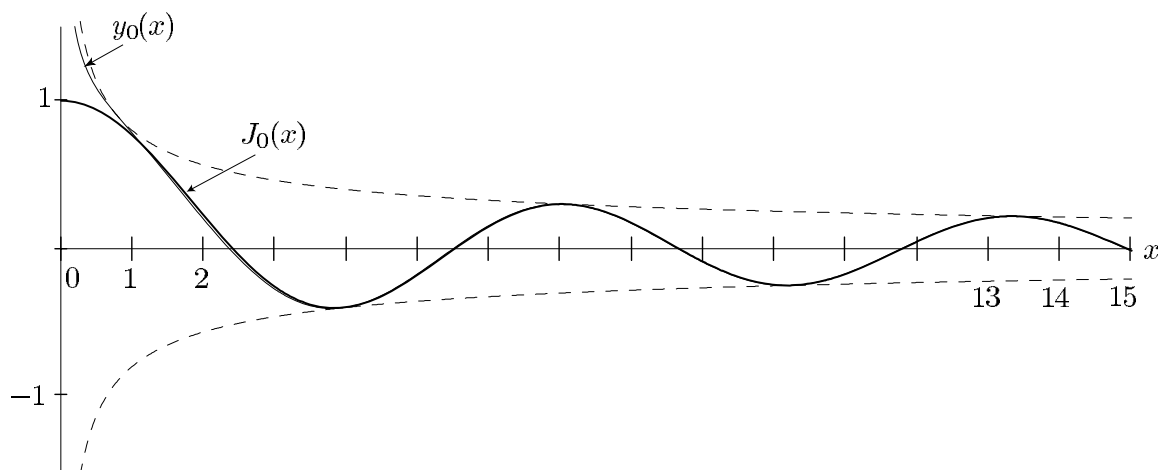


Рис. 2.1.

где A, δ — произвольные постоянные. Из (10) следует приближение $z(x) \approx A \cos(x + \delta)$, $x \rightarrow \infty$, которое ввиду замены $y = z/\sqrt{x}$ приводит к следующей асимптотике исходной цилиндрической функции:

$$y(x) \approx \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(x + \delta), \quad x \rightarrow \infty.$$

Более детальное изучение показывает, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Цилиндрические функции $J_n(x)$ для $n = 0, 1, 2, \dots$ имеют следующую асимптотику при $x \rightarrow \infty$:*

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right). \quad (11)$$

Отметим следующий удивительный факт. Если не требовать высокой точности, считая допустимой ошибку, не превосходящую 0,1, то асимптотику (11) можно использовать уже для значений $x \geq 2 + 2n^2$, т.е. для $x \geq 2$ при вычислении значений функции $J_0(x)$, и для $x \geq 4$ при вычислении значений функции $J_1(x)$. Применим это замечание для построения графика функции $J_0(x)$, отправляясь от приближения

$$J_0(x) \approx y_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \geq 2.$$

График функции $y_0(x)$ строится без труда. Для сравнения на рис. 2.1 приведен также график функции $J_0(x)$. Пунктиром отмечены графики функций $y = \pm \sqrt{2/(\pi x)}$, $x > 0$.

Из рис. 2.1 очевидно, что графики функций $y_0(x)$ и $J_0(x)$ сливаются для аргументов $x \geq 2$, хотя они отличаются в окрестности $x = 0$. Для большей наглядности сравним нули рассматриваемых функций, т.е. те значения x , для которых функции $y_0(x)$ и $J_0(x)$ обращаются в нуль. Уравнение $y_0(x) = 0$ легко решается, так как приводится к известному уравнению $\cos(x - \pi/4) = 0$, из которого находим $x_k = 3\pi/4 + \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Первые числа полученной последовательности имеют вид:

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} \approx 2,36; \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi \approx 5,50; \quad x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \approx 8,64. \quad (12)$$

Приведем первые три нуля функции $J_0(x)$, взятые из специальных таблиц:

$$\mu_1^{(0)} \approx 2,40; \quad \mu_2^{(0)} \approx 5,52; \quad \mu_3^{(0)} \approx 8,65. \quad (13)$$

Сравнение соответствующих чисел последовательностей (7) и (8) показывает, что они достаточно близки. Например, число x_1 отличается от $\mu_1^{(0)}$ всего на два процента. Точность совпадения быстро нарастает с увеличением номера m в последовательности нулей $\mu_m^{(0)}$ функции $J_0(x)$.

Обратимся к функции $J_1(x)$. Полагая $n = 1$ в формуле (11), получаем следующее приближение при $x \rightarrow \infty$:

$$J_1(x) \approx y_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right).$$

На рис. 2.2 представлены графики функций $J_1(x)$ и $y_1(x)$. Они практически совпадают для значений $x \geq 2$. Пунктиром отмечены графики функций $y = \pm \sqrt{2/(\pi x)}$. Сравним нули этих функций. Уравнение $y_1(x) = 0$ заменяем простым уравнением $\cos(x - 3\pi/4) = 0$, откуда получаем решения $x_k = 5\pi/4 + \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Первые числа этой последовательности имеют вид:

$$x_1 = \frac{5\pi}{4} \approx 3,9; \quad x_2 = x_1 + \pi \approx 7,1; \quad x_3 = x_2 + \pi \approx 10,2.$$

Выпишем также первые три нуля функции $J_1(x)$:

$$\mu_1^{(1)} \approx 3,8; \quad \mu_2^{(1)} \approx 7,0; \quad \mu_3^{(1)} \approx 10,2.$$

Очевидно, что приведенные последовательности практически совпадают.

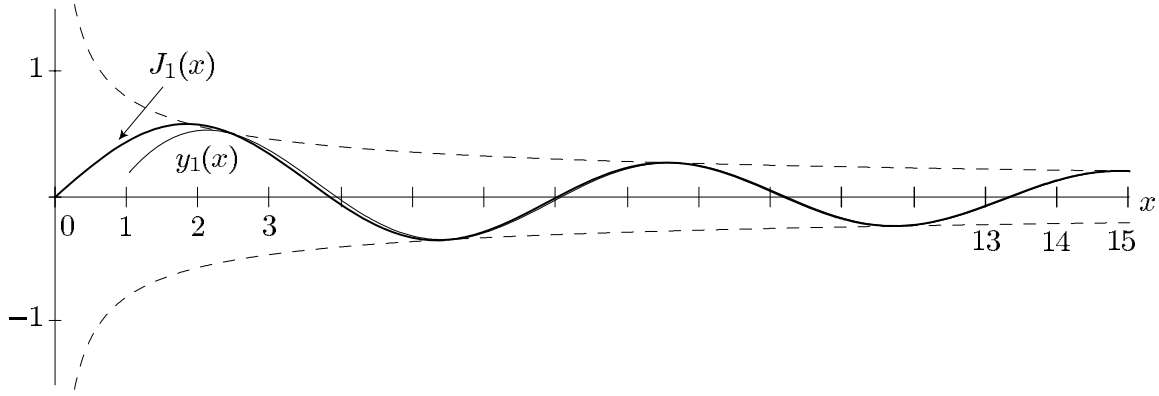


Рис. 2.2.

2.7. Уравнение Гельмгольца в круге

2.7.1. Уравнение Гельмгольца. Как уже отмечалось, в приложениях чаще всего встречается уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Почти так же часто используется близкое к нему уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, где k — постоянная. Для определенности параметр k всегда считаем положительным. Будем решать уравнение Гельмгольца в круге радиуса r_0 с центром в начале координат. Перепишем это уравнение в полярной системе координат:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + k^2 u = 0. \quad (1)$$

Ищем решение методом разделения переменных, т.е. в форме произведения $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставляя указанное произведение в уравнение (1), получаем выражение вида:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) + k^2 R(r)\Phi(\varphi) = 0. \quad (2)$$

Обе части уравнения (2) разделим на $R(r)\Phi(\varphi)/r^2$ и результат представим в такой форме:

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} + k^2 r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \quad (= \lambda^2). \quad (3)$$

Переменные разделились, поэтому обе части уравнения (3) равны одному и тому же числу, которое обозначено λ^2 и указано в

круглых скобках. Из (3) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi); \quad (4)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (k^2 r^2 - \lambda^2)R(r) = 0. \quad (5)$$

Задача (4) на периодические решения нам известна. Ее решения определены для счетного числа значений параметра $\lambda_n = n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ и имеют вид:

$$\Phi_0(\varphi) = A_0; \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где A_0, A_n, B_n — произвольные постоянные.

Задачу (5) следует решать при найденных значениях параметра λ , т.е. для $\lambda_n = n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, так что задача (5) принимает вид:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (k^2 r^2 - n^2)R(r) = 0. \quad (7)$$

Введем замены:

$$x = kr, \quad y(x) = R\left(\frac{x}{k}\right) = R(r). \quad (8)$$

Отсюда

$$R'(r) = R'_x x'_r = ky'(x), \quad R''(r) = k^2 y''(x),$$

в результате чего уравнение (7) преобразуется к такой форме:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Получилось уравнение Бесселя целого порядка $n = 0, 1, 2, \dots$. Его общее решение имеет вид:

$$y_n(x) = C_n J_n(x) + D_n Y_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где C_n, D_n — произвольные постоянные, $J_n(x)$ — функции Бесселя первого рода n , $Y_n(x)$ — функции Бесселя второго рода. Учитывая замены (8), из (9) получаем общее решение уравнения (7):

$$R_n(r) = C_n J_n(kr) + D_n Y_n(kr) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Используем асимптотику бesselевых функций в нуле:

$$J_n(kr) = c_n (kr)^n, \quad Y_0(kr) = d_0 \ln(kr), \quad Y_n(kr) = d_n (kr)^{-n} \quad (n \neq 0).$$

Очевидно, что функции $Y_n(kr)$ для $n = 0, 1, 2, \dots$ неограниченно возрастают в центре круга при $r \rightarrow 0$ и потому не считаются решениями уравнения Гельмгольца в круге. Из формулы (10) следует,

что в качестве решений остаются функции $R_n(r) = C_n J_n(kr)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Объединяя решения задач (4) и (5), получаем счетное число решений уравнения Гельмгольца в круге, которые представим в такой форме:

$$\begin{aligned} u_0(r, \varphi) &= a_0 J_0(kr) \quad (n = 0), \\ u_n(r, \varphi) &= (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) J_n(kr) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что каждая функция последовательности (11) является решением уравнения Гельмгольца, так что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в круге для каждого $k > 0$ допускает счетное число частных решений (11).*

Исходя из вышеизложенного, общим решением уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в круге радиуса r_0 для заданного $k > 0$ назовем ряд, составленный из частных решений (11):

$$u(r, \varphi) = a_0 J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) J_n(kr), \quad (12)$$

при условии, что этот ряд сходится для каждого $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $r \in [0, r_0]$.

Уравнение Гельмгольца относится к эллиптическому типу, поэтому для него ставятся краевые задачи. Например, первая краевая задача в круге радиуса r_0 для уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad u|_{r=r_0} = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (13)$$

Общее решение уравнения Гельмгольца известно в форме ряда (12). Подставим это общее решение в краевое условие задачи (13), что приводит к равенству:

$$a_0 J_0(kr_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) J_n(kr_0) = f(\varphi). \quad (14)$$

Запишем также разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi) = f(\varphi). \quad (15)$$

Так как ряды (14) и (15) задают одну и ту же функцию, то соответствующие коэффициенты этих рядов обязаны совпадать, т.е.:

$$\begin{aligned} a_0 J_0(kr_0) &= f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \\ a_n J_n(kr_0) &= f_n^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n J_n(kr_0) &= f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициенты ряда (14):

$$a_0 = \frac{f_0}{J_0(kr_0)}, \quad a_n = \frac{f_n^c}{J_n(kr_0)}, \quad b_n = \frac{f_n^s}{J_n(kr_0)},$$

которые подставляем в общее решение (12), что приводит к ответу для краевой задачи (13):

$$u(r, \varphi) = f_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi) \frac{J_n(kr)}{J_n(kr_0)}. \quad (16)$$

Представленный ответ является в общем случае обобщенным решением задачи (13), а ряд (16) требует анализа на сходимость. Сформулируем полученный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить первую краевую задачу (13) для уравнения Гельмгольца в круге методом Фурье, следует вычислить коэффициенты Фурье заданной на окружности функции $f(\varphi)$ и подставить их в ряд (16).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ряд (16) содержит в знаменателях числа $J_n(kr_0)$, которые в отдельных случаях могут обратиться в нуль, так что этот ряд требует осторожности. В учебных примерах ограничиваются, как правило, конечной комбинацией частных решений.

ПРИМЕР 1. Найти функцию, удовлетворяющую внутри круга уравнению Гельмгольца и принимающую на границе круга заданные значения:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad u|_{r=1} = 5 \sin^3 \varphi. \quad (17)$$

РЕШЕНИЕ. Сравнивая пример (17) с абстрактной постановкой краевой задачи (13), заключаем, что на границе круга радиуса $r_0 = 1$ задана функция $f(\varphi) = 5 \sin^3 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Согласно формулам тригонометрии $\sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$, следовательно, заданная функция $f(\varphi)$ является тригонометрическим многочленом

$$f(\varphi) = \frac{15}{4} \sin \varphi - \frac{5}{4} \sin 3\varphi,$$

который представляет собой вырожденный ряд Фурье. Сравнение разложения $f(\varphi)$ с формулой (15) показывает, что

$$\begin{aligned} f_n^c &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ f_1^s &= \frac{15}{4}, \quad f_3^s = -\frac{5}{4}, \quad f_n^s = 0 \quad (n = 2, 4, 5, \dots). \end{aligned}$$

Подставляя указанные значения f_n^c и f_n^s в ряд (16), получаем ответ задачи (17):

$$u(r, \varphi) = \frac{15}{4} \sin \varphi \frac{J_1(kr)}{J_1(k)} - \frac{5}{4} \sin 3\varphi \frac{J_3(kr)}{J_3(k)}.$$

Решение примера представлено конечной суммой и потому не требует анализа на сходимость ряда. Вместе с тем найденный ответ нельзя использовать, если число k совпадает с одним из нулей функции $J_1(x)$ или $J_3(x)$. Говорят, что наступает резонанс в соответствующей механической модели.

2.7.2. Собственные значения оператора Лапласа в круге. Функция $u(x, y)$ называется собственной функцией оператора Лапласа в заданной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если она удовлетворяет уравнению $\Delta u = \lambda u$ с некоторым числом λ , а также однородному краевому условию на границе области. В случае круга и первого краевого условия задача на собственные значения имеет вид:

$$\Delta u = \lambda u, \quad 0 \leq r < r_0, \quad u|_{r=r_0} = 0. \quad (18)$$

Подчеркнем, что неизвестными считаются функция $u = u(x, y)$ и параметр λ . Введем замену $\lambda = -k^2$, тогда задача (18) предстанет в следующей форме:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad u|_{r=r_0} = 0. \quad (19)$$

Получилось уравнение Гельмгольца с дополнительным условием. Решения уравнения Гельмгольца известны из теоремы 1 и вычисляются по формулам (11). Подставив эти решения в краевое условие $u|_{r=r_0} = 0$, приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} a_0 J_0(kr_0) &= 0 \quad (n = 0), \\ (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) J_n(kr_0) &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда следуют уравнения $J_n(kr_0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Пусть $\mu_m^{(n)}$ — m -ый корень уравнения $J_n(\mu) = 0$. Тогда можем записать, что $kr_0 = \mu_m^{(n)}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, \dots$, откуда получаем счетное число значений параметра k :

$$k_m^{(n)} = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Найденные значения $k_m^{(n)}$ подставляем в формулы частных решений (11) и получаем собственные функции задачи (19):

$$u_m^{(0)}(r, \varphi) = a_0 J_0\left(\mu_m^{(0)} \frac{r}{r_0}\right) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (21)$$

$$u_m^{(n)}(r, \varphi) = (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) J_n\left(\mu_m^{(n)} \frac{r}{r_0}\right) \quad (n, m = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Задачи (18) и (19) связаны заменой $\lambda = -k^2$, которая приводит к бесконечному набору собственных значений задачи (18):

$$\lambda_m^{(n)} = -\left(\frac{1}{r_0} \mu_m^{(n)}\right)^2, \quad J_n(\mu_m^{(n)}) = 0. \quad (23)$$

Подведем итог.

ТЕОРЕМА 2. *Оператор Лапласа в круге радиуса r_0 при первом однородном краевом условии имеет счетное число собственных значений (23). Если $n = 0$, то каждому собственному значению $\lambda_m^{(0)}$ соответствует одномерное подпространство собственных функций (21). Если же $n \neq 0$, то каждому собственному значению $\lambda_m^{(n)}$ соответствует двумерное подпространство собственных функций (22).*

ПРИМЕР 2. Рассмотрим наименьшее по модулю собственное значение $\lambda_1^{(0)} = -(\mu_1^{(0)}/r_0)^2$, где $\mu_1^{(0)}$ — первый положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$. Ранее было отмечено, что $\mu_1^{(0)} \approx 2,4$.

Собственному значению $\lambda_1^{(0)}$ соответствует единственная собственная функция $u_1^{(0)}(r, \varphi) = J_0(\mu_1^{(0)} r/r_0)$, которая не зависит явно от аргумента $\varphi \in [0, 2\pi]$, и потому график ее представляет собой поверхность вращения. Очевидно, что внутри круга радиуса r_0 эта поверхность положительна, обращаясь в нуль на границе круга. Таким образом, первое собственное значение задачи (13) — простое, и ему соответствует неотрицательная собственная функция.

Перейдем к собственному значению $\lambda_2^{(0)} = (-\mu_2^{(0)}/r_0)^2$, где $\mu_2^{(0)}$ — второй по порядку возрастания корень уравнения $J_0(\mu) = 0$. Напомним, что $\mu_2^{(0)} \approx 5,6$. Выбранному собственному значению соответствует также единственная собственная функция $u_2^{(0)}(r, \varphi) = J_0(\mu_2^{(0)} r/r_0)$, график которой есть снова поверхность вращения. Функция $J_0(\mu_2^{(0)} r/r_0)$ обращается в нуль один раз внутри интервала $r \in (0, r_0)$, когда выполняется равенство $\mu_2^{(0)} r/r_0 = \mu_1^{(0)}$. Это значит, что поверхность $u_2^{(0)}(r, \varphi)$ имеет внутри круга множество нулей в форме окружности радиуса $r = \frac{\mu_1^{(0)}}{\mu_2^{(0)}} r_0$. Это множество часто называют узловой линией собственной функции $u_2^{(0)}(r, \varphi)$.

2.8. Уравнение теплопроводности в круге для случая радиальной симметрии

Рассмотрим уравнение теплопроводности в круге радиуса r_0 :

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 \leq r < r_0. \quad (1)$$

Для его решения применим метод разделения переменных. Предварительно отделим аргумент t , т.е. ищем решения вида $u(t, x, y) = T(t)v(x, y)$. Подстановка указанного произведения в уравнение (1) приводит к равенству $T'(t)v = a^2 T(t) \Delta v$, которое после деления на $a^2 T(t)v$ принимает вид:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta v}{v} \quad (= -k^2). \quad (2)$$

Так как левая и правая части уравнения (2) зависят от разных аргументов, то каждая из этих частей равна одному и тому же числу, которое обозначено $-k^2$ и указано в скобках в (2). В

результате получаем два новых уравнения с параметром:

$$T'(t) + a^2 k^2 T(t) = 0; \quad (3)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0; \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (4)$$

Второе из приведенных уравнений — это уравнение Гельмгольца в круге. Его общее решение получено в предыдущем разделе в форме ряда

$$v(r, \varphi) = a_0 J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) J_n(kr). \quad (5)$$

Чтобы применять такой ответ, необходимо использовать функции Бесселя в большом числе, а это трудная задача, и потому часто ограничиваются специальным случаем радиальной симметрии, когда решение $v(r, \varphi)$ зависит только от одной переменной $r \in [0, r_0]$. Другими словами, решение $v = v(r)$ не зависит от переменной φ , и потому все коэффициенты a_n и b_n для $n = 1, 2, \dots$ следует считать нулями. В результате из всего ряда (5) остается только одно слагаемое, так что $v(r) = a_0 J_0(kr)$. Подчеркнем, что параметр k здесь пока не определен. Для его вычисления привлекается краевое условие, которое будем считать простейшим: $u|_{r=r_0} = 0$. Отсюда очевидно, что $v|_{r=r_0} = 0$. Подстановка в последнее краевое условие общего решения $v = a_0 J_0(kr)$ приводит к уравнению $J_0(kr_0) = 0$. Уравнение $J_0(x) = 0$ имеет счетное число решений $\mu_m^{(0)}$, $m = 1, 2, \dots$, которые порождают счетное число уравнений $kr_0 = \mu_m^{(0)}$, имеющих очевидные решения

$$k_m = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(0)}, \quad J_0(\mu_m^{(0)}) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Каждому такому значению соответствует решение

$$v_m(r) = A_m J_0(k_m r) = A_m J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)}\right) \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Подведем промежуточный итог. Мы получили счетное число значений параметра $k = k_m$, для которых задача (4) при дополнительном условии $u|_{r=r_0} = 0$ допускает ненулевые решения (7). Обратимся к уравнению (3). Оно неоднократно решалось ранее. С учетом вычисленных значений $k = k_m$ находим его решения

$T_m(t) = e^{-a^2 k_m^2 t}$, $m = 1, 2, \dots$. Объединяя решения задач (3) и (4), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача в круге радиуса r_0*

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 \leq r < r_0, \quad u|_{r=r_0} = 0 \quad (8)$$

для случая радиальной симметрии допускает счетное число частных решений

$$u_m(t, r) = A_m e^{-a^2 k_m^2 t} J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где числа $k_m = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(0)}$, и $\mu_m^{(0)}$ — нули функции $J_0(x)$.

Отправляясь от принципа суперпозиции, общим решением задачи (8) назовем ряд, составленный из частных решений (9):

$$u(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-a^2 k_m^2 t} J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right), \quad k_m = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(0)}, \quad (10)$$

при условии, что этот ряд сходится в каждой точке множества $r \in [0, r_0]$, $t \geq 0$.

Чтобы определить коэффициенты A_m ряда (10), дополним задачу (8) начальным условием, которое для случая радиальной симметрии имеет вид:

$$u|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leq r \leq r_0. \quad (11)$$

Подставим в (11) общее решение (10), что приводит к разложению функции $f(r)$ в ряд по функциям Бесселя:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right), \quad 0 \leq r \leq r_0. \quad (12)$$

Отметим следующие тождества, которые называются свойствами ортогональности функций Бесселя с весом r :

$$\int_0^{r_0} r J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right) J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)} \right) dr = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} r_0^2 J_1^2(\mu_n^{(0)}), & m = n. \end{cases} \quad (13)$$

Умножим равенство (12) на функцию $r J_0(\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)})$ с фиксированным номером $n = 1, 2, \dots$, и результат проинтегрируем по отрезку

$0 \leq r \leq r_0$. В результате с учетом тождеств (13) получим:

$$\int_0^{r_0} r f(r) J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right) dr = A_n \int_0^{r_0} r J_0^2 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right) dr = A_n \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_n^{(0)}).$$

Отсюда находим коэффициент

$$A_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} \int_0^{r_0} r f(r) J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)} \right) dr. \quad (14)$$

Подведем итог по всей задаче.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить первую начально-краевую задачу (8), (11) в круге радиуса r_0 для случая радиальной симметрии, следует вычислить коэффициенты разложения A_n заданной функции $f(r)$ по формулам (14) и подставить их в общее решение (10).*

Заметим, что полученный ряд необходимо изучить на сходимость для значений переменных $r \in [0, r_0]$ и $t \geq 0$. Подобный анализ не требуется, если ответ представлен в виде конечной суммы частных решений (9), которые являются классическими.

Приведем примеры решения задач.

ПРИМЕР 1. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности в круге:

$$u_t - 8^2 \Delta u, \quad 0 \leq r < 8, \quad t > 0, \quad u|_{r=8} = 0, \quad u|_{t=0} = 64 - r^2.$$

РЕШЕНИЕ. Сравнивая пример 1 с абстрактной постановкой задачи (8), (11) заключаем, что параметр $a^2 = 8^2$, радиус круга $r_0 = 8$ и начальная функция $f(r) = 64 - r^2$. Согласно предложению 1 вычисляем коэффициенты A_n при указанных условиях:

$$A_n = \frac{2}{8^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} \int_0^8 r(64 - r^2) J_0 \left(\frac{r}{8} \mu_n^{(0)} \right) dr.$$

Введем замены:

$$\frac{r}{8} \mu_n^{(0)} = x, \quad r = \frac{8x}{\mu_n^{(0)}}, \quad dr = \frac{8dx}{\mu_n^{(0)}}, \quad 0 \leq x \leq \mu_n^{(0)},$$

которые приводят интеграл к виду

$$A_n = \frac{128}{J_1^2(\mu_n^{(0)})(\mu_n^{(0)})^2} \int_0^{\mu_n^{(0)}} x \left(1 - \frac{x^2}{(\mu_n^{(0)})^2} \right) J_0(x) dx.$$

Используем известные нам формулы:

$$\begin{aligned} \int x J_0(x) dx &= x J_1(x) + C, \\ \int x^3 J_0(x) dx &= 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x) + C, \end{aligned}$$

благодаря которым находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu_n^{(0)}} x J_0(x) dx &= \mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}), \\ \int_0^{\mu_n^{(0)}} x^3 J_0(x) dx &= 2(\mu_n^{(0)})^2 J_0(\mu_n^{(0)}) + ((\mu_n^{(0)})^3 - 4\mu_n^{(0)}) J_1(\mu_n^{(0)}) = \\ &= ((\mu_n^{(0)})^3 - 4\mu_n^{(0)}) J_1(\mu_n^{(0)}), \end{aligned}$$

так как $J_0(\mu_n^{(0)}) = 0$ в соответствии с определением чисел $\mu_n^{(0)}$ как нулей функции $J_0(x)$.

Закончим вычисление коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{128}{J_1^2(\mu_n^{(0)})(\mu_n^{(0)})^2} \left(\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)}) - \frac{1}{(\mu_n^{(0)})^2} ((\mu_n^{(0)})^3 - 4\mu_n^{(0)}) J_1(\mu_n^{(0)}) \right) = \\ &= \frac{128}{J_1^2(\mu_n^{(0)})(\mu_n^{(0)})^2} \frac{4J_1(\mu_n^{(0)})}{\mu_n^{(0)}} = \left(\frac{8}{\mu_n^{(0)}} \right)^3 \frac{1}{J_1(\mu_n^{(0)})}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в общее решение (10), с учетом соотношения $a^2 = 64$ получаем ответ:

$$u(t, r) = 8^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(0)})^3 J_1(\mu_n^{(0)})} e^{-t(\mu_n^{(0)})^2} J_0 \left(\frac{r}{8} \mu_n^{(0)} \right).$$

Анализ сходимости этого ряда представляет некоторые затруднения, так как мы не располагаем простыми формулами для беселевых функций. Используем асимптотику:

$$\begin{aligned} J_0(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \rightarrow \infty), \\ J_1(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (x \rightarrow \infty), \\ \mu_n^{(0)} &\approx -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

из которой получаем:

$$J_1(\mu_n^{(0)}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_n^{(0)}}} \cos\left(\mu_n^{(0)} - \frac{3\pi}{4}\right) \approx (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_n^{(0)}}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Приведенные вычисления показывают, что изучаемый ряд для функции $u(t, r)$ асимптотически эквивалентен следующему ряду:

$$u(t, r) \sim c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\mu_n^{(0)})^{\frac{5}{2}}} e^{-t(\mu_n^{(0)})^2} J_0\left(\frac{r}{8} \mu_n^{(0)}\right), \quad (15)$$

где c — некоторая постоянная. Если выбрать аргумент t положительным, то члены ряда (15) приобретают быстро убывающий вместе с номером $n = 1, 2, \dots$ множитель $e^{-t(\mu_n^{(0)})^2}$, который обеспечивает равномерную сходимость в области $t \geq t_0 > 0$, $r \in [0, r_0]$ как самого ряда, так и всех его частных производных по t и r . Другими словами, в указанной области функция $u(t, r)$ бесконечно дифференцируема по обоим переменным и удовлетворяет уравнению теплопроводности и краевому условию $u|_{r=r_0} = 0$.

Если считать, что $t \geq 0$, то ввиду оценок $e^{-t(\mu_n^{(0)})^2} \leq 1$ и $\left|J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)}\right)\right| \leq 1$ ряд для решения $u(t, r)$ мажорируется числовым рядом $c \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^{(0)})^{-5/2}$, который сходится в силу асимптотики $\mu_n^{(0)} \approx -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \rightarrow \infty$). В результате ряд для функции $u(t, r)$ сходится абсолютно и равномерно в замкнутой области $t \geq 0$, $r \in [0, r_0]$, определяя там непрерывную функцию двух переменных.

Все изложенное показывает, что функция $u(t, r)$ является классическим решением поставленной в примере 1 задачи, именно, эта функция достаточное число раз непрерывно дифференцируема и

удовлетворяет уравнению теплопроводности в открытой области $t > 0$, $0 \leq r < r_0$, она непрерывна в замкнутой области $t \geq 0$, $0 \leq r \leq r_0$ и удовлетворяет краевому условию $u|_{r=r_0} = 0$.

ПРИМЕР 2. Решить задачу об остывании равномерно нагретого бесконечно длинного цилиндра радиуса r_0 , имеющего начальную температуру u_0 , если на его поверхности поддерживается температура, равная нулю.

РЕШЕНИЕ. Совместим ось цилиндра с осью Oz . Так как начальная температура не зависит от z , то и в дальнейшем она не будет зависеть от этой координаты, т.е. меняется только в поперечном сечении цилиндра. Другими словами, речь идет об уравнении теплопроводности в круге радиуса r_0 при условии радиальной симметрии. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} u_t = \Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 \leq r < r_0, \\ u|_{r=r_0} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Задача (16) является частным случаем общей задачи (8), (11) и потому, согласно предложению 1, следует вычислить коэффициенты заданной функции $f(r) = u_0$ по формулам (13):

$$A_n = \frac{2u_0}{r_0^2 J_1^2(\mu_n^{(0)})} \int_0^{r_0} r J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)}\right) dr.$$

Введем замены:

$$\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)} = x, \quad r = \frac{r_0 x}{\mu_n^{(0)}}, \quad dr = \frac{r_0}{\mu_n^{(0)}} dx, \quad 0 \leq x \leq \mu_n^{(0)}.$$

Тогда

$$A_n = \frac{2u_0}{J_1^2(\mu_n^{(0)}) (\mu_n^{(0)})^2} \int_0^{\mu_n^{(0)}} x J_0(x) dx = \frac{2u_0}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})}.$$

Найденные значения коэффициентов A_n подставляем в общее решение (10), что приводит к ответу:

$$u(t, r) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})} e^{-ta^2 k_n^2} J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)}\right), \quad k_n = \frac{1}{r_0} \mu_n^{(0)}. \quad (17)$$

Проанализируем полученный ряд. Если значение $t > 0$, то ряд (17) сходится равномерно в каждой области $t \geq t_0 > 0$, $r \in [0, r_0]$, определяя бесконечно дифференцируемую функцию двух

переменных, за счет быстро убывающих множителей $e^{-ta^2k_n^2}$. При $t = 0$ получается ряд

$$u(0, r) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{(0)} J_1(\mu_n^{(0)})} J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_n^{(0)}\right) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq r < r_0, \\ 0, & r = r_0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что для значений $r < r_0$ ряд сходится к непрерывной функции $u(0, r) \equiv u_0$. При $r = r_0$ функция $u(0, r)$ терпит разрыв, что не согласуется с заданием начальной функции $u|_{r=r_0} \equiv u_0$. Следовательно, ряд (17) задает обобщенное решение рассматриваемой задачи, так как это решение терпит разрыв первого рода в точке $t = 0, r = r_0$. Следует подчеркнуть, что для приложений поведение решения при $t \rightarrow 0$ не играет особой роли. Гораздо важнее структура решения при больших значениях времени t . Ряд (17) показывает, что, когда t велико, то можно ограничиться всего одним слагаемым. В частности, на оси цилиндра

$$u(t, r)|_{r=0} \approx \frac{2u_0}{\mu_1^{(0)} J_1(\mu_1^{(0)})} e^{-ta^2k_1^2} \approx (1, 6) e^{-(5,8)\tau} u_0, \quad \tau = \frac{a^2 t}{r_0}.$$

Таким образом, на оси цилиндра температура убывает экспоненциально относительно времени t .

2.9. Колебания круглой мембраны для случая радиальной симметрии

Рассмотрим волновое уравнение на плоскости:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (1)$$

Оно описывает колебания круглой мембраны. Предположим, что мембрана совмещена с кругом радиуса r_0 с центром в начале координат. Для решения уравнения (1) применим метод разделения переменных. Ищем решения вида $u(t, x, y) = T(t)v(x, y)$. Подстановка указанного произведения в уравнение (1) приводит к равенству $T''(t)v = a^2 T(t) \Delta v$, которое после деления на $a^2 T v$ принимает вид:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta v}{v} \quad (= -k^2). \quad (2)$$

Обе части уравнения (2) равны одному и тому же числу, которое обозначено $-k^2$ и указано в скобках. В результате из (2) получаем

два новых уравнения с единым параметром k :

$$T''(t) + a^2 k^2 T(t) = 0; \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (4)$$

Второе из приведенных уравнений — это уравнение Гельмгольца в круге. Если ограничиться случаем радиальной симметрии, то решения уравнения Гельмгольца могут быть представлены одной функцией Бесселя: $v(r) = A_0 J_0(kr)$. Параметр k пока не определен. Дополним уравнение (1) простейшим краевым условием:

$$u|_{r=r_0} = 0. \quad (5)$$

Из (5) вытекает, что $v|_{r=r_0} = 0$, и мы приходим к уравнению $J_0(kR) = 0$. Напомним, что решения уравнения $J_0(x) = 0$ обозначены $\mu_m^{(0)}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, их счетное число, и потому получаем счетное число решений уравнения $J_0(kr_0) = 0$, именно, $k_m r_0 = \mu_m^{(0)}$, откуда $k_m = \mu_m^{(0)} / r_0$. Каждому такому числу k_m отвечает решение уравнения Гельмгольца (4):

$$v_m(r) = A_m J_0(k_m r) = A_m J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Вернемся к уравнению (3). Оно неоднократно решалось ранее, и его общее решение имеет вид

$$T(t) = C \cos akt + D \sin akt. \quad (7)$$

Так как уравнения (3) и (4) решаются для одинаковых значений параметра k , то в общее решение (7) необходимо подставить $k = k_m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, что приводит к счетному числу решений:

$$T_m(t) = C_m \cos ak_m t + D_m \sin ak_m t, \quad k_m = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(0)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Объединяя решения задач (3) и (4), получаем счетное число радиальных решений уравнения колебаний круглой мембраны при первом однородном краевом условии:

$$u_m(t, r) = (a_m \cos ak_m t + b_m \sin ak_m t) J_0(k_m r), \quad (8)$$

где $k_m = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(0)}$, $\mu_m^{(0)}$ — нули функции $J_0(x)$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u|_{r=r_0} = 0 \quad (9)$$

в круге радиуса r_0 для случая радиальной симметрии допускает счетное число решений (8).

Согласно принципу суперпозиции решением задачи (9) является также ряд

$$u(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos ak_m t + b_m \sin ak_m t) J_0(k_m r), \quad (10)$$

который назовем общим решением задачи (9) при условии его сходимости. Чтобы определить коэффициенты ряда (10), дополним задачу (9) начальными условиями, которые для случая радиальной симметрии имеют вид:

$$u|_{t=0} = f(r), \quad u_t|_{t=0} = g(r), \quad 0 \leq r < R, \quad (11)$$

где f и g — заданные функции. Подставим в общее решение (10) значение $t = 0$ и результат приравняем функции $f(r)$ согласно первому начальному условию в (11):

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(k_m r). \quad (12)$$

Мы получили разложение заданной функции $f(r)$ в ряд по функциям Бесселя. Коэффициенты ряда (12) вычисляются по известным нам формулам:

$$a_m = \frac{2 \int_0^{r_0} r f(r) J_0(k_m r) dr}{r_0^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}, \quad k_m = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(0)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Общее решение (10) содержит еще неизвестные коэффициенты b_m . Для их определения предварительно вычислим частную производную общего решения (10) по переменной t :

$$u_t(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} ak_m (-a_m \sin ak_m t + b_m \cos ak_m t) J_0(k_m r).$$

Подставим в ряд для u_t значение $t = 0$ и результат приравняем функции $g(r)$ согласно второму начальному условию в (11):

$$g(r) = \sum_{m=1}^{\infty} ak_m b_m J_0(k_m r).$$

Получается ряд того же типа, что и (12), поэтому коэффициенты b_m вычисляются по формулам:

$$b_m = \frac{2 \int_0^{r_0} r g(r) J_0(k_m r) dr}{a k_m r_0^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}, \quad k_m = \frac{1}{r_0} \mu_m^{(0)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Подведем общий итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить первую начально-краевую задачу (9), (11) для волнового уравнения в круге радиуса r_0 в случае радиальной симметрии методом Фурье, следует вычислить коэффициенты разложения заданных функций $f(r)$ и $g(r)$ в ряды по бесселевым функциям по формулам (13) и (14), и результаты подставить в формулу общего решения (10).*

ПРИМЕР 1. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения в круге:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 15\Delta u, \quad 0 \leq r < 15, \quad 0 < t < \infty, \quad u|_{r=15} = 0, \\ u|_{t=0} &= \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{r}{15} \right)^2 \right), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Сравнивая пример с абстрактной постановкой (9), (11), заключаем, что параметр $a^2 = 15$, радиус круга $r_0 = 15$, начальные функции $f(r) = \frac{1}{8}(1 - (\frac{r}{15})^2)$ и $g(r) = 0$. Согласно предложению 1 вычисляем коэффициенты a_m :

$$a_m = \frac{2}{15^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^{15} \frac{r}{8} \left(1 - \left(\frac{r}{15} \right)^2 \right) J_0 \left(\frac{r}{15} \mu_m^{(0)} \right) dr.$$

Введем замены:

$$\frac{r}{15} \mu_m^{(0)} = x, \quad r = \frac{15x}{\mu_m^{(0)}}, \quad dr = \frac{15dx}{\mu_m^{(0)}}, \quad 0 \leq x \leq \mu_m^{(0)}.$$

Они приводят вычисляемый интеграл к виду:

$$a_m = \frac{1}{4 J_1^2(\mu_m^{(0)}) (\mu_m^{(0)})^2} \int_0^{\mu_m^{(0)}} x \left(1 - \frac{x^2}{(\mu_m^{(0)})^2} \right) J_0(x) dx.$$

Используем интегралы, вычисленные в предыдущем разделе:

$$\int_0^{\mu_m^{(0)}} x J_0(x) dx = \mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)}),$$

$$\int_0^{\mu_m^{(0)}} x^3 J_0(x) dx = \mu_m^{(0)} ((\mu_m^{(0)})^2 - 4) J_1(\mu_m^{(0)}).$$

Теперь можно закончить вычисление коэффициентов a_m :

$$a_m = \frac{1}{J_1(\mu_m^{(0)})(\mu_m^{(0)})^3}.$$

Очевидно также, что коэффициенты $b_m = 0$ для всех $m = 1, 2, 3, \dots$. Подставляя найденные значения коэффициентов в общее решение (10), получаем ответ:

$$u(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos a k_m t}{J_1(\mu_m^{(0)})(\mu_m^{(0)})^3} J_0\left(\frac{r}{15} \mu_m^{(0)}\right), \quad k_m = \frac{1}{15} \mu_m^{(0)}. \quad (15)$$

Для анализа сходимости полученного ряда (15) используем асимптотику, полученную в предыдущем разделе:

$$J_1(\mu_m^{(0)}) \sim (-1)^{m-1} \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_m^{(0)}}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\mu_m^{(0)} \sim -\frac{\pi}{4} + \pi m \quad (m \rightarrow \infty).$$

Для ряда (15) находим следующую асимптотику:

$$u(t, r) \sim c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(\mu_m^{(0)})^{\frac{5}{2}}} \cos \frac{a \mu_m^{(0)} t}{15} J_0\left(\frac{r}{15} \mu_m^{(0)}\right). \quad (16)$$

Ряд (16) мажорируется числовым рядом

$$c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^{\frac{5}{2}}},$$

который сходится в силу асимптотики $\mu_m^{(0)} \sim -\frac{\pi}{4} + \pi m$ ($m \rightarrow \infty$). Поэтому можно утверждать, что функция $u(t, r)$, представленная рядом (15), непрерывна в замкнутой области $t \geq 0$, $0 \leq r \leq r_0$. Аналогично проверяется, что первые частные производные u_t и u_x также непрерывны в указанной области. А вот ряды для вторых

частных производных u_{tt} и u_{xx} сходятся условно, задавая разрывные функции. Отсюда следует, что полученное в форме ряда (15) решение является обобщенным.

2.10. Уравнение теплопроводности в цилиндре для случая радиальной симметрии

Пусть задан прямой круговой цилиндр V высоты h и с радиусом основания r_0 . Считаем, что ось цилиндра направлена вдоль оси Oz и его основание лежит в плоскости xOy . В цилиндре V рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < h, \quad t > 0. \quad (1)$$

Введем в пространстве цилиндрическую систему координат: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Ясно, что в плоскости xy введена полярная система, для которой нам известно равенство

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

приводящее уравнение (1) к виду:

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz} \right), \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < h, \quad t > 0. \quad (2)$$

Чтобы несколько упростить постановку задачи, предположим, что ищутся радиально-симметрические решения, т.е. функции $u = u(t, r, z)$, в которых отсутствует переменная φ . Тогда $u_{\varphi\varphi} = 0$ и вместо (2) остается уравнение

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} \right), \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < h, \quad t > 0. \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) применим метод разделения переменных. Предварительно отделим переменную t , т.е. ищем решения в форме произведения $u(t, r, z) = T(t)v(r, z)$. Подставляя указанное произведение в уравнение (3), приведем его к виду

$$T'v = a^2 \left(Tv_{rr} + \frac{1}{r}Tv + Tv_{zz} \right),$$

или после деления на $a^2 T v$:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + v_{zz}}{v} \quad (= -k^2). \quad (4)$$

Переменные разделились, и потому обе части уравнения (4) равны единой постоянной, которая обозначена $-k^2$ и указана в скобках в (4). В результате соотношения (4) приводят к двум уравнениям с параметром:

$$T'(t) + a^2 k^2 T(t) = 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + v_{zz} + k^2 v = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < h. \quad (6)$$

К уравнению (6) снова применим метод разделения переменных, разыскивая решения вида $v(r, z) = R(r)Z(z)$. Подставляя указанное произведение в уравнение (6), получаем:

$$R''(z)Z(z) + \frac{1}{r} R'(z)Z(z) + R(z)Z''(z) + k^2 R(z)Z(z) = 0,$$

или после деления на $R(z)Z(z)$:

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - k^2 \quad (= -\lambda^2). \quad (7)$$

Переменные разделились, и потому обе части уравнения равны единой постоянной, которая обозначена $-\lambda^2$ и указана в скобках. В результате из (7) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \lambda^2 R = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (8)$$

$$Z''(z) + \nu^2 Z(z) = 0, \quad \nu^2 + \lambda^2 = k^2, \quad 0 < z < h. \quad (9)$$

Подведем промежуточный итог. Разыскиваются решения уравнения (3), имеющие форму произведения трех функций:

$$u(t, r, z) = T(t)R(r)Z(z). \quad (10)$$

Дополним уравнение (3) простейшим краевым условием $u|_S = 0$, где S — полная граница цилиндра V . Очевидно, что полная граница цилиндра состоит из боковой поверхности S_B и двух оснований S_0 и S_h с уравнениями $z = 0$ и $z = h$ соответственно. Боковую поверхность S_B можно записать уравнением $r = r_0$, в результате

чего условие $u|_S = 0$ можно более детально представить в следующем виде:

$$u|_{r=r_0} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = 0.$$

Из представления (10) вытекает, что

$$R(r_0) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0. \quad (11)$$

Условия (11) припишем к уравнениям (8) и (9). В результате получаются следующие краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'r + \lambda^2 R(r) = 0, \quad R(r_0) = 0, \quad R(0) < \infty, \quad (12)$$

$$Z''(z) + \nu^2 Z(z) = 0, \quad Z(0) = Z(h) = 0, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (13)$$

Задача (12) изучена в предыдущих разделах. Она допускает ненулевые решения $R_m(r) = J\left(\frac{r}{r_0}\mu_m^{(0)}\right)$, где $\mu_m^{(0)}$ — нули бесселевой функции $J_0(x)$, для счетного числа значений $\lambda = \mu_m^{(0)}/r_0$ ($m = 1, 2, \dots$). Задача (13) также решалась неоднократно. Она допускает ненулевые решения $Z_n(z) = \sin \frac{\pi n z}{h}$ для значений $\nu_n = \frac{\pi n}{h}$ ($n = 1, 2, \dots$). Из равенства $k^2 = \nu^2 + \lambda^2$ находим двойную последовательность

$$k_{nm}^2 = \nu_n^2 + \lambda_m^2 = \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_0}\mu_m^{(0)}\right)^2 \quad (n, m = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Именно для выписанных чисел $k^2 = k_{nm}^2$ ($n, m = 1, 2, \dots$) следует решать уравнение (5), что приводит к последовательности

$$T_{nm}(t) = A_{nm} e^{-ta^2 k_{nm}^2} \quad (n, m = 1, 2, \dots).$$

Итак, получены все множители для произведения (10). Собирая их вместе, приходим к следующему произведению для $n, m = 1, 2, \dots$:

$$u_{nm}(t, r, z) = A_{nm} e^{-ta^2 k_{nm}^2} J_0\left(\frac{r}{r_0}\mu_m^{(0)}\right) \sin \frac{\pi n z}{h}, \quad (15)$$

в котором использовано обозначение (14).

Прямым вычислением убеждаемся, что представленные функции u_{nm} действительно являются решениями уравнения теплопроводности (3) в цилиндре и удовлетворяют краевому условию $u|_S = 0$, так что оказывается справедливым следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение теплопроводности в цилиндре (3) для случая радиальной симметрии допускает счетное число решений (15), которые удовлетворяют первому краевому условию $u|_S = 0$.

Сумму частных решений (15) назовем общим решением уравнения теплопроводности в цилиндре для случая радиальной симметрии при условии сходимости двойного ряда

$$u(t, r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{-ta^2 k_{nm}^2} J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right) \sin \frac{\pi n z}{h} \quad (16)$$

для каждого $t \geq 0$, $r \in [0, r_0]$ и $z \in [0, h]$.

Для определения произвольных постоянных общего решения дополним рассматриваемую задачу начальным условием

$$u|_{t=0} = f(r, z), \quad (17)$$

считая функцию $f(r, z)$ определенной на множестве $r \in [0, r_0]$, $z \in [0, h]$. Подставив общее решение (16) в начальное условие (17), приходим к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right) \sin \frac{\pi n z}{h} = f(r, z), \quad (18)$$

которое показывает, что заданную функцию $f(r, z)$ следует разложить в двойной ряд Фурье, для чего действуем последовательно. Сначала, считая аргумент r фиксированным, вычислим коэффициенты $f_n(r)$ разложения функции в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, h]$:

$$f(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \sin \frac{\pi n z}{h}, \quad (19)$$

где

$$f_n(r) = \frac{1}{h} \int_0^h f(r, z) \sin \frac{\pi n z}{h} dz \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

А затем каждую функцию $f_n(r)$ разложим в ряд Фурье по бесселевым функциям на отрезке $[0, r_0]$:

$$f_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} J_0 \left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)} \right), \quad (21)$$

где для $m = 1, 2, \dots$

$$f_{nm} = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^{r_0} r f_n(r) J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)}\right) dr. \quad (22)$$

Подставляя (21) в ряд (19), получаем разложение функции $f(r, z)$ в двойной ряд Фурье:

$$f(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} J_0\left(\frac{r}{r_0} \mu_m^{(0)}\right) \sin \frac{\pi n z}{h}. \quad (23)$$

Сравнение двойных рядов (18) и (23) показывает, что $A_{nm} = f_{nm}$ для всех $n, m = 1, 2, \dots$.

Подведем общий итог.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в цилиндре при условии радиальной симметрии*

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta u, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < h, \quad t > 0, \\ u|_S &= 0, \quad u|_{t=0} = f(r, z), \end{aligned}$$

следует вычислить коэффициенты Фурье заданной функции $f(r, z)$ по формулам (20) и (22), затем использовать равенство $A_{nm} = f_{nm}$, и найденные значения коэффициентов A_{nm} подставить в общее решение (16).

Как обычно, полученный двойной ряд требуется изучить на сходимость.

ПРИМЕР 1. Найти решение уравнения теплопроводности в цилиндре при указанных условиях:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta u, \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 < z < 5, \quad t > 0, \\ u|_S &= 0, \quad u|_{t=0} = \left(1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right) \sin \frac{\pi z}{5}. \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Сравнение с общей постановкой задачи, представленной в предложении 1, показывает, что

$$r_0 = 2, \quad h = 5, \quad f(r, z) = \left(1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right) \sin \frac{\pi z}{5}.$$

Функция $f(r, z)$ является тригонометрическим многочленом по переменной z , так что согласно соотношениям (19)

$$f_n(r) \equiv 0 \quad (n \neq 1), \quad f_1(r) = 1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

По формулам (22) находим

$$f_{1m} = \frac{1}{2J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^2 r \left(1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right) J_0\left(\frac{r}{2}\mu_m^{(0)}\right) dr.$$

Замены

$$\frac{r}{2}\mu_m^{(0)} = x, \quad r = \frac{2x}{\mu_m^{(0)}}, \quad dr = \frac{2dx}{\mu_m^{(0)}}, \quad 0 \leq x \leq \mu_m^{(0)}$$

приводят интеграл к виду

$$f_{1m} = \frac{2}{J_1^2(\mu_m^{(0)})(\mu_m^{(0)})^2} \int_0^{\mu_m^{(0)}} \left(x - \frac{x^3}{(\mu_m^{(0)})^2} J_0(x)\right) dx.$$

Последний интеграл уже вычислялся, поэтому воспользуемся готовым результатом:

$$\int_0^{\mu_m^{(0)}} \left(x - \frac{x^3}{(\mu_m^{(0)})^2} J_0(x)\right) J_0(x) dx = \frac{4}{\mu_m^{(0)}} J_1(\mu_m^{(0)}),$$

так что окончательно

$$f_{1m} = \frac{8}{(\mu_m^{(0)})^3} \frac{1}{J_1(\mu_m^{(0)})}.$$

С учетом равенств $A_{nm} = f_{nm}$ для $n, m = 1, 2, \dots$ получаем ответ:

$$u(t, r, z) = 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^3} \frac{1}{J_1(\mu_m^{(0)})} e^{-ta^2 k_{1m}^2} J_0\left(\frac{r}{2}\mu_m^{(0)}\right) \sin \frac{\pi z}{5}, \quad (24)$$

где

$$k_{1m}^2 = \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mu_m^{(0)}\right)^2.$$

Сходимость рядов по бесселевым функциям детально изучалась в предыдущих разделах, поэтому приведем только окончательный результат. Ряд (24) мажорируется сходящимся числовым рядом

$c \sum_{m=1}^{\infty} m^{-5/2}$, где c — некоторая постоянная, и потому представленная рядом (24) функция $u(t, r, z)$ непрерывна на замкнутом множестве $t \geq 0$, $r \in [0, 2]$, $z \in [0, 5]$. Ряд (24) есть классическое решение поставленной задачи. Действительно, в области

$$\Omega = \{t > 0, 0 \leq r < 2, 0 < z < 5\}$$

каждый член ряда приобретает быстро убывающий вместе с номером m множитель $e^{-ta^2 k_{1m}^2}$, в результате чего представляемая рядом (24) функция становится достаточное число раз дифференцируемой по всем своим аргументам и удовлетворяет уравнению теплопроводности. Если считать аргумент t большим, то решение приближается достаточно хорошо уже первым слагаемым ряда (24), так что при $t \rightarrow \infty$

$$u(t, r, z) \approx \frac{8}{(\mu_1^{(0)})^3} \frac{1}{J_1(\mu_m^{(0)})} e^{-ta^2 k_{11}^2} \sin \frac{\pi z}{5},$$

где $k_{11}^2 = \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mu_1^{(0)}\right)^2$.

ГЛАВА 3

Уравнения в сферической системе координат

Мы приступаем к изучению уравнений с тремя пространственными переменными. При решении уравнений математической физики одним из самых мощных является метод Фурье, или метод разделения переменных. Если область, в которой рассматривается уравнение, имеет вид параллелепипеда, то разделение переменных приводит к трем дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Если же область отлична от параллелепипеда, то соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения получаются более сложными. Например, разделение переменных в шаре приводит к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, решениями которого являются специальные функции, известные как функции Лежандра. На их основе строятся новые специальные функции двух переменных, получившие название сферических функций и гармонических полиномов. Указанные классы функций дают возможность эффективно решать реальные краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаре и шаровом слое.

3.1. Функции Лежандра

3.1.1. Многочлены Лежандра. Дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид для $m = 0, 1, 2, \dots$

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)y(x) = 0. \quad (1)$$

Это линейное однородное уравнение с переменными коэффициентами, которое допускает нулевое решение $y(x) \equiv 0$. Поэтому ищутся решения $y(x)$, отличные от тождественного нуля, а также

значения параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, которым соответствуют ненулевые решения. Другими словами, ставится задача на собственные значения. Согласно общей теории дифференциальных уравнений решения линейного уравнения существуют там, где определены коэффициенты. Если уравнение (1) записать в нормальной форме, т.е. выделить $y''(x)$, то становится очевидно, что его коэффициенты терпят разрыв в точках $x = \pm 1$, и потому решения уравнения Лежандра существуют в интервалах $x < -1$, $-1 < x < 1$, $x > 1$. Наибольший интерес представляют решения, определенные для $-1 < x < 1$. На концах указанного интервала решения могут не существовать, так что в качестве краевого ставится специальное условие: найти те решения уравнения (1), которые определены на отрезке $[-1, 1]$, включая его концы. Этого достаточно, чтобы выделить счетное множество значений параметра λ , для каждого из которых определено единственное решение уравнения (1) с точностью до постоянного множителя.

Необходимо подчеркнуть, что за счет параметра $m = 0, 1, 2, \dots$ за соотношениями (1) скрывается на самом деле счетное число различных дифференциальных уравнений. Чтобы ближе познакомиться с введенным уравнением, найдем его общее решение в простейшем случае $m = 0$ и $\lambda = 0$. При указанных условиях уравнение примет вид

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

После замены $y' = z$ получаем уравнение первого порядка

$$(1 - x^2)z' - 2xz = 0,$$

которое легко решается методом разделения переменных:

$$(1 - x^2)\frac{dz}{dx} = 2xz; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{1 - x^2}.$$

Интегрирование приводит к равенству

$$\ln |z| = -\ln |1 - x^2| + \ln c,$$

где c — произвольная постоянная. С учетом замены $y' = z$ приходим к соотношению

$$y' = \frac{c}{1 - x^2},$$

из которого находим общее решение уравнения (2):

$$y = \frac{c}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c_1, \quad (3)$$

где c_1 — еще одна произвольная постоянная. Формула (3) показывает, что уравнение (2) допускает два частных решения:

$$y_1(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, \quad y_2(x) \equiv 1.$$

Решение $y_1(x)$ терпит бесконечный разрыв в точках $x = \pm 1$, тогда как решение $y_2(x)$ представляет собой многочлен степени нуль, который определен на всей оси $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим еще один частный случай уравнения Лежандра (1), полагая $m = 0$, что приводит к задаче на собственные значения

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (4)$$

Ее решения удастся найти в форме многочленов

$$P_n^{(0)}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (5)$$

произвольной степени $n = 0, 1, 2, \dots$ для определенных значений параметра $\lambda = \lambda_n$. Убедимся в этом на примерах многочленов наименьших степеней. Пусть $n = 0$. Ищем решение вида $y(x) \equiv a_0$, $a_0 = \text{const}$. Подставляя равенство $y = a_0$ в уравнение (4), приведем его к виду $\lambda a_0 = 0$. Считая $a_0 \neq 0$, находим значение параметра $\lambda = \lambda_0 = 0$. Итак, при $\lambda = 0$ уравнение (4) допускает решение в форме многочлена нулевой степени $y(x) = a_0$. Этот же результат мы получили, когда нашли общее решение уравнения (2).

Пусть теперь $n = 1$. Ищем решение уравнения (4) вида $y(x) = a_1 x + a_0$, так что $y'(x) = a_1$, $y''(x) = 0$. Подставляя приведенные выражения в уравнение (4), приведем его к виду

$$-2xa_1 + \lambda(a_1 x + a_0) = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(\lambda - 2)a_1 = 0, \quad \lambda a_0 = 0.$$

Считая $a_1 \neq 0$, находим $\lambda = \lambda_1 = 2$ и $a_0 = 0$. Следовательно, дифференциальное уравнение (4) допускает в качестве решения

многочлен первой степени $y(x) = a_1x$, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$.

Для $n = 2$ ищем решение вида $y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, откуда $y'(x) = 2a_2x + a_1$, $y''(x) = 2a_2$. Подставляя приведенные равенства в уравнение (4), получаем

$$2a_2(1 - x^2) - 2x(2a_2x + a_1) + \lambda(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к системе:

$$(\lambda - 6)a_2 = 0, \quad (\lambda - 2)a_1 = 0, \quad \lambda a_0 + 2a_2 = 0.$$

Считая старший коэффициент $a_2 \neq 0$, получаем соотношения: $\lambda = \lambda_2 = 6$, $a_1 = 0$, $a_0 = -\frac{1}{3}a_2$. Следовательно, уравнение (4) допускает в качестве решения многочлен $y(x) = a_2(x^2 - \frac{1}{3})$ для собственного значения $\lambda = 6$.

Чтобы получить общий закон для собственных чисел $\lambda = \lambda_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), подставим функцию $y(x) = P_n^{(0)}(x)$ вида (5) в дифференциальное уравнение (4). Сохраняя для наглядности только старшие степени x , получаем:

$$\begin{aligned} (1 - x^2)[a_n n(n-1)x^{n-2} + a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots] - \\ - 2x[a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots] + \\ + \lambda(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x и приравняем их нулю, что приводит к равенствам:

$$x^n : -a_n n(n-1) - 2a_n n + \lambda a_n = 0; \quad (6)$$

$$x^{n-1} : -a_{n-1}(n-1)(n-2) - 2a_{n-1}(n-1) + \lambda a_{n-1} = 0. \quad (7)$$

Считая старший коэффициент $a_n \neq 0$, из (6) находим $\lambda = n(n+1)$. Из равенства (7) при $\lambda = n(n+1)$ получаем $a_{n-1} = 0$. Аналогично можно вычислить остальные коэффициенты многочлена $P_n^{(0)}(x)$. Обратим внимание, что многочлен $P_n^{(0)}(x)$ получается для конкретного значения параметра

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Совокупность значений λ_n образует спектр дифференциального уравнения (2). Каждому значению спектра λ_n соответствует многочлен $P_n^{(0)}(x)$ степени n как решение уравнения (2). Эти многочлены нормируются дополнительным условием $P_n^{(0)}(1) = 1$, и в этом случае называются многочленами Лежандра и обозначаются $P_n(x)$.

Многочлены Лежандра определены для всех значений аргумента $x \in \mathbb{R}$, однако чаще всего они используются только для $-1 \leq x \leq 1$. Это объясняется тем, что на указанном отрезке многочлены Лежандра обладают особыми свойствами, которые приводятся ниже.

1) Справедливо неравенство $|P_n(x)| \leq 1$ для всех значений $x \in [-1, 1]$ и всех индексов $n = 0, 1, 2, \dots$.

2) Каждый многочлен $P_n(x)$ степени n имеет точно n нулей в интервале $(-1, 1)$.

3) Известны значения интегралов:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

4) Следующие равенства называются условиями ортогональности многочленов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m).$$

5) Многочлены Лежандра можно представить компактной явной формулой:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

ПРИМЕР 1. Для наименьших номеров ($n = 0, 1, 2, 3$) получаем следующие явные выражения многочленов Лежандра:

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

3.1.2. Функции Лежандра. Вернемся к общему уравнению Лежандра (1). Аналогично предыдущему можно показать, что

ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ решения этого уравнения существуют только для значений $\lambda = \lambda_n$, определенных соотношениями (8). Каждому λ_n при фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$ отвечает решение уравнения (1), представимое явной формулой

$$P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (9)$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра. Введенные функции $P_n^{(m)}(x)$ называются функциями Лежандра. Очевидно, что $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$, т.е. при $m = 0$ функции Лежандра совпадают с многочленами Лежандра. Для $m \geq 1$ функции $P_n^{(m)}(x)$ называются присоединенными функциями Лежандра. Так как функции $P_n(x)$ являются многочленами степени n , то производные $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ для значений $m > n$ обращаются в нуль, и потому при каждом фиксированном $n = 0, 1, 2, \dots$ присоединенные функции $P_n^{(m)}(x)$ определены только для индексов $m \leq n$.

ПРИМЕР 2. Согласно определению (9) при $m = 1$ получаем

$$P_n^{(1)}(x) = \sqrt{1 - x^2} P'_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Используя результаты примера 1, находим:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(x) &= \sqrt{1 - x^2}, & P_2^{(1)}(x) &= 3x\sqrt{1 - x^2}, \\ P_3^{(1)}(x) &= \frac{3}{2}(5x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Из свойств присоединенных функций Лежандра отметим только их ортогональность на отрезке $[-1, 1]$ при каждом фиксированном $m = 0, 1, 2, \dots$. Более точно, справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx &= 0 \quad (n \neq k); \\ \int_{-1}^1 |P_n^{(m)}(x)|^2 dx &= \frac{2}{2n + 1} \frac{(n + m)!}{(n - m)!} \quad (k = n). \end{aligned}$$

Уравнение Лежандра может выступать в разнообразных формах. Рассмотрим один важный частный случай. На отрезке $0 \leq$

$\theta \leq \pi$ разыскивается функция $\Theta(\theta)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению для $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\Theta''(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta'(\theta) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0. \quad (10)$$

Введем новые переменные:

$$x = \cos \theta, \quad y(x) = y(\cos \theta) = \Theta(\theta). \quad (11)$$

Напомним формулы для вычисления производных сложной функции:

$$y'_\theta = y'_x x'_\theta, \quad y''_{\theta\theta} = y''_{xx} (x'_\theta)^2 + y'_x x''_{\theta\theta}. \quad (12)$$

В силу замен (11) имеем:

$$x'_\theta = -\sin \theta = -\sqrt{1-x^2}, \quad x''_{\theta\theta} = -\cos \theta = -x, \\ y'_\theta = \Theta'(\theta), \quad y''_{\theta\theta} = \Theta''(\theta).$$

В результате равенства (12) принимают следующую форму:

$$\Theta'(\theta) = -\sqrt{1-x^2} y'(x), \quad \Theta''(\theta) = (1-x^2) y''(x) - x y'(x).$$

Подставляя последние равенства в уравнение (10), приведем его к виду

$$(1-x^2) y''(x) - 2x y'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Получилось уравнение Лежандра, решения которого изучены выше. В частности, уравнение (13) допускает ограниченные ненулевые решения на отрезке $[-1, 1]$ только для значений

$$\lambda = n(n+1) \quad (n = m, m+1, \dots; m = 0, 1, 2, \dots).$$

Соответствующее решение — это функции Лежандра $y(x) = P_n^{(m)}(x)$. Учитывая замены (11), получаем решения уравнения (10) в следующей явной форме:

$$\Theta_n^{(m)}(\theta) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \quad (m = 0, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots).$$

ПРИМЕР 3. Приведем выражения решений $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ для малых индексов, опираясь на результаты примеров 1 и 2:

$$\begin{aligned} P_0^{(0)}(\cos \theta) &\equiv 1, & P_1^{(0)}(\cos \theta) &= \cos \theta; & P_1^{(1)}(\cos \theta) &= \sin \theta, \\ P_2^{(0)}(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), & P_2^{(1)}(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \sin 2\theta, \\ P_2^{(2)}(\cos \theta) &= 3 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

3.2. Уравнение Лапласа в шаровом слое для случая радиальной симметрии

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в пространстве переменных x, y, z имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Неизвестной является функция $u = u(x, y, z)$, которая должна быть непрерывной и обладать непрерывными частными производными до второго порядка включительно в области, где рассматривается уравнение (1). Будем решать уравнение Лапласа в шаровом слое V , т.е. в области, ограниченной двумя сферами радиусов R_1 и R_2 с единым центром в начале координат. Для определенности считаем $R_1 < R_2$. Ограничимся радиально симметричными решениями:

$$u = u(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad R_1 < r < R_2.$$

Вычислим оператор Лапласа относительно новой переменной r . Согласно общим формулам замены переменных имеем:

$$u_x = u_r r_x, \quad u_{xx} = u_{rr} r_x^2 + u_r r_{xx}.$$

Так как

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \\ r_{xx} &= \left(\frac{x}{r} \right)_x = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \end{aligned}$$

то

$$u_{xx} = u_{rr} \frac{x^2}{r^2} + u_r \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right).$$

По симметрии запишем еще два равенства:

$$u_{yy} = u_{rr} \frac{y^2}{r^2} + u_r \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right),$$

$$u_{zz} = u_{rr} \frac{z^2}{r^2} + u_r \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right).$$

Подставляя полученные результаты в уравнение (1), приведем его к виду

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = 0, \quad R_1 < r < R_2. \quad (2)$$

Получилось обыкновенное дифференциальное уравнение, которое легко решается заменой $u_r = v$, что приводит уравнение (2) к виду:

$$v_r + \frac{2}{r}v = 0. \quad (3)$$

К уравнению (3) применим метод разделения переменных:

$$\frac{dv}{dr} + \frac{2}{r}v = 0, \quad \frac{dv}{v} + 2\frac{dr}{r} = 0,$$

$$\ln |v| + 2 \ln r = \ln |c|, \quad vr^2 = c, \quad v = \frac{c}{r^2},$$

где c — произвольная постоянная.

Согласно замене имеем $u_r = \frac{c}{r^2}$, откуда

$$u = c_1 - \frac{c}{r}, \quad R_1 < r < R_2, \quad (4)$$

где c, c_1 — произвольные постоянные интегрирования.

Подведем итог. Мы выяснили, что каждое радиально симметричное решение уравнения Лапласа (1) одновременно удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (2), общее решение которого имеет вид (4). Следовательно, каждое радиально симметричное решение уравнения Лапласа в шаровом слое может быть представлено формулой (4) при подходящем выборе постоянных c, c_1 . Нетрудно убедиться прямым вычислением, что при любом выборе постоянных c и c_1 функция (4) имеет непрерывные частные производные всех порядков в пространстве \mathbb{R}^3 , за исключением начала координат, и удовлетворяет уравнению Лапласа (1). Другими словами, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для случая радиальной симметрии формула (4) представляет классическое общее решение уравнения Лапласа*

$\Delta u = 0$ во всем пространстве \mathbb{R}^3 , за исключением начала координат. В частности, справедливо тождество:

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad (r \neq 0).$$

Заметим, что общее решение (4) содержит всего две произвольные постоянные, и потому невелик класс задач, которые можно решать для случая радиальной симметрии. Приведем примеры.

ПРИМЕР 1. Найти решение краевой задачи в шаровом слое:

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2; \quad u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

РЕШЕНИЕ. Учитывая радиальную симметрию краевых условий, ищем решение задачи (5) в форме (4). Подставляя функцию $u = c_1 - c/r$ в краевые условия задачи (5), приходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$u|_{r=1} = c_1 - c = 0, \quad u|_{r=2} = c_1 - \frac{c}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим $c = 1$, $c_1 = 1$, так что ответ задачи (5) предстает в виде функции

$$u(r) = 1 - \frac{1}{r}, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

ПРИМЕР 2. Найти решение краевой задачи в шаровом слое:

$$\Delta u = 0, \quad \frac{1}{2} < r < 1; \quad u|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = 2. \quad (6)$$

РЕШЕНИЕ. Снова ищем решение в форме (4), т.е. в виде $u = c_1 - c/r$. При подстановке функции $u(r)$ в граничные условия задачи (6) необходимо учесть, что для случая внешней сферы с уравнением $r = 1$ направление внешней нормали n совпадает с направлением r , так что

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=1}.$$

Так как $\partial u / \partial r = c/r^2$, то приходим к системе алгебраических уравнений:

$$u|_{r=\frac{1}{2}} = c_1 - 2c = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = \frac{c}{r^2}|_{r=1} = c = 2.$$

Итак, $c = 2$, $c_1 = 4$, так что решение примера 2 представляет функцию

$$u(r) = 4 - \frac{2}{r}, \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1.$$

3.3. Общий случай уравнения Лапласа в шаровом слое

Продолжим изучение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в шаровом слое v , ограниченном двумя сферами радиусов R_1 и R_2 с единым центром в начале координат. Учитывая геометрию области V , перейдем к сферической системе координат с переменными r , φ , θ . Чтобы описать шаровой слой, новые переменные должны изменяться в следующих пределах:

$$R_1 < r < R_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Напомним также связи новых переменных с декартовыми координатами:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Из курса математического анализа известно, что уравнение Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\delta u = 0, \quad (1)$$

где оператор Бельтрами – Лапласа δ на сфере определяется формулой

$$\delta u = \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} + u_{\theta\theta} + \operatorname{ctg} \theta u_{\theta}. \quad (2)$$

Для решения уравнения (1) применим метод Фурье. Чтобы отделить переменную r , ищем решения в форме произведения $u = R(r)Y(\varphi, \theta)$. Подстановка функции $u = RY$ в уравнение (1) приводит к соотношению

$$R''(r)Y + \frac{2}{r}R'(r)Y + \frac{1}{r^2}R(r)\delta Y = 0,$$

которое после умножения на дробь $\frac{r^2}{RY}$ принимает вид

$$\frac{r^2 R''(r) + 2r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\delta Y}{Y} \quad (= \lambda). \quad (3)$$

Левая часть равенства (3) зависит только от переменной r , а правая — от других переменных φ и θ , поэтому обе части равны

постоянному числу, которое обозначено λ и указано в скобках в (3). В результате из (3) получаем два новых уравнения с одним и двумя переменными соответственно:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0; \quad R_1 < r < R_2; \quad (4)$$

$$\delta Y(\varphi, \theta) + \lambda Y(\varphi, \theta) = 0; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5)$$

Сначала рассмотрим уравнение (5), называемое уравнением Лапласа на сфере. Учитывая явное выражение оператора Бельтрами–Лапласа (2), перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} Y_{\varphi\varphi} + Y_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} Y_{\theta} + \lambda Y = 0. \quad (6)$$

Это есть дифференциальное уравнение в частных производных с двумя переменными. Решаем его также методом Фурье, т.е. ищем решение в виде $Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi)\Theta(\theta)$. Подставив указанное произведение в уравнение (6), получим

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \Phi''(\varphi)\Theta(\theta) + \Phi(\varphi)\Theta''(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Phi(\varphi)\Theta'(\theta) + \lambda \Phi(\varphi)\Theta(\theta) = 0.$$

Обе части последнего равенства умножим на $\sin^2 \theta$, разделим на произведение $\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$ и результат запишем в виде

$$\frac{\Theta''(\theta) \sin^2 \theta + \Theta'(\theta) \sin \theta \cos \theta + \lambda \Theta(\theta) \sin^2 \theta}{\Theta(\theta)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \quad (= \mu). \quad (7)$$

Левая часть равенства (7) зависит только от переменной θ , а правая — от другой переменной φ , следовательно, обе части равны постоянному числу, которое обозначено μ и указано в скобках в (7). В результате из (7) получаем два новых обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Theta''(\theta) \sin^2 \theta + \Theta'(\theta) \sin \theta \cos \theta + (\lambda \sin^2 \theta - \mu)\Theta(\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad (8)$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \quad (9)$$

Используя геометрический смысл переменной φ как угла в плоскости, заключаем, что в задаче (9) разыскиваются периодические решения с периодом 2π . Решение такой задачи нам известно: она допускает ненулевые решения только для собственных значений

$\mu_m = m^2$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Каждому собственному значению соответствует собственная функция

$$\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (10)$$

в которой A_m, B_m — произвольные постоянные.

Перейдем к уравнению (8), считая, что значения параметра $\mu = m^2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) уже известны. Другими словами, рассмотрим уравнение

$$\Theta''(\theta) \sin^2 \theta + \Theta'(\theta) \sin \theta \cos \theta + (\lambda \sin^2 \theta - m^2)\Theta(\theta) = 0,$$

которое после деления на $\sin^2 \theta$ представим в виде

$$\Theta''(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta'(\theta) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}\right) \Theta(\theta) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Уравнение (11) решено в разделе 3.1. Оно имеет ограниченные решения на отрезке $[-1, 1]$ только для значений $\lambda_n = n(n+1)$, и эти решения задаются формулами

$$\Theta_n^{(m)}(\theta) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \quad (m = 0, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где $P_n^{(m)}(x)$ — функции Лежандра.

Подведем итог. Нам известны решения уравнения (9) в форме комбинаций (10), а также решения уравнения (8) вида (12). Это дает возможность представить решения уравнения Лапласа на сфере (5) в форме произведений известных функций

$$Y_{nm}(\varphi, \theta) = \Phi_m(\varphi) \Theta_n^{(m)}(\theta) = (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad (13)$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} произвольны, а значения n и m определяются соотношениями

$$m = 0, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Произведения вида (13) получили название сферических функций.

Мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение Лапласа на сфере (6) допускает счетное число частных решений в форме сферических функций (13), в которых параметры n и m определяются соотношениями (14). Каждое из этих решений зависит от своих произвольных постоянных A_{nm} и B_{nm} .*

Используя условие $m = 0, \dots, n$, сферические функции часто объединяют в специальные комплексы

$$v_n(\varphi, \vartheta) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \vartheta),$$

которые называют сферическими гармониками. Каждая функция $v_n(\varphi, \theta)$ определена на сфере единичного радиуса в предположении, что сфера параметризована сферическими углами φ и θ , где $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Из свойств сферических функций отметим следующие.

1. Каждая функция v_n — собственная для оператора Бельтрами–Лапласа на сфере единичного радиуса, так как является решением уравнения

$$\Delta v_n + \lambda_n v_n = 0, \quad \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что каждому собственному значению $\lambda_n = n(n+1)$ соответствует $2n+1$ собственных функций, именно, для $m = 0, \dots, n$

$$P_n^{(0)}(\cos \theta), \quad P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi.$$

2. Каждая функция $f(\varphi, \theta)$, заданная на параметризованной сфере $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ в сферических координатах, может быть единственным способом разложена в ряд по сферическим функциям:

$$f(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (f_{nm}^c \cos m\varphi + f_{nm}^s \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$f_{nm}^c = \frac{1}{\delta_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi, \theta) \cos m\varphi P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin \theta d\varphi d\theta,$$

$$f_{nm}^s = \frac{1}{\delta_{nm}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varphi, \theta) \sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin \theta d\varphi d\theta$$

$$\delta_{nm} = \left\{ \frac{4\pi}{2n+1}, \quad m=0; \quad \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad m \neq 0 \right\}$$

Обратимся к уравнению (4), полученному при разделении переменных в уравнении Лапласа. Решать его следует для значений

$\lambda = n(n + 1)$. Другими словами, рассмотрим уравнение

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - n(n + 1)R(r) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Решения уравнений Эйлера (15) следует искать в виде $R(r) = r^\alpha$, что после подстановки в уравнение и сокращения на общий множитель r^α приводит к квадратному уравнению

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - n(n + 1) = 0.$$

Отсюда находим корни $\alpha_1 = n$, $\alpha_2 = -(n + 1)$ и общее решение уравнения (15):

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)} \quad (R_1 < r < R_2). \quad (16)$$

Согласно методу разделения переменных попарные произведения функций $R_n(r)$ и $Y_{nm}(\varphi, \theta)$, представленных формулами (16) и (13) соответственно, являются решениями уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в шаровом слое. Запишем указанные произведения в следующем виде:

$$u_{nm} = \left[\left(a_{nm} r^n + \frac{b_{nm}}{r^{n+1}} \right) \cos m\varphi + \left(c_{nm} r^n + \frac{d_{nm}}{r^{n+1}} \right) \sin m\varphi \right] P_n^{(m)}(\cos \theta). \quad (17)$$

Здесь $m = 0, \dots, n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Оформим полученный результат.

ТЕОРЕМА 2. Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в сферической системе координат в шаровом слое допускает счетное число частных решений вида (17).

Следуя принципу суперпозиции, сумму всех частных решений

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(a_{nm} r^n + \frac{b_{nm}}{r^{n+1}} \right) \cos m\varphi + \left(c_{nm} r^n + \frac{d_{nm}}{r^{n+1}} \right) \sin m\varphi \right] P_n^{(m)}(\cos \theta)$$

назовем *общим решением* в форме Фурье уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в шаровом слое

$$0 < R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

3.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое

Математическая постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое имеет вид:

$$\Delta v = 0, \quad R_1 < r < R_2, \quad v|_{r=R_1} = f(\varphi, \theta), \quad v|_{r=R_2} = g(\varphi, \theta). \quad (1)$$

Здесь R_1 и R_2 — радиусы сфер, образующих шаровой слой, f и g — заданные функции сферических координат φ и θ , $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$. Согласно результатам предыдущего раздела общее решение уравнения Лапласа $\Delta v = 0$ в шаровом слое можно представить в форме ряда

$$v(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(r^n a_{nm} + \frac{1}{r^{n+1}} b_{nm}) \cos m\varphi + (r^n c_{nm} + \frac{d_{nm}}{r^{n+1}}) \sin m\varphi \right] P_n^{(m)}(\cos \theta). \quad (2)$$

В частности, для значений $r = R_1$ и $r = R_2$ получаем:

$$v(R_1, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(R_1^n a_{nm} + \frac{1}{R_1^{n+1}} b_{nm}) \cos m\varphi + (R_1^n c_{nm} + \frac{d_{nm}}{R_1^{n+1}}) \sin m\varphi \right] P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad (3)$$

$$v(R_2, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(R_2^n a_{nm} + \frac{1}{R_2^{n+1}} b_{nm}) \cos m\varphi + (R_2^n c_{nm} + \frac{d_{nm}}{R_2^{n+1}}) \sin m\varphi \right] P_n^{(m)}(\cos \theta). \quad (4)$$

Параллельно выпишем разложения заданных функций f и g в ряды по сферическим функциям:

$$f(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (f_{nm}^c \cos m\varphi + f_{nm}^s \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad (5)$$

$$g(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_{nm}^c \cos m\varphi + g_{nm}^s \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta). \quad (6)$$

Коэффициенты Фурье функций f и g находятся по формулам:

$$f_{nm}^c = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\varphi, \theta) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$f_{nm}^s = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\varphi, \theta) P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$g_{nm}^c = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\varphi, \theta) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$g_{nm}^s = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\varphi, \theta) P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi,$$

причем

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m > 0. \end{cases}$$

В соответствии с краевыми условиями задачи (1) два ряда (3) и (5) задают одну и ту же функцию $f(\varphi, \theta)$ и потому одноименные коэффициенты указанных рядов обязаны совпадать, что приводит к соотношениям:

$$R_1^n a_{nm} + \frac{b_{nm}}{R_1^{n+1}} = f_{nm}^c, \quad R_1^n c_{nm} + \frac{d_{nm}}{R_1^{n+1}} = f_{nm}^s. \quad (7)$$

Аналогично ряды (4) и (6) задают одну и ту же функцию $g(\varphi, \theta)$, и потому справедливы равенства:

$$R_2^n a_{nm} + \frac{b_{nm}}{R_2^{n+1}} = g_{nm}^c, \quad R_2^n c_{nm} + \frac{d_{nm}}{R_2^{n+1}} = g_{nm}^s. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) следует решать попарно в виде следующих систем:

$$\begin{cases} R_1^n a_{nm} + \frac{b_{nm}}{R_1^{n+1}} = f_{nm}^c, \\ R_2^n a_{nm} + \frac{b_{nm}}{R_2^{n+1}} = g_{nm}^c, \end{cases} \quad \begin{cases} R_1^n c_{nm} + \frac{d_{nm}}{R_1^{n+1}} = f_{nm}^s, \\ R_2^n c_{nm} + \frac{d_{nm}}{R_2^{n+1}} = g_{nm}^s. \end{cases} \quad (9)$$

Определители систем (9)

$$D_{nm} = \begin{vmatrix} R_1^n & \frac{1}{R_1^{n+1}} \\ R_2^n & \frac{1}{R_2^{n+1}} \end{vmatrix} = \frac{R_1^{2n+1} - R_2^{2n+1}}{(R_1 R_2)^{n+1}}$$

отличны от нуля для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, и поэтому коэффициенты a_{nm} , b_{nm} , c_{nm} , d_{nm} находятся однозначно. Подставив их в общее решение (2), получим формулу для решения задачи (1). Оформим изложенную последовательность действий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Чтобы решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа (1) в шаровом слое методом Фурье, следует заданные функции f и g разложить в ряды (5) и (6) по сферическим функциям, решить системы линейных алгебраических уравнений (9), и полученные результаты подставить в общее решение (2).*

ПРИМЕР 1. Найти решение уравнения Лапласа в шаровом слое при заданных краевых условиях:

$$\Delta v = 0, \quad 1 < r < 2; \quad v|_{r=1} = 7 \cos \varphi \sin \theta, \quad v|_{r=2} = 0. \quad (10)$$

РЕШЕНИЕ. Сравнивая задачу (10) с абстрактной постановкой (1), видим, что

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad f(\varphi, \theta) = 7 \cos \varphi \sin \theta, \quad g(\varphi, \theta) \equiv 0. \quad (11)$$

В соответствии с рекомендациями предложения 1 найдем разложения в ряды по сферическим функциям заданных функций f и g . Так как $g(\varphi, \theta) \equiv 0$, то все ее коэффициенты разложения равны нулю:

$$g_{nm}^c = 0, \quad g_{nm}^s = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, n).$$

Обратимся к функции $f(\varphi, \theta)$, представленной в (11). Согласно тождеству (5)

$$7 \cos \varphi \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (f_{nm}^c \cos m\varphi + f_{nm}^s \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta). \quad (12)$$

Отсюда очевидно, что во внутренней сумме отлично от нуля только одно слагаемое $f_{n1}^c \cos \varphi$, соответствующее значению $m = 1$. В результате равенство (12) существенно упрощается и принимает вид

$$7 \cos \varphi \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n1}^c \cos \varphi P_n^{(m)}(\cos \theta).$$

После сокращения на общий множитель получаем

$$7 \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n1}^c P_n^{(1)}(\cos \theta),$$

или в развернутой форме

$$7 \sin \theta = f_{01}^c P_0^{(1)}(\cos \theta) + f_{11}^c P_1^{(1)}(\cos \theta) + f_{21}^c P_2^{(1)}(\cos \theta) + \dots \quad (13)$$

Функции $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ для малых индексов вычислены в конце раздела 3.1. Используя изложенные там результаты, можем записать:

$$P_0^{(1)}(\cos \theta) \equiv 0, \quad P_1^{(1)}(\cos \theta) = \sin \theta, \quad P_2^{(1)}(\cos \theta) = 3 \sin \theta \cos \theta, \quad \dots$$

В результате равенство (13) принимает вид

$$7 \sin \theta = f_{11}^c \sin \theta + 3 f_{21}^c \sin \theta \cos \theta + \dots$$

Отсюда очевидно, что следует считать

$$f_{11}^c = 7, \quad f_{n1}^c = 0 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Из всех систем (9) остается точно одна, содержащая в правой части коэффициент $f_{11}^c = 7$, именно

$$\begin{cases} a_{11} + b_{11} = 7, \\ 2a_{11} + \frac{1}{2^2} b_{11} = 0. \end{cases}$$

Система легко решается и приводит к ответу $a_{11} = -1$, $b_{11} = 8$. Все остальные коэффициенты a_{nm} и b_{nm} в общем решении (2) следует считать нулями. В результате в общем решении остается всего два слагаемых, соответствующих индексам $n = 1$, $m = 1$, что приводит к следующему ответу для задачи (10):

$$v(r, \varphi, \theta) = (ra_{11} + \frac{1}{r^2} b_{11}) \cos \varphi P_1^{(1)}(\cos \theta) = (-r + \frac{8}{r^2}) \cos \varphi P_1^{(1)}(\cos \theta).$$

Очевидно, что это решение бесконечно дифференцируемо по переменным $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, т.е. представляет классическое решение задачи.

3.5. Пример решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаровом слое

Рассмотрим конкретную задачу в шаровом слое:

$$\Delta u = xz, \quad 1 < r < 2; \quad (1)$$

$$u|_{r=1} = 1, \quad u|_{r=2} = 0. \quad (2)$$

Неоднородные краевые условия (2) не дают возможности применить метод Фурье, поэтому ищем решение задачи (1)–(2) в виде суммы $u = v + w$, в которой слагаемые являются решениями следующих задач:

$$\Delta v = xz, \quad v|_{r=1} = 0, \quad v|_{r=2} = 0; \quad (3)$$

$$\Delta w = 0, \quad w|_{r=1} = 1, \quad w|_{r=2} = 0. \quad (4)$$

Перейдем к сферической системе координат, связанной с декартовой системой формулами

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (5)$$

Отсюда следует, что

$$xz = r^2 \cos \varphi \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} r^2 \cos \varphi \sin 2\theta. \quad (6)$$

Задача (3) в сферической системе координат принимает вид:

$$v_{rr} + \frac{2}{r}v_r + \frac{1}{r^2}\Delta v = \frac{1}{2}r^2 \cos \varphi \sin 2\theta, \quad v|_{r=1} = 0, \quad v|_{r=2} = 0. \quad (7)$$

Введем специальное обозначение сферических функций:

$$Y_n^{(m)}(\varphi, \theta) = \cos m\varphi P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

$$Y_n^{(-m)}(\varphi, \theta) = \sin m\varphi P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Функции $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ для малых индексов вычислены в разделе 3.1. Используя изложенные там результаты, получаем:

$$\begin{aligned} Y_0^{(0)}(\varphi, \theta) &= P_0^{(0)}(\cos \theta) \equiv 1, \\ Y_1^{(0)}(\varphi, \theta) &= P_1^{(0)}(\cos \theta) = \cos \theta, \\ Y_1^{(1)}(\varphi, \theta) &= \cos \varphi P_1^{(1)}(\cos \theta) = \cos \varphi \sin \theta, \\ Y_2^{(0)}(\varphi, \theta) &= P_2^{(0)}(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_2^{(1)}(\varphi, \theta) &= \cos \varphi P_2^{(1)}(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos \varphi \sin 2\theta, \\ Y_2^{(2)}(\varphi, \theta) &= \cos 2\varphi P_2^{(2)}(\cos \theta) = 3 \cos 2\varphi \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть уравнения (7) с приведенным списком сферических функций, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}r^2 \cos \varphi \sin 2\theta = \frac{1}{3}r^2 \cdot \frac{3}{2} \cos \varphi \sin 2\theta = \frac{1}{3}r^2 Y_2^{(1)}(\varphi, \theta). \quad (8)$$

Итак, правая часть уравнения (7) выражается через сферическую функцию. Используем этот факт, разыскивая решение задачи (7) в форме произведения $v = R(r)Y_2^{(1)}(\varphi, \theta)$, где $R(r)$ — подлежащая определению функция переменной r . Подставляя произведение $v = RY_2^{(1)}$ в условия задачи (7), с учетом равенства (8) получаем:

$$R''(r)Y_2^{(1)} + \frac{2}{r}R'(r)Y_2^{(1)} + \frac{1}{r^2}R(r)\delta Y_2^{(1)} = \frac{1}{3}r^2 Y_2^{(1)}, \quad (9)$$

$$R(1)Y_2^{(1)}(\varphi, \theta) = 0, \quad R(2)Y_2^{(1)}(\varphi, \theta) = 0. \quad (10)$$

Напомним, что каждая сферическая функция является собственной для оператора Бельтрами — Лапласа на сфере, именно

$$\delta Y_n^{(m)}(\varphi, \theta) = -n(n+1)Y_n^{(m)}(\varphi, \theta).$$

В частности, $\delta Y_2^{(1)} = -6Y_2^{(1)}$, так что уравнение (9) принимает вид

$$\left[R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) - \frac{6}{r^2}R(r) \right] Y_2^{(1)} = \frac{1}{3}r^2 Y_2^{(1)},$$

откуда после сокращения на общий множитель $Y_2^{(1)}$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) - \frac{6}{r^2}R(r) = \frac{1}{3}r^2. \quad (11)$$

К уравнению (11) следует приписать краевые условия (10), которые благодаря однородности также можно сократить на множитель $Y_2^{(1)}$, что дает:

$$R(1) = 0, \quad R(2) = 0. \quad (12)$$

Совокупность равенств (11)–(12) представляет собой краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения Эйлера. Метод решения таких задач нам хорошо известен. Сначала ищем общее решение уравнения (11) в виде суммы

$$R(r) = R_O(r) + R_H(r), \quad (13)$$

где $R_O(r)$ — общее решение однородного уравнения

$$R_O''(r) + \frac{2}{r}R_O'(r) - \frac{6}{r^2}R_O(r) = 0, \quad (14)$$

а $R_H(r)$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (11). Зная свойства уравнения Эйлера, ищем решение однородного уравнения (14) в виде степенной функции $R_O = r^\alpha$. Подставляя указанную форму решения в уравнение (14), получаем

$$\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + 2\alpha r^{\alpha-2} - 6r^{\alpha-2} = 0,$$

что после сокращения на общий множитель $r^{\alpha-2}$ приводит к квадратному уравнению

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0.$$

Корнями последнего уравнения являются числа $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -3$. Следовательно, общее решение уравнения (14) имеет вид

$$R_O(r) = c_1 r^2 + c_2 r^{-3},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Частное решение неоднородного уравнения (11) ищем также в форме степенной функции $R(r) = kr^\beta$. Подставляя указанные выражения в уравнение (11), получаем

$$k [\beta(\beta - 1)r^{\beta-2} + 2\beta r^{\beta-2} - 6r^{\beta-2}] = \frac{1}{3}r^2,$$

или короче

$$k (\beta^2 + \beta - 6) r^{\beta-2} = \frac{1}{3}r^2.$$

Отсюда очевидно, что $\beta - 2 = 2$, т.е. $\beta = 4$ и $14k = 1/3$, так что $k = 1/42$. Следовательно, частным решением уравнения (11)

является функция $R_H(r) = r^4/42$, а общее решение находим как сумму (13), т.е.

$$R(r) = c_1 r^2 + \frac{c_2}{r^3} + \frac{1}{42} r^4.$$

Для определения постоянных c_1 и c_2 выражение для функции $R(r)$ подставляем в краевые условия (12), что приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$R(1) \equiv c_1 + c_2 + \frac{1}{42} = 0, \quad R(2) \equiv 4c_1 + \frac{c_2}{8} + \frac{16}{42} = 0.$$

Отсюда находим

$$c_1 = -\frac{1}{42} \cdot \frac{127}{31}, \quad c_2 = \frac{1}{42} \cdot \frac{96}{31}.$$

Следовательно, решением краевой задачи (11)–(12) является функция

$$R(r) = \frac{1}{42} \left(r^4 - \frac{127}{31} r^2 + \frac{96}{31} \frac{1}{r^3} \right),$$

а решение краевой задачи (7), которое разыскивалось в виде произведения $v = R(r)Y_2^{(1)}(\varphi, \theta)$, представляется формулой

$$v(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{42} \left(r^4 - \frac{127}{31} r^2 + \frac{96}{31} \frac{1}{r^3} \right) \cos \varphi P_2^{(1)}(\cos \theta).$$

Остается найти решение задачи (4). Следуя методу, изложенному в разделе 3.2, вместо задачи (4) решаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''(r) + \frac{2}{r} w'(r) = 0; \quad w|_{r=1} = 1, \quad w|_{r=2} = 0. \quad (15)$$

Подставляя общее решение $w(r) = c_1 - c/r$ уравнения (15) в краевые условия, получаем систему:

$$w(1) \equiv c_1 - c = 1, \quad w(2) \equiv c_1 - \frac{c}{2} = 0.$$

Ее решением являются числа $c_1 = -1$ и $c = -2$, так что решение задачи (15) выражается формулой $w(r) = 2/r - 1$. Окончательное решение исходной задачи (1)–(2) представляется соотношением

$$u(r, \varphi, \theta) = \frac{2}{r} - 1 + \frac{1}{42} \left(r^4 - \frac{127}{31} r^2 + \frac{96}{31} \frac{1}{r^3} \right) \cos \varphi P_2^{(1)}(\cos \theta). \quad (16)$$

Здесь $P_2^{(1)}(x)$ — присоединенная функция Лежандра с индексами $n = 2$ и $m = 1$. Согласно приведенной ранее таблице значений сферических функций

$$P_2^{(1)}(\cos \theta) = \frac{3}{2} \sin 2\theta = 3 \sin \theta \cos \theta.$$

Это дает возможность представить ответ (16) в декартовых координатах:

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1 + \frac{xz}{14} \left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{127}{31} + \frac{96}{31} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5} \right].$$

Очевидно, что в шаровом слое $1 < r < 2$ решение $u(x, y, z)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменным x, y, z .

3.6. Формула решения волнового уравнения в пространстве

Волновое уравнение в пространстве \mathbb{R}^3 переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ имеет вид $u_{tt} = a^2 \Delta u$, или в развернутой форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right), \quad (1)$$

и относится к гиперболическому типу. Отметим одно важное свойство этого уравнения: существует своеобразная формула его решения в области $\Omega = \{t > 0, x \in \mathbb{R}^3\}$. Введем в пространстве сферу S_t переменного радиуса at с центром в точке x с уравнением $|y - x| = at$. Здесь $y = (y_1, y_2, y_3)$ и

$$|y - x|^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2.$$

Напомним, что площадь сферы S_t равна числу $4\pi a^2 t^2$. Для произвольной непрерывной функции $g(x)$, заданной во всем пространстве, определим сферические средние:

$$G(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{|y-x|=at} g(y) dS_t(y). \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданная функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем переменным. Тогда новая функция $u(t, x) = tG(t, x)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка в области $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$ и обращает уравнение (1) в тождество, т.е. является классическим решением волнового уравнения в пространстве.

Доказательство теоремы будет долгим. Сначала вычислим частные производные вспомогательной функции $G(t, x)$, представленной поверхностным интегралом (2). Этот интеграл зависит от параметров t и x , входящих в уравнение сферы S_t , по которой ведется интегрирование. Для таких интегралов нет удобных формул вычисления производных по параметру, поэтому преобразуем интеграл в (2) так, чтобы область интегрирования не зависела от t и x . С этой целью введем замену переменных $y - x = at\xi$, или подробнее

$$y_1 = x_1 + at\xi_1, \quad y_2 = x_2 + at\xi_2, \quad y_3 = x_3 + at\xi_3. \quad (3)$$

Уравнение $|y - x| = at$ сферы S_t примет вид $|at\xi| = at$, откуда $|\xi| = 1$. Последнее равенство в пространстве переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ описывает сферу σ радиуса 1 с центром в начале координат. Сферы S_t и σ подобны, и потому элементы их площадей связаны равенством

$$dS_t(y) = a^2 t^2 d\sigma(\xi). \quad (4)$$

С учетом приведенных соотношений интегральное представление (2) принимает вид

$$G(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} g(y_1(x, t, \xi), y_2(x, t, \xi), y_3(x, t, \xi)) d\sigma(\xi). \quad (5)$$

Здесь поверхность интегрирования σ фиксирована и не зависит от параметров t и x , поэтому можно применить готовые формулы дифференцирования интегралов по параметру. В частности, для каждого $i = 1, 2, 3$ получаем

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} g(y(x, t, \xi)) d\sigma(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} d\sigma(\xi).$$

Из равенств (3) следует, что $\partial y_i / \partial x_i = 1$, и потому

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial g}{\partial y_i} d\sigma(\xi).$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2} d\sigma(\xi), \quad \Delta G = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g(y) d\sigma(\xi).$$

В последнем равенстве для ΔG вернемся к исходным переменным y . С учетом соотношений (3) и (4) получаем

$$\Delta G(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{S_t} \Delta g(y) dS_t(y).$$

Отсюда

$$\Delta u = \Delta(tG) = t\Delta G = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_t} \Delta g(y) dS_t(y). \quad (6)$$

Более сложно вычисляются частные производные функции $G(t, x)$ по переменной t . Снова обратимся к формуле (5). Из нее следует, что

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} g(y(x, t, \xi)) d\sigma(\xi). \quad (7)$$

Согласно формулам для производных сложных функций

$$\frac{\partial}{\partial t} g(y(x, t, \xi)) = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial t}.$$

Так как $\partial y_i / \partial t = a\xi_i$ для $i = 1, 2, 3$, то

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x + at\xi) = a \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} \xi_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} \xi_2 + \frac{\partial g}{\partial y_3} \xi_3 \right) = a(\text{grad } g) \cdot \xi. \quad (8)$$

Здесь использовано обозначение градиента функции g и введено скалярное произведение векторов. Заметим, что конец вектора ξ геометрически представляет точку на единичной сфере σ . Если из этой точки провести вектор внешней нормали n к поверхности σ , то в силу очевидного равенства $n = \xi$ формулу (8) можно представить в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x + at\xi) = a(\text{grad } g(y)) \cdot n.$$

Окончательно из (7) получаем

$$G_t = \frac{a}{4\pi} \int_{\sigma} (\operatorname{grad} g(y)) \cdot n \, d\sigma(\xi).$$

Здесь снова удобно вернуться к исходным переменным y по формулам (3). С учетом равенства (4) имеем

$$G_t = \frac{1}{4\pi at^2} \int_{S_t} (\operatorname{grad} g(y)) \cdot n \, dS_t(y). \quad (9)$$

Напомним формулу Остроградского в векторной форме. Пусть V — часть пространства, ограниченная гладкой поверхностью S с внешней нормалью n . Если в замкнутой области \bar{V} задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $a = (a_1, a_2, a_3)$, то справедлива формула

$$\int_S a \cdot n \, dS = \int_V \operatorname{div} a \, dV.$$

Пусть V_t — шар радиуса at с центром в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Его границей является сфера S_t . Применяв формулу Остроградского к поверхностному интегралу (9), получаем представление

$$G_t = \frac{1}{4\pi at^2} \int_{V_t} (\operatorname{div} \operatorname{grad} g(y)) \, dy.$$

Так как $\operatorname{div} \operatorname{grad} g(y) = \Delta g(y)$, то окончательно

$$G_t(t, x) = \frac{1}{4\pi at^2} \int_{V_t} \Delta g(y) \, dy.$$

Пусть

$$I = \frac{1}{4\pi a} \int_{V_t} \Delta g(y) \, dy, \quad (10)$$

так что

$$G_t = \frac{1}{t^2} I. \quad (11)$$

В формулировке теоремы 1 введена функция $u = tG$. Для ее частной производной по t с учетом равенства (11) получаем

$$u_t = G + tG_t = \frac{u}{t} + \frac{1}{t} I = \frac{u + I}{t}. \quad (12)$$

Теперь легко вычисляется вторая частная производная

$$u_{tt} = \frac{(u_t + I_t)t - (u + I)}{t^2} = \frac{u_t}{t} + \frac{I_t}{t} - \frac{u + I}{t^2}.$$

Подставляя сюда равенство (12), приходим к соотношению

$$u_{tt} = \frac{u + I}{t^2} + \frac{I_t}{t} - \frac{u + I}{t^2} = \frac{1}{t} I_t. \quad (13)$$

Возникла очередная задача: найти производную I_t функции I , представленной интегралом (10), который вычисляется по переменному объему V_t . С этой целью перейдем в интеграле (10) к сферической системе, используя формулы:

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 &= r \cos \varphi \sin \theta, & y_2 - x_2 &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ y_3 - x_3 &= r \cos \theta, & dy &= r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Пределы интегрирования по новым переменным определяются геометрией шара V_t : $0 \leq r \leq at$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

В результате из (10) получаем

$$I = \frac{1}{4\pi a} \int_0^{at} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\Delta g) r^2 \sin \theta d\theta. \quad (14)$$

Первым здесь стоит интеграл с переменным верхним пределом at . Напомним известную формулу математического анализа: если функция $f(t)$ непрерывна на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, то $\frac{d}{dt} \int_\alpha^t f(s) ds = f(t)$. Используем также очевидное равенство $\partial I / \partial t = a \partial I / \partial (at)$.

Применяя указанные соотношения к представлению (14), получаем выражение

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\Delta g) (at)^2 \sin \theta d\theta. \quad (15)$$

В этом интеграле от сферической системы вернемся к исходным переменным $y \in \mathbb{R}^3$. Пределы $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta \leq \pi$ геометрически описывают сферу. Удобно считать, что выбрана сфера S_t радиуса at с центром в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Элемент сферы S_t в сферической системе имеет вид

$$dS_t = (at)^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

В результате указанных изменений повторный интеграл (15) представит как поверхностный интеграл по сфере S_t :

$$I_t = \frac{1}{4\pi} \int_{S_t} \Delta g(y) dS_t(y).$$

Полученное выражение для I_t подставим в равенство (13), что приводит к соотношению

$$u_{tt} = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t} \Delta g(y) dS_t(y). \quad (16)$$

Вернемся к формуле (6) и запишем ее в виде

$$a^2 \Delta u = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t} \Delta g(y) dS_t(y). \quad (17)$$

Сравнивая равенства (16) и (17), приходим к тождеству $u_{tt} = a^2 \Delta u$, которое доказывает утверждение теоремы.

3.7. Задача Коши для волнового уравнения в пространстве

Задача Коши для волнового уравнения в пространстве \mathbb{R}^3 ставится следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^3), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^3). \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Классическим решением волнового уравнения (1) называется функция $u(t, x)$, которая имеет непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка в области $t > 0, x \in \mathbb{R}^3$ и обращает уравнение в тождество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Классическим решением задачи Коши (1)–(2) называется функция $u(t, x)$, которая является классическим решением уравнения (1) и непрерывна вместе с производной u_t на замкнутом множестве $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$, а также удовлетворяет начальным условиям (2).

Используя обозначения предыдущего раздела, введем функцию равенством

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} g(y) dS_t(y) + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|y-x|=at} f(y) dS_t(y) \right], \quad (3)$$

которое называется формулой Кирхгофа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема по всем переменным $x \in \mathbb{R}^3$.

Тогда формула Кирхгофа (3) определяет классическое решение задачи Коши (1)–(2).

Доказательство теоремы проведем для частного случая, предполагая, что $f(x) \equiv 0$. Задача Коши (1)–(2) принимает вид

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = g(x). \quad (4)$$

Убедимся, что функция $u(t, x)$, представленная формулой Кирхгофа

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} g(y) dS_t(y), \quad (5)$$

является решением задачи Коши (4). Так как функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^3$, то согласно теореме 1 раздела 3.6 функция $u(t, x)$ из равенства (5) дважды непрерывно дифференцируема в области $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$ по всем переменным t, x и обращает уравнение $u_{tt} = a^2 \Delta u$ в тождество. Другими словами, функция $u(t, x)$ является классическим решением волнового уравнения (1). Остается проверить, что она удовлетворяет начальным условиям задачи (4).

Воспользуемся результатами предыдущего раздела, в частности, формулой (5) раздела 3.6 для вспомогательной функции

$$G(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} g(x + at\xi) d\sigma(\xi). \quad (6)$$

Единичная сфера σ с уравнением $|\xi| = 1$, по которой ведется интегрирование, является ограниченным множеством, и потому функция $g(x + at\xi)$ равномерно непрерывна относительно $\xi \in \sigma$ для переменных $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$. В частности, чтобы вычислить значение

$G(0, x)$, достаточно в формуле (6) положить $t = 0$, что приводит к равенству

$$G(0, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} g(x) d\sigma(\xi) = g(x) \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} d\sigma(\xi) \right) = g(x). \quad (7)$$

Напомним также формулу из раздела 3.6 для производной G_t :

$$G_t = \frac{a}{4\pi} \int_{|\xi|=1} (\text{grad } g(y)) \cdot n d\sigma(\xi), \quad (8)$$

где $y = x + at\xi$, $\xi \in \sigma$. И здесь интегрирование ведется по ограниченному множеству σ , поэтому интеграл (8) задает непрерывную функцию $G_t(t, x)$ по переменным $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$. В частности, вполне определено значение

$$G_t(0, x) = \frac{a}{4\pi} \int_{\sigma} (\text{grad } g(x)) \cdot n d\sigma(\xi).$$

Вернемся к функции $u(t, x) = tG(t, x)$. Учитывая формулу (7), приходим к равенству $u(0, x) = 0$, которое означает, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет первому начальному условию задачи (4). Далее используем равенство $u_t = G + tG_t$. Полагая здесь $t = 0$ и учитывая равенство (7) и конечность значения $G_t(0, x)$, получаем $u_t(0, x) = g(x)$. Это значит, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет и второму начальному условию в (4), т.е. является классическим решением задачи Коши (4), что и утверждалось.

ПРИМЕР 1. Решить задачу Коши для волнового уравнения в пространстве \mathbb{R}^3 :

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2.$$

РЕШЕНИЕ. Сравнивая пример с абстрактной постановкой задачи Коши (1)–(2), заключаем, что $a = 1$, $f(x) \equiv 0$, $g(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2$. Следовательно, можно использовать упрощенную формулу Кирхгофа (5), которая в данном случае принимает вид

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} (y_1 + 2y_2 - y_3)^2 dS_t(y). \quad (9)$$

Чтобы реально вычислить представленный поверхностный интеграл, введем замену переменных $y - x = t\xi$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Тогда

$$\begin{aligned} g(y) &= g(x + t\xi) = [(x_1 + 2x_2 - x_3) + t(\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3)]^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + 2t(x_1 + 2x_2 - x_3)(\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3) + t^2(\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3)^2. \end{aligned}$$

Искомый интеграл (9) предстанет как интеграл по единичной сфере σ с уравнением $|\xi| = 1$. Элементы сфер S_t с уравнением $|y - x| = t$ и σ связаны равенством $dS_t(y) = t^2 d\sigma(\xi)$. Учитывая представленные выше соотношения, разобьем интеграл (9) на сумму трех слагаемых:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{t}{4\pi} (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 \int_{\sigma} d\sigma(\xi) + \\ &+ \frac{t^2}{2\pi} (x_1 + 2x_2 - x_3) \int_{\sigma} (\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3) d\sigma(\xi) + \\ &+ \frac{t^3}{4\pi} \int_{\sigma} (\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3)^2 d\sigma(\xi). \quad (10) \end{aligned}$$

Первый интеграл в (10) легко вычисляется по геометрическому смыслу поверхностного интеграла:

$$Y_1 = \int_{\sigma} d\sigma(\xi) = 4\pi.$$

Второй интеграл в (10), в свою очередь, представим как сумму трех слагаемых:

$$Y_2 = \int_{\sigma} \xi_1 d\sigma + 2 \int_{\sigma} \xi_2 d\sigma - \int_{\sigma} \xi_3 d\sigma = Y_{21} + Y_{22} + Y_{23}.$$

Для представления сферы σ с уравнением $|\xi| = 1$ перейдем к сферическим координатам по формулам:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \varphi \sin \theta, \quad \xi_2 = \sin \varphi \sin \theta, \quad \xi_3 = \cos \theta, \\ d\sigma(\xi) &= \sin \theta d\varphi d\theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате получаем последовательно:

$$Y_{21} = \int_{\sigma} \xi_1 d\sigma(\xi) = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0,$$

так как $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$;

$$Y_{22} = 2 \int_{\sigma} \xi_2 d\sigma(\xi) = 2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0,$$

так как $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$;

$$Y_{23} = - \int_{\sigma} \xi_3 d\sigma(\xi) = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0,$$

так как $\int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2\theta d\theta = 0$.

Итак, $Y_2 = 0$. Остается вычислить последний интеграл в (10):

$$\begin{aligned} Y_3 &= \int_{\sigma} (\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3)^2 d\sigma(\xi) = \\ &= \int_{\sigma} (\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + \xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 - 4\xi_2\xi_3) d\sigma(\xi) \equiv \sum_{k=1}^6 Y_{3k}. \end{aligned}$$

Для вычисления вспомогательных интегралов Y_{3k} ($k = 1, \dots, 6$) снова используем замены (11). Для первого из этих интегралов получаем:

$$Y_{31} = \int_{\sigma} \xi_1^2 d\sigma(\xi) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\pi}{3},$$

так как

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \pi, \\ \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \left(-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$Y_{32} = \int_{\sigma} 4\xi_2^2 d\sigma(\xi) = 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{16}{3}\pi.$$

Наконец,

$$Y_{33} = \int_{\sigma} \xi_3^2 d\sigma(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

Оставшиеся для вычисления интегралы не дают вклада. Действительно, имеем последовательно:

$$Y_{34} = \int_{\sigma} 4\xi_1\xi_2 d\sigma(\xi) = 4 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0,$$

так как $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0$;

$$Y_{35} = -2 \int_{\sigma} \xi_1\xi_3 d\sigma(\xi) = -2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0,$$

так как $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$;

$$Y_{36} = -4 \int_{\sigma} \xi_2\xi_3 d\sigma(\xi) = -4 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0,$$

так как $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$. Отсюда $Y_3 = \sum_{k=1}^6 Y_{3k} = 8\pi$.

Подставляя найденные значения интегралов Y_1 , Y_2 , Y_3 в формулу (10), получаем ответ задачи:

$$u(t, x) = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 t + 2t^3.$$

Нетрудно проверить, что представленная функция действительно является решением примера.

3.8. Решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости

Вернемся к задаче Коши для волнового уравнения в пространстве \mathbb{R}^3 , изученной в предыдущем разделе. Ее решение может быть представлено формулой Кирхгофа. Снова ограничимся частным случаем, предполагая, что функция $f(x) = 0$. Кроме того, будем считать, что функция $g(x)$ не зависит от переменной x_3 , т.е. имеет

вид $g(x) = g(x_1, x_2)$. При указанных условиях формула Кирхгофа принимает вид

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_t} g(y_1, y_2) dS_t(y). \quad (1)$$

Напомним, что каждый поверхностный интеграл можно вычислять как двойной по проекции поверхности интегрирования на одну из координатных плоскостей. Например, если поверхность интегрирования S в пространстве переменных x, y, z задана явным уравнением $z = z(x, y)$, и, значит, взаимно однозначно проектируется на область D плоскости xOy , то справедлива формула

$$\int_S \varphi(x, y, z) dS = \iint_D \varphi(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (2)$$

Поверхностью интегрирования S_t в формуле (1) является сфера, которая не проектируется взаимно однозначно ни на одну из координатных плоскостей. Поэтому представим сферу S_t как объединение двух полусфер: верхней S_t^+ и нижней S_t^- .

Формула Кирхгофа (1) примет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \left(\int_{S_t^+} g(y_1, y_2) dS_t^+ + \int_{S_t^-} g(y_1, y_2) dS_t^- \right). \quad (3)$$

Сфера S_t определяется уравнением $|y - x| = at$, или подробнее

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = (at)^2.$$

Выразим отсюда переменную y_3 :

$$y_3^\pm = x_3 \pm \sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}. \quad (4)$$

Здесь представлены две функции. Одна (со знаком плюс) описывает верхнюю полусферу S_t^+ , а другая (со знаком минус) — нижнюю полусферу S_t^- . Очевидно, что каждая из указанных полусфер взаимно однозначно проектируется на плоскость y_1Oy_2 , следовательно, к каждому из интервалов (3) можно применить формулу (2). Вычислим элементы поверхностей S_t^+ и S_t^- . Роль функции z в формуле (2) играют функции $y_3^\pm(y_1, y_2)$, представленные

соотношениями (4). Для их частных производных получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_3^\pm}{\partial y_1} &= \pm \frac{-(y_1 - x_1)}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}, \\ \frac{\partial y_3^\pm}{\partial y_2} &= \pm \frac{-(y_2 - x_2)}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}.\end{aligned}$$

Вычислим для функций y_3^\pm вспомогательное выражение

$$1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2 = \frac{(at)^2}{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}.$$

Отсюда следует, что элементы поверхностей верхней и нижней полусфер совпадают и имеют вид

$$dS_t^+ = dS_t^- = \frac{at \, dy_1 dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}. \quad (5)$$

Очевидно также, что проекциями полусфер S_t^+ и S_t^- на плоскость $y_1 Oy_2$ является один и тот же круг K_t радиуса at с центром в точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Используя изложенные выше указания, запишем поверхностные интегралы (3) в форме двойных:

$$\begin{aligned}u(t, x) = \frac{1}{4\pi a} &\left(\iint_{K_t} \frac{g(y_1, y_2) \, dy_1 \, dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \right. \\ &\left. + \iint_{K_t} \frac{g(y_1, y_2) \, dy_1 \, dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \right).\end{aligned}$$

Обратим внимание, что оба интеграла здесь совпадают и поэтому

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_t} \frac{g(y_1, y_2) \, dy_1 \, dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}. \quad (6)$$

Это равенство получило название формулы Пуассона. Проанализируем ее. Подынтегральное выражение в (6) содержит только две пространственные переменные x_1, x_2 в качестве параметров. Это значит, что функция $u(t, x)$ реально зависит только от указанных переменных и не зависит от третьей пространственной переменной x_3 , так что $u(t, x) = u(t, x_1, x_2)$. В частности, производные функции $u(t, x)$ по переменной x_3 равны нулю: $\partial u / \partial x_3 = 0$,

$\partial^2 u / \partial x_3^2 = 0$, и поэтому оператор Лапласа в применении к функции $u(t, x)$ имеет вид

$$\Delta u(t, x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \quad (7)$$

Из предыдущего раздела нам известно, что функция $u(t, x)$ представляет решение задачи Коши:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = g(x). \quad (8)$$

С учетом предположения $g = g(x_1, x_2)$ и равенства (7) задача (8) принимает следующий вид:

$$u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = g(x_1, x_2). \quad (9)$$

Соотношения (9) в совокупности составляют задачу Коши на плоскости \mathbb{R}^2 . Так как функция $u(t, x_1, x_2)$ уже построена и удовлетворяет всем равенствам (9), то она является решением задачи Коши (9).

Мы детально рассмотрели упрощенную задачу Коши, предполагая, что функция $f(x) \equiv 0$. Если провести аналогичные выкладки с учетом функции $f(x)$, то приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 заданы две функции f и g , причем, функция $f(x)$ допускает непрерывные частные производные до третьего порядка, а функция $g(x)$ — непрерывные частные производные до второго порядка. Тогда задача Коши на плоскости для волнового уравнения

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} &= f(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (10)$$

имеет классическое решение, которое может быть представлено формулой Пуассона

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi a} \iint_{K_t} \frac{g(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi a} \iint_{K_t} \frac{f(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь K_t — круг на плоскости $y_1 O y_2$ радиуса at с центром в точке (x_1, x_2) .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Изложенный выше способ решения задачи Коши на плоскости через известное решение задачи Коши в пространстве получил название метода спуска. Он предложен известным французским математиком Ж. Адамаром.

ПРИМЕР 1. Решить задачу Коши для волнового уравнения на плоскости:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x_1^2 + x_2^2.$$

РЕШЕНИЕ. Сравнивая пример с абстрактной постановкой задачи Коши на плоскости (10), приходим к равенствам: $a = 1$, $f \equiv 0$, $g = x_1^2 + x_2^2$. Это дает возможность применить укороченную формулу Пуассона (6), которая для данного конкретного варианта принимает вид

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t} \frac{(y_1^2 + y_2^2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}. \quad (11)$$

Интегрирование ведется по кругу K_t радиуса t с центром в точке (x_1, x_2) . Учитывая это, перейдем в плоскости интегрирования $y_1 O y_2$ к полярной системе координат по формулам:

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 &= r \cos \varphi, & y_2 - x_2 &= r \sin \varphi, & 0 &\leq r \leq t, & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 &= r^2, & dy_1 dy_2 &= r dr d\varphi. \end{aligned}$$

В результате указанных замен искомый интеграл (11) принимает вид

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t r dr \int_0^{2\pi} \frac{((x_1 + r \cos \varphi)^2 + (x_2 + r \sin \varphi)^2) d\varphi}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^{2\pi} [(x_1^2 + x_2^2) + 2r(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) + r^2] d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left((x_1^2 + x_2^2) \int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi + 2x_1 \int_0^t \frac{r^2 dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + 2x_2 \int_0^t \frac{r^2 dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi + \int_0^t \frac{r^3 dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \right).$$

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0,$$

и поэтому для вычисления остается выражение

$$u(t, x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \int_0^t \frac{r^3 dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}.$$

Каждый из оставшихся интегралов вычисляется заменой $s = t^2 - r^2$, $ds = -2r dr$. В частности

$$\int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{t^2} \frac{ds}{\sqrt{s}} = t.$$

Аналогично

$$\int_0^t \frac{r^3 dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{t^2} \frac{(t^2 - s) ds}{\sqrt{s}} = \frac{2}{3} t^3.$$

Подставляя полученные результаты в формулу для функции $u(t, x)$, приходим к ответу:

$$u(t, x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)t + \frac{2}{3}t^3.$$

Простая проверка показывает, что получено действительно решение поставленной задачи Коши.

ГЛАВА 4

Функция Грина краевой задачи

4.1. Формулы Грина для оператора Лапласа

4.1.1. Области и границы. Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 , состоящем из точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, задана область Ω . Как правило, под областью понимается открытое множество. Это значит, что каждая точка области является центром шара, который целиком принадлежит области. С наглядной точки зрения областью считается любое привычное нам тело в пространстве, у которого удалена граница. Например, областями являются все пространство \mathbb{R}^3 и открытый шар $\Omega = \{x : |x| < R\}$. Область называется ограниченной, если она содержится в некотором шаре. В противном случае область считается неограниченной. Например, шар $\Omega = \{x : |x| < R\}$ — ограниченная область, а полупространство $\Omega = \{x : x_3 > 0\}$ — область неограниченная.

Границу области Ω обозначим S . Эта граница может состоять из нескольких замкнутых поверхностей. Например, граница шарового слоя состоит из двух сфер. В дальнейшем всегда предполагается, что граница S является кусочно-гладкой. Это означает, что ее можно представить как объединение конечного числа поверхностей $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, не обязательно замкнутых, но таких, что в каждой точке выбранной поверхности σ_n определена внешняя нормаль $n(x)$, которая является непрерывной функцией точки $x \in \sigma_k$. При переходе с поверхности σ_k на другую нормаль $n(x)$ может терпеть разрыв. Согласно определению нормали ее длина равна единице: $|n(x)| = 1$. Напомним, что координаты вектора нормали $n = (n_1, n_2, n_3)$ часто называют направляющими косинусами, так как они имеют вид $n_i = \cos \alpha_i$, где α_i — угол между вектором n и осью Ox_i ($i = 1, 2, 3$). Область Ω в объединении с ее границей S будем называть замкнутой областью и обозначать $\overline{\Omega}$.

ПРИМЕР 1. Открытый шар радиуса R с центром в начале координат задается соотношением $\Omega = \{x : |x| < R\}$. Его граница S состоит из сферы радиуса R . В каждой точке x сферы S определена внешняя нормаль $n(x)$, которая геометрически является продолжением радиуса-вектора \overline{Ox} и потому легко вычисляется:

$$n(x) = \frac{\overline{Ox}}{R} = \left(\frac{x_1}{R}, \frac{x_2}{R}, \frac{x_3}{R} \right), \quad x \in S.$$

Из приведенной формулы вполне очевидно, что нормаль $n(x)$ меняется непрерывно вместе с точкой $x \in S$, следовательно, сфера — это гладкая поверхность. Замкнутая область $\overline{\Omega}$ совпадает с шаром радиуса R .

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = \{x : r < |x| < R\}$ — шаровой слой, граница которого состоит из двух сфер S_r и S_R радиусов r и R с единым центром в начале координат. Нормаль n_R к внешней сфере вычислена в примере 1. Она направлена от центра сферы, тогда как нормаль n_r к внутренней сфере S_r направлена к центру сферы и вычисляется по формуле $n_r(x) = -\frac{x}{r}$, $x \in S$. Указанные направления нормалей считаются внешними по отношению к области Ω . Заметим, что замыкание $\overline{\Omega} = \Omega \cup S_r \cup S_R$.

ПРИМЕР 3. Пусть $\Omega = \{x : |x_i| < a, i = 1, 2, 3; a = \text{const}\}$. Это куб с центром в начале координат и ребром длины $2a$. Граница S куба Ω состоит из шести граней $\sigma_1, \dots, \sigma_6$. В пределах одной грани нормаль $n(x)$ остается постоянной величиной, но меняется при переходе на другую грань. Куб считается одним из ярких представителей кусочно-гладких поверхностей.

ПРИМЕР 4. Цилиндр Ω фиксированной высоты h и с радиусом основания R также является представителем кусочно-гладких поверхностей. Нормаль $n(x)$ непрерывна при изменении аргумента x в пределах боковой поверхности цилиндра и остается постоянной на каждом основании цилиндра.

4.1.2. Формулы Грина. Вспомним некоторые формулы теории поля. Пусть в области Ω задана непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, $x \in S$. Ее градиентом называется вектор

$$\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right).$$

Если в некоторой точке $x \in \Omega$ указано направление с помощью единичного вектора l , то производная по направлению l вычисляется через градиент по формуле $\partial u / \partial l = l \cdot \nabla u$, где точкой обозначено скалярное произведение векторов.

ПРИМЕР 5. Пусть задана область Ω с границей S . Выберем точку $x \in S$ и определим направление l как единичный вектор внешней нормали $n(x)$ в точке x . В результате получается производная по направлению внешней нормали, которая вычисляется по формуле $\partial u / \partial n = \nabla u \cdot n$.

Пусть теперь задано векторное поле $a = (a_1, a_2, a_3)$. Дивергенцией поля a называется скалярное поле

$$\nabla \cdot a = \operatorname{div} a = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

ПРИМЕР 6. Если в области Ω задано дважды непрерывно дифференцируемое скалярное поле $u(x)$, то можно определить векторное поле $a = \nabla u$ и новое скалярное поле

$$\operatorname{div} a = \nabla \cdot a = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \equiv \Delta u.$$

По отношению к исходному скалярному полю $u(x)$ получилось выражение из вторых частных производных, называемое оператором Лапласа.

ПРИМЕР 7. Пусть заданы два скалярных поля u и v , которые предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Вычислим еще один оператор второго порядка, применив свойства оператора Гамильтона ∇ :

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla^2 v = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v.$$

Одной из часто применяемых является формула Остроградского – Гаусса, которая связывает объемный интеграл с поверхностным и имеет вид

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} a \, dx = \int_S a \cdot n \, dS. \quad (1)$$

Формула (1) справедлива в предположении, что область Ω ограничена и имеет кусочно-гладкую границу S , а векторное поле a непрерывно дифференцируемо. Напомним также, что нормаль n

считается внешней по отношению к области Ω . Для сокращения записи все разновидности многомерных интегралов будем обозначать одним знаком интеграла.

В дальнейшем символ $C^2(\overline{\Omega})$ объединяет все функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, которые определены в замкнутой области $\overline{\Omega}$, непрерывны и допускают непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть заданы две такие функции $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Согласно примеру 7

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v. \quad (2)$$

Полагая $a = u \nabla v$ в формуле (1) и применяя равенство (2), получаем так называемую первую формулу Грина

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_S u \nabla v \cdot n \, dS \equiv \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS. \quad (3)$$

Заметим, что функции u и v равноправны, и потому в формуле (3) их можно поменять местами, что дает новое тождество

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS. \quad (4)$$

В равенствах (3) и (4) первые интегралы совпадают. Вычитая (4) из (3), приходим ко второй формуле Грина

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dS. \quad (5)$$

Полученный результат в силу его важности оформим как теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, и пусть область Ω ограничена и имеет кусочно-гладкую границу S .

Тогда справедлива формула Грина (5).

Формула Грина (5) активно используется в теории уравнений с частными производными. Приведем пример ее применения. Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет в Ω уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$. Полагаем $v \equiv 1$, так что $\Delta v \equiv 0$ для $x \in \Omega$ и $\partial v / \partial n|_S \equiv 0$. Приведенные соотношения подставим в формулу Грина (5), что дает равенство

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0. \quad (6)$$

Таким образом, если функция $u \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, то для ее нормальной производной на границе S выполняется тождество (6).

ПРИМЕР 8. В ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S рассмотрим вторую краевую задачу для оператора Лапласа:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S \equiv 1. \quad (7)$$

Допустим, что нашлось решение u этой задачи. Для него должно выполняться равенство (6), которое ввиду краевого условия в (7) принимает вид: $\int_S dS = 0$. Отсюда следует, что площадь поверхности S обязана равняться нулю, что невозможно. Следовательно, задача (7) не может иметь решения $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

4.2. Интегральное представление дифференцируемых функций

4.2.1. Фундаментальное решение оператора Лапласа. В ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S рассмотрим уравнение Пуассона $\Delta u = f$, считая функцию $f(x)$ заданной. Однородное уравнение $\Delta u = 0$ называется уравнением Лапласа. Его решения получили название гармонических функций.

ПРИМЕР 1. При переходе к сферической системе координат в главе 3 мы нашли два решения уравнения Лапласа: $u(x) \equiv 1$ и $u(x) = 1/r$, $r = |x|$. Другими словами, функция $u(x) = 1/|x|$ является гармонической всюду, кроме начала координат, где она не определена, т.е. справедливо тождество $\Delta(1/|x|) \equiv 0$, $x \neq 0$.

ПРИМЕР 2. По аналогии с функцией $1/|x|$ введем функцию $u(x) = \frac{1}{|x-y|}$, где y — фиксированная точка пространства \mathbb{R}^3 . Очевидно, что функция $u(x)$ определена для всех $x \neq y$. Прямым вычислением нетрудно убедиться, что $\Delta(1/|x-y|) = 0$ для $x \neq y$. Тем самым указано целое семейство гармонических функций, зависящих от параметра $y \in \mathbb{R}^3$. Функция $G_0(x, y) = 1/|x-y|$ получила название фундаментального решения оператора Лапласа. Она играет исключительную роль в теории уравнений Лапласа и Пуассона. Заметим, что функция симметрична относительно переменных. В частности, справедливо тождество $\Delta_y G_0(x, y) \equiv 0$, $y \neq x$.

Фиксируем точку $y \in \mathbb{R}^3$, и пусть в ее окрестности задана функция $u(x)$. Введем сферические средние функции u :

$$u_r(y) = \frac{1}{|S_r(y)|} \int_{S_r(y)} u(x) dS, \quad |S_r(y)| = 4\pi r^2. \quad (1)$$

Здесь $S_r(y)$ — сфера радиуса r с центром в точке y , $|S_r(y)|$ — площадь ее поверхности. Отметим следующее свойство сферических средних, которое и привлекает к ним внимание.

ЛЕММА 1. Пусть функция $u(x)$ непрерывна в окрестности точки y . Тогда при $r \rightarrow 0$ сферические средние функции $u(x)$ сходятся к значению $u(y)$, т.е. $\lim_{r \rightarrow 0} u_r(y) = u(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем сферические средние (1) следующим образом:

$$u_r(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} (u(x) - u(y)) dS + \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y) dy \equiv J_1 + J_2. \quad (2)$$

Напомним, что точка y считается фиксированной и потому интеграл J_2 легко вычисляется:

$$J_2 = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y) dy = \frac{u(y)}{4\pi r^2} \int_{S_r} dS = \frac{u(y)}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = u(y).$$

По условию функция $u(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки y . Значит, для любого малого числа $\varepsilon > 0$ найдется радиус r такой, что справедлива оценка

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon, \quad \text{если } |x - y| < r. \quad (3)$$

Считая, что радиус r в формуле (2) выбран с условием (3), оценим интеграл

$$|J_1| \leq \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} |u(x) - u(y)| dS \leq \frac{\varepsilon}{4\pi r^2} \int_{S_r} dS \equiv \varepsilon.$$

Итак, $J_1 \rightarrow 0$, когда $r \rightarrow 0$. Подставляя приведенные результаты в формулу (2), получим соотношение

$$u_r(y) = J_1 + u(y), \quad \text{где } J_1 \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0),$$

из которого следует утверждение леммы. \square

4.2.2. Интегральное представление функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S задана функция $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда для любой внутренней точки $x \in \Omega$ справедливо представление

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy,$$

которое иногда называют интегральной формулой Грина. Как обычно, нормаль считается внешней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся к формуле Грина для оператора Лапласа:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (4)$$

Наша цель — подставить сюда функцию $v = 1/|x-y|$. Непосредственно это сделать нельзя, если $y \in \Omega$, так как формула (4) справедлива только для дважды дифференцируемых функций, а функция v даже не определена в точке $x = y$, тем более не дифференцируема. Поэтому применим специальный прием.

Фиксируем точку $y \in \Omega$. Напомним, что все точки области Ω считаются внутренними. Значит, найдется шар $B_r(y)$ малого радиуса r с центром в точке y , который целиком принадлежит области Ω . Удалим этот шар из области Ω и запишем формулу Грина (4) для оставшейся области $\Omega \setminus B_r(y)$. Так как к границе S добавилась сфера S_r как граница шара $B_r(y)$, то формула примет вид:

$$\int_{\Omega \setminus B_r(y)} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \int_{S_r} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (5)$$

В области $\Omega \setminus B_r(y)$ функция $v = \frac{1}{|x-y|}$ вполне определена и дважды непрерывно дифференцируема. Более того, нам известно, что $\Delta v(x) \equiv 0$ для $x \neq y$ и потому равенство (5) несколько изменит свой

вид:

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega \setminus B_r(y)} \frac{1}{|x-y|} \Delta u(x) dx &= \int_S \left(u(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \\
&+ \int_{S_r} \left(u(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (6)
\end{aligned}$$

В этой формуле устремим радиус $r \rightarrow 0$. Функция $1/|x-y|$ интегрируема в любой ограниченной области Ω , и потому пределом левого интеграла в равенстве (6) является выражение

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \Delta u(x) dx.$$

Интеграл по границе S не зависит от выбора вспомогательного радиуса r и остается неизменным при $r \rightarrow 0$. Последний интеграл в (6) представим как сумму двух интегралов:

$$K_1 = \int_{S_r} u(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} dS, \quad K_2 = - \int_{S_r} \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Заметим, что $|x-y| = r$ для $x \in S_r$ и потому

$$K_2 = - \int_{S_r} \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} dS = - \frac{1}{r} \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

По условию функция $u \in C^2(\overline{\Omega})$, так что ее первые частные производные ограничены: $|\partial u / \partial x_i| \leq M$ ($i = 1, 2, 3$).

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| = |\nabla u \cdot n| \leq |\nabla u| \leq \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq 3M.$$

В результате интеграл K_2 легко оценивается:

$$|K_2| \leq \frac{1}{r} \int_{S_r} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dS \leq \frac{3M}{r} \cdot 4\pi r^2 = 12M\pi r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0).$$

Итак, $K_2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Для вычисления интеграла K_1 введем радиус-вектор $\rho = x - y$, считая $x \in S_r$. Согласно построению $|\rho| = r$, а внешняя по отношению к области $\Omega \setminus B_r(y)$ нормаль $n(x)$ направлена к центру сферы S_r , т.е. в точку y . Значит, направления

n и ρ противоположны и потому $\partial u / \partial n = -\partial u / \partial \rho$ для $x \in S_r$. В результате легко вычисляется нормальная производная на сфере S_r :

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{|\rho|} = \frac{1}{|\rho|^2} = \frac{1}{r^2}, \quad x \in S_r.$$

Это дает возможность вычислить интеграл K_1 :

$$K_1 = \int_{S_r} u(x) \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{r^2} \int_{S_r} u(x) dS = \frac{4\pi}{|S_r|} \int_{S_r} u(x) dS = 4\pi u_r(y).$$

Получились сферические средние функции u , которые стремятся к значению $u(y)$ при $r \rightarrow 0$ согласно лемме 1. Следовательно, $K_1 \rightarrow 4\pi u(y)$ при $r \rightarrow 0$. Подставляя вычисленные предельные значения интегралов в формулу (6), получаем равенство

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \Delta u(x) dx = \int_S \left(u(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + 4\pi u(y).$$

Отсюда находим для $y \in \Omega$:

$$u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} - u(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(x)}{|x-y|} dx.$$

Если в приведенной формуле заменить y на x , то получим утверждение теоремы. \square

4.3. Гармонические функции и их свойства

4.3.1. Интегральное представление гармонических функций. Пусть в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S задана функция $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Согласно теореме 1 раздела 4.2 для любой внутренней точки $x \in \Omega$ справедливо представление

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} - u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy, \quad (1)$$

где n — внешняя нормаль. Напомним, что функция $u(x)$ называется гармонической в области Ω , если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция.

Тогда последний интеграл в равенстве (1) пропадает, что приводит к следующему представлению гармонической функции:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial}{\partial n} u(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} \right) dS. \quad (2)$$

Мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S . Тогда в каждой внутренней точке $x \in \Omega$ эту функцию можно представить по формуле (2).

Следствия приведенного утверждения в силу их важности будут оформляться как теоремы.

ТЕОРЕМА 2 (о среднем арифметическом). Пусть шар $B_r(x)$ радиуса r с центром в точке $x \in \Omega$ целиком расположен в области Ω , и пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ — гармоническая в Ω функция. Тогда значение этой функции в центре шара равно среднему значению по сфере S_r , которая является границей шара, т.е.

$$u(x) = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} u(y) dS.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем представление (2) гармонической функции. Особенность формулы (2) в том, что область Ω мы можем выбирать по своему усмотрению. Более точно, вместо всей области Ω можно выбирать любую ее часть. Фиксируем точку $x \in \Omega$. Так как это внутренняя точка области, то найдется шар $B_r(x)$ радиуса r с центром в точке x , который целиком принадлежит области Ω . По условию функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема как во всей замкнутой области $\overline{\Omega}$, так и в ее части $\overline{B_r(x)}$, и потому можно использовать представление (2), поменяв Ω на $B_r(x)$. Границу шара $B_r(x)$ обозначим S_r . Тогда по формуле (2)

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} u(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} dS \equiv L_1 + L_2. \quad (3)$$

Если $y \in S_r$, то $|x - y| = r$, и потому

$$L_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \frac{1}{|x - y|} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

В последнем равенстве использовано утверждение, что для гармонической функции интеграл по границе от нормальной производной равен нулю.

Для вычисления интеграла L_2 введем радиус-вектор $\rho = y - x$, направленный от центра x к точке $y \in S_r$. Внешняя по отношению к шару $B_r(x)$ нормаль $n(y)$ направлена вдоль вектора ρ и потому

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x - y|} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{|\rho|} = -\frac{1}{|\rho|^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

В результате

$$L_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_r} u(y) \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{|x - y|} ds = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y) dS.$$

Подставляя найденные значения интегралов L_1 и L_2 в равенство (3), приходим к утверждению теоремы. \square

4.3.2. Принцип максимума для гармонических функций. Так называется следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ является гармонической в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S . Тогда наибольшее и наименьшее значения эта функция принимает на границе области, т.е. $m \leq u(x) \leq M$, где

$$m = \min_{x \in S} u(x), \quad M = \max_{x \in S} u(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что наибольшее значение функции $u(x)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$ больше числа M , т.е.

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = N > M. \quad (4)$$

Так как функция $u(x)$ непрерывна, то ее наибольшее значение достигается в некоторой точке x_0 . Другими словами, справедливо равенство $u(x_0) = N$. Все значения функции $u(x)$ на границе S меньше числа N и потому точка x_0 является внутренней. Следовательно, точка x_0 принадлежит области Ω вместе с некоторым шаром $B_r(x_0)$ с центром в точке x_0 . Этот шар будем непрерывно

расширять до тех пор, пока его граница S_r не коснется границы S области Ω в некоторой точке y_0 . Если точек касания много, то выберем любую из них. Согласно приведенному построению точка $y_0 \in S$ и потому $u(y_0) \leq M < N$. В силу непрерывности функции $u(y)$ неравенство $u(y) < N$ выполняется не только в точке y_0 , но и в некоторой ее окрестности. Другими словами, если задать достаточно малое число $\varepsilon > 0$, то найдется часть $\sigma(\varepsilon)$ сферы S_r , для точек которой справедливо неравенство

$$u(y) \leq N - \varepsilon, \quad y \in \sigma(\varepsilon). \quad (5)$$

Используем теорему 2 о среднем арифметическом, представив ее в виде

$$N = u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y) dS = \frac{1}{4\pi r^2} \left(\int_{\sigma(\varepsilon)} u(y) dS + \int_{S_r \setminus \sigma(\varepsilon)} u(y) dS \right). \quad (6)$$

Согласно неравенству (5)

$$\int_{\sigma(\varepsilon)} u(y) dS \leq \int_{\sigma(\varepsilon)} (N - \varepsilon) dS = (N - \varepsilon) \int_{\sigma(\varepsilon)} dS = (N - \varepsilon) |\sigma(\varepsilon)|.$$

Оценим также последний интеграл в (6):

$$\int_{S_r \setminus \sigma(\varepsilon)} u(y) dS \leq \int_{S_r \setminus \sigma(\varepsilon)} N dS = N |S_r \setminus \sigma(\varepsilon)| = N(|S_r| - |\sigma(\varepsilon)|).$$

Напомним, что знаком $|\sigma(\varepsilon)|$ обозначается площадь поверхности $\sigma(\varepsilon)$. Для интеграла по всей сфере S_r получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(\varepsilon)} u(y) dS + \int_{S_r \setminus \sigma(\varepsilon)} u(y) dS &\leq \\ &\leq (N - \varepsilon) |\sigma(\varepsilon)| + N(|S_r| - |\sigma(\varepsilon)|) = N|S_r| - \varepsilon |\sigma(\varepsilon)|, \end{aligned}$$

при использовании которой в равенстве (6) приходим к соотношению

$$N \leq \frac{1}{4\pi r^2} (N|S_r| - \varepsilon |\sigma(\varepsilon)|) = N - \varepsilon \frac{|\sigma(\varepsilon)|}{4\pi r^2} < N.$$

Получено противоречивое неравенство $N < N$, которое показывает, что предположение (4) неверно. Следовательно, $u(x) \leq M$.

Аналогично можно установить, что $m \leq u(x)$, чем завершается доказательство теоремы. \square

Приведем одно следствие, которое носит название теоремы единственности решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона*

$$\Delta u = f, \quad u|_S = \varphi \quad (7)$$

с заданными функциями f и φ в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S не может иметь более одного решения из класса $C^2(\bar{\Omega})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существуют два решения задачи (7), т.е. справедливы тождества:

$$\Delta u = f, \quad u|_S = \varphi, \quad (8)$$

$$\Delta v = f, \quad v|_S = \varphi. \quad (9)$$

Вычитая соотношения (9) из соответствующих равенств (8) и вводя обозначение $u - v = w$, получаем новые тождества:

$$\Delta w = 0, \quad w|_S = 0. \quad (10)$$

Функция w удовлетворяет условиям теоремы 3 и потому

$$m \leq w(x) \leq M, \quad m = \min_{x \in S} w(x) = 0, \quad M = \max_{x \in S} w(x) = 0.$$

Отсюда очевидно, что $w(x) \equiv 0$, т.е. $u - v \equiv 0$, что и означает единственность решения задачи (7). \square

4.4. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

4.4.1. Представление решения. Пусть задана ограниченная область Ω с кусочно-гладкой границей S . Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона ставится следующим образом: требуется найти функцию, которая удовлетворяет условиям:

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega); \quad u|_S = \varphi. \quad (1)$$

Здесь f — заданная функция в области Ω , φ — заданная функция на границе S .

Напомним, что если известна функция $u \in C^2(\overline{\Omega})$, то ее можно представить по интегральной формуле Грина для точек $x \in \Omega$:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy. \quad (2)$$

Допустим, что функция $u(x)$ является решением задачи (1). Тогда в формуле (2) можно использовать тождества $\Delta u = f$ и $u|_S = \varphi$, в результате чего равенство (2) принимает вид

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x-y|} dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} f(y) dy. \quad (3)$$

Последние два интеграла вполне определены, тогда как первый интеграл требует дополнительного задания функции $\partial u / \partial n$ на границе S . Много способов было придумано для того, чтобы избавиться от интеграла в формуле (3), содержащего $\partial u / \partial n$. Приведем один из самых известных способов, для чего снова обратимся к формуле Грина:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dy = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (4)$$

Предположим, что функция $u(x)$ является решением задачи (1), так что $\Delta u = f$, $u|_S = \varphi$. И пусть функция v — гармоническая, т.е. $\Delta v = 0$. Тогда формула Грина (4) принимает вид

$$-\int_{\Omega} v f dy = \int_S \varphi \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Полученное равенство запишем несколько иначе:

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial v}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} v f dy. \quad (5)$$

Тождества (3) и (5) сложим и результат представим в такой форме:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|x-y|} + v \right) \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} + v \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|x-y|} + v \right) f(y) dy. \quad (6)$$

Мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей S функция $u \in C^2(\overline{\Omega})$ является решением краевой задачи (1). И пусть выбрана гармоническая в области Ω функция $v(x)$. Тогда для каждой внутренней точки $x \in \Omega$ справедливо представление функции $u(x)$ по формуле (6).

4.4.2. Функция Грина. Формулу (6) обычно используют для того, чтобы обратить в нуль один из поверхностных интегралов. Так как сейчас решается задача Дирихле (1), то удобно обратить в нуль первый из интегралов в равенстве (6). Очевидно, для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось соотношение

$$\left(\frac{1}{|x-y|} + v \right) \Big|_S = 0. \quad (7)$$

Напомним, что функция $v(x)$ выбрана гармонической, так что для нее с учетом условия (7) получается следующая краевая задача:

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad v|_S = -\frac{1}{|x-y|}, \quad x \in S, \quad y \in \Omega. \quad (8)$$

Подчеркнем следующий факт: функция $1/|x-y|$ меняется вместе с параметром $y \in \Omega$, поэтому за формулами (8) скрывается на самом деле целое семейство краевых задач, зависящих от параметра $y \in \Omega$. По этой причине решение краевой задачи (8) будем обозначать $v = v(x, y)$, подчеркивая его зависимость от параметра. Фактически получается функция двух переменных $x, y \in \Omega$. Учитывая это, введем обозначение

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x-y|} + v(x, y) \right), \quad x, y \in \Omega, \quad (9)$$

предполагая, что функция $v(x, y)$ по переменной $x \in \overline{\Omega}$ является решением краевой задачи (8). Функцию $G(x, y)$, определяемую соотношением (9) и краевым условием (7), принято называть функцией Грина, или функцией источника, краевой задачи Дирихле (1) для оператора Лапласа.

Важное значение функции Грина совершенно очевидно из формулы (6), которая с учетом обозначения (9) принимает вид

$$u(x) = - \int_S G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_S \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) dS + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy. \quad (10)$$

Согласно свойству (7)

$$-4\pi G(x, y)|_{x \in S} = \left(\frac{1}{|x - y|} + v(x, y) \right) \Big|_{x \in S} = 0,$$

и поэтому формула (10) упрощается:

$$u(x) = \int_S \varphi(y) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y) dS + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy. \quad (11)$$

Мы получили следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что задача Дирихле для оператора Лапласа имеет функцию Грина $G(x, y)$. Тогда решение $u \in C^2(\overline{\Omega})$ краевой задачи (1) можно представить через функцию Грина по формуле (11).*

Напомним, что функции f и φ считаются заданными, и потому правая часть формулы (11) содержит только известные величины. Другими словами, формула (11) дает представление решения задачи (1) по известным данным. Можно показать, что формула (11) действительно определяет классическое решение задачи (1) при следующих условиях: область Ω ограничена и имеет гладкую границу класса C^2 ; функция $f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{\Omega}$; функция $\varphi(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на границе S области Ω . Вместо доказательства сформулированного утверждения прибегнем к испытанному приему, приняв формулу (11) за обобщенное решение задачи (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть область Ω ограничена и имеет кусочно-гладкую границу S , и пусть функции f и φ непрерывны на $\bar{\Omega}$ и S соответственно. Тогда функцию $u(x)$, определяемую формулой (11), назовем обобщенным решением краевой задачи (1).

4.5. Примеры построения функции Грина

Согласно определению функции Грина для ее построения следует решить задачу Дирихле с параметром $y \in \Omega$ для оператора Лапласа в заданной области Ω с границей S :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = 0, \text{ или } \Delta_x v(x, y) = 0 \quad (x \in \Omega); \quad (1)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{|x - y|} \quad (x \in S). \quad (2)$$

Нам известно, что функция $1/|x - z|$ для каждого фиксированного $z \in \mathbb{R}^3$ является гармонической по переменным $(x_1, x_2, x_3) = x$ во всем пространстве \mathbb{R}^3 , кроме точки $x = z$. Учитывая это, попытаемся найти решение задачи (1)–(2) в аналогичном виде

$$v(x, y) = -\frac{k}{|x - z|} \quad (k > 0, z \notin \Omega). \quad (3)$$

Здесь k — числовой множитель, z — точка в \mathbb{R}^3 . Задача сводится к тому, чтобы вычислить k и z в зависимости от параметра $y \in \Omega$. Из условия (2) вытекает, что функция $v(x, y)$ на границе S принимает отрицательные значения. С учетом этого постоянную k в дроби (3) выбираем положительной. Следует также позаботиться, чтобы точка z не принадлежала области Ω . В этом случае функция (3) будет гармонической в Ω , т.е. удовлетворяющей уравнению (1). Остается обеспечить краевое условие (2), что приводит к уравнению

$$\frac{k}{|x - z|} = \frac{1}{|x - y|} \quad (x \in S). \quad (4)$$

Неизвестными здесь являются число $k > 0$ и точка $z \notin \Omega$. Решить уравнение (4) удастся для сферы и плоскости. Рассмотрим подробнее указанные возможности.

4.5.1. Функция Грина для шара. Пусть $\Omega = B_R$ — шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Граница S шара определяется уравнением $|x| = R$. Чтобы решить уравнение (4), перепишем его в виде $k|x - y| = |x - z|$, после чего обе части уравнения возведем в квадрат, что дает уравнение

$$k^2|x - y|^2 = |x - z|^2,$$

или подробнее

$$k^2(x^2 - 2x \cdot y + y^2) = x^2 - 2x \cdot z + z^2, \quad |x| = R. \quad (5)$$

Как обычно, точка означает скалярное произведение векторов, а $x^2 = x \cdot x$. Используя равенство $x^2 = R^2$ и приводя подобные, уравнение (5) преобразуем к виду

$$(k^2 - 1)R^2 + k^2y^2 - z^2 = 2x \cdot (k^2y - z). \quad (6)$$

Число $k > 0$ и точки $y \in B_R$ и $z = z(y)$ считаются фиксированными, поэтому в левой части уравнения (6) стоит скаляр, тогда как правая часть уравнения (6) содержит переменный вектор $x \in S$. Отсюда следует, что равенство (6) может выполняться только при следующих условиях:

$$(k^2 - 1)R^2 + k^2y^2 - z^2 = 0, \quad k^2y - z = 0. \quad (7)$$

Второе из соотношений (7) показывает, что вектор $z = k^2y$ лежит на луче, определяемом вектором y , и при этом $z^2 = k^4y^2$. Подстановка последнего равенства в первое из уравнений (7) приводит к новому уравнению

$$(k^2 - 1)R^2 + (k^2 - k^4)y^2 = 0. \quad (8)$$

Заметим, что уравнение (8) удовлетворяется, в частности, при $k^2 = 1$. В этом случае из (7) следует, что $z = y$. Но $y \in B_R$, значит, $z \in B_R$, что противоречит условию задачи. Поэтому считаем $k^2 \neq 1$, и тогда из уравнения (8) после сокращения на $k^2 - 1$ получаем $R^2 = k^2y^2$, откуда однозначно определяется параметр $k^2 = R^2/y^2$. Очевидно, следует считать $y \neq 0$. Далее, по условию $k > 0$, и потому $k = R/|y|$, $y \neq 0$. Из последнего уравнения в (7) находим точку $z = (R^2/y^2)y$, по которой строим функцию (3):

$$v(x, y) = \frac{-k}{|x - z|} = -\frac{R|y|}{|xy^2 - yR^2|}. \quad (9)$$

Для точки z справедлива оценка $|z| = \frac{R}{|y|}R > R$, так как $|y| < R$. Следовательно, $|z| > R$, т.е. $z \notin B_R$, что обеспечивает гармоничность функции (9) в области B_R . Остается проверить, что функция (9) удовлетворяет краевому условию (2), для чего функцию (9) рассмотрим на сфере S , т.е. для $|x| = R$. Тогда

$$v(x, y) = -\frac{|x||y|}{|xy^2 - yx^2|}, \quad |x| = R. \quad (10)$$

Сначала преобразуем выражение

$$\begin{aligned} |xy^2 - yx^2|^2 &= x^2(y^2)^2 - 2x^2y^2x \cdot y + y^2(x^2)^2 = \\ &= x^2y^2(y^2 - 2x \cdot y + x^2) = x^2y^2|y - x|^2. \end{aligned}$$

Отсюда $|xy^2 - yx^2| = |x||y||x - y|$, что при подстановке в (10) приводит к тождеству

$$v(x, y) = -\frac{|x||y|}{|x||y||x - y|} = -\frac{1}{|x - y|}, \quad |x| = R,$$

которое совпадает с краевым условием (2).

Подведем итог. Функция (9) является гармонической в шаре B_R и удовлетворяет краевому условию (2) на границе шара, т.е. представляет решение краевой задачи (1)–(2) для шара B_R . В соответствии с теорией предыдущего раздела мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Функция Грина для шара B_R радиуса $R > 0$ с центром в начале координат существует и имеет вид*

$$4\pi G(x, y) = -\frac{1}{|x - y|} + \frac{R|y|}{|xy^2 - yR^2|} \quad (x, y \in B_R).$$

4.5.2. Функция Грина для полупространства. В представленной ранее теории функции Грина предполагалось, что область Ω ограничена. Как уже отмечалось, многие формулы математической физики часто применяются вне условий, при которых они получены. Это замечание относится и к функции Грина. Считая, что функция Грина может быть определена для неограниченных областей, попытаемся построить ее для полупространства $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$. Снова применяем приведенные в начале раздела рассуждения и ищем решение задачи (1)–(2) в форме (3).

Тогда гармоничность функции $v(x, y)$ по x обеспечена, и остается удовлетворить краевому условию

$$\frac{k}{|x - z|} = \frac{1}{|x - y|}, \quad x_3 = 0. \quad (11)$$

Неизвестными здесь являются число $k > 0$ и точка $z \in \mathbb{R}^3$. Соотношение (11) перепишем в виде (5), что с учетом равенства $x_3 = 0$ приводит к уравнению

$$(k^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1(z_1 - k^2 y_1) + 2x_2(z_2 - k^2 y_2) + k^2 y^2 - z^2 = 0.$$

Выражение слева рассмотрим как многочлен от двух переменных $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Этот многочлен равен нулю тождественно, следовательно, его коэффициенты следует приравнять нулю, что приводит к системе уравнений:

$$k^2 - 1 = 0, \quad z_1 - k^2 y_1 = 0, \quad z_2 - k^2 y_2 = 0, \quad k^2 y^2 - z^2 = 0.$$

Отсюда без труда находим:

$$k^2 = 1, \quad z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2, \quad z^2 = y^2.$$

Последние три уравнения приводят к равенству $z_3^2 = y_3^2$, откуда $z_3 = \pm y_3$. По условию точка $z \notin \Omega$, и потому следует выбрать $z_3 = -y_3$. Из уравнения $k^2 = 1$ и условия $k > 0$ находим $k = 1$. Окончательно в качестве искомого решения получается функция

$$v(x, y) = -\frac{1}{|x - z|}, \quad z = (y_1, y_2, -y_3). \quad (12)$$

По условию точка $y \in \Omega$, т.е. $y_3 > 0$, и потому $z \notin \Omega$, что обеспечивает гармоничность функции (12) в области Ω . Остается проверить краевое условие (2), для чего функцию (12) рассмотрим на плоскости $x_3 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + z_3^2}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + y_3^2}} = -\frac{1}{|x - y|}, \end{aligned}$$

что и требуется. Итак, функция (12) является гармонической в полупространстве $x_3 > 0$ и удовлетворяет требуемому краевому условию, т.е. представляет решение краевой задачи (1)–(2) для полупространства, что приводит к следующему утверждению.

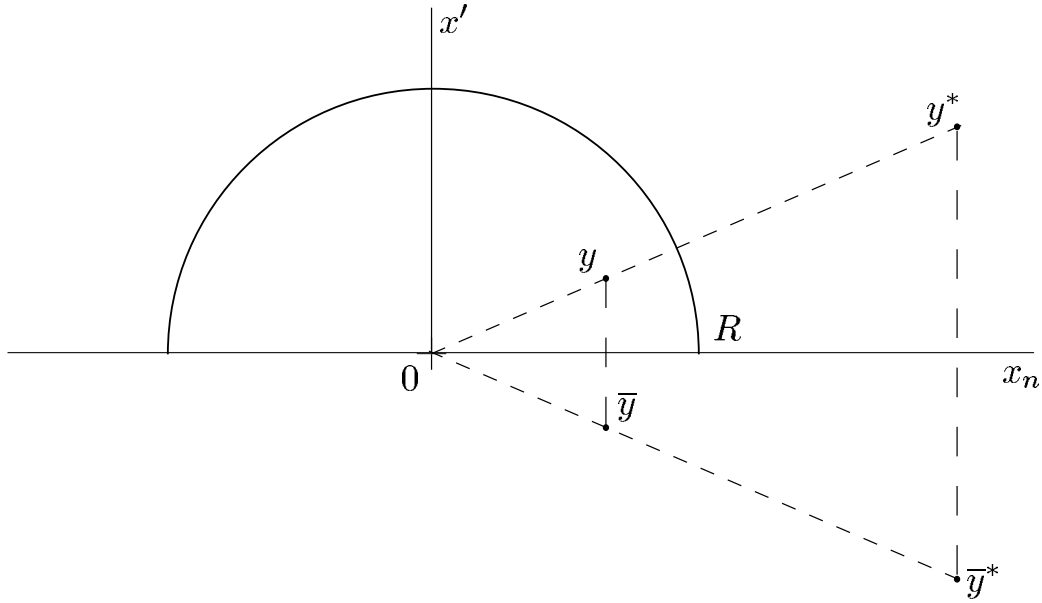


Рис. 4.1.

ТЕОРЕМА 2. *Функция Грина для полупространства $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ существует и имеет вид*

$$4\pi G(x, y) = -\frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{|x - z|}, \quad z = (y_1, y_2, -y_3).$$

4.5.3. Функция Грина для полушара. Представленные выше примеры функции Грина можно объединить следующей идеей симметрии. Пусть $|y| < R$. Точка $y^* = \frac{R^2}{|y|^2}y$ называется *симметричной для y относительно сферы $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$* при преобразовании инверсии. Если же точка y лежит в верхней полуплоскости, т.е. $y_3 > 0$, то *симметричной ей точкой относительно плоскости $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$* называется точка $\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3)$. Используя приведенные обозначения, можем записать полученные ранее функции Грина в следующем виде:

1) для шара

$$4\pi G(x, y) = -\frac{1}{|x - y|} + \frac{R}{|y||x - y^*|},$$

2) для полупространства

$$4\pi G(x, y) = -\frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{|x - \bar{y}|}.$$

Способ построения функции Грина с использованием симметричных точек получил название *метода отражений*. Этот метод

оказался весьма эффективным при вычислении функции Грина для областей с достаточно широкой группой симметрий. Например, применение метода отражений для полушара

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R, x_3 > 0\}$$

приводит к четырем точкам, которые с использованием введенных выше обозначений можно записать в виде $y, y^*, \bar{y}, \bar{y}^*$ (см. рис. 4.1). Функция Грина для полушара имеет вид

$$4\pi G(x, y) = -\frac{1}{|x - y|} + \frac{R}{|y||x - y^*|} + \frac{1}{|x - \bar{y}|} - \frac{R}{|y||x - \bar{y}^*|}.$$

ГЛАВА 5

Основы общей теории уравнений с частными производными

Ядро каждой математической теории, посвященной уравнениям, составляют теоремы о существовании решений изучаемого класса уравнений. В предыдущих главах мы построили решения уравнений с частными производными для некоторых специальных областей. Естественно возникает вопрос о разрешимости уравнений для более сложных областей и более общих правых частей. Потребовалось целое столетие и создание новой математической дисциплины — функционального анализа, чтобы получить достаточно полный ответ на поставленный вопрос.

Изложению описанной теории посвящена данная глава. При этом по необходимости и очень бегло излагаются основы функционального анализа, в рамках которого краевые задачи для уравнений с частными производными записываются и решаются как операторные уравнения $Au = f$. Строятся функциональные пространства, в которых удастся отыскать решение указанного операторного уравнения. Сразу же отметим особую роль пространств С.Л. Соболева, в рамках которых получаются наиболее общие теоремы существования решений краевых задач для уравнений с частными производными. При этом оказалось, что порядок уравнения не играет особой роли. Например, в едином ключе решаются краевые задачи для оператора Лапласа $\Delta u = f$ и для бигармонического уравнения $\Delta^2 u = f$.

5.1. Метрические пространства

5.1.1. Аксиомы метрического пространства. Функциональный анализ изучает пространства, которые имеют бесконечную размерность. При этом используются понятия, хорошо известные для плоскости и обычного пространства. Наиболее

наглядным объектом на плоскости является расстояние между двумя точками. Это понятие удивительно просто переносится на множества самой произвольной природы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дано произвольное множество M , элементы которого будем обозначать x, y, z, \dots . Это множество M называется метрическим пространством, если для любых двух элементов $x, y \in M$ определено число $\rho(x, y)$ с такими свойствами:

- 1) $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) > 0$, если $x \neq y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

По аналогии с обычным пространством элементы такого множества называют точками, а функцию $\rho(x, y)$ — метрикой. Свойства 1)–3) известны как аксиомы метрики. Первые два свойства очень просты и не требуют пояснений. Последнее свойство называется неравенством треугольника, так как на плоскости оно превращается именно в такое неравенство. В настоящее время метрические пространства активно используются в разнообразных вариантах. Начнем с простейших примеров.

1. $M = \mathbb{R}^1$ с метрикой $\rho = |x - y|$. Аксиомы метрики известны со школы: $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) > 0$ ($x \neq y$). Отметим неравенство треугольника и запомним его:

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|. \quad (1)$$

2. $M = \mathbb{R}^2$ — плоскость с метрикой $\rho(x, y) = [\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2]^{1/2}$. Это самый яркий пример метрического пространства.

3. $M = \mathbb{R}^n \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ — обобщение плоскости на n -мерное пространство. Метрика задается как обобщение теоремы Пифагора: $\rho(x, y) = [\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{1/2}$.

4. Множество бесконечных последовательностей

$$x = (x_1, x_2, \dots).$$

Из них выделяют какую-либо часть, например

$$l_1 \equiv \left\{ x : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}.$$

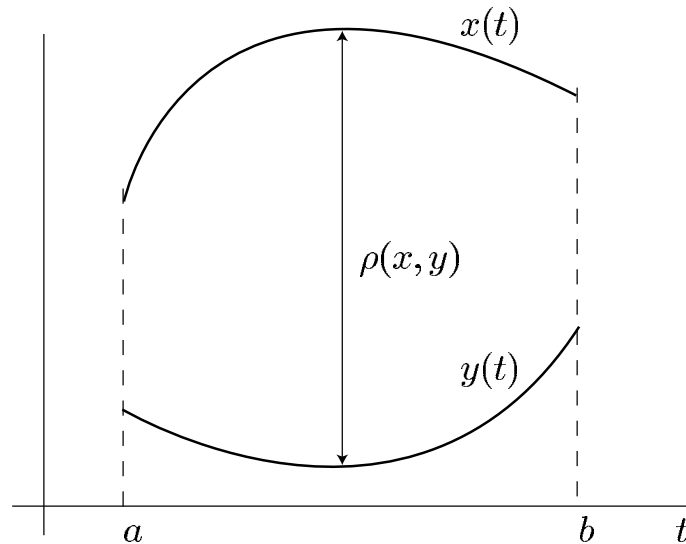


Рис. 5.1.

Расстояние $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$. Этому пространству принадлежат, например, векторы $e_1 = (1, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$. Таких векторов бесконечно много, и все они линейно независимы. Поэтому говорят, что пространство l_1 имеет бесконечную размерность.

5. Чаще всего в качестве метрического пространства выступают множества, состоящие из функций. Рассмотрим пример, который считается самым простым: дан отрезок $[a, b]$ и множество всех непрерывных на нем функций $x(t), y(t), \dots$. Такое множество обозначается $C[a, b]$. Метрика задается формулой $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$. Графически это значит, что ищутся точки на графиках, которые отстоят по вертикали дальше друг от друга, чем все другие пары (рис. 5.1).

5.1.2. Геометрия метрического пространства. Определение метрического пространства содержит всего три аксиомы. Это приводит к тому, что внутренняя структура метрического пространства может быть сложной. Например, метрическое пространство $M = [0, 1]$, т.е. отрезок с естественной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, не содержит ни одной прямой. Геометрия метрического пространства может быть очень бедной. Однако любое метрическое пространство содержит следующие геометрические объекты: замкнутые шары, открытые шары и сферы. Шаром (или замкнутым шаром) с центром в точке x_0 называется множество точек $B[x_0, r] \equiv \{x \in M : \rho(x, x_0) \leq r\}$.

Открытым шаром называется множество

$$B(x_0, r) \equiv \{x \in M : \rho(x, x_0) < r\}.$$

Если открытый шар имеет достаточно малый радиус $r = \varepsilon$, то его часто называют ε -окрестностью точки x_0 и обозначают символом $O_\varepsilon(x_0) \equiv B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$. Наконец, сферой называется множество $B[x_0, r] \setminus B(x_0, r)$, т.е. дополнение открытого шара до замкнутого шара того же радиуса. Отметим еще, что множество $K \in M$ называется ограниченным, если оно целиком содержится в некотором фиксированном шаре. В каждом метрическом пространстве выделяют открытые множества, или области. Так называются множества U , которые вместе с любой своей точкой $x \in U$ содержат ее окрестность, хотя бы и очень малого радиуса.

Очевидно, что каждый открытый шар является открытым множеством. А вот сфера не является открытым множеством, так же как и замкнутый шар. Открытые множества обладают следующим свойством: объединение любого числа открытых множеств есть снова открытое множество. В качестве двойственных к открытым выделяют замкнутые множества. Множество F называется замкнутым, если оно является дополнением открытого множества, т.е. имеет вид $F = M \setminus U$, где U — открытое множество. Отсюда следует, в частности, что каждое открытое множество является дополнением замкнутого. Пересечение любого числа замкнутых множеств есть снова замкнутое множество.

Все метрическое пространство M , а также пустое множество \emptyset , считаются одновременно и открытыми, и замкнутыми. В некоторых метрических пространствах одновременно открытыми и замкнутыми могут быть и другие множества. Например, пусть $M = [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, т.е. множество рациональных чисел отрезка $[-1, 1]$. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ — иррациональное число. Тогда шар $B[0, \alpha]$ и открытый шар $B(0, \alpha)$ совпадают, так как различаются только точками α и $-\alpha$, которые не принадлежат пространству $M = [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$.

5.1.3. Сходимость последовательностей в метрическом пространстве. Важной операцией математики является предел.

Для метрических пространств легко определяется предел последовательности, очень похоже на предел точек на плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть дана последовательность точек x_1, x_2, \dots метрического пространства M . Говорят, что эта последовательность сходится к точке $x \in M$, если $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Сходимость последовательности записывают двумя способами: либо $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), либо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Рассмотрим примеры.

1. $M = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, т.е. числовая ось с метрикой $\rho = |x - y|$. Этот пример метрического пространства тщательно изучается в курсе математического анализа. Напомним, что вначале определяются рациональные числа $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$. Однако существуют последовательности из рациональных чисел, которые не имеют предела в множестве \mathbb{Q} . И тогда вводятся новые числа — иррациональные, которые дополняют множество \mathbb{Q} до всей числовой оси. Это классический пример пополнения неполного метрического пространства, состоявшего первоначально из рациональных чисел, новыми объектами, именно — иррациональными числами. Следует подчеркнуть, что приведенная схема пополнения метрического пространства новыми элементами стала ведущей во всем функциональном анализе.

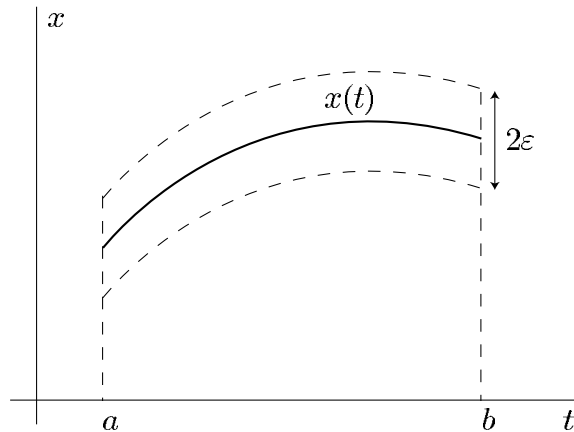


Рис. 5.2.

2. $M = \mathbb{R}^m$. Пусть задана последовательность x_1, x_2, \dots . Каждый элемент есть набор из m чисел: $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$. Пусть $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), т.е. $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, или подробнее $\sum_{i=1}^m (x_{ni} - x_i)^2 \rightarrow 0$.

0 ($n \rightarrow \infty$). Так как сумма состоит из положительных слагаемых, то каждое слагаемое стремится к нулю, т.е. для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ имеем: $|x_{ni} - x_i| \rightarrow 0$. Такая сходимость называется покоординатной.

3. $M = l_1$. Пусть дана последовательность $x_n \rightarrow x$, т.е. $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, или подробнее $\sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - x_i| \rightarrow 0$. По аналогии с предыдущим каждая координата здесь имеет предел: $x_{ni} \rightarrow x_i$ ($n \rightarrow \infty$). Однако теперь одной покоординатной сходимости недостаточно, требуется, чтобы сумма ряда стремилась к нулю при $n \rightarrow \infty$.

4. $M = C[a, b]$. Сходимость последовательности в пространстве $C[a, b]$ означает, что $\rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Если номер n велик, то число $\rho(x_n, x) \equiv \varepsilon_n$ мало, и тогда соотношение $\rho(x_n, x) = \varepsilon_n \rightarrow 0$ приводит к неравенству $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon_n$, которое показывает, что функция $x_n(t)$ попадает в трубку раствора 2ε вокруг функции $x(t)$ (рис. 5.2). Такая сходимость функций называется равномерной на отрезке $[a, b]$.

5.1.4. Полные метрические пространства. Вспомним числовые последовательности. Пусть $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Может случиться, что число x нам неизвестно. Как узнать, что последовательность x_n сходится? Ответ дает критерий Коши: последовательность чисел x_n сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т.е. $|x_n - x_m| \rightarrow 0$, если $n, m \rightarrow \infty$. Понятие фундаментальной последовательности легко переносится на метрические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть M — метрическое пространство. Последовательность $x_n \in M$ называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$, когда $n, m \rightarrow \infty$.

Выше мы вспомнили, что для чисел сходимость и фундаментальность последовательности x_n — это одно и то же. Для метрических пространств эти понятия могут расходиться. Более точно, пусть известно, что последовательность сходится, т.е. $x_n \rightarrow x$ в M при $n \rightarrow \infty$. Тогда она фундаментальна. Действительно, по неравенству треугольника $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x)$. Правая часть стремится к нулю, когда $n, m \rightarrow \infty$, что и дает фундаментальность последовательности.

Обратно, пусть известно, что последовательность $x_n \in M$ фундаментальна. Это еще не гарантирует существования ее предела, т.е. может случиться, что нет точки $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. В качестве примера возьмем метрическое пространство $M = [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, т.е. множество рациональных чисел отрезка $[-1, 1]$. Легко составить последовательность $x_n \in M$, которая сходится к иррациональному числу: $x_n \rightarrow \alpha$, где α — иррациональное. Сама же последовательность x_n состоит из рациональных чисел и является фундаментальной, так как имеет предел. Но этот предел не входит в исходное пространство M , хотя и принадлежит более широкому множеству $\overline{M} = [-1, 1]$. Исходное пространство $M = [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ можно представить наглядно как отрезок, испещренный дырками на месте иррациональных чисел. Ясно, что такие пространства неудобны в приложениях, и это привело к следующему понятию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Метрическое пространство M называется полным, если в нем каждая фундаментальная последовательность имеет предел.

Примером полного метрического пространства является множество $M = C[a, b]$. Его полнота — а это равносильно существованию предела равномерно сходящейся последовательности функций, непрерывных на отрезке — доказана в курсе математического анализа. В каждом конкретном случае метрического пространства его полноту приходится доказывать независимо. Но можно использовать замечательное утверждение, опубликованное Хаусдорфом в 1914 году.

ТЕОРЕМА 1 (о пополнении метрического пространства). *Пусть M — метрическое пространство, которое может быть неполным. Тогда найдется полное метрическое пространство \overline{M} , называемое пополнением M , такое, что исходное пространство M является частью нового, то есть $M \subset \overline{M}$, и при этом M плотно в \overline{M} .*

Расшифруем плотность M в \overline{M} . Это значит следующее. Пусть дан элемент $\overline{x} \in \overline{M}$. Тогда найдется последовательность $x_n \in M$, которая сходится к \overline{x} , т.е. $x_n \rightarrow \overline{x}$ в \overline{M} . Обратно, если x_n фундаментальна в M , то найдется элемент $\overline{x} \in \overline{M}$ такой, что $x_n \rightarrow \overline{x}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Реально строить пополнение \overline{M} — трудная задача. Это видно уже на примере пополнения пространства рациональных чисел иррациональными, для чего потребовалось создание теории действительных чисел.

5.2. Нормированные пространства

5.2.1. Линейные нормированные пространства. Мы подробно изучили метрические пространства. Элементы таких пространств в общем случае нельзя складывать друг с другом и умножать на числа. Говорят, что общее метрическое пространство нелинейно. Очень часто возникает ситуация, когда элементы некоторого множества можно складывать и умножать на числа. Тогда говорят, что задано линейное пространство. Примером служит множество всех непрерывных функций, определенных на заданном отрезке $[a, b]$. Приведем общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество L , состоящее из элементов x, y, z, \dots , называется линейным пространством, если любые два элемента $x, y \in L$ можно складывать, получая снова элемент из L , и любой элемент $x \in L$ можно умножать на число λ , получая элемент $\lambda x \in L$. При этом предполагаются выполненными естественные операции, как-то: коммутативность $x + y = y + x$ и ассоциативность $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Отметим, что в любом линейном пространстве существует нулевой элемент с такими свойствами: $x + 0 = x$, $0 \cdot x = 0$. Кроме того, для каждого элемента $x \in L$ определен противоположный элемент $-x = (-1) \cdot x$, такой, что $x + (-x) = 0$. Приведем примеры линейных пространств.

1. $L = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Это один из простейших примеров линейного пространства. Он служит образцом для всех более сложных.

2. $L = \mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство, состоящее из векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Это множество детально изучается в линейной алгебре. Малые размерности \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 изучаются в аналитической геометрии.

3. $L = C[a, b]$ — множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Мы знаем, что при сложении таких функций снова получается непрерывная функция. Очевидно также, что эти функции можно умножать на числа.

4. $L = l_2$ — пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = c^2 < \infty$.

По аналогии с метрическими пространствами хотелось бы в линейных пространствах также ввести расстояние. Это достаточно сделать для каждого отдельно взятого элемента, определив его расстояние до нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейное пространство L называется *нормированным*, если для каждого элемента $x \in L$ определено число $\|x\|$, называемое нормой, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

- 1) $\|0\| = 0$ и $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Приведем примеры нормированных пространств.

1. $L = \mathbb{R}$. Тогда $\|x\| = |x|$. Эта норма изучается подробно в курсе анализа. Третья аксиома нормы имеет вид: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. $L = \mathbb{R}^n$, тогда $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Эта норма хорошо известна. Она подробно изучается в линейной алгебре.

3. $L = C[a, b]$. Тогда $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.

4. $L = l_2$. Тогда $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$. Здесь имеется довольно полная аналогия с пространством \mathbb{R}^n . Отличие заключается в том, что появляется ряд вместо конечной суммы. Это требует дополнительного условия сходимости ряда, что заложено в определении пространства l_2 .

5.2.2. Полные нормированные пространства. Сравним аксиомы нормы с аксиомами метрики. Мы видим, что они очень похожи. Это сходство не случайно и становится ясным из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Каждое линейное нормированное пространство является метрическим с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим аксиомы метрики по порядку.

1) $\rho(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$; если $x \neq y$, то $\|x - y\| > 0$, тогда $\rho(x, y) = \|x - y\| > 0$.

2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$. Это очевидно, так как $\|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\|$.

3) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Аксиомы метрики выполняются, что доказывает теорему. \square

Итак, каждое нормированное пространство автоматически является метрическим. Следовательно, все понятия метрического пространства переносятся в нормированные. Среди них важнейшим является полнота.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть линейное нормированное пространство, рассматриваемое как метрическое, является полным. Тогда оно называется *банаховым пространством*.

Все приведенные выше примеры являются полными метрическими пространствами, а потому это банаховы пространства. Переведем определение полного метрического пространства на язык нормы. Пусть L — линейное пространство с нормой $\|x\|$ и метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Пусть задана фундаментальная последовательность $x_n \in L$, так что $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$, когда $n, m \rightarrow \infty$. Это значит, что $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, если $n, m \rightarrow \infty$. Если пространство полно, то найдется элемент $x_0 \in L$ такой, что $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$, т.е. $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Мы получили следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L — полное нормированное пространство. Тогда каждая фундаментальная последовательность x_n задается соотношением $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, когда $n, m \rightarrow \infty$. При этом найдется элемент $x_0 \in L$ такой, что $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В этом случае говорят, что последовательность x_n сходится к элементу x_0 по норме пространства L и пишут: $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) в L .

ПРИМЕР 1. Если $L = C[a, b]$, то сходимость остается равномерной сходимостью на отрезке $[a, b]$. Например, $x_n = (1 + n^2)^{-1}x^n$ сходится равномерно к $x_0 = 0$ на отрезке $[0, 1]$.

5.2.3. Геометрические объекты в банаховом пространстве. Пусть задано банахово пространство L , т.е. полное нормированное пространство с нормой $\|x\|$. Мы знаем, что оно одновременно является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Это значит, что в нормированные пространства переносятся геометрические объекты метрических пространств. Отметим их.

1. Замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x_0 называется множество $B[x_0, r] = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$.

2. Открытым шаром называется множество

$$B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}.$$

Напомним, что открытые шары малого радиуса часто называются окрестностью точки x_0 .

3. Сферой называется множество $S = \{x : \|x - x_0\| = r\}$.

Банахово пространство является линейным, и потому в нем легко определяются линейные геометрические фигуры и объекты, связанные с ними. Приведем примеры.

1. Прямой называется множество $l_0 = \{tx; t \in \mathbb{R}\}$, где x — фиксированный элемент пространства L . Смещенной прямой называется множество $l = \{tx + y\}$, где x, y — фиксированные элементы пространства L .

2. Плоскостью называется множество $\Pi = \alpha x + \beta y$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а элементы $x, y \in L$ фиксированы. Обратим внимание, что плоскость есть сумма элементов двух прямых $l_1 = \{\alpha x\}$ и $l_2 = \{\beta y\}$.

3. Отрезком, соединяющим точки $x, y \in L$, называется множество $[x, y] = \{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$.

4. Множество $V \subset L$ называется выпуклым, если вместе с точками $x, y \in V$ оно содержит весь отрезок $[x, y]$.

ПРИМЕР 2. Шар $B[0, r] = \{\|x\| \leq r\}$ является выпуклым множеством. Проверим это. Пусть $x, y \in B[0, r]$, т.е. $\|x\| \leq r$ и $\|y\| \leq r$.

Введем элемент $z = (1 - t)x + ty$, где $t \in [0, 1]$, и оценим его норму:

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|(1 - t)x + ty\| \leq \|(1 - t)x\| + \|ty\| = \\ &= (1 - t)\|x\| + t\|y\| \leq (1 - t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Итак, $\|z\| \leq r$, т.е. $z \in B[0, r]$. Это и означает выпуклость шара.

ПРИМЕР 3. Сфера $S = \{\|x\| = r\}$ не является выпуклым множеством. Действительно, пусть $x \in S$. Тогда $-x \in S$, так как $\|-x\| = \|x\| = r$. Серединой отрезка $[-x, x]$ является точка $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)$. Так как $\|0\| = 0$, то $0 \notin S$. А это противоречит определению выпуклого множества.

5.2.4. Подпространства банахова пространства. Пусть в банаховом пространстве L выделена его часть M , которая сама является линейным пространством: если $x, y \in M$, то $x + y \in M$ и $\lambda x \in M$ для $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда M называется *линейным многообразием*. Пусть $x \in M$, тогда одновременно $x \in L$, и потому определена норма $\|x\|$. Получается, что M — это линейное пространство с нормой, т.е. нормированное пространство.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в банаховом пространстве L выделено множество M , которое само является линейным пространством. Тогда это множество является также нормированным пространством, в котором норма $\|x\|$ берется из объемлющего пространства L .

ПРИМЕР 4. $L = \mathbb{R}^3$, $M = xOy$ — плоскость. Это линейное многообразие.

Итак, каждая линейная часть банахова пространства автоматически является нормированным пространством. Это новое пространство может быть полным или неполным. Важен первый вариант.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть M — линейное многообразие в L . Если одновременно это полное пространство, то оно называется *подпространством* в L .

ПРИМЕР 5. $L = C[-1, 1]$; M — множество четных функций $x(-t) = x(t)$. Ясно, что четные функции можно складывать и умножать на числа, они остаются четными. Значит, M — линейное многообразие. Проверим его полноту. Пусть последовательность $x_n(t) \in M$ и фундаментальна ($\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$).

Здесь используется норма исходного пространства $C[-1, 1]$, которое полно. Это значит, что существует предел последовательности x_n в пространстве непрерывных функций, т.е. такая функция $x(t)$, что $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, иначе $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$. Отсюда $x(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(-t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$. Это значит, что $x(t)$ — четная функция, так что $x \in M$. Мы показали, что каждая фундаментальная последовательность в M имеет предел, значит, M — полное пространство, т.е. подпространство в $C[-1, 1]$.

ПРИМЕР 6. Важными примерами подпространства в каждом банаховом пространстве являются конечномерные подпространства. Напомним, что элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ называются линейно независимыми, если из тождества $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ вытекает, что все числа $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Пусть заданы такие линейно независимые элементы. Составим их всевозможные линейные комбинации, т.е. введем множество $L_n \equiv \{x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\}$. Так как здесь участвуют все комбинации, то это линейное многообразие. Элементы x_n называются базисными, а наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — координатами. Фактически получается из координат арифметическое пространство \mathbb{R}^n , которое является полным, и потому множество L_n также полно. Это подпространство размерности n в исходном пространстве L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть в банаховом пространстве L выделены два подпространства L_1 и L_2 . И пусть каждый элемент $x \in L$ можно представить единственным способом в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Тогда говорят, что пространство L есть *прямая сумма* своих подпространств и пишут $L = L_1 \oplus L_2$.

ПРИМЕР 7. $L = C[-1, 1]$; L_1 — четные функции, L_2 — нечетные функции. По каждой функции $x(t)$ вводим $x_1(t) = [x(t) + x(-t)]/2$, $x_2(t) = [x(t) - x(-t)]/2$. Тогда $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $x = x_1 + x_2$. Значит, $L = L_1 \oplus L_2$ — прямая сумма четных и нечетных функций.

5.3. Линейные операторы и функционалы в банаховом пространстве

5.3.1. Норма линейного оператора. Пусть L — банахово пространство. Оператором называется закон, который каждый элемент $x \in L$ переводит в новый элемент $y = Ax$. Так как банахово

пространство линейно, то среди всех операторов выделяют линейные. Так называются операторы, которые удовлетворяют следующим соотношениям: $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\lambda x) = \lambda Ax$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Приведем примеры.

1. $Ax = 0$. Это так называемый нулевой оператор. Его линейность очевидна.

2. $Ex = x$. Это тождественный, или единичный оператор. Линейность очевидна.

3. В пространстве \mathbb{R}^n линейные операторы задаются матрицами.

4. Пусть $L = C[a, b]$, определим интегральный оператор $Ax = \int_a^b K(t, s)x(s) ds$. Ядро $K(t, s)$ предполагается непрерывной функцией двух переменных. После интегрирования по переменной s останется переменная t , так что $Ax \equiv y(t)$. Линейность такого оператора есть следствие линейных свойств интеграла.

Пусть задан линейный оператор A , который переводит элемент x в элемент Ax . Сравним нормы этих двух элементов, для чего составим дробь $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Дробь показывает, как увеличился элемент Ax в сравнении с исходным элементом x . Будем искать самое большое увеличение, именно $\sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \equiv \|A\|$. Такое число называется нормой оператора A . Из определения supremum вытекает, что $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$, откуда $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Обратно, пусть для данного оператора выполняется неравенство $\|Ax\| \leq C \|x\|$ с единой постоянной C для всех элементов $x \in L$. Тогда в частности $\|A\| \equiv \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C$, т.е. $\|A\| \leq C$. Если у оператора A конечна норма $\|A\|$, то он называется ограниченным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — линейный оператор с конечной нормой $\|A\|$. Тогда справедливо неравенство $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Обратно, если для оператора A выполняется неравенство $\|Ax\| \leq C \|x\|$ с единой постоянной C , то этот оператор ограничен, причем $\|A\| \leq C$.

Приведем примеры вычисления нормы линейного оператора.

1. $Ax = 0$. Тогда $\|Ax\| \equiv \|0\| = 0$, откуда $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \equiv 0$, так что $\|A\| = 0$.

2. $Ex = x$. Тогда $\|Ex\| = \|x\|$, откуда $\frac{\|Ex\|}{\|x\|} \equiv 1$. Значит, $\|E\| = 1$.

3. $Ax = \int_a^b K(t, s)x(s) ds$. Это интегральный оператор в пространстве $C[a, b]$. Ядро считается непрерывной функцией на ограниченном множестве $\Omega = [a, b] \times [a, b]$. По свойствам непрерывных функций найдется постоянная M такая, что $|K(t, s)| \leq M$. Тогда

$$|Ax| \leq \int_a^b |K(t, s)| \cdot |x(s)| ds \leq M \int_a^b |x(s)| ds.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|Ax\| = \max_t |Ax| &\leq M \int_a^b |x(s)| ds \leq \\ &\leq M \int_a^b \max_s |x(s)| ds = M(b-a) \|x\| \equiv C \|x\|. \end{aligned}$$

По теореме 1 отсюда следует, что $\|A\| \leq C$, т.е. интегральный оператор с непрерывным ядром ограничен в пространстве $C[a, b]$.

5.3.2. Непрерывные линейные операторы. Понятие оператора обобщает понятие функции. Среди функций выделяют те, которые являются непрерывными. Аналогично среди всех линейных операторов выделяют те, которые являются непрерывными. При этом определение непрерывности оператора очень напоминает определение непрерывности функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор A называется непрерывным, если из соотношения $x_n \rightarrow x$ вытекает, что последовательность $Ax_n \rightarrow Ax$ ($n \rightarrow \infty$).

Проверка непрерывности конкретного оператора часто бывает трудной задачей. И тогда на помощь приходит следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A ограничен, и пусть последовательность $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Оценим разность:

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Это значит, что $Ax_n \rightarrow Ax$ ($n \rightarrow \infty$), т.е. оператор A непрерывен.

Итак, из ограниченности линейного оператора вытекает его непрерывность. Обратно, предположим, что оператор A непрерывен. Убедимся, что он ограничен. Пусть это неверно, т.е. оператор A неограничен. Это значит, что найдется последовательность $x_n \in L$ с таким свойством:

$$\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Построим новую последовательность $y_n = \frac{x_n}{\|Ax_n\|}$. Из предыдущего соотношения следует, что $\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|Ax_n\|} \rightarrow 0$, так как обратные дроби стремятся к ∞ при $n \rightarrow \infty$. По условию оператор A непрерывен, и потому $\|Ay_n\| \rightarrow 0$, так как $y_n \rightarrow 0$. С другой стороны

$$\|Ay_n\| = \left\| A \frac{x_n}{\|Ax_n\|} \right\| \equiv 1.$$

Получено противоречие, которое означает, что предположение о неограниченности оператора A ошибочно. Значит, оператор A ограничен, что завершает доказательство. \square

Главное применение операторов — это уравнения вида $Ax = y$. Здесь элемент y считается известным. Требуется найти $x \in L$. Допустим, что решение можно представить в виде $x = By$. Тогда оператор B называют обратным к оператору A и часто пишут $B = A^{-1}$. Тем самым уравнение $Ax = y$ решается в виде $x = A^{-1}y$. Строить обратный оператор в общем случае трудно. Приведем простые примеры.

1. $Ax = 0$. Все пространство переводится оператором в нулевой элемент. В этом случае говорят, что обратный оператор не существует.

2. $Ex = x$. Решением уравнения $Ex = y$ является элемент $x = y$. Сравнив с абстрактной записью $x = E^{-1}y$, получаем равенство $E^{-1} = E$.

3. $Ax = e^t x(t)$ в пространстве $C[0, 1]$. Решая уравнение $Ax = y$, получаем ответ $x(t) = e^{-t} y(t)$. Поэтому обратный оператор дается формулой $A^{-1}y = e^{-t} y(t)$.

При построении обратного оператора желательно, чтобы он был ограничен. Общий подход здесь обеспечивает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3 (теорема Банаха об обратном операторе). *Пусть A — линейный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство L на себя. Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.*

Понятие оператора можно существенно обобщить, если рассмотреть операторы, действующие из одного пространства в другое. Пусть L и M — два линейных пространства. Если каждому элементу $x \in L$ по определенному закону A ставится в соответствие элемент $u \in M$, то говорят, что задан оператор, отображающий L в M . Описанную ситуацию часто обозначают символом $A : L \rightarrow M$. Оператор $A : L \rightarrow M$ называется линейным, если для всех $x, y \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения: $A(x + y) = Ax + Ay$ и $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Среди линейных операторов часто выделяют те операторы, которые осуществляют взаимно однозначное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейный оператор $J : L \rightarrow M$ называется *изоморфизмом* линейных пространств L и M , если он осуществляет взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому элементу $x \in L$ соответствует некоторый элемент $Ax \in M$, и обратно, для каждого элемента $y \in M$ найдется и притом однозначно элемент $x \in L$ такой, что $Ax = y$. Если такой оператор существует, то пространства L и M называются *изоморфными*.

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же линейного пространства. Простейшим примером изоморфных линейных пространств могут служить комплексная плоскость с элементами $z = x + iy$ и арифметическое пространство \mathbb{R}^2 с элементами (x, y) . Более содержательные примеры будут приведены позднее.

Для банаховых пространств L и M часто требуют, чтобы изоморфизм J обладал дополнительным свойством: $\|Jx\|_M = \|x\|_L$. Если указанное равенство выполнено, то изоморфизм $J : L \rightarrow M$ называют *изометрией*.

5.3.3. Норма линейного функционала. Функционалом называется отображение $f : L \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждый элемент пространства L переводит в число. Можно также сказать, что функционал — это числовая функция, заданная на абстрактном пространстве. Приведем пример функционала.

ПРИМЕР 1. $f(x) = \int_a^b x(t) dt$, $x \in C[a, b]$.

Банаховы пространства являются частью метрических, но они имеют дополнительную структуру — линейность: их элементы можно складывать и умножать на числа. По этой причине главным объектом в банаховых пространствах являются линейные функционалы, которые обладают таким свойством: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Это свойство можно разбить на два: однородность $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и аддитивность $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in L$.

ПРИМЕР 2. Однородность и аддитивность функционала из примера 1 очевидны. Например,

$$f(\alpha x) = \int_a^b \alpha x(t) dt = \alpha \int_a^b x(t) dt = \alpha f(x).$$

Линейный функционал одновременно является очень частным случаем линейного оператора: он отображает данное банахово пространство L в вещественную ось \mathbb{R} , которая является простейшим примером банахова пространства. Итак, функционал $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ есть оператор, и поэтому для него справедливы утверждения, известные для операторов. Отметим важнейшие. С каждым линейным оператором связано понятие нормы. Значит, у каждого функционала тоже есть норма, которая задается как число

$$\|f\| = \sup_{x \in L} \frac{\|f(x)\|_R}{\|x\|_L} = \sup_{x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

ПРИМЕР 3. Оценим модуль функционала из примера 1:

$$|f(x)| \leq \int_a^b |x(t)| dt \leq \int_a^b \max_t |x(t)| dt = \max_t |x(t)| \int_a^b dt = (b-a) \|x\|.$$

Отсюда $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq b - a$. Значит, $\|f\| = \sup_x \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq b - a$.

Мы получили оценку сверху для нормы. Такие оценки обычно получаются легко, но это еще не значит, что получена именно норма. Чтобы доказать, что $\|f\| = b - a$, следует найти элемент $x \in L$, на котором эта норма достигается. В данном примере такой элемент легко находится — это любая постоянная. Например, берем $x(t) \equiv 1$. Тогда $\|x\| = \max |x(t)| = 1$. Для него $f(x) = \int_a^b 1 dt = b - a$. Значит, $\|f\| \geq b - a$. Так как уже доказано, что $\|f\| \leq b - a$, то $\|f\| = b - a$.

5.3.4. Сопряженное пространство. Снова обратимся к операторам. Среди всех операторов выделяют непрерывные. Доказать непрерывность оператора трудно, но это легко делается для линейных операторов. Напомним, что линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, то есть его норма есть конечное число. Функционалы — это частный случай оператора, и поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

ПРИМЕР 4. Функционал из примера 1 непрерывен, так как $\|f\| = b - a$.

Итак, для линейных операторов и функционалов сложное понятие непрерывности заменяется существенно более простым — ограниченностью. В целом линейные ограниченные функционалы — это самые простые объекты в банаховых пространствах. Отдельно взятый линейный функционал не представляет особого интереса. Но задача становится трудной, если рассмотреть все линейные функционалы, которые можно задать на конкретном банаховом пространстве. Это множество получило специальное обозначение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задано банахово пространство L . Совокупность всех линейных непрерывных функционалов, определенных на L , называется *сопряженным* пространством и обозначается L^* .

Выясним свойства нового пространства. Отметим сначала, что функционалы можно умножать на числа и складывать: функционал αf задается формулой $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, функционал $f + g$

задается формулой $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Отсюда следует, что сопряженное пространство является линейным, так как его элементы можно складывать и умножать на числа.

Ранее мы ввели норму функционала: $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$. Таковую норму мы считаем приписанной каждому функционалу. Значит, получается нормированное пространство, если выполняются аксиомы нормы. Аксиомы нормы для функционалов легко проверяются. Например,

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \sup_{\|x\|=1} \|f(x) + g(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x) + g(x)| \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} |f(x)| + \sup_{\|x\|=1} |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сопряженное пространство L^* является нормированным.

Проверим, что это полное пространство. Пусть задана последовательность $f_n \in L^*$, которая фундаментальна: $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$). На фиксированном элементе $x \in L$ получаем:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{|f_n(x) - f_m(x)|}{\|x\|} \|x\| \leq \left(\sup_x \frac{|f_n(x) - f_m(x)|}{\|x\|} \right) \|x\|,$$

так что

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Однако $f_n(x)$ — просто последовательность из чисел, и она сходится: $\exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Ясно, что $f \in L^*$.

Мы получили очень важный вывод.

ТЕОРЕМА 5. *Сопряженное пространство L^* является банаховым пространством.*

5.4. Обобщенные функции конечного порядка

Главной операцией математики следует считать дифференцирование функций. Однако далеко не все функции дифференцируемы. Например, функция $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, не имеет производной в нуле, что приводит к определенным затруднениям. Выход нашли только в двадцатом столетии, создав яркую теорию обобщенных функций и обобщенных производных. Эта теория считается одним

из главных достижений математики двадцатого столетия. Она создавалась трудами многих ученых, однако впервые понятие обобщенных производных и примеры их приложений к уравнениям с частными производными сформулировал академик С.Л. Соболев в 1936 г. Следует отметить тот факт, что математическая разработка теории обобщенных функций стимулировалась прикладными вопросами. Например, первая обобщенная функция, названная в честь ее автора δ -функцией Дирака, использовалась еще до работ С.Л. Соболева.

Ниже излагаются основы теории обобщенных функций и их приложений к уравнениям с частными производными.

Пусть на прямой \mathbb{R} выделен отрезок $[a, b]$. Множество всех непрерывных функций на этом отрезке обозначается символом $C[a, b]$. Выберем из введенного множества $C[a, b]$ те функции, которые обращаются в нуль на концах отрезка $[a, b]$. Новое множество функций обозначается $C_0[a, b]$. Каждая функция $\varphi(x) \in C_0[a, b]$ рассматривается как аналог вектора на плоскости и ей приписывается число, напоминающее длину вектора, которое называется нормой и вычисляется по формуле

$$\|\varphi\| = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)|.$$

ПРИМЕР 1. Пусть $[a, b] = [-1, 1]$, $\varphi(x) = x^2 - 1$. Ясно, что $\varphi(x)$ — непрерывная функция и при этом $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, т.е. $\varphi \in C_0[-1, 1]$. Так как $\max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| = 1$, то $\|\varphi\| = 1$.

ПРИМЕР 2. Пусть $[a, b] = [-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = \sin x$. Очевидно, что $\varphi \in C_0[-\pi, \pi]$ и $\|\varphi\| = 1$.

Усложним пространство $C_0[a, b]$, оставив те функции $\varphi(x)$, которые имеют непрерывную производную, равную нулю на концах отрезка $[a, b]$. Новое множество функций обозначается $C_0^1[a, b]$, и его элементам приписывается норма

$$\|\varphi\| = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |\varphi'(x)|.$$

ПРИМЕР 3. Пусть $[a, b] = [-1, 1]$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^2 - 1$ из примера 1. Она имеет непрерывную производную $\varphi'(x) = 2x$, однако $\varphi'(1) \neq 0$ и потому $\varphi \notin C_0^1[-1, 1]$. Усложним функцию, введя $\psi(x) = (x^2 - 1)^2$. Очевидно, $\psi(x) \in C_0[-1, 1]$. Кроме того, ее

производная $\psi'(x) = 4x(x^2 - 1)$ непрерывна и при этом обращается в нуль на концах отрезка: $\psi'(-1) = \psi'(1) = 0$. Следовательно, $\psi \in C_0^1[-1, 1]$.

ПРИМЕР 4. Пусть $[a, b] = [-1, 1]$, $\varphi(x) = \sin^2 x$. Тогда $\varphi'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$ и при этом $\varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi) = 0$. Следовательно, $\varphi \in C_0^1[-\pi, \pi]$.

В теории продолжают усложнять пространство по следующему алгоритму. Фиксируем натуральное число $k = 1, 2, \dots$, и выделим из пространства $C_0[a, b]$ те функции, которые имеют непрерывные производные до порядка k , причем все эти производные обращаются в нуль на концах отрезка. Множество таких функций обозначается $C_0^k[a, b]$ и наделяется нормой:

$$\|\varphi\| = \sum_{m=0}^k \max_{a \leq x \leq b} |\varphi^{(m)}(x)|.$$

Число производных k может меняться от задачи к задаче, поэтому часто вводят пространство $C_0^\infty[a, b]$, каждая функция которого имеет непрерывные производные всех порядков, и все они обращаются в нуль на концах отрезка $[a, b]$. Для наших целей такое сложное пространство не потребуется.

Пусть выбрано целое неотрицательное число k , отрезок $[a, b]$ и множество функций $C_0^k[a, b]$. Функции $\varphi(x)$ из $C_0^k[a, b]$ называются основными, или пробными, а само множество $C_0^k[a, b]$ называется пространством основных функций и для сокращения обозначается $K = C_0^k[a, b]$.

Введем понятие обобщенной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть выбрано пространство основных функций K , норму в котором обозначим $\|\varphi\|_K$, и пусть указано правило f , которое каждую основную функцию $\varphi \in K$ переводит в число (f, φ) . Такое правило называют *обобщенной функцией* порядка k , если выполняются три аксиомы:

- 1) $(f, \lambda\varphi) = \lambda(f, \varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in K$;
- 2) $f(\varphi + \psi) = (f, \varphi) + (f, \psi)$, $\varphi, \psi \in K$;
- 3) $|(f, \varphi)| \leq C_f \|\varphi\|_K$, $\varphi \in K$.

Постоянная C_f может меняться вместе с правилом f , но является единой для всех основных функций $\varphi \in K$.

В теории обобщенные функции часто называются функционалами, чтобы подчеркнуть аналогию с функциями и одновременно указать различие. Первые две аксиомы определения 1 относятся к так называемым свойствам линейности, и удовлетворяющий им функционал называется линейным. Третья аксиома выделяет из всех линейных функционалов ограниченные и требуется для теории, обеспечивая непрерывность линейного функционала.

Приведем примеры обобщенных функций.

1. Пусть $f(x)$ — обычная непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Ее можно считать также и обобщенной функцией порядка $k = 0$, если использовать следующее правило воздействия f на основные функции из пространства $K = C_0[a, b]$:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Так как интеграл от непрерывной функции по отрезку всегда определен, то формула (1) действительно переводит каждую основную функцию в число, т.е. задает функционал. Проверим аксиомы определения 1:

$$\begin{aligned} 1) \quad (f, \lambda \varphi) &= \int_a^b f(x) \lambda \varphi(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \lambda (f, \varphi); \\ 2) \quad (f, \varphi + \psi) &= \int_a^b f(x) (\varphi + \psi) dx = \int_a^b f \varphi dx + \int_a^b f \psi dx = (f, \varphi) + (f, \psi); \\ 3) \quad |(f, \varphi)| &\leq \int_a^b |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| dx = \\ &= \|\varphi\|_K \int_a^b |f(x)| dx = C_f \|\varphi\|_K, \text{ где } C_f = \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Получилась вполне конкретная постоянная C_f , которая не зависит от выбранной основной функции $\varphi(x)$, что и требуется. Мы проверили, что непрерывная функция $f(x)$ может считаться обобщенной, если закон ее воздействия на остальные функции задать интегралом (1). Если обобщенная функция получена из обычной

функции указанным способом, то она называется регулярной. Все остальные обобщенные функции называются сингулярными.

2. Введем функцию Хевисайда: $h(x) = 0$ для $x < 0$ и $h(x) = 1$ для $x \geq 0$, которая имитирует начало процесса в момент $t = 0$. Ограничим эту функцию на симметричный отрезок $[-l, l]$, и выберем пространство основных функций $K = C_0[-l, l]$. Функцию Хевисайда также можно считать регулярной обобщенной функцией порядка $k = 0$, отправляясь от следующего правила воздействия на основные функции:

$$(h, \varphi) = \int_{-l}^l h(x) \varphi(x) dx = \int_0^l \varphi(x) dx.$$

Существование такого интеграла очевидно, а выполнение аксиом определения 1 обеспечивается свойствами интеграла. Таким образом, функция Хевисайда — обобщенная регулярная функция.

3. Приведем классический пример сингулярной обобщенной функции порядка $k = 0$, называемой δ -функцией Дирака. Она задается следующим правилом воздействия на основные функции $\varphi(x)$ из пространства $K = C_0[-l, l]$:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = \varphi(x)|_{x=0}.$$

Другими словами, просто берется значение основной функции в точке $x = 0$. Очевидно, такой закон определен для любой функции, непрерывной в окрестности нуля. Проверим аксиомы определения 1:

- 1) $(\delta, \lambda\varphi) = (\lambda\varphi)|_{x=0} = \lambda\varphi(0) = \lambda(\delta, \varphi);$
- 2) $(\delta, \varphi + \psi) = (\varphi(x) + \psi(x))|_{x=0} = \varphi(0) + \psi(0) = (\delta, \varphi) + (\delta, \psi);$
- 3) $|(\delta, \varphi)| = |\varphi(0)| \leq \max_{-l \leq x \leq l} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_K.$

В последней аксиоме получилась постоянная $C_\delta = 1$, очевидно, не зависящая от пробной функции. Все три аксиомы проверены и потому δ -функция Дирака — это обобщенная функция над пространством основных функций $K = C_0[-l, l]$, $l > 0$. По аналогии с предыдущими примерами δ -функцию часто записывают в форме

интеграла:

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx,$$

и в этой связи естественно попытаться представить δ -функцию обычным способом, т.е. как число для каждого аргумента $x \in \mathbb{R}$. Позднее мы увидим, что эта задача неразрешима.

4. Смещенная в точку $x_0 \in (-l, l)$ δ -функция обозначается $\delta(x - x_0)$ и определяется следующим правилом воздействия на основные функции из пространства $K = C_0(-l, l)$:

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = \int_{-l}^l \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

Проверка аксиом определения 1 для введенной функции не представляет труда.

Заметим, что обобщенные функции введены как расширение класса непрерывных функций, и потому они допускают многие действия, известные для непрерывных функций. Например, обобщенные функции можно складывать друг с другом и умножать на числа. Однако появляются запрещенные операции. Например, символ $\delta^2(x)$ не имеет смысла.

Подчеркнем следующий факт. Определение 1 для обобщенной функции требует задания пространства основных функций K , однако конкретный вид пространства K фактически не используется. Поэтому определение 1 сохраняет силу при более широком выборе пространства K . Применим это замечание к построению обобщенных функций многих переменных. Вводятся они по аналогии с функциями одной переменной.

Итак, пусть \mathbb{R}^n — пространство переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. Выделим в нем замкнутый шар $B = \{x : |x| \leq R\}$. Границу шара, т.е. сферу радиуса R , обозначим S . Символ $C_0(B)$ применяется для обозначения множества тех непрерывных в шаре B функций $\varphi(x)$, которые обращаются в нуль на границе шара: $\varphi(x)|_{x \in S} = 0$. Норма в этом множестве вводится по формуле:

$$\|\varphi\| = \max_{x \in B} |\varphi(x)|.$$

ПРИМЕР 5. Шар $B = \{x : |x| \leq 1\}$ называется единичным. Введем функцию $\varphi(x) = |x|^2 - 1 = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$. Очевидно, что она непрерывна в шаре B и при этом $\varphi(x)|_{x \in S} = \varphi(x)|_{|x|=1} = 0$. Значит, $\varphi \in C_0(B)$. Так как $|x| \leq 1$ в шаре B , то $\max_{x \in B} |\varphi(x)| = 1$. Отсюда $\|\varphi\| = 1$.

Фиксируем целое неотрицательное число k и выделим из множества $C_0(B)$ те функции, которые имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно, причем все эти производные обращаются в нуль на границе шара B . Множество таких функций обозначается $C_0^k(B)$ и наделяется нормой

$$\|\varphi\| = \sum_{|\alpha|=0}^k \max_{x \in B} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, т.е. вектор с неотрицательными целочисленными координатами, длиной которого считается число $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Символ $D^\alpha \varphi$ обозначает частную производную.

Примем множество $C_0^k(B)$ за пространство основных функций и применим определение 1. В результате получим обобщенную функцию порядка k для многих переменных. Приведем примеры обобщенных функций многих переменных.

1. Любая непрерывная функция $f(x)$ на шаре B может рассматриваться как обобщенная любого порядка k , если ее воздействие на основные функции задать интегралом

$$(f, \varphi) = \int_B f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^k(B). \quad (2)$$

Аксиомы определения 1 вытекают из свойств интеграла. Построенные по формуле (2) обобщенные функции называются *регулярными*.

2. Многомерная δ -функция Дирака определяется над пространством $K = C_0(B)$ по правилу:

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = \varphi(x)|_{x=0}.$$

Аксиомы определения 1 проверяются практически так же, как в случае размерности $n = 1$.

Отметим один прием, который часто применяется на практике. Напомним, что основные функции считаются равными нулю на границе S шара B . Это дает возможность продолжить каждую функцию непрерывно на все пространство \mathbb{R}^n , полагая $\varphi(x) \equiv 0$ вне шара B . В результате интегралы, содержащие основные функции, можно считать распространенными на все \mathbb{R}^n . Например, формула (2) принимает вид:

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0(B).$$

По аналогии все интегралы, содержащие обобщенные функции, считаются распространенными по всему \mathbb{R}^n . Например, многомерная δ -функция часто записывается в форме:

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

которая дает возможность легко расставлять пределы в повторном интеграле.

Применим сформулированное замечание в следующей ситуации. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2)$ двух переменных, равную произведению двух функций от разных аргументов: $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$. Функции такого типа часто называют прямым произведением, чтобы подчеркнуть их специфическую структуру.

По аналогии рассмотрим прямое произведение двух δ -функций от разных аргументов:

$$\begin{aligned} (\delta(x_1) \delta(x_2), \varphi(x_1, x_2)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta(x_1) \delta(x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1) \varphi(x_1, 0) dx_1 = \varphi(0, 0) = (\delta(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Исходя из полученного результата, считаем правильным тождество $\delta(x_1) \delta(x_2) = \delta(x_1, x_2)$.

5.5. Дифференцирование обобщенных функций

Установим одно свойство дифференцируемых функций. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, допускающая непрерывную производную $f'(x)$. Введем основную функцию $\varphi \in C_0^1[a, b]$ и рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) df(x) = \\ &= \varphi(x) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = -(f, \varphi'). \end{aligned}$$

Здесь внеинтегральное слагаемое обращается в нуль за счет множителя $\varphi(x)$, равного нулю на концах отрезка. Мы установили важное тождество:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in C_0^1[a, b], \quad (1)$$

которое кладется в основу определения производной любой обобщенной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть задана обобщенная функция $f(x)$ порядка k над пространством $C_0^k[a, b]$. Ее производной $f'(x)$ называется новая обобщенная функция порядка $k + 1$ над пространством $C_0^{k+1}[a, b]$, которая действует на основные функции по правилу

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in C_0^{k+1}[a, b]. \quad (2)$$

Приведем примеры производных обобщенных функций.

1. Пусть $f(x)$ — регулярная функция, имеющая непрерывную производную $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо тождество (1), которое показывает, что обобщенная производная регулярной функции совпадает с обычной производной.

2. Пусть $h(x)$ — функция Хевисайда, введенная в предыдущем разделе: $h(x) \equiv 0$ для $x \leq 0$ и $h(x) \equiv 1$ для $x > 0$. Если вычислять ее производную как предел разностного отношения $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то получим следующие соотношения: $h'(x) = 0$ для $x \neq 0$ и $h'(0) = \infty$. Очевидно, что график такой функции построить нет возможности. Рассмотрим $h(x)$ как обобщенную функцию

над пространством $C_0[-l, l]$, $l > 0$, и вычислим $h'(x)$ как обобщенную функцию порядка $k = 1$ над пространством $C_0^1[-l, l]$, $l > 0$. Согласно определению 1 для $\varphi \in C_0^1[-l, l]$ имеем:

$$\begin{aligned}(h', \varphi) &= -(h, \varphi') = - \int_0^l \varphi'(x) dx = \\ &= -\varphi(x)|_0^l = -\varphi(l) + \varphi(0) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).\end{aligned}$$

Мы получили замечательную формулу $h'(x) = \delta(x)$, которая связывает функцию Хевисайда с δ -функцией Дирака.

3. Производная δ -функции Дирака определяется как обобщенная функция над пространством $C_0^1[-l, l]$, которая действует по правилу:

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0), \quad \varphi \in C_0^1[-l, l].$$

Аналогично определению 1 по индукции можно ввести производные любого целого порядка для каждой обобщенной функции, и при этом справедливо следующее довольно неожиданное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что любая обобщенная функция допускает производную первого порядка. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что тождество (2) определяет обобщенную функцию над пространством $C_0^{k+1}[a, b]$, т.е. проверить аксиомы определения 1 предыдущего раздела. Аксиомы линейности проверяются без труда, поэтому остановимся на аксиоме ограниченности. Итак, пусть задана обобщенная функция $f(x)$ порядка k . В частности, справедлива оценка

$$|(f, \varphi)| \leq C_f \|\varphi\|_{C_0^k[a, b]}. \quad (3)$$

Оценим обобщенную функцию $f'(x)$, используя неравенство (3):

$$|(f', \varphi)| = |(f, \varphi')| \leq C_f \|\varphi'\|_{C_0^k[a, b]}. \quad (4)$$

Так как

$$\begin{aligned}\|\varphi'\|_{C_0^k[a,b]} &= \sum_{m=0}^k \max_{a \leq x \leq b} |(\varphi')^{(m)}(x)| = \\ &= \sum_{m=0}^k \max_{a \leq x \leq b} |\varphi^{(m+1)}(x)| \leq \sum_{l=0}^{k+1} \max_{a \leq x \leq b} |\varphi^{(l)}(x)| = \|\varphi\|_{C_0^{k+1}[a,b]},\end{aligned}$$

то из (4) следует, что

$$|(f', \varphi)| \leq C_f \|\varphi\|_{C_0^{k+1}[a,b]}.$$

Полученное неравенство и означает ограниченность обобщенной функции $f'(x)$ как функционала над пространством $C_0^{k+1}[a, b]$. Тем самым производная $f'(x)$ вполне определена для любой обобщенной функции $f(x)$, что и доказывает теорему. \square

Перейдем к функциям многих переменных. Из предыдущего раздела нам известно пространство непрерывных вместе с частными производными до порядка k функций $C_0^k(B)$, обращающихся в нуль на границе шара B . Пусть над таким пространством $C_0^k(B)$ задана обобщенная функция $f(x)$. Ее частной производной $D_i f(x) = \partial f / \partial x_i$ называется обобщенная функция над пространством $C_0^{k+1}(B)$, действующая на основные функции по правилу

$$(D_i f, \varphi) = -(f, D_i \varphi), \quad \varphi \in C_0^{k+1}(B).$$

По аналогии можно определить частные производные любого порядка, а также комбинации частных производных. Введем мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ длины $|\alpha|$, и пусть задана обобщенная функция $f(x)$ над пространством $C_0^k(B)$. Ее частной производной $D^\alpha f(x)$ называется обобщенная функция над пространством $C_0^{k+|\alpha|}(B)$, которая действует на основные функции по правилу

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in C_0^{k+|\alpha|}(B). \quad (5)$$

Без труда проверяется, что тождество (5) определяет обобщенную функцию порядка $k + |\alpha|$. Приведем примеры частных производных обобщенных функций.

1. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — регулярная обобщенная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка в шаре

B . Интегрирование по частям приводит к равенству для любой функции $\varphi \in C_0^1(B)$

$$\int_B D_i f(x) \varphi(x) dx = - \int_B f(x) D_i \varphi(x) dx,$$

которое показывает, что классическая производная $D_i f(x)$ является одновременно производной функции $f(x)$, рассматриваемой как обобщенная.

2. Составим прямое произведение двух функций Хевисайда $h(x_1)h(x_2)$. Получили функцию двух переменных, у которой вычислим смешанную частную производную второго порядка. Согласно определению (5) для смешанной производной имеем:

$$\begin{aligned} (D_1 D_2 (h(x_1)h(x_2)), \varphi(x_1, x_2)) &= (h(x_1)h(x_2), D_1 D_2 \varphi(x_1, x_2)) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \varphi(0, 0) = (\delta(x_1, x_2), \varphi). \end{aligned}$$

Исходя из представленного результата, считаем правильным равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (h(x_1)h(x_2)) = \delta(x_1, x_2).$$

3. Вычислим смешанную производную функции $\delta(x_1, x_2)$. Воспользуемся тождеством $\delta(x_1, x_2) = \delta(x_1)\delta(x_2)$, которое получено в предыдущем разделе. Тогда очевидно равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \delta(x_1, x_2) = \delta'(x_1)\delta'(x_2).$$

4. Оператор Лапласа определен на каждой обобщенной функции порядка $k \geq 0$ равенством

$$(\Delta f, \varphi) = (f, \Delta \varphi), \quad \varphi \in C_0^{k+2}(B).$$

Обратимся теперь к следующему вопросу. Ранее неоднократно отмечалось, что построить график δ -функции Дирака невозможно, поэтому возникает такая задача: найти регулярные функции, которые можно считать приближениями δ -функции. Подобные функции называются δ -образными. Для более точного определения близости обобщенных функций введем понятие слабой сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задана последовательность обобщенных функций $f_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, над выбранным пространством K основных функций. Говорят, что эта последовательность *слабо сходится* к обобщенной функции f , определенной над тем же пространством K основных функций, если при $m \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$(f_m, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \quad \varphi \in K.$$

Подчеркнем особенность введенного определения: вместо сходимости функций фактически устанавливается сходимость числовых последовательностей (f_m, φ) , что существенно проще.

Приведем пример δ -образной последовательности. Пусть $K = C_0[-l, l]$, $l > 0$, и пусть для $n > 1/l$ задана последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n], \\ 0, & x \notin [0, 1/n]. \end{cases} \quad (6)$$

Считая функцию $\varphi \in C_0[-l, l]$, оценим числовую последовательность

$$(f_n, \varphi) = \int_{-l}^l f_n(x) \varphi(x) dx = \int_0^{1/n} n \varphi(x) dx = \varphi(c_n).$$

Здесь применена теорема о среднем в интегральном исчислении, которая приводит к точке $0 < c_n < \frac{1}{n}$, $n > \frac{1}{l}$. Так как $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\varphi(c_n) \rightarrow \varphi(0)$, откуда при $n \rightarrow \infty$

$$(f_n, \varphi) = \varphi(c_n) \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

В соответствии с представленным результатом введенная последовательность $f_n(x)$ слабо сходится к δ -функции Дирака.

Приведенный пример является математической идеализацией следующей физической ситуации. Распределим единичную массу $m = 1$ равномерно на малом отрезке $[0, \frac{1}{n}]$, считая n достаточно большим натуральным числом. Плотность такой массы равна n и неограниченно возрастает вместе с n , что приводит к последовательности $f_n(x)$, определенной в (6). При $n \rightarrow \infty$ получаем δ -функцию Дирака, о которой говорят, что она задает плотность

единичной массы, сосредоточенной в точке $x = 0$. Если единичная масса помещена в точку $x = x_0$, то появляется смещенная δ -функция $\delta(x - x_0)$. Если в точку $x = x_0$ помещена произвольная масса m , то для описания возникшей ситуации используется функция $m\delta(x - x_0)$. Если массы m_1, \dots, m_k сосредоточены в различных точках x_1, \dots, x_k , то они создают плотность, которая описывается функцией $f(x) = \sum_{i=1}^k m_i \delta(x - x_i)$. Такая простота записи сложного объекта также привлекает внимание к обобщенным функциям.

В заключение отметим, что δ -образными являются также следующие функции

$$\frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \rightarrow \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \rightarrow \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

5.6. Гильбертовы пространства

5.6.1. Аксиомы скалярного произведения. Пусть H — линейное пространство. И пусть каждой паре его элементов $x, y \in H$ ставится в соответствие число (x, y) , которое называется скалярным произведением, с такими свойствами:

- 1) $(0, 0) = 0$ и $(x, x) > 0$ для $x \neq 0$;
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ — линейность;
- 3) $(x, y) = (y, x)$ — симметричность.

Приведем примеры, которые в основном известны.

- 1) $H = \mathbb{R}$; $(x, y) = xy$. Аксиомы изучаются в школе.
- 2) $H = \mathbb{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n)$; $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Пространство изучается в линейной алгебре.
- 3) $H = l^2$; $x = (x_1, x_2, \dots)$; $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Условие принадлежности последовательности пространству: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$.

Выделим первую аксиому скалярного произведения. Она дает возможность по каждому вектору $x \in H$ ввести неотрицательное число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Проверим для него аксиомы нормы.

- 1) $\|0\| = 0$ и $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$.
- 2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$3) \|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2}.$$

Прервем пока доказательство третьей аксиомы.

Чтобы вывести неравенство треугольника, докажем предварительно очень важное неравенство, оформив его как теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для скалярного произведения справедливо неравенство Коши – Буняковского: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем числовой параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ и рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned} 0 \leq (\lambda x + y, \lambda x + y) &= \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \\ &= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что квадратный трехчлен принимает только неотрицательные значения, значит, его дискриминант неположителен, т.е. $D = |(x, y)|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, откуда $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$. Это есть утверждение теоремы. \square

Продолжим проверку неравенства треугольника, применив неравенство Коши – Буняковского:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sqrt{\|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Мы проверили все три аксиомы нормы, и потому верно такое утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пространство со скалярным произведением является нормированным пространством, в котором норма вводится по формуле $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.*

5.6.2. Ортогонализация по Шмидту. Итак, каждое пространство со скалярным произведением одновременно является нормированным. Нормированное пространство может быть полным или неполным. В приложениях важны полные пространства. Для них выделяется специальный термин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейное пространство H со скалярным произведением (x, y) называется *гильбертовым*, если это полное нормированное пространство относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Отметим, что приведенные выше примеры \mathbb{R} , \mathbb{R}^n , l^2 являются полными пространствами, т.е. гильбертовыми.

Гильбертовы пространства вводятся, в частности, потому, что в них определено понятие ортогональных элементов. Именно, два элемента называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$.

Из ортогональных элементов удобно строить базис пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система элементов e_1, e_2, \dots в гильбертовом пространстве H называется *ортонормированной*, если все элементы системы попарно ортогональны и по норме все равны единице: $(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$; $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2, \dots$.

ПРИМЕР 1. В пространстве l^2 ортонормированную систему задают элементы $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, \dots)$, \dots . Ясно, что $\|e_i\| = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ для $i \neq j$. Особенность приведенной системы в том, что этих элементов бесконечно много. Говорят, что гильбертово пространство l^2 является *бесконечномерным*.

В общем случае первоначально заданная система элементов e_1, e_2, \dots не обязана быть ортонормированной. Более того, часть из них может выражаться через другие. Ясно, что такие элементы для базиса излишни. Чтобы их отсеять, вводится специальное определение. Именно, заданная система элементов называется *линейно независимой*, если ни один элемент нельзя выразить через остальные. Перебирать все элементы трудно, поэтому вводится более симметричное, но эквивалентное определение. Система данных элементов называется линейно независимой, если равенство $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots = 0$ возможно только в одном случае, когда все $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$. Итак, пусть задана система элементов. Выбросим из нее линейно зависимые элементы и оставим только линейно независимые. Такую систему легко поправить так, что она станет ортонормированной. Действуем по аналогии с векторами на плоскости. Берем элемент h_1 и направляем вдоль него ось Ox_1 .

Чтобы получить вектор единичной длины, вводим $e_1 = h_1 / \|h_1\|$. Ясно, что $\|e_1\| = 1$. Далее берем вектор h_2 и проецируем его на ось Ox_1 по известной формуле: $pr h_2 = (h_2, e_1)e_1$. Эту проекцию вычтем из вектора h_2 , т.е. введем вектор $g_2 = h_2 - (h_2, e_1)e_1$. Если вычислить скалярное произведение (g_2, e_1) , то получим 0, так что $g_2 \perp e_1$. Вводим вектор $e_2 = g_2 / \|g_2\|$. Общая формула имеет вид: $g_n = h_n - \sum_{i=1}^{n-1} (h_n, e_i)e_i$, и $e_n = g_n / \|g_n\|$. Приведенная процедура называется *процессом ортогонализации по Шмидту*.

5.6.3. Подпространства гильбертова пространства.

Гильбертово пространство одновременно является банаховым, поэтому в нем имеются такие геометрические объекты, как шары $\{\|x\| \leq r\}$, сферы $\{\|x\| = r\}$, а также линейные многообразия, т.е. прямые, плоскости и так далее. Напомним, что линейным многообразием называется такая часть пространства, у которой любые элементы можно складывать и умножать на числа, получая снова элементы, выделенной части, т.е. в краткой записи:

$$\{L — \text{линейное многообразие}\} \Leftrightarrow \{x, y \in L \Rightarrow x + y \in L, \lambda x \in L\}.$$

Так как L — часть гильбертова пространства H , то для любых двух элементов $x, y \in L$ определено скалярное произведение (x, y) . Получается, что каждое линейное многообразие — это одновременно пространство со скалярным произведением. Это пространство может быть полным, а может быть не полным. Если часть $L \subset H$ одновременно является полным пространством, то L называется *подпространством* H . Итак, подпространство — это такая часть гильбертова пространства, которая сама является гильбертовым пространством относительно того же скалярного произведения (x, y) , которое введено во всем пространстве H .

Рассмотрим вариант, когда выделенная часть $L \subset H$ не является полной. Это значит, что имеется фундаментальная последовательность элементов $x_1, x_2, x_3, \dots \in L$ такая, что $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$), но нет элемента x_0 , к которому эта последовательность сходится. Тогда говорят, что множество L неполно, или незамкнуто. Однако L — часть H . Пространство H по условию полно, так как это гильбертово пространство, и поэтому фундаментальная последовательность $x_n \in L \subset H$ имеет предел x_0 в объемлющем пространстве H , т.е. $x_n \rightarrow x_0$ в H . Вся тонкость в

том, что $x_0 \notin L$. В таком случае поступают следующим образом. Дополним множество L найденным элементом $x_0 \in H$. Операцию дополнения сделаем для всех фундаментальных последовательностей $x_n \in L$. Получим новое множество \bar{L} , которое называется пополнением множества L , или его замыканием.

Пусть H — гильбертово пространство, в котором выделено подпространство L . Введем новое множество $L^\perp = \{x \in H : x \perp L\}$, которое называется *ортгональным дополнением* подпространства L . Легко доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Множество L^\perp является подпространством гильбертова пространства H . Любой элемент $x \in H$ можно единственным способом представить в виде суммы $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$. Такое представление называют ортгональным разложением H в прямую сумму подпространств, и пишут $H = L \oplus L^\perp$.*

5.6.4. Базисы в гильбертовом пространстве. Пусть $H = \mathbb{R}^n$. Тогда мы знаем, что базис этого пространства состоит точно из n элементов e_1, \dots, e_n . Любой элемент можно представить в виде суммы $x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$. Общее гильбертово пространство бесконечномерно. В частности, для базиса требуется бесконечно много элементов e_1, e_2, \dots . Их удобно считать ортгональными и нормированными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Ортонормированным базисом* в гильбертовом пространстве H называется такой набор элементов $\{e_k\}$, что любой другой элемент $x \in H$ может быть представлен в виде суммы $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Напомним, что элементы базиса взаимно ортгональны: $(e_k, e_m) = 0$ для $k \neq m$, и нормированы: $\|e_k\| = 1$, $k = 1, 2, \dots$.

Выясним удобства ортонормированного базиса. Прежде всего отметим, что коэффициенты разложения по такому базису легко вычисляются. Действительно, равенство $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ умножим скалярно на вектор e_n с фиксированным номером n . Получаем: $(x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e_k, e_n)$. По условию ортгональности все скалярные произведения $(e_k, e_n) = 0$ для $k \neq n$, так что сумма превращается в одно слагаемое $(x, e_n) = c_n (e_n, e_n)$. И так как $(e_n, e_n) =$

$\|e_n\|^2 = 1$, то остается равенство $c_n = (x, e_n)$. Эти числа часто называют коэффициентами Фурье. Отметим еще одно свойство этих коэффициентов. Равенство $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ умножим скалярно на себя, т.е. вычислим

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = (x, x) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \sum_{m=1}^{\infty} c_m e_m \right) = \sum_{k,m=1}^{\infty} c_k c_m (e_k, e_m) = \\ &= \sum_{k=m=1}^{\infty} c_k^2 (e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \end{aligned}$$

Это равенство называется *тождеством Парсеваля*. Выделим его.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в гильбертовом пространстве H задан базис, составленный из ортонормированных элементов $\{e_k\}$, так что каждый элемент $x \in H$ разлагается по этому базису в ряд: $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Коэффициенты Фурье этого ряда вычисляются по формуле $c_k = (x, e_k)$. Для них справедливо тождество Парсеваля: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

ПРИМЕР 2. Пусть $H = \mathbb{R}^2$, тогда каждый вектор можно представить в виде $\bar{x} = x\bar{i} + y\bar{j}$. Сравнение с абстрактной формулой $x = c_1 e_1 + c_2 e_2$ показывает, что считаем $e_1 = \bar{i}$, $e_2 = \bar{j}$. Числа c_1 , c_2 являются проекциями вектора $\bar{x} = (x, y)$ на оси координат, т.е. $c_1 = x$, $c_2 = y$. По этой причине в общем случае числа $c_k = (x, e_k)$ часто называют проекциями на векторы e_k . Проекциями называют также векторы $c_k e_k = (x, e_k) e_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Пусть в гильбертовом пространстве H выделена счетная система ортонормированных элементов h_1, h_2, \dots . Возможно, что эта система является базисом, но возможно, что в ней отсутствуют некоторые элементы базиса. Для проверки этого составим линейные комбинации $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k$, где $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$. Все такие элементы образуют подпространство L . Значит, у него есть ортогональное дополнение $L^\perp \perp L$. Другими словами, найдется хотя бы один элемент z , такой, что $(z, x) = 0 \ \forall x \in L$. А теперь предположим обратное, именно, что из соотношений $(z, x) = 0 \ \forall x \in L$ вытекает, что $z = 0$. Тогда у подпространства L нет ортогонального дополнения, а это значит, что $L = H$. В результате набор векторов h_1, h_2, \dots дает базис всего пространства H .

Итак, условие: $(z, x) = 0 \quad \forall x \in L \Rightarrow z = 0$ выделяет базисы из других наборов элементов. Если система удовлетворяет такому условию, то она называется *полной системой* в H .

5.6.5. Подпространство нулей функционала. Пусть дано гильбертово пространство H , и пусть на нем задан линейный функционал $f(x)$. Это значит, что каждому элементу $x \in H$ ставится в соответствие число $f(x)$. Функционал предполагается непрерывным, т.е. если $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), то $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Напомним, что для линейного функционала его непрерывность есть следствие его ограниченности, что означает неравенство $|f(x)| \leq M \|x\|$. Постоянная M — одна и та же для всех элементов x . Подобные неравенства легко получаются, тогда как доказывать непрерывность довольно трудно.

ПРИМЕР 3. В пространстве $L^2(0, 1)$ задан функционал $f(x) = \int_0^1 x(t) dt$. Он линеен, так как интеграл обладает свойством линейности, т.е. $f(\alpha x + \beta x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$. Убедимся, что этот функционал ограничен: $f(x) = (1, x) \leq \|1\| \cdot \|x\| = \|x\|$. Постоянная $M = 1$. Здесь использовано представление данного функционала как скалярного произведения в $L^2(0, 1)$, так как $f(x) = (1, x)$.

Вернемся к общему случаю. Для заданного функционала $f(x)$, $x \in H$, введем множество его нулей. Так называется совокупность элементов, удовлетворяющих условию $f(x) = 0$, т.е. $N = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Убедимся, что это множество есть подпространство всего пространства H . Для этого следует проверить два условия:

1. N — линейное множество;
2. N — замкнутое множество (полное).

Проверяем линейность. Пусть $x, y \in N$, т.е. $f(x) = 0$, $f(y) = 0$. Используя линейность функционала, получаем: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$. Значит, $\alpha x + \beta y \in N$. Это доказывает линейность множества N . Проверим его полноту. Пусть последовательность $x_n \in N$ и является фундаментальной, т.е. $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$). Так как пространство H — полное, то последовательность x_n сходится в H , т.е. $x_n \rightarrow x \in H$. Задача состоит в том, чтобы доказать, что $x \in N$, т.е. убедиться в равенстве $f(x) = 0$. По условию $x_n \in N$, т.е. $f(x_n) = 0$. Так как $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), то

$0 = f(x_n) \rightarrow f(x)$. Отсюда следует, что $f(x) = 0$, т.е. $x \in N$. Этим доказана полнота множества N . Следовательно, множество является линейным и полным, т.е. это подпространство в H . Мы доказали такое утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Множество нулей линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве само является подпространством.*

5.6.6. Общий вид линейного функционала. Итак, мы знаем, что множество нулей N линейного функционала есть подпространство. Введем его ортогональное дополнение N^\perp , так что все пространство можно представить в виде суммы $H = N \oplus N^\perp$.

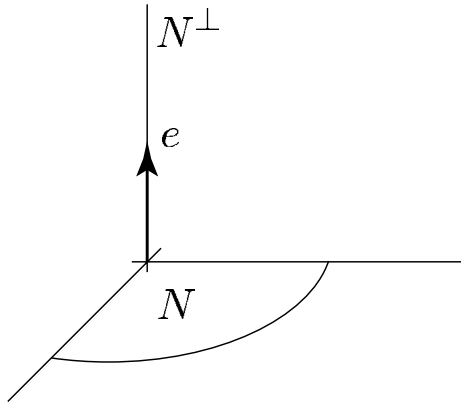


Рис. 5.3.

Вычислим размерность N^\perp . Допустим, что N^\perp содержит два элемента h, g , которые не лежат на одной прямой, т.е. $h \neq \lambda g$. Вычислим два числа $\alpha = f(h)$ и $\beta = f(g)$. Заметим, что эти числа отличны от нуля. Например, если $\alpha = 0$, то это значит, что $f(h) = 0$, и тогда $h \in N$, тогда как по условию $h \perp N$. Итак, числа α, β отличны от нуля. Значит, можно задать новый элемент $z = \frac{1}{\alpha}h - \frac{1}{\beta}g$. Это линейная комбинация векторов из N^\perp , и

потому $z \in N^\perp$. Вычислим

$$f(z) = \frac{1}{\alpha}f(h) - \frac{1}{\beta}f(g) = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow z \in N.$$

На элемент z получилось два условия: $z \in N^\perp$ и $z \in N \perp N^\perp$. Это возможно только в одном случае: $z = 0$, т.е. $\frac{1}{\alpha}h - \frac{1}{\beta}g = 0$. Отсюда $h = \lambda g$, где $\lambda = \alpha/\beta$. Напомню, что мы выбирали $h \neq \lambda g$.

Получили противоречие, которое означает, что наше предположение было неверным. А предполагали мы, что множество N^\perp содержит два элемента, не лежащие на одной прямой. Из противоречия делаем вывод, что любые два элемента из множества N^\perp лежат на одной прямой. Другими словами, все векторы множества N^\perp лежат на одной прямой, так что множество N^\perp имеет размерность, равную единице.

Напомним, что на любом элементе из N^\perp функционал f отличен от нуля, поэтому назовем прямую N^\perp *носителем* функционала $f(x)$. Мы получили утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Носителем линейного непрерывного функционала является прямая N^\perp . Ортогональное к ней дополнение N состоит из нулей этого функционала.*

Про множество N говорят, что оно имеет *коразмерность* $\text{codim } N = 1$, и называют это множество *гиперплоскостью*.

Выберем на прямой N^\perp единичный вектор e , $\|e\| = 1$. Пусть x — произвольный элемент H . Представим его в виде разложения $x = x_0 + \lambda e$, где $x_0 \in N$. Тогда $f(x) = f(x_0) + \lambda f(e) = \lambda f(e)$, так как $f(x_0) = 0$. Введем еще элемент $h = f(e)e$. Для него вычислим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(x, h) &= (x_0 + \lambda e, f(e)e) = (x_0, e)f(e) + \lambda f(e)(e, e) = \\ &= \lambda f(e) \|e\|^2 = \lambda f(e).\end{aligned}$$

Получаем равенство: $f(x) = (x, h)$, которое составляет содержание следующей теоремы Ф. Рисса.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $f(x)$ — линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H . Тогда найдется единственный элемент $h \in H$ такой, что данный функционал можно представить в форме скалярного произведения: $f(x) = (x, h)$. Очевидно обратное утверждение: скалярное произведение (x, h) есть непрерывный линейный функционал.*

Теорема Рисса имеет ряд замечательных следствий, из которых приведем одно.

ТЕОРЕМА 8. *Каждое гильбертово пространство H и его сопряженное H^* изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано гильбертово пространство H . Фиксируем элемент $h \in H$ и определим функционал $f(x) = (x, h)$ с помощью скалярного произведения в H . Линейность функционала $f(x)$ есть следствие линейных свойств скалярного произведения, а непрерывность следует из неравенства Коши – Буняковского: $|f(x)| \leq \|x\| \|h\|$, где $C = \|h\|$. Полагая $Jh = f$, определяем однозначно линейный оператор $J : H \rightarrow H^*$.

Обратно, пусть фиксирован элемент $f \in H^*$, так что $f(x)$ является линейным непрерывным функционалом для $x \in H$. По теореме Рисса найдется и притом однозначно элемент $h \in H$ такой, что $f(x) = (x, h)$, $x \in H$. Очевидно, что $Jh = f$, следовательно, линейный оператор $J : H \rightarrow H^*$ осуществляет взаимно однозначное отображение, т.е. является изоморфизмом линейных пространств H в H^* , что и утверждалось. \square

5.7. Пространство $L^2(\Omega)$

Пусть \mathbb{R}^n — пространство переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ с обычной евклидовой структурой и нормой $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. Выделим в \mathbb{R}^n ограниченную область Ω . Напомним, что под областью мы понимаем открытое связное множество. Область называется ограниченной, если она содержится в некотором шаре. Граница области $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ представляет собой замкнутое множество.

Чтобы иметь возможность не интересоваться гладкостью границы $\partial\Omega$, введем пространство $\mathring{C}(\Omega)$ непрерывных в Ω функций, каждая из которых обращается в нуль в некоторой окрестности границы, при этом окрестность может меняться вместе с функцией.

Если граница не очень сложная, то можно ограничиться функциями, равными нулю на границе $\partial\Omega$, не требуя обращения их в нуль в окрестности $\partial\Omega$. Ясно, что введенное множество линейно: если $u, v \in \mathring{C}(\Omega)$, то $u + v \in \mathring{C}(\Omega)$ и $\lambda u \in \mathring{C}(\Omega)$ для $\lambda \in \mathbb{R}$. Зададим на этом пространстве скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx. \quad (1)$$

Так как функции u, v непрерывны в Ω , то интеграл в равенстве (1) определяет некоторое число по каждой паре элементов $u, v \in \mathring{C}(\Omega)$. Убедимся, что введенная числовая функция (u, v) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Следует проверить три аксиомы.

Начнем с первой: $(u, u) \geq 0$ и $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Неотрицательность выражения $(u, u) = \int_{\Omega} u^2(x) dx$ очевидна, причем, $(0, 0) = 0$. Обратно, если $(u, u) = 0$, т.е. $\int_{\Omega} u^2(x) dx = 0$, то необходимо $u(x) =$

0, $x \in \Omega$, что завершает проверку первой аксиомы. Вторая аксиома о симметрии: $(u, v) = (v, u)$, следует непосредственно из выражения (1), поэтому перейдем к третьей аксиоме — линейности. Требуется равенство $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$, которое очевидно в силу линейности операции интегрирования.

Итак, выражение (1) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. В результате множество $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ превращается в линейное пространство со скалярным произведением и нормой

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} u^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Введенное пространство $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ не является полным относительно нормы (2), к нему требуется применить процедуру пополнения, в результате которой появляются идеальные элементы. Новое пополненное пространство обозначают $L^2(\Omega)$ и называют пространством квадратично интегрируемых по Лебегу функций.

Приведем примеры идеальных элементов пространства $L^2(\Omega)$, которые получаются в результате пополнения множества $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ по норме (2) и не принадлежат $\overset{\circ}{C}(\Omega)$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (-1, 1)$, функция $u(x) = \text{sign } x$, т.е. $u(x) = -1$ для $x \in (-1, 0]$, $u(x) = 1$ для $x \in (0, 1)$. Вычислим норму введенной функции по формуле (2):

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2(x) dx = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Отсюда $\|u\| = \sqrt{2}$, и потому $\text{sign } x \in L^2(-1, 1)$. Подчеркнем, что функция $\text{sign } x$ разрывна в точке $x = 0$, тогда как исходное множество $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ состояло из непрерывных функций.

ПРИМЕР 2. Аналогично можно проверить, что пространству $L^2(\Omega)$ могут принадлежать функции с бесконечными разрывами. Например, для функции $u(x) = x^{-1/3}$, рассматриваемой на области

$\Omega = (0, 1)$, имеем:

$$\|u\|^2 = \int_0^1 x^{-2/3} dx = 3.$$

Следовательно, $\|u\| = \sqrt{3}$, и потому $x^{-1/3} \in L^2(\Omega)$.

ПРИМЕР 3. Пусть $\Omega \in (-1, 1)$. Введем последовательность $u_n(x) = (1 - |x|)^n$ и убедимся, что эта последовательность сходится к нулю по норме пространства $L^2(-1, 1)$. Соответствующие вычисления имеют следующий вид:

$$\|u_n\|^2 = \int_{-1}^1 (1 - |x|)^{2n} dx = 2 \int_0^1 (1 - x)^{2n} dx = (n + 1/2)^{-1}.$$

Отсюда непосредственно видно, что

$$\|u_n\| = (n + 1/2)^{-1/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Это соотношение означает, что $u_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) в норме пространства $L^2(-1, 1)$. Более точно, предельный элемент $u_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ следует считать нулем пространства $L^2(-1, 1)$. Предельная функция $u_0(x)$ вычисляется просто и имеет вид: $u_0(x) = 1$ для $x = 0$, $u_0(x) = 0$ для $x \neq 0$. Получилась функция, отличная от нуля в точке $x = 0$, и все же эту функцию следует считать нулем пространства $L^2(-1, 1)$. Но в этом пространстве уже имеется стандартный нулевой элемент $u(x) \equiv 0$, $x \in (-1, 1)$. Получено противоречие: в одном пространстве нашли по крайней мере два различных элемента, которые следует считать нулевыми. Выход из описанного противоречия найден следующий: все функции, для которых $\int_{\Omega} u^2(x) dx = 0$, объединили в один класс, и этот класс, т.е. множество функций, объявили нулевым элементом пространства $L^2(-1, 1)$. Вопрос о конструкции функций из подобных классов оказался столь трудным, что потребовал создания специальной теории, называемой теорией меры и интеграла Лебега. Для тех, кто знаком с указанной теорией, напомним, что нулем пространства $L^2(\Omega)$ считается набор функций, каждая из которых отлична от нуля на множестве меры нуль измеримого множества Ω .

Выпишем некоторые формулы абстрактного гильбертова пространства применительно к $L^2(\Omega)$. Пусть последовательность $u_n \in$

$L^2(\Omega)$ сходится к элементу $u \in L^2(\Omega)$ по норме: $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), что можно записать в эквивалентной форме

$$\int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Если выполнены соотношения (3), то говорят, что последовательность $u_n(x)$ сходится к функции $u(x)$ в среднем квадратичном.

Неравенство Коши – Буняковского в пространстве $L^2(\Omega)$ принимает следующий вид:

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} u^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Два элемента $u, v \in L^2(\Omega)$ считаются ортогональными, если $\int_{\Omega} u(x)v(x) dx = 0$. Строить ортогональные базисы в пространстве $L^2(\Omega)$ — достаточно трудная задача. Для примера напомним факт математического анализа: в пространстве $L^2(0, 2\pi)$ примером полной ортонормированной системы является тригонометрическая система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если задана функция $u(x) \in L^2(0, 2\pi)$, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а ряд Фурье имеет вид

$$u(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

и он сходится в среднем квадратичном именно к функции $u(x)$.

Можно показать, что в каждом гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ имеется счетный базис, т.е. пространство $L^2(\Omega)$ сепарабельно.

Приведем примеры линейных функционалов в пространстве $L^2(\Omega)$. Теорема Ф. Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве для случая конкретного пространства $L^2(\Omega)$ принимает следующий вид. Пусть задан линейный непрерывный функционал $f(u)$ в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$, тогда найдется единственный элемент $h_f \in L^2(\Omega)$ такой, что данный функционал можно представить в интегральной форме:

$$f(u) = \int_{\Omega} u(x) h_f(x) dx, \quad u \in L^2(\Omega). \quad (4)$$

Обратно, если задан элемент $h_f \in L^2(\Omega)$, то интеграл (4) определяет линейный непрерывный функционал на пространстве $L^2(\Omega)$. Тем самым соответствие $f \Leftrightarrow h_f$ является взаимно однозначным и линейным, поэтому говорят, что сопряженное пространство $(L^2(\Omega))^*$ совпадает с исходным пространством $L^2(\Omega)$. Более точно, между этими пространствами можно установить изоморфизм.

Приведем пример линейного непрерывного оператора, который будет использован позднее. Фиксируем точку $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ в области Ω , номер $i = 1, \dots, n$, и для функции $u(x_1, \dots, x_n)$ введем оператор

$$Au = \int_{x_{0i}}^{x_i} u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) dy_i. \quad (5)$$

Линейность введенного оператора является следствием линейности оператора интегрирования, а его непрерывность — следствием ограниченности, для проверки которой оценим выражение

$$|Au| \leq \int_{x_{0i}}^{x_i} 1 \cdot |u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i.$$

К полученному интегралу применим неравенство Коши – Буняковского в одномерном варианте для функций 1 и $|u|$, рассматривая их на отрезке $[x_{0i}, x_i]$. В результате получим оценку

$$|Au| \leq \left(\int_{x_{0i}}^{x_i} dy_i \right)^{1/2} \left(\int_{x_{0i}}^{x_i} |u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|^2 dy_i \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{d} \left(\int_{x_{0i}}^{x_i} |u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|^2 dy_i \right)^{1/2},$$

где d — диаметр шара, в котором содержится область Ω . А теперь оценим норму

$$\begin{aligned} \|Au\|^2 &= \int_{\Omega} |Au|^2 dx \leq d \int_{\Omega} dx \int_{x_{0i}}^{x_i} |u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)|^2 dy_i \leq \\ &\leq d^2 \int_{\Omega} u^2(x) dx = d^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Итак, $\|Au\| \leq d\|u\|$, что доказывает ограниченность и непрерывность введенного оператора в пространстве $L^2(\Omega)$. Отметим полученный результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Оператор A , определяемый формулой (5), является линейным и непрерывным в пространстве $L^2(\Omega)$.*

Заметим, что непрерывными являются и более общие интегральные операторы. Именно интегральные операторы в пространстве $L^2(\Omega)$ наиболее изучены.

5.8. Пространство Соболева $\mathring{W}_2^1(\Omega)$

5.8.1. Пространства с позитивной нормой. Введем пространства, наиболее часто используемые в теории уравнений с частными производными. Пусть Ω — ограниченная область пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, с границей $\partial\Omega$. Через $\mathring{C}^1(\Omega)$ обозначим множество непрерывных в Ω функций, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$ и имеют в Ω непрерывные частные производные первого порядка. Окрестность границы, в которой функция обращается в нуль, может меняться вместе с функцией. Очевидно, что частные производные также обращаются в нуль в окрестности границы, и это дает возможность не интересоваться гладкостью границы $\partial\Omega$. Если граница не очень сложная, то можно ограничиться функциями, которые обращаются в нуль вместе с производными на границе области, не требуя обращения

в нуль в окрестности $\partial\Omega$. Ясно, что множество $\mathring{C}^1(\Omega)$ является линейным: если $u, v \in \mathring{C}^1(\Omega)$, то $u + v \in \mathring{C}^1(\Omega)$ и $\lambda u \in \mathring{C}^1(\Omega)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Кроме того, определен нулевой элемент $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, а также противоположный элемент $-u(x)$ для каждого заданного $u \in \mathring{C}^1(\Omega)$.

На линейном множестве $\mathring{C}^1(\Omega)$ введем скалярное произведение, именно каждому двум функциям $u, v \in \mathring{C}^1(\Omega)$ поставим в соответствие число

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \equiv \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \quad (1)$$

По условию вектор-функции ∇u , ∇v непрерывны в Ω , и потому интегралы в (1) вполне определены. Убедимся, что введенная числовая функция $\langle u, v \rangle$ действительно определяет скалярное произведение, для чего проверим аксиомы скалярного произведения.

Начнем с первой: $\langle u, u \rangle \geq 0$ и $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Неотрицательность выражения $\langle u, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ очевидна, причем $\langle 0, 0 \rangle = 0$. Но имеется и обратное требование: если $\langle u, u \rangle = 0$, то $u = 0$. Проверим его. Пусть $\langle u, u \rangle = 0$, т.е.

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right) dx = 0.$$

Отсюда вытекает, что все частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (x \in \Omega). \quad (2)$$

Из первого уравнения системы (2) следует, что функция $u(x_1, \dots, x_n)$ не зависит от аргумента x_1 . Аналогичные рассуждения показывают, что решение системы (2) не зависит от остальных переменных, следовательно, $u(x) = c$, $c = \text{const}$. Так как в окрестности границы $\partial\Omega$ функция $u(x) = c$ обязана обратиться в нуль, то $c = 0$, т.е. $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Тем самым первая аксиома скалярного произведения удовлетворяется.

Вторая аксиома о симметрии: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ — очевидна, поэтому перейдем к третьей аксиоме — линейности. Требуется равенство $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$, которое выполняется в силу линейности операций дифференцирования и интегрирования.

Итак, выражение (1) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, в результате чего множество $\mathring{C}^1(\Omega)$ превращается в линейное пространство со скалярным произведением, которое порождает норму

$$\|u\|_1 = \langle u, u \rangle^{1/2} = \left[\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right) dx \right]^{1/2}. \quad (3)$$

Полученное пространство $\mathring{C}^1(\Omega)$ с нормой (3) не является полным, к нему необходимо применить процедуру пополнения, в результате которой появляются идеальные элементы. Новое пополненное пространство обычно обозначают одним из символов $H_0^1(\Omega)$ или $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и называют *пространством Соболева*.

Приведем примеры идеальных элементов пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, которые получаются в результате пополнения и в то же время не принадлежат исходному множеству $\mathring{C}^1(\Omega)$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $u(x) = 1 - |x|$. Ее производная $u'(x)$ разрывна, так как $u'(x) = 1$ для $x \in (-1, 0)$ и $u'(x) = -1$ для $x \in (0, 1)$, тем не менее норма конечна:

$$\|u\|_1^2 = \int_{-1}^1 |u'(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Таким образом, $\|u\|_1 = \sqrt{2}$, следовательно, $1 - |x| \in \mathring{W}_2^1(-1, 1)$.

Пространству $\mathring{W}_2^1(-1, 1)$ принадлежат также функции с производными, имеющими неограниченные разрывы. Такой является функция $u(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Ее производная $u'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$, поэтому легко вычисляется норма

$$\|u\|_1 = \left(\frac{4}{9} \int_{-1}^2 x^{-2/3} dx \right)^{1/2} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$, т.е. квадрат на плоскости. Аналогично предыдущему примеру можно показать, что функция $(1 - |x|)(1 - |y|) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Допустимы также функции, производные которых имеют бесконечные разрывы, суммируемые с квадратом. При этом сами функции все же должны обращаться в нуль на границе квадрата.

Вернемся к изучению функций из пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. В дальнейшем будет полезно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Тогда $\partial u / \partial x_i \in L^2(\Omega)$ для $i = 1, \dots, n$ и при этом $\|\partial u / \partial x_i\| \leq \|u\|_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести следующую оценку для каждого $i = 1, \dots, n$:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx = \|u\|_1^2.$$

Отсюда $\|\partial u / \partial x_i\| \leq \|u\|_1$, что и утверждалось. \square

В целом пространство $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ можно охарактеризовать следующим образом. Каждая функция из пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ допускает частные производные, суммируемые с квадратом по области Ω . Кроме того, сами функции обращаются в нуль на границе области $\partial\Omega$ в некотором усредненном смысле. Например, каждую функцию из пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ можно продолжить нулем на все пространство \mathbb{R}^n , и при этом функция останется в классе $\mathring{W}_2^1(\mathbb{R}^n)$. В качестве контрпримера можно привести функции $u(x) \equiv c \neq 0$, $c = \text{const}$, которые нельзя продолжить нулем вне области Ω с сохранением класса $\mathring{W}_2^1(\mathbb{R}^n)$, так как частные производные продолженной функции будут содержать δ -функцию на границе $\partial\Omega$, а δ -функция не интегрируема с квадратом.

5.8.2. Пространства Соболева с негативной нормой. Так как пространство $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ является полным по построению, то это гильбертово пространство. Его сопряженное $(\mathring{W}_2^1(\Omega))^*$ можно реализовать как исходное, т.е. можно считать, что $(\mathring{W}_2^1(\Omega))^* \cong \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Знак \cong обозначает изоморфизм пространств, т.е. взаимнооднозначное и непрерывное отображение, которое сохраняет соответствие при линейных операциях.

Однако для случая пространств Соболева сопряженное пространство допускает другую реализацию в форме множества обобщенных функций. Опишем подробнее указанную реализацию. Как отмечено выше, функции из пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ имеют частные производные первого порядка, и потому их можно рассматривать как основные функции и на этой основе ввести обобщенные функции как функционалы над пространством пробных функций $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество линейных непрерывных функционалов над пространством основных функций $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ обозначим $W_2^{-1}(\Omega)$ и назовем *пространством Соболева с негативной нормой*. Элементы пространства $W_2^{-1}(\Omega)$ будем называть обобщенными функциями порядка 1 над пространством $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

ПРИМЕР 3. Пусть задана функция $g(x) \in L^2(\Omega)$. По аналогии с обобщенными функциями над пространствами непрерывных функций определим производную $\partial g / \partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$) как обобщенную функцию из пространства $W_2^{-1}(\Omega)$, которая действует на основные функции из $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ по правилу

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}, \varphi \right) = - \left(g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \quad (4)$$

Интеграл справа определен, так как $g \in L^2(\Omega)$ по условию, а $\partial \varphi / \partial x_i \in L^2(\Omega)$ по теореме 1. Линейность функционала (4) есть следствие линейности операций дифференцирования и интегрирования. Его ограниченность вытекает из неравенства Коши – Буняковского:

$$\left| \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}, \varphi \right) \right| = \left| \left(g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \right| \leq \|g\| \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\| \leq \|g\| \cdot \|\varphi\|_1.$$

Здесь на последнем этапе использовано неравенство из теоремы 1.

Мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g(x) \in L^2(\Omega)$. Тогда определены производные $\partial g/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, как обобщенные функции над пространством $\dot{W}_2^1(\Omega)$. В частности, $\partial g/\partial x_i \in W_2^{-1}(\Omega)$.

Теорема 2 составляет часть более общего утверждения, которое дает полную характеристику элементов пространства $W_2^{-1}(\Omega)$ и имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 3. Функция $f(x)$ принадлежит пространству $W_2^{-1}(\Omega)$ с негативной нормой тогда и только тогда, когда найдутся функции $g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega)$ такие, что $f(x) = \sum_{i=1}^n \partial g_i/\partial x_i$.

Полное доказательство теоремы 3 оставляем заинтересованному читателю.

5.9. Существование решений краевых задач

Рассмотрим краевую задачу в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$:

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1)$$

Будем искать решения этой задачи из пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$. При этом оператор Δ понимаем в смысле обобщенных функций. Найдем порядок обобщенной функции Δu . Так как $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, то $g_i = \partial u/\partial x_i \in L^2(\Omega)$ по теореме 1 раздела 5.8, и тогда $\partial g_i/\partial x_i = \partial^2 u/\partial x_i^2 \in W_2^{-1}(\Omega)$ по теореме 2 раздела 5.8. Мы выяснили, что функция Δu является элементом пространства Соболева с негативной нормой, поэтому выбираем правую часть $f \in W_2^{-1}(\Omega)$. При указанных условиях справедлива следующая теорема о существовании решения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задана функция $f \in W_2^{-1}(\Omega)$. Тогда существует и притом единственная функция $u(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $-\Delta u = f$, которое рассматривается как равенство элементов пространства Соболева $W_2^{-1}(\Omega)$ с негативной нормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем уравнение (1). Обе части уравнения $-\Delta u = f$ рассматриваем как обобщенные функции порядка 1 над пространством основных функций $\dot{W}_2^1(\Omega)$, так что

определены и равны функционалы

$$(-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \quad (2)$$

Представим левую часть уравнения (2) в виде

$$(-\Delta u, \varphi) = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \langle u, \varphi \rangle. \quad (3)$$

Здесь использовано определение обобщенных функций порядка 1 и обозначение скалярного произведения в пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Сравнивая равенства (2) и (3), можем переписать уравнение (2) в виде

$$\langle u, \varphi \rangle = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \quad (4)$$

Рассмотрим правую часть этого уравнения. По условию $f \in W_2^{-1}(\Omega)$, так что выражение (f, φ) задает линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. По теореме Рисса каждый такой функционал можно представить в форме скалярного произведения и притом единственным образом. Именно, найдется элемент $u_f \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, однозначно определенный и такой, что справедливо тождество

$$(f, \varphi) = \langle u_f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \quad (5)$$

Сравнивая (5) и (4), приходим к выводу, что однозначно найден элемент u_f , который обращает уравнение (4) в тождество. Следовательно, функция $u_f \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ является и притом единственным искомым решением краевой задачи (1), что и утверждалось. \square

Теорема 1 относится к разряду так называемых «чистых теорем существования»: она гарантирует существование решения краевой задачи (1), но не указывает способ его построения. Для приближенного вычисления решения обратимся к абстрактному методу Фурье.

Пространство $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ является сепарабельным и гильбертовым, в нем можно найти счетный ортонормированный базис e_1, e_2, \dots , по которому разложим решение краевой задачи (1): $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $\|u\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$. Строим приближенные решения $u_m =$

$\sum_{k=1}^m c_k e_k$ как отрезки ряда Фурье. Получаем очевидную оценку, используя остаток сходящегося числового ряда:

$$\|u - u_m\|_1 = \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k e_k \right\|_1 = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Эта оценка показывает, что последовательность u_m сходится к решению краевой задачи (1) в норме пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Коэффициенты c_k легко определяются. Действительно, если в тождество (4) подставить элемент базиса $\varphi = e_k$, то найдем $c_k = \langle u, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle$. В результате получим приближенное решение

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_k e_k = \sum_{k=1}^m (f, e_k) e_k.$$

Эта формула дает возможность реально вычислять решение краевой задачи (1) с любой заданной точностью.

Итак, теорема 1 гарантирует решение задачи (1) для каждой обобщенной функции $f(x) \in W_2^{-1}(\Omega)$. Может возникнуть подозрение, что строить обобщенные функции трудно, поэтому представляет интерес следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f \in L^2(\Omega)$, тогда $f \in W_2^{-1}(\Omega)$, так что справедливо включение $L^2(\Omega) \subset W_2^{-1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана функция $f(x) \in L^2(\Omega)$. Выберем точку $x_0 \in \Omega$ и представим $f(x)$ в виде $f(x) = \partial g(x) / \partial x_1$, где

$$g(x) = \int_{x_{01}}^{x_1} f(y_1, x_2, \dots, x_n) dy_1.$$

Согласно следствию 1 раздела 5.7 функция $g(x) \in L^2(\Omega)$, и потому $f(x) \in W_2^{-1}(\Omega)$ по теореме 2 раздела 5.8, что и доказывает утверждение. \square

Вернемся к теореме 1 о существовании решения и обратим внимание на внешнюю простоту ее доказательства. Это стало возможным потому, что доказательству теоремы 1 предшествовала солидная теория, в которой изложены основы функционального анализа. Необходимо подчеркнуть, что после ознакомления с этой теорией порядок дифференциального оператора не играет особой роли. В

качестве подтверждения докажем теорему существования решения первой краевой задачи для бигармонического уравнения.

В разделе 5.8 мы ввели класс функций $\mathring{C}^1(\Omega)$. Его естественным аналогом является класс $\mathring{C}^2(\Omega)$ функций, которые непрерывны вместе с частными производными до второго порядка и обращаются в нуль в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$. Множество $\mathring{C}^2(\Omega)$ является линейным пространством, в котором введем скалярное произведение

$$[u, v] = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx. \quad (6)$$

Без труда проверяется, что числовая функция $[u, v]$ действительно определяет скалярное произведение в пространстве $\mathring{C}^2(\Omega)$. Нетривиально выглядит проверка первой аксиомы в части, когда из соотношения $[u, u] = 0$ должно следовать тождество $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Проверим это утверждение.

Пусть известно, что

$$[u, u] = \int_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx = 0.$$

Отсюда очевидно, что $\Delta u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Однако $u|_{\partial\Omega} = 0$, так как рассматриваются функции из множества $\mathring{C}^2(\Omega)$. Получается краевая задача

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

которая в силу теоремы 1 имеет единственное решение $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, следовательно, это решение обязано совпадать с естественным решением $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, что и доказывает аксиому.

Итак, множество $\mathring{C}^2(\Omega)$ является линейным пространством со скалярным произведением, которое порождает норму

$$\|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Множество $\overset{\circ}{C}^2(\Omega)$ не является полным пространством по норме (7). Его пополнение обозначим $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ и назовем пространством Соболева.

Введенное пространство $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ является гильбертовым, поэтому его сопряженное совпадает с ним самим с точностью до изоморфизма:

$$\left(\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)\right)^* \cong \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega).$$

Но возможна и другая реализация сопряженного пространства в форме обобщенных функций. Функции из $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ имеют частные производные до второго порядка, что дает возможность ввести обобщенные функции второго порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество линейных непрерывных функционалов над пространством основных функций $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ обозначим $W_2^{-2}(\Omega)$ и назовем пространством Соболева с негативной нормой. Элементы пространства $W_2^{-2}(\Omega)$ будем называть обобщенными функциями порядка 2 над пространством $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$.

ПРИМЕР 1. Пусть задана функция $g(x) \in L^2(\Omega)$. Определим для нее оператор Лапласа $\Delta g(x)$ как обобщенную функцию порядка 2, которая действует на основные функции по правилу

$$(\Delta g, \varphi) = (g, \Delta \varphi) = \int_{\Omega} g(x) \Delta \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega). \quad (8)$$

Проверим, что в (8) задан линейный непрерывный функционал над пространством $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$. Его линейность очевидна, поэтому проверим непрерывность, которая есть следствие ограниченности. Из представления нормы (7) в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ следует, что $\Delta \varphi \in L^2(\Omega)$ для каждой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$, причем, $\|\Delta \varphi\| = \|\varphi\|_2$. Теперь нетрудно получить оценку обобщенной функции $\Delta g(x)$, $g \in L^2(\Omega)$:

$$|(\Delta g, \varphi)| = |(g, \Delta \varphi)| \leq \|g\| \cdot \|\Delta \varphi\| \leq \|g\| \cdot \|\varphi\|_2.$$

Отсюда и следует, что функция Δg является линейным ограниченным функционалом над $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

где n — внешняя нормаль к области Ω . Будем искать решения $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$, так что $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Из представления $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ и примера 1 следует, что $\Delta^2 u \in W_2^{-2}(\Omega)$. Поэтому считаем, что задана функция $f \in W_2^{-2}(\Omega)$, и представим задачу (9) в виде $(\Delta u, \Delta \varphi) = (f, \varphi)$, или

$$[u, \varphi] = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathring{W}_2^2(\Omega). \quad (10)$$

Теперь можно применить знакомые аргументы. Именно, функционал (f, φ) по теореме Рисса можно представить и притом единственным образом в форме скалярного произведения в пространстве $\mathring{W}_2^2(\Omega)$:

$$(f, \varphi) = [u_f, \varphi], \quad \varphi \in \mathring{W}_2^2(\Omega). \quad (11)$$

Сравнение (10) и (11) показывает, что найденный элемент u_f является решением уравнения (10), и притом единственным. Мы пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дана функция $f \in W_2^{-2}(\Omega)$. Тогда существует и притом единственная функция $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $\Delta^2 u = f$, которое рассматривается как равенство элементов пространства Соболева $W_2^{-2}(\Omega)$ с негативной нормой.

ГЛАВА 6

Глобальные решения дифференциальных уравнений и неравенств

В настоящей главе мы приводим результаты, которые не содержатся в классических курсах по уравнениям математической физики. В отличие от всего предыдущего материала мы коснемся здесь нелинейных (точнее так называемых «полулинейных») уравнений. Теория линейных уравнений с частными производными в определенном смысле завершена, ее основы изложены в учебниках. Теория же нелинейных задач с частными производными практически всегда остается за кадром стандартного курса и воспринимается как нечто экзотическое.

Здесь мы хотели бы описать одно из направлений теории нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств, а именно — проблему существования и отсутствия глобальных решений. Ядром изложения является «метод пробных функций», детально развитый в работах Э. Митидиери, С.И. Похожаева и ряда других авторов (полный список литературы имеется в монографии [52]). Метод пробных функций позволил решить значительное число открытых проблем в теории отсутствия глобальных решений, в то же время базовая техника доступна даже студентам младших курсов. В подтверждение мы включили статьи наших бывших студентов Ю.В. Володина и С.В. Старостиной.

Каждый раздел главы составляет отдельную статью. В первом разделе мы излагаем ряд замечаний о глобальных решениях (это статья авторов книги, которая является победителем конкурса научно-популярных статей среди держателей грантов Российского фонда фундаментальных исследований 2001 г.). Ряд утверждений в статье приводится лишь для полноты изложения и может

быть опущен при первом чтении. Второй раздел составляет статья С.В. Старостиной об отсутствии глобальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств, в которой на самом простейшем уровне изложены основы метода пробных функций. В третий раздел включена статья Ю.В. Володина, в которой метод пробных функций применяется к уравнениям эллиптического типа. Наконец, заключительный четвертый раздел содержит статью одного из авторов, в которой в едином ключе получены условия отсутствия глобальных решений для параболических и гиперболических уравнений (и более общего класса «эволюционных уравнений высокого порядка»).

6.1. Глобальные решения дифференциальных уравнений*

Теоретическая математика представляет, пожалуй, одну из наиболее трудно внедряемых наук. Разумеется, многие могут не согласиться с этим тезисом, поскольку практически ни одна наука сегодня не обходится в той или иной мере без математики. Но дистанция между чистой и прикладной математикой часто очень велика, и трудно объяснить, чем же все-таки занимаются «чистые» математики. В этой связи надо заметить, что якобы неактуальные на сегодняшний день теоретические задачи через десять, двадцать, сто лет могут неожиданно стать прорывным направлением и принести огромный научный и экономический эффект.

Настоящая статья посвящена одному современному направлению чистой математики, актуальному в теоретическом плане и в то же время имеющему большие прикладные аспекты. Данная тема разрабатывается, в частности, группами под руководством чл.-корр. РАН С.И. Похожаева (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), проф. В.А. Кондратьева (Московский государственный университет) и одного из авторов. Ряд прикладных аспектов исследуется коллективом ученых в рамках гранта международной ассоциации ИНТАС, возглавляемого одним из крупнейших британских специалистов в области прикладной и

* Лаптев Г.И., Лаптев Г.Г. Глобальные решения дифференциальных уравнений (РФФИ 02-01-99006) // Природа (в печати)

вычислительной математики проф. Крисом Баддом (Chris Budd), University of Bath.

Создание Ньютоном и Лейбницем в конце семнадцатого столетия основ дифференциального и интегрального исчисления явилось колоссальным шагом вперед и позволило создать математические и вычислительные модели многих объектов естествознания, изучавшихся до того в основном на экспериментальном уровне. Огромное число природных явлений получило наконец-то математическую формулировку в виде *дифференциальных уравнений*.

В тот период казалось, что дифференциальные уравнения могут точно описать все явления природы. С другой стороны, сама процедура вывода дифференциального уравнения опиралась на некоторые известные из опыта постулаты, которые в ряде случаев сами по себе не были точными. Одной из важных в то время была задача о распространении тепла. Французский физик и математик Фурье вывел соответствующее «уравнение теплопроводности», которое позволяло вычислить температуру любой точки тела в требуемый момент времени. Это уравнение обладает одним интересным свойством. Предположим, что мы нагреваем достаточно длинный стержень в центре. Естественно, что сначала будет нагреваться центральная область, а затем — концы стержня. Согласно же уравнению теплопроводности получалось, что как бы мало мы не нагревали центральную область, через любой сколь угодно малый момент времени будет нагрет весь стержень (нагрет очень слабо, но с математической точки зрения его температура будет отличаться от начальной).

Ряд нелинейных модификаций этого уравнения оказались особенно полезны при моделировании процессов теплопроводности, например самонагревании скоплений угля. Удивительно, что одно и то же уравнение описывает явления из физики, биологии, экономики. Наиболее интересной при этом оказывается возможность прогноза поведения описываемой дифференциальным уравнением системы.

Итак, предположим, что у нас задана нелинейная система уравнений, описывающих некоторый физический процесс (зависящий от времени). Пусть также задана характеристика этой системы в

начальный момент времени (математики называют это «начальными условиями»). Вопрос, который нас интересует — можем ли мы предсказать поведение этой системы на любой срок?

Вообще говоря, здесь возможны несколько вариантов ответа, которые составляют сущность теории и которые можно хорошо понять на примере задачи из популяционной генетики. Предположим, на необитаемый остров завезли травоядных и хищников. Начальное состояние системы (т.е. количество животных) нам известно. Здравый смысл подсказывает следующие возможные варианты развития.

Первый: после определенного первоначального колебания система приходит в устойчивое состояние, т.е. численность животных практически не меняется в течение длительного времени.

Второй: система (в силу каких-то дополнительных внешних причин) не может прийти в устойчивое состояние. В этом случае ситуация выглядит обычно следующим образом: в условиях большого количества травоядных хищники быстро размножаются, при этом численность травоядных уменьшается и в какой-то момент хищникам перестает хватать корма, их численность падает, что, в свою очередь, приводит к росту популяции травоядных и т.д. Т.е. наблюдается периодический рост и падение численности, но система никогда не приходит в устойчивое состояние.

Третий: после какого-то момента либо хищников становится слишком много, либо травоядных — слишком мало, и периодическое состояние уже невозможно. Все животные быстро погибают. Математики говорят, что решение «разрушается».

За этими банальными примерами кроются глубокие принципы, описывающие большое число физических явлений. В современной науке такие задачи часто относят к области «синергетики», выделяя при этом две особенности — возникновение порядка из хаоса и обратное явление. Первое явление иллюстрируется рассмотренным выше первым вариантом: численность хищников может варьироваться в достаточно широком диапазоне, и, несмотря на это, через определенное время она выйдет на (одно и то же) устойчивое состояние, т.е. из практически случайной начальной численности возникает строго определенное количество.

Обратимся теперь к более сложному случаю — возникновению хаоса из порядка. Здесь необходимо отметить, что если в системе нет никаких «случайных» элементов, то, конечно, задавая каждый раз одинаковые начальные условия, мы всегда приходим к одному и тому же результату. Однако система может быть «некорректной»: при малом изменении начальных данных решение может измениться до неузнаваемости. В реальной жизни мы всегда имеем величины, заданные с некоторой погрешностью (обусловленной хотя бы используемыми приборами), поэтому корректность системы является здесь ключевым моментом. Таким образом, вполне возможна ситуация, когда малое изменение начальных данных приведет к полному изменению свойств системы. Это последнее обстоятельство кроме всего прочего означает «невозможность долгосрочного прогноза».

Из описанных выше трех вариантов нас интересует, как это ни странно, последний. Попробуем записать его на языке формул. В качестве самого простейшего (модельного) примера рассмотрим следующую задачу: пусть в каждый момент времени известна скорость точки, движущейся вдоль прямой линии, и пусть она равна $f(t)$. Будем считать также, что известна начальная координата u_0 в начальный момент времени $t = 0$. Закон движения точки, т.е. ее координата $u(t)$, определяется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка с начальным условием (так называемая «задача Коши»):

$$u'(t) = f(t), \quad u(0) = u_0.$$

Интегральное исчисление дает решение этой задачи в виде

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Предположим, что скорость не изменяется скачками (функция $f(t)$ непрерывна), тогда и формула (1) и здравый смысл подсказывают нам, что решением будет являться некоторая (как минимум) непрерывная функция, определенная при любых сколь угодно больших значениях времени t . Теоретически тело можно разгонять неограниченно долго.

Аналогичная задача

$$u'(t) = u(t), \quad u(0) = u_0, \quad (2)$$

когда тело разгоняется все быстрее пропорционально пройденному расстоянию, также известна из университетского курса и имеет явное решение, определенное для всех t . Решения, определенные для всех $t \geq 0$, называются *глобальными*.

Теперь обратимся к внешне, казалось бы, не намного отличающемуся случаю задачи

$$u'(t) = u^2(t), \quad u(0) = u_0 > 0. \quad (3)$$

Проинтегрировав это уравнение, находим единственное решение в явном виде

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - t}. \quad (4)$$

Данная функция при любых сколь угодно малых начальных данных имеет вертикальную асимптоту при (конечном) значении $t_0 = 1/u_0$, т.е. решение всегда имеет бесконечный разрыв. Таким образом, можно сформулировать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *При любых положительных начальных данных задача (3) не имеет глобального решения, определенного для всех значений $t > 0$.*

С математической точки зрения исследование такого рода дифференциальных уравнений опирается на теорему Пеано, которая устанавливает существование решения задачи на некотором малом участке $[t_0, t_0 + \varepsilon)$, и так называемую «теорему о продолжении решения», которая дает условия, при которых решение можно продолжать неограниченно по $t \rightarrow \infty$. В случае задачи (3) решение нельзя продолжить после определенного момента, оно устремляется к бесконечности, иными словами, происходит «взрыв» решения. В зарубежной литературе часто применяют английское словосочетание «blow-up». В задаче (3) локальное (т.е. существующее при $t < t_0 = 1/u_0$) решение есть всегда (при любых положительных начальных данных u_0). В общей постановке, когда мы не знаем явного вида решения, естественно возникает вопрос о максимальном времени существования этого локального решения, т.е. об оценках для t_0 .

С физической точки зрения полученный результат означает, что какую бы малую начальную скорость не имело тело, мы можем разогнать его до *бесконечной* скорости за *конечное* время (что, очевидно, нереально), если сообщать ему скорость, пропорциональную квадрату расстояния.

Уравнение (3) встречается и в задачах популяционной генетики. Оно описывает, например, ежегодный прирост народонаселения в некоторые периоды. Интересное обсуждение данной проблемы на научно-популярном уровне имеется в замечательной книге И.С. Шкловского [64], который, в частности, отмечает абсурдность решения вида (4) с точки зрения здравого смысла и делает вывод, что, начиная с определенного момента, данный («гиперболический») закон меняется на «экспоненциальный» (описываемый уравнением вида (2)).

Разумеется, для обыкновенных дифференциальных уравнений можно исследовать и существенно более общие вопросы о поведении решений, однако для нас сейчас главными являются те эффекты, которые можно изучать и для задач в частных производных. Сначала мы сформулируем ряд классических результатов, полученных до 1990 г.

Исторически одной из первых была задача Коши для параболического уравнения в пространстве $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, $N \geq 3$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^q, \quad u|_{t=0} = u_0(x) > 0. \quad (5)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа: $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Мы рассматриваем положительные решения данной задачи, что, в частности, диктуется и реальным физическим смыслом (например, температура $u(x, t)$ всегда больше абсолютного нуля).

Классический результат (Фужита [8], 1966 г.), положивший начало всей теории отсутствия решений уравнений с частными производными, формулируется так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При*

$$1 < q \leq q^* = \frac{N+2}{N}$$

задача (5) не имеет глобального положительного решения ни при каких начальных данных.

При

$$q > q^* = \frac{N+2}{N}$$

задача (5) имеет глобальное решение для некоторых достаточно быстро убывающих на бесконечности начальных данных.

Таким образом, появляется так называемый критический показатель нелинейности, разделяющий области значения степени q , в которых задача имеет или не имеет глобального решения.

Отметим, что оказалось также возможным исследовать более общий объект, чем уравнение, а именно — неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq u^q, \quad u|_{t=0} = u_0(x) > 0. \quad (6)$$

Для задачи (6) предложение 1 также остается справедливым, т.е. мы сталкиваемся с довольно неожиданным фактом: задача для более общего объекта — неравенства — имеет тот же ответ, что и задача для менее общего объекта — уравнения.

В классической теории дифференциальных уравнений с частными производными принято различать три основных типа — эллиптические, параболические и гиперболические задачи. Приведенное выше неравенство (6) относится к параболическому типу.

Для эллиптического неравенства

$$-\Delta u \geq u^q \quad (7)$$

Бидо-Верон [2] доказала отсутствие глобального решения при $q \leq \frac{N}{N-2}$. И, наконец, для гиперболической задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \geq u^q, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_0(x) > 0 \quad (8)$$

отметим результат Като [13] об отсутствии глобального решения при $q \leq \frac{N+1}{N-1}$. Необходимо подчеркнуть, однако, что Като доказал свое утверждение при некоторых дополнительных условиях, при которых полученный критический показатель не является неулучшаемым.

Все три приведенных выше результата доказывались разными методами. Тем не менее можно заметить некоторую общность данных результатов в плане структуры критических показателей: они

получаются друг из друга, если просто добавлять единичку к числителю и знаменателю. Данный факт не является случайным, и, по-видимому, впервые это было отмечено в работах С.И. Похожаева с соавторами [20, 21]. Там же был предложен достаточно универсальный метод, позволяющий в едином ключе получить результаты об отсутствии глобальных решений для всех трех типов дифференциальных неравенств.

На основании этого метода в работах одного из авторов статьи получен результат, в определенном смысле объединяющий предыдущие. Рассмотрим «эволюционное дифференциальное неравенство высокого порядка»

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq u^q, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}|_{t=0} = u_0(x) > 0, \quad (9)$$

где $k = 1, 2, \dots$. Полученный в работах [15, 17] результат утверждает следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При*

$$1 < q \leq q^* = \frac{N + 2/k}{N - 2 + 2/k}$$

задача (9) не имеет глобального положительного решения ни при каких начальных данных.

При $k = 1$ получаем утверждение Фужиты (предложение 1), при $k = 2$ — результат Като, а в пределе при $k \rightarrow \infty$ получаем критический показатель Бидо-Верон $\frac{N}{N-2}$.

Сформулируем постановку задачи в общей операторной форме. Пусть в пространстве \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, выделено измеримое множество Ω , которое может быть как ограниченным, так и неограниченным и, в частности, совпадать со всем \mathbb{R}^N . Введем класс функций W , заданных на множестве Ω , и пусть определен оператор A , не обязательно линейный, отображающий каждую функцию $u \in W$ в функцию Au , определенную на Ω . При этих условиях имеет смысл неравенство

$$Au(x) \geq |u(x)|^q, \quad x \in \Omega, \quad u \in W, \quad q > 0. \quad (10)$$

Требуется решить неравенство (10), либо доказать отсутствие решений из класса W .

ПРИМЕР 1. На отрезке $[a, b] = \Omega \subset \mathbb{R}$ рассмотрим неравенство

$$u'(x) \geq |u(x)|^q, \quad q > 0. \quad (11)$$

Будем искать решение из класса

$$W = \{u(x) : u(x) \in AC[a, b]; u(a) = u(b)\}. \quad (12)$$

Напомним, что символом $AC[a, b]$ обозначаются функции, абсолютно непрерывные на отрезке $[a, b]$. Умножим неравенство (11) на фиксированную функцию $\varphi \in W$ и результат проинтегрируем по отрезку $[a, b]$, что дает:

$$\int_a^b |u(x)|^q \varphi(x) dx \leq \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = u\varphi \Big|_a^b - \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx.$$

В силу периодичности краевых условий слагаемое $u\varphi \Big|_a^b = 0$, что приводит к неравенству

$$\int_a^b |u(x)|^q \varphi(x) dx \leq - \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx. \quad (13)$$

В класс W входит функция $\varphi(x) \equiv 1$. Для нее неравенство (13) принимает вид $\int_a^b |u(x)|^q dx \leq 0$, откуда очевидно, что допустимо только одно решение $u(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$. Полученный результат удобно оформить следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для каждого числа $q > 0$ не существует функции $u(x)$ из класса W , определенного в (12), которая удовлетворяет неравенству (11) и отлична от тождественного нуля.*

Продолжим изучение общего неравенства (10). В наиболее типичных случаях появляется число q^* , называемое критическим, которое отделяет интервал существования решения неравенства (10) от интервала несуществования. Заметим, что постановка задачи (10) в форме неравенства несколько обобщает привычные уже постановки в форме уравнения, а главное — дает возможность относительно легко доказывать существование решения, так как для неравенств это сделать много проще.

Пока еще рано говорить о результатах для неравенств с существенно нелинейным оператором A . Имеются отдельные достижения для случая квазилинейных дифференциальных операторов.

Наибольшее число исследований задачи (10) связано с линейными операторами. Для них начало общей схемы доказательства отсутствия решений задачи (10) можно представить в следующей форме. Выберем положительную в Ω гладкую функцию $\varphi(x)$, называемую «пробной», и умножим на нее неравенство (10). После интегрирования по множеству Ω получаем неравенство

$$\int_{\Omega} |u(x)|^q \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega} Au(x) \varphi(x) dx \equiv (Au, \varphi). \quad (14)$$

Используя линейность оператора A , с помощью интегрирования по частям перебросим его на второй множитель φ в виде формально сопряженного оператора A^* , т.е. считаем допустимым тождество $(Au, \varphi) = (u, A^*\varphi)$. Тогда неравенство (14) примет вид

$$\int_{\Omega} |u(x)|^q \varphi(x) dx \leq (u, A^*\varphi). \quad (15)$$

А теперь допустим, что существует пробная функция φ со свойством $A^*\varphi = 0$. Тогда из (15) следует, что $\int_{\Omega} |u(x)|^q \varphi(x) dx \leq 0$, откуда в силу условия $\varphi(x) > 0$ получаем только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Именно такая схема была применена в примере 1. Недостаток ее в том, что решения уравнения $A^*\varphi = 0$ в типичных случаях не могут быть приняты в качестве пробных функций, так как интеграл $\int_{\Omega} Au(x) \varphi(x) dx$ может расходиться. Тем не менее именно такая идея лежит в основе метода пробных функций, детально разработанного в книге [52].

В заключение приведем одно направление исследований, которое систематически стало изучаться именно в связи с развитием метода пробных функций. При ознакомлении с современной литературой по критическим степеням бросается в глаза следующий факт: авторы большинства работ не рассматривают вопрос о том, зависит ли критический показатель q^* от выбранного класса решений W . Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u = u^q, \quad u > 0, \quad q > 1, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (16)$$

Сформулируем результат работы [11]:

ТЕОРЕМА 1. *Если $1 < q < \frac{N+2}{N-2}$ ($N > 2$), то уравнение (16) не имеет нетривиального классического решения $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Если же $q \geq \frac{N+2}{N-2}$, то такое решение определено.*

Заметим существенное отличие этого результата от утверждения для неравенства (7). Другими словами, если выбрать класс решений $W_0 = C^2(\mathbb{R}^N)$, то критическая степень для уравнения (16) равна $\frac{N+2}{N-2}$. В то же время, если класс решений уравнения (16) $W = L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, то с помощью метода пробных функций можно показать, что критическая степень $q^* = \frac{N}{N-2}$. Различие критических степеней для одного и того же уравнения очевидно.

6.2. Отсутствие глобальных решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств*

ТЕОРЕМА 1. *Задача*

$$\begin{cases} y' \geq y^q, & y(x) \in C^1[0, +\infty), \quad q > 1, \\ y(0) = y_0 > 0, & y(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

не имеет глобального решения (здесь неравенство понимается в обычном поточечном смысле).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем некоторую функцию $v(x) \geq 0$, интегрируемую на $[0, x_0]$, с интегрируемой производной, $x_0 \in (0, +\infty)$. Домножим обе части неравенства из задачи (1) на $v(x)$:

$$y'v \geq y^q v.$$

Поскольку $y'(x)$ непрерывна и $v(x)$ интегрируема на отрезке $[0, x_0]$, то интегрируемо их произведение $y'v$. В силу аналогичных рассуждений получаем, что $y^q v$ также интегрируема на $[0, x_0]$.

Тогда в силу свойств интеграла Римана

$$\int_0^{x_0} y'v \, dx \geq \int_0^{x_0} y^q v \, dx.$$

*Старостина С.В. О методе пробных функций исследования отсутствия решений обыкновенных дифференциальных неравенств // Диф. уравнения и прикл. задачи: Сб. науч. тр. Тула, 2001. С. 120–124.

Интегрируя левую часть этого неравенства по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} v y' dx &= \int_0^{x_0} v dy = v y \Big|_0^{x_0} - \int_0^{x_0} y dv = \\ &= v(x_0)y(x_0) - v(0)y_0 - \int_0^{x_0} y v' dx \geq \int_0^{x_0} y^q v dx. \quad (2) \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случай $q = 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ очевидно неравенство $(a\varepsilon - \frac{b}{\varepsilon})^2 \geq 0$. Преобразуя, получаем неравенство Коши $ab \leq \frac{\varepsilon^2 a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon^2}$, которое справедливо для всех $a, b \geq 0$. В силу произвольности ε это неравенство можно переписать в форме

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}.$$

Оценим $y v'$ сверху через $y^2 v$. В силу того, что $v(x) \geq 0$, существует $\sqrt{v(x)}$ и поэтому справедливо такое преобразование:

$$y|v'| = \frac{y|v'|\sqrt{v}}{\sqrt{v}} = y\sqrt{v}\frac{|v'|}{\sqrt{v}} \leq \varepsilon y^2 v + \frac{(v')^2}{v\varepsilon}.$$

Применяя это неравенство к левой части (2), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} y^2 v dx &\leq v(x_0)y(x_0) - v(0)y_0 + \int_0^{x_0} y|v'| dx \leq \\ &\leq v(x_0)y(x_0) - v(0)y_0 + \int_0^{x_0} \left(\varepsilon y^2 v + \frac{(v')^2}{v\varepsilon} \right) dx = \\ &= v(x_0)y(x_0) - v(0)y_0 + \varepsilon \int_0^{x_0} y^2 v dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{x_0} \frac{(v')^2}{v} dx. \end{aligned}$$

Поскольку проведенные оценки верны для любого ε , то они, в частности, верны и для $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{x_0} y^2 v dx \leq v(x_0)y(x_0) - v(0)y_0 + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} y^2 v dx + 2 \int_0^{x_0} \frac{(v')^2}{v} dx,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_0} y^2 v \, dx \leq v(x_0)y(x_0) - v(0)y_0 + 2 \int_0^{x_0} \frac{(v')^2}{v} \, dx. \quad (3)$$

Выберем теперь функцию $v(x)$:

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{x_0}{2}, \\ (-\frac{2}{x_0}x + 2)^2, & \text{если } \frac{x_0}{2} < x \leq x_0. \end{cases}$$

Тогда $v(0) = 1$ и $v(x_0) = 0$, поэтому оценку (3) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_0} y^2 v \, dx + y_0 \leq 2 \int_0^{x_0} \frac{(v')^2}{v} \, dx. \quad (4)$$

Разобьем интеграл в правой части этого неравенства на два:

$$\int_0^{x_0} \frac{(v')^2}{v} \, dx = \int_0^{x_0/2} \frac{(v')^2}{v} \, dx + \int_{x_0/2}^{x_0} \frac{(v')^2}{v} \, dx.$$

Обозначим

$$u(x) = -\frac{2}{x_0}x + 2. \quad (5)$$

По построению на отрезке $[0, \frac{x_0}{2}]$ имеем $v(x) \equiv 1$, поэтому $v'(x) = 0$ и

$$\int_0^{x_0/2} \frac{(v')^2}{v} \, dx = 0.$$

При $x \in [\frac{x_0}{2}, x_0]$, используя введенную функцию $u(x)$, можем записать: $v(x) = u^2$ и $v'(x) = 2uu'$, следовательно,

$$\int_{x_0/2}^{x_0} \frac{(v')^2}{v} \, dx = \int_{x_0/2}^{x_0} \frac{4u^2(u')^2}{u^2} \, dx = 4 \int_{x_0/2}^{x_0} (u')^2 \, dx = 4 \int_{x_0/2}^{x_0} \frac{4}{x_0^2} \, dx = \frac{16}{x_0^2} \frac{x_0}{2} = \frac{8}{x_0}.$$

Таким образом, из неравенства (4) получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_0} y^2 v \, dx + y_0 \leq \frac{16}{x_0}.$$

Так как $y(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$, то интеграл в левой части неотрицателен, и можем переписать это неравенство в виде

$$y_0 \leq \frac{16}{x_0},$$

где $y_0 > 0$ не зависит от $x_0 \rightarrow \infty$.

Можем перейти к пределу при $x_0 \rightarrow \infty$, что дает $y_0 = 0$.

Получено противоречие с условием $y_0 > 0$, откуда следует отсутствие глобального решения задачи (1).

Итак, мы доказали теорему для $q = 2$. Рассмотрим случай произвольного $q > 1$. В этом случае для оценки yv' через $y^q v$ сверху воспользуемся обобщенным неравенством Коши, или неравенством Юнга:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall a, b \geq 0: \quad ab \leq \varepsilon a^q + \frac{b^{q'}}{\varepsilon^{q'-1}}, \quad \text{где } q > 1 \text{ и } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Тогда

$$y|v'| = y \sqrt[q]{v} \frac{|v'|}{\sqrt[q]{v}} \leq \varepsilon y^q v + \frac{|v'|^q}{\varepsilon^{q'-1} v^{q'/q}}.$$

Функцию $v(x)$ вводим следующим образом:

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{x_0}{2}, \\ u^\alpha(x), & \text{если } \frac{x_0}{2} < x \leq x_0, \end{cases}$$

где $u(x)$ определено формулой (5), $\alpha > 1$.

Умножая неравенство (1) на $v(x)$ и интегрируя по частям, с учетом выбора $v(x)$ приходим к оценке:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} y^q v dx &\leq v(x_0)y(x_0) - v(0)y_0 + \int_0^{x_0} y|v'| dx \leq \\ &\leq -y_0 + \varepsilon \int_0^{x_0} y^q v dx + \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \int_0^{x_0} \frac{|v'|^{q'}}{v^{q'/q}} dx. \quad (6) \end{aligned}$$

Аналогично случаю $q = 2$ получаем, что

$$\int_0^{x_0/2} \frac{|v'|^q}{v^{q'/q}} dx = 0,$$

а при $x \in [x_0/2, x_0]$ вычисляем $v' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ и

$$\frac{|v'|^{q'}}{v^{q'/q}} = \frac{|\alpha u^{\alpha-1} u'|^{q'}}{v^{q'/q}} = \frac{\alpha^{q'} u^{(\alpha-1)q'} |u'|^{q'}}{u^{\alpha q'/q}}.$$

Параметр α выбирается таким образом, чтобы множители $u^{(\alpha-1)q'}$ и $u^{\alpha q'/q}$ сократились. Для этого необходимо выполнение условия

$$(\alpha - 1)q' = \frac{\alpha q'}{q},$$

откуда находим $\alpha = \frac{q}{q-1} = q'$ (последнее равенство следует из соотношения $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$). Заметим, что из условия $q > 1$ вытекает, что $q' > 1$.

Окончательно

$$\begin{aligned} \int_{x_0/2}^{x_0} \frac{|v'|^{q'}}{v^{q'/q}} dx &= \alpha^{q'} \int_{x_0/2}^{x_0} |u'|^{q'} dx = \alpha^{q'} \int_{x_0/2}^{x_0} \frac{2^{q'}}{x_0^{q'}} dx = \\ &= \left(\frac{2}{x_0}\right)^{q'} \frac{x_0}{2} \alpha^{q'} = \alpha^{q'} \left(\frac{2}{x_0}\right)^{q'-1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x_0 \rightarrow \infty$, так как $q' > 1$.

Таким образом, для произвольного $q > 1$ из (6) при $\varepsilon = 1/2$ получаем оценку:

$$\frac{1}{2} \int_0^{x_0} y^q v dx + y_0 \leq 2^{q'-1} \left(\int_0^{x_0/2} \frac{|v'|^{q'}}{v^{q'/q}} dx + \int_{x_0/2}^{x_0} \frac{|v'|^{q'}}{v^{q'/q}} dx \right) = \frac{2^{2(q'-1)} \alpha^{q'}}{x_0^{q'-1}} \rightarrow 0,$$

когда $x_0 \rightarrow \infty$.

Переходя к пределу при $x_0 \rightarrow \infty$, аналогично случаю $q = 2$ получим противоречие с предположением $y_0 > 0$. Теорема доказана полностью. \square

Аналогично можно доказать более общие утверждения. Приведем одно из них.

ТЕОРЕМА 2. При $\alpha \geq 0$, $q > 1$ задача

$$\begin{cases} y' \geq y^q x^\alpha, & y(x) \in C^1[0, +\infty), \\ y(0) = y_0 > 0, & y(x) \geq 0 \end{cases}$$

не имеет глобального решения.

6.3. Глобальные решения эллиптических дифференциальных неравенств с частными производными*

В разделе рассматриваются вопросы отсутствия глобальных решений полулинейных эллиптических дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. Рассмотрены также системы таких неравенств. При этом под глобальными решениями данных неравенств, как правило, понимаются локально ограниченные функции с областью определения в заданном неограниченном множестве. Переход к рассмотрению неравенств можно объяснить тем, что строить их решения легче, чем решать соответствующие уравнения в частных производных.

Классическим примером является задача в \mathbb{R}^N , $N > 2$:

$$-\Delta u \geq u^q, \quad u \geq 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Это неравенство не имеет глобального отличного от нулевого решения [2], если $1 < q \leq \frac{N}{N-2}$. Данный результат является точным, так как для $q > \frac{N}{N-2}$ требуемым решением служит функция

$$u(x) = \frac{\varepsilon}{(1 + |x|^2)^{1/(q-1)}} \quad (1)$$

при малых $\varepsilon > 0$.

Мы рассматриваем решения неравенств вида

$$-\Delta u \geq |u|^q \quad (2)$$

без предположения о знаке решения. Это не позволяет использовать стандартные подходы (например, усреднение по сфере), поэтому мы применяем разработанный Митидиери и Похожаевым [51, 52] метод пробных функций. Отличительной особенностью данного метода является простота доказательства отсутствия решения в предельном случае $q = \frac{N}{N-2}$.

Данный подход основывается на априорных оценках. Сначала мы получим априорную оценку для решения рассматриваемой

*Володин Ю.В. Об отсутствии глобальных решений эллиптических неравенств и систем неравенств // Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Инф. 2001. Т. 7, Вып. 1. С. 61–68.

нелинейной проблемы, а затем получим асимптотику этой априорной оценки. Эта асимптотика рассматривается относительно параметра ρ , который мы устремляем к $+\infty$. Доказательство отсутствия решения проводится методом от противного, а именно: установление нулевого предельного значения соответствующей априорной оценки гарантирует нам отсутствие нетривиального глобального решения задачи.

Исследование нелинейных неравенств с частными производными основано на специальном выборе пробных функций. Следует отметить, что этот выбор определяется нелинейным характером задачи и зависит от рассматриваемого класса решений. В частности, критический показатель для фиксированной нелинейной задачи может быть разным в разных функциональных пространствах.

Используемый здесь метод имеет ощутимые преимущества: простота, общность, точность. Во-первых, все вычисления являются простыми, почти очевидными и не требуют привлечения специальных дополнительных аргументов. По существу анализ задачи сводится к анализу соответствующих алгебраических неравенств. Во-вторых, этот метод позволяет рассматривать довольно широкий класс нелинейных задач в различных областях (например, в конусах [42, 43, 14]). В-третьих, все полученные нелинейные характеристики, обеспечивающие отсутствие нетривиальных решений, являются окончательными, т.е. точными (в указанном выше смысле) во всем соответствующем классе рассматриваемых задач. Понятно, что при дополнительных ограничениях эти оценки могут быть улучшены.

В данном разделе основное внимание уделено дифференциальным неравенствам с нелинейностями степенного вида. Также важной особенностью исследуемых задач является то, что не накладывается никаких условий на поведение возможных решений в бесконечности.

Структура раздела следующая. В первой секции проводятся предварительные оценки, которые будут неоднократно использоваться в доказательствах основных утверждений. Вторая секция посвящена исследованию полулинейных неравенств и систем неравенств, возможные глобальные решения которых определены во

всем пространстве \mathbb{R}^N . Эта секция разбита на три пункта. В первом пункте подробно рассматривается модельная задача (2); во втором и третьем пунктах рассматриваются соответственно более общие неравенства и системы неравенств.

В третьей секции формулируются утверждения об отсутствии решений полулинейных эллиптических неравенств во внешности шара B_1 . Важной особенностью таких задач является тот факт, что мы можем получать не только достаточные условия отсутствия глобальных решений, но и устанавливать область существования локальных решений. Следует отметить, что, используя преобразование Кельвина, представленные в этом разделе результаты можно переформулировать на случай задач в шаре с сингулярными коэффициентами [44].

В четвертой секции рассматривается задача с бигармоническим оператором во внешности шара радиуса R . Следует отметить, что в данном случае предполагается неположительность интеграла от решения по сфере. Отличительной особенностью такой задачи является то, что критический показатель, разделяющий области существования и отсутствия глобальных решений, отличается от критического показателя для аналогичного дифференциального неравенства во всем пространстве.

Введем некоторые обозначения. Под $\text{supp } \varphi$ мы будем понимать носитель функции φ , т.е. замыкание множества точек $\{x\}$ таких, что $\varphi(x) \neq 0$.

Напомним, что оператор Лапласа Δ в пространстве \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, в сферических координатах (r, θ) записывается следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta,$$

где Δ_θ — оператор Бельтрами–Лапласа на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

Через c и C мы будем обозначать положительные константы, значения которых для нас несущественны, поэтому для различных констант мы иногда будем повторять названия (индексы).

6.3.1. Предварительные оценки. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \psi^{2q'}(x) : G \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $x \in G = \{x \in \mathbb{R}^N : \rho < |x| < 2\rho\}$,

$\rho > 1$, $q' > 1$, $N > 2$, а функция $\psi(x)$ в сферических координатах (r, θ) не зависит от θ и равна

$$\psi(r) = \frac{2}{\rho}r - \frac{1}{\rho^2}r^2, \quad r \in (\rho, 2\rho).$$

В дальнейшем мы поясним введение функции именно таким образом.

ТЕОРЕМА 1. Для всех $\rho > 1$ справедливо неравенство

$$\int_G \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)}\varphi^{q'-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{2q'-N+\alpha(q'-1)}},$$

где $\alpha \geq 0$ — некоторый параметр, C — постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершим переход к сферическим координатам: $x = x(r, \theta)$.

Исходя из наших предположений о функции φ , можно записать:

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi| &= \left| \frac{d^2}{dr^2}(\psi^{2q'}) + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr}(\psi^{2q'}) \right| = \\ &= \left| 2q'(2q'-1)\psi^{2q'-2}(\psi')^2 + 2q'\psi^{2q'-1}\psi'' + \frac{N-1}{r} 2q'\psi^{2q'-1}\psi' \right| = \\ &= 2q'\psi^{2q'-2} \left| (2q'-1)(\psi')^2 + \psi\psi'' + \frac{N-1}{r}\psi\psi' \right| \leq \\ &\leq c_1\psi^{2q'-2} \left| (\psi')^2 + \psi\psi'' + \frac{\psi\psi'}{r} \right|, \end{aligned}$$

где c_1 — константа, которая не зависит от ρ и r . Так как $r \in (\rho, 2\rho)$, то для функции ψ и ее производных можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\psi| &= \left| \frac{2}{\rho}r - \frac{1}{\rho^2}r^2 \right| \leq \frac{2}{\rho}2\rho + \frac{1}{\rho^2}4\rho^2 = 8, \\ |\psi'| &= \left| \frac{2}{\rho} - \frac{2}{\rho^2}r \right| \leq \frac{2}{\rho} + \frac{2}{\rho^2}2\rho = \frac{6}{\rho}, \\ |\psi''| &= \frac{2}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|\Delta\varphi| \leq c_1\psi^{2q'-2} \left(\frac{36}{\rho^2} + \frac{16}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{48}{\rho} \right) = c_2\psi^{2q'-2}\rho^{-2},$$

где $c_2 = 100c_1$ не зависит от ρ и r .

Для интеграла из формулировки теоремы получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_G \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)}\varphi^{q'-1}} dx &\leq \int_{S^{N-1}} d\theta \cdot \int_{\rho}^{2\rho} \frac{(c_2\psi^{2q'-2}\rho^{-2})^{q'}}{r^{\alpha(q'-1)}\psi^{2q'(q'-1)}} r^{N-1} dr \leq \\ &\leq \frac{c_3\omega_{N-1}}{\rho^{2q'+\alpha(q'-1)}} \int_{\rho}^{2\rho} r^{N-1} dr \leq \frac{C}{\rho^{2q'-N+\alpha(q'-1)}}, \end{aligned}$$

где ω_{N-1} — площадь единичной сферы, а константы c_3 и C не зависят от ρ и r . Что и требовалось доказать. \square

6.3.2. Полулинейные неравенства и системы неравенств в \mathbb{R}^N .

6.3.2.1. *Модельная задача.* Дальнейшее внимание будет уделяться исследованию отсутствия нетривиального глобального слабого решения дифференциального неравенства

$$-\Delta u \geq |u|^q, \quad q > 1. \quad (3)$$

Под глобальным решением будем понимать такое решение, которое определено во всем пространстве \mathbb{R}^N . Полученные здесь результаты будут обобщены в следующих пунктах на дифференциальные неравенства вида $-\Delta u \geq |u|^q|x|^\alpha$, $\alpha \geq 0$, а также системы

$$\begin{cases} -\Delta u \geq |v|^q|x|^\alpha, \\ -\Delta v \geq |u|^p|x|^\beta. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ называется слабым решением неравенства (3), если для любой неотрицательной функции $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \theta)$, $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, финитной по переменной r , выполняется неравенство:

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta \varphi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведенное определение получено из исходного неравенства с помощью умножения на пробную функцию и интегрирования по частям.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В определении 1 вместо непрерывных решений можно рассмотреть решения из класса локально суммируемых со степенью q функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидно, что всякое классическое решение неравенства (3) является также слабым решением. Обратное утверждение неверно.

ТЕОРЕМА 2. *Задача*

$$-\Delta u \geq |u|^q, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N > 2, \quad q > 1, \quad (4)$$

не имеет нетривиального глобального решения при $q \leq \frac{N}{N-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задача имеет хотя бы одно нетривиальное глобальное слабое решение $u(x) \not\equiv 0$. Мы найдем функцию $\varphi(x)$, а точнее некоторую совокупность функций $\{\varphi_\rho(x)\}$ с положительным параметром ρ , $\varphi_\rho(x) \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, сходящуюся при $\rho \rightarrow +\infty$ к единице в \mathbb{R}^N следующим образом. Для всякого компактного множества $M \subset \mathbb{R}^N$ найдется такой номер n , что $\varphi_\rho(x) \equiv 1$ при $\rho > n$, $x \in M$; функции φ_ρ и их частные производные до второго порядка включительно равномерно ограничены в \mathbb{R}^N некоторой постоянной. Затем мы выберем условия, при которых $u \equiv 0$. Эти условия и будут означать отсутствие нетривиального глобального слабого решения.

Рассмотрим некоторую неотрицательную функцию $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \theta)$, финитную по переменной r ($\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| \geq 2\rho$), которую выберем позже. Из определения слабого решения получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u| \cdot |\Delta \varphi| dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi dx. \quad (5)$$

Оценим левую часть полученного соотношения при помощи неравенства Гёльдера:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u| \cdot |\Delta \varphi| dx &= \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u| \varphi^{1/q} \frac{|\Delta \varphi|}{\varphi^{1/q}} dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u|^q \varphi dx \right)^{1/q} \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \right)^{1/q'}, \end{aligned}$$

где параметр q есть степень при нелинейном члене в (3), а q' — сопряженный с q показатель, т.е. $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Таким образом, неравенство (5) можно записать так:

$$\left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u|^q \varphi \, dx \right)^{1/q} \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx \right)^{1/q'} \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi \, dx, \quad (6)$$

или (мы предполагаем, что u и φ не равны тождественно нулю)

$$\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi \, dx. \quad (7)$$

Функцию $\varphi = \varphi(x)$ будем выбирать следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \rho, \\ \psi^s, & \rho < |x| < 2\rho, \\ 0, & |x| \geq 2\rho, \end{cases}$$

где $s \in \mathbb{R}_+$ — некоторый параметр, и выполнено условие

$$\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow \infty).$$

Будем строить функцию φ с заданными свойствами, учитывая, что в точках $r = \rho$ и $r = 2\rho$ она должна быть гладкой. Имеем:

$$\begin{cases} \varphi(\rho) = 1, \\ \varphi'(\rho) = 0, \\ \varphi(2\rho) = 0, \\ \varphi'(2\rho) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \psi^s(\rho) = 1, \\ s\psi^{s-1}(\rho)\psi'(\rho) = 0, \\ \psi^s(2\rho) = 0, \\ s\psi^{s-1}(2\rho)\psi'(2\rho) = 0, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{cases} \psi(\rho) = 1, \\ \psi(2\rho) = 0, \\ \psi'(\rho) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Функцию $\psi = \psi(r)$ будем искать в виде квадратного трехчлена $\psi = Ar^2 + Br + C$. Согласно условию (8) запишем систему

$$\begin{cases} A\rho^2 + B\rho + C = 1, \\ 4A\rho^2 + 2B\rho + C = 0, \\ 2A\rho + B = 0. \end{cases}$$

Решая ее относительно A , B и C , находим: $A = -\frac{1}{\rho^2}$, $B = \frac{2}{\rho}$, $C = 0$. Имеем $\psi(r) = \frac{2}{\rho}r - \frac{1}{\rho^2}r^2$. Таким образом, функция $\varphi(x)$ примет следующий вид:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1, & r \leq \rho, \\ \left(\frac{2}{\rho}r - \frac{1}{\rho^2}r^2\right)^s, & \rho < r < 2\rho, \\ 0, & r \geq 2\rho. \end{cases} \quad (9)$$

Положим $s = 2q'$, тогда согласно теореме 1 ($\alpha = 0$) неравенство (7) примет вид:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi dx \leq \int_{\rho < |x| < 2\rho} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{2q'-N}}.$$

При $2q' - N > 0$, переходя в этом неравенстве к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$, будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx = 0.$$

Откуда следует, что $u \equiv 0$, а это противоречит начальным предположениям. Следовательно, задача (4) не имеет нетривиального глобального слабого решения. Найдем показатель q из неравенства $2q' > N$: $q < \frac{N}{N-2}$.

При $2q' = N$ получаем $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \varphi dx \leq C$ для всех $\rho \in \mathbb{R}_+$, т.е. интеграл по всему пространству \mathbb{R}^N ограничен, а тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла по мере имеем

$$\int_{\{\rho < |x| < 2\rho\}} |u|^q \varphi dx < \varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow +\infty.$$

Теперь, учитывая (6), получим следующую оценку:

$$\int_{\{\rho < |x| < 2\rho\}} |u|^q \varphi dx < \varepsilon^{1/q}(\rho) C^{1/q'} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx = 0$ — получили противоречие, откуда следует отсутствие глобального нетривиального слабого решения при $q \leq \frac{N}{N-2}$. Учитывая замечание 3, делаем вывод о том, что задача (4) не имеет нетривиальных глобальных решений.

Теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $N = 1, 2$ задача (4) не имеет нетривиальных глобальных решений при всех $q > 1$.

6.3.2.2. *Дальнейшие обобщения.* В этом пункте рассматривается более общий случай задачи (4), а именно задача

$$\begin{cases} -\Delta u \geq |u|^q |x|^\alpha, \\ x \in \mathbb{R}^N, \quad N > 2, \quad \alpha \geq -2, \quad q > 1. \end{cases} \quad (10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ называется слабым решением задачи (10), если для любой функции $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \theta) \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, финитной по переменной r и неотрицательной в \mathbb{R}^N , выполнено неравенство

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta \varphi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx.$$

ТЕОРЕМА 3. Задача (10) не имеет нетривиального глобального решения при $q \leq \frac{N+\alpha}{N-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принцип доказательства этой теоремы прежний. Для всех $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $\varphi(x) \equiv 0$ ($|x| \geq 2\rho$):

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u| \cdot |\Delta \varphi| dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx. \quad (11)$$

К левой части этого неравенства применим неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u| \cdot |\Delta \varphi| dx &= \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u| \varphi^{1/q} |x|^{\alpha/q} \frac{|\Delta \varphi|}{|x|^{\alpha/q} \varphi^{1/q}} dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u|^q \varphi |x|^\alpha dx \right)^{1/q} \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx \right)^{1/q'}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Таким образом, неравенство (11) перепишется так:

$$\left(\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} |u|^q |\varphi| x^\alpha dx \right)^{1/q} \left(\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx \right)^{1/q'} \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx \quad (13)$$

или

$$\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx. \quad (14)$$

Функцию $\varphi = \varphi(x)$ возьмем в виде (9) с показателем $s = 2q'$. Тогда по теореме 1 неравенство (14) запишем в виде

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx \leq \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{2q'-N+\alpha(q'-1)}}.$$

При $2q' - N + \alpha(q' - 1) > 0$, переходя к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx = 0,$$

т.е. задача (10) не имеет нетривиального глобального слабого решения.

При $2q' + \alpha(q' - 1) = N$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx \leq C$$

для всех $\rho \in \mathbb{R}_+$, т.е. интеграл ограничен, следовательно,

$$\int_{\{\rho < |x| < 2\rho\}} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx \leq \varepsilon(\rho) \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow +\infty$. Учитывая (13), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx \leq \varepsilon^{1/q}(\rho) C^{1/q'} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^\alpha \varphi dx = 0.$$

Полученное противоречие и доказывает отсутствие нетривиальных глобальных решений при $q \leq \frac{N+\alpha}{N-2}$. \square

6.3.2.3. *Системы неравенств.* Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} -\Delta u \geq |v|^q |x|^\alpha, & q > 1, \quad \alpha \geq 0, \\ -\Delta v \geq |u|^p |x|^\beta, & p > 1, \quad \beta \geq 0, \end{cases} \quad (15)$$

где $x \in \mathbb{R}^N$, $N > 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функции $u, v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$, называются слабым решением задачи (15), если для любой неотрицательной функции $\varphi(x) = \varphi(r, \theta) \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, финитной по переменной r , справедливы неравенства

$$\begin{cases} -\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta \varphi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx, \\ -\int_{\mathbb{R}^N} v \Delta \varphi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^\beta \varphi dx. \end{cases} \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 4. *Задача (15) не имеет нетривиального глобального слабого решения, если*

$$\frac{N}{2} \leq \max \left\{ \frac{q(p+1) + q\beta/2 + \alpha/2}{pq-1}, \frac{p(q+1) + p\alpha/2 + \beta/2}{pq-1} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u и v — некоторое нетривиальное слабое решение задачи (15). Применим неравенство Гёльдера к неравенствам (16) из определения 3:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u| \cdot |\Delta \varphi| dx = \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u| \varphi^{1/p} |x|^{\beta/p} \frac{|\Delta \varphi|}{\varphi^{1/p} |x|^{\beta/p}} dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u|^p |x|^\beta \varphi dx \right)^{1/p} \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{p'}}{|x|^{\beta(p'-1)} \varphi^{p'-1}} dx \right)^{1/p'} = \\ &= \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} |u|^p |x|^\beta \varphi dx \right)^{1/p} B_{p'}^{1/p'}, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$B_{p'} = \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{p'}}{|x|^{\beta(p'-1)}\varphi^{p'-1}} dx.$$

Аналогичные соотношения получим и для второго неравенства в (16):

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^\beta \varphi dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v| \cdot |\Delta\varphi| dx \leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx \right)^{1/q} A_{q'}^{1/q'},$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$,

$$A_{q'} = \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)}\varphi^{q'-1}} dx.$$

Итак, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx \leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} |u|^p |x|^\beta \varphi dx \right)^{1/p} B_{p'}^{1/p'}, \quad (17)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^\beta \varphi dx \leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx \right)^{1/q} A_{q'}^{1/q'}. \quad (18)$$

Подставим неравенство (18) в правую часть (17). Получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx &\leq \left(\left(\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx \right)^{1/q} A_{q'}^{1/q'} \right)^{1/p} B_{p'}^{1/p'} = \\ &= \left(\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx \right)^{\frac{1}{qp}} A_{q'}^{1/(pq')} B_{p'}^{1/p'}, \end{aligned}$$

откуда легко находим

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx \leq \left(A_{q'}^{\frac{1}{pq'}} B_{p'}^{\frac{1}{p'}} \right)^{\frac{pq}{pq-1}} = A_{q'}^{\frac{q-1}{pq-1}} B_{p'}^{\frac{q(p-1)}{pq-1}}. \quad (19)$$

Аналогично подставим (17) в правую часть (18) и после несложных преобразований придем к оценке:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^\beta \varphi dx \leq \left(A_{q'}^{\frac{1}{q'}} B_{p'}^{\frac{1}{p'}} \right)^{\frac{pq}{pq-1}} = A_{q'}^{\frac{p(q-1)}{pq-1}} B_{p'}^{\frac{p-1}{pq-1}}. \quad (20)$$

Применим полученные ранее оценки (теорема 1):

$$A_{q'} = \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{2q'-N+\alpha(q'-1)}},$$

$$B_{p'} = \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{p'}}{|x|^{\beta(p'-1)} \varphi^{p'-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{2p'-N+\beta(p'-1)}}.$$

Подставляя эти соотношения в (19) и (20), будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q |x|^\alpha \varphi dx \leq \frac{C_5}{\rho^{\theta_1}}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |x|^\beta \varphi dx \leq \frac{C_5}{\rho^{\theta_2}},$$

где

$$\theta_1 = \frac{q-1}{pq-1}(2q'-N+\alpha(q'-1)) + \frac{q(p-1)}{pq-1}(2p'-N+\beta(p'-1)),$$

$$\theta_2 = \frac{p(q-1)}{pq-1}(2q'-N+\alpha(q'-1)) + \frac{p-1}{pq-1}(2p'-N+\beta(p'-1)),$$

и C_5 — некоторая константа, которая не зависит от ρ .

По аналогии с разделом 3 получаем, что если $\theta_2 \geq 0$, то $|v| = 0$, и если $\theta_1 \geq 0$, то $|u| = 0$. Однако, если $v = 0$, то и $u = 0$, и наоборот.

Преобразуя полученные неравенства, найдем

$$\frac{N}{2} \leq \frac{q(p+1) + q\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}}{pq-1} \quad \text{и} \quad \frac{N}{2} \leq \frac{p(q+1) + p\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}}{pq-1}.$$

Тогда при

$$\frac{N}{2} \leq \max \left\{ \frac{q(p+1) + q\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}}{pq-1}, \frac{p(q+1) + p\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}}{pq-1} \right\}$$

задача (15) не имеет нетривиального глобального слабого решения, что и требовалось доказать. \square

6.3.3. Полулинейные неравенства и системы неравенств во внешности шара.

6.3.3.1. *Модельная задача.* Через B'_1 мы будем обозначать внешность единичного шара в \mathbb{R}^N , т.е. множество $\{x \in \mathbb{R}^N | x \notin B_1\}$. Граница этого множества есть сфера S^{N-1} . Условимся также обозначать через \mathbf{n} внешнюю нормаль к заданной поверхности.

Рассмотрим задачу на отсутствие глобальных решений в B'_1 :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq |u|^q, & u(x) : B'_1 \rightarrow \mathbb{R}, \\ u|_{S^{N-1}} \geq 0, & q > 1, \quad N > 2. \end{cases} \quad (21)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $u(x) \in C^1(\overline{B'_1})$ называется слабым решением задачи (21), если для любой неотрицательной функции $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \theta)$, $\varphi \in C_0^2(\overline{B'_1})$, финитной по переменной r , справедливо неравенство:

$$-\int_{B'_1} u \Delta \varphi \, dx + \int_{S^{N-1}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \geq \int_{B'_1} |u|^q \varphi \, dx. \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 5. *Задача (21) не имеет нетривиальных глобальных решений при $q \leq \frac{N}{N-2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задача (21) имеет по крайней мере одно нетривиальное глобальное слабое решение $u(x) \not\equiv 0$. Тогда по определению 4 справедливо (22). Оценим интеграл, стоящий в левой части (22) при помощи неравенства Юнга с параметром

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad -\int_{B'_1} u \Delta \varphi \, dx \leq \varepsilon \int_{\text{supp } \Delta \varphi} |u|^q \varphi \, dx + \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx,$$

где q' — сопряженный с q показатель, т.е. $q + q' = qq'$. Поскольку полученное неравенство верно для любых $\varepsilon > 0$, то оно верно и для $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$-\int_{B'_1} u \Delta \varphi \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\text{supp } \Delta \varphi} |u|^q \varphi \, dx + 2^{q'-1} \int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx.$$

Таким образом, из неравенства (22) получим

$$\int_{B'_1} |u|^q \varphi dx + 2 \int_{S^{N-1}} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \leq c_1 \int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx, \quad (23)$$

где $c_1 = 2^{q'}$.

Теперь построим пробную функцию $\varphi = \varphi(x)$ (в нее будет входить действительный параметр ρ) так, чтобы при любых $\rho > 1$ она удовлетворяла следующим условиям:

- 1° $\varphi \geq 0$ для всех $x \in B'_1$, φ — финитная функция ($\varphi \equiv 0$ при $|x| \geq 2\rho$);
- 2° $\varphi = 0$ при $x \in S^{N-1}$;
- 3° $\Delta \varphi = 0$ при $x \in \{x \mid 1 \leq |x| \leq \rho\}$;
- 4° $\varphi \rightarrow \varphi^* > 0$ в B'_1 ($\rho \rightarrow +\infty$); $\varphi \equiv \varphi^*$ при $r \in [1, \rho]$.

Используя свойства 2° и 3°, построим функцию φ на множестве $x \in \{x \mid 1 \leq |x| \leq \rho\}$. Функцию φ ищем в виде $\varphi(r) = Ar^k + B$, тогда, подставляя ее в выражение для оператора Лапласа в сферической системе координат, находим по свойству 3°:

$$\Delta \varphi = Ak(k-1)r^{k-2} + \frac{N-1}{r} Akr^{k-1} = Akr^{k-2}(k+N-2) \equiv 0.$$

Это тождество справедливо при $k = 2 - N$. Согласно 2° $\varphi(1) = 0$, тогда $A + B = 0$, а так как $\varphi(r) \geq 0$ при $1 \leq r \leq \rho$, то можем принять $A = -1$, $B = 1$. Отсюда $\varphi(r) = 1 - r^{2-N}$ для $1 \leq |x| \leq \rho$.

Теперь рассмотрим φ на множестве $\{x \in B'_1 \mid \rho < |x| < 2\rho\}$. Зададим ее так, чтобы она была гладкой в точках стыка $r = \rho$ и $r = 2\rho$. Положим

$$\varphi(r) = (1 - \rho^{2-N}) \cdot \left[\frac{N-2}{2q'} \frac{1}{\rho^{N-2}-1} \left(-\frac{r^2}{\rho^2} + 3\frac{r}{\rho} - 2 \right) - \frac{r^2}{\rho^2} + 2\frac{r}{\rho} \right]^{2q'}.$$

Для построенной таким образом функции φ остается справедлива теорема 1. Мы не приводим ее доказательство в этом случае, поскольку оно носит чисто технический характер и заключается в почти дословном повторении рассуждений на с. 253.

Итак, учитывая свойства функции $\varphi(x)$, согласно теореме 1 (при $\alpha = 0$) из неравенства (23) получим оценку:

$$\int_{B'_1} |u|^q \varphi dx - 2 \int_{S^{N-1}} u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dx \leq \frac{c_2}{\rho^{2q'-N}}.$$

Поскольку нормаль \mathbf{n} к сфере S^{N-1} направлена к ее центру, а радиус-вектор r — от центра, то $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial r}$. Поэтому предыдущее неравенство принимает вид

$$\int_{B'_1} |u|^q \varphi dx + 2(N-2) \int_{S^{N-1}} u dx \leq \frac{c_2}{\rho^{2q'-N}}. \quad (24)$$

Так как второй интеграл, стоящий в левой части данного неравенства, неотрицателен, справедливо соотношение

$$\int_{B'_1} |u|^q \varphi dx \leq \frac{c_2}{\rho^{2q'-N}}.$$

При $2q' - N > 0$ перейдем здесь к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$, будем иметь

$$\int_{B'_1} |u|^q \varphi^* dx \leq 0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то по теореме Дюбуа-Реймона $u \equiv 0$, что противоречит начальному предположению.

Если же $2q' = N$, то, применяя аргументы из второй части доказательства теоремы 2, опять получаем противоречие.

Итак, при

$$2q' - N \leq 0 \iff q \leq \frac{N}{N-2}$$

задача (21) не имеет нетривиальных глобальных решений, что и требовалось доказать. \square

Результат этой теоремы точен. Очевидно, что примером в данном случае может служить функция (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Нетрудно также получить подобные результаты для внешности шара произвольного радиуса R .

Изложенный в теореме 5 метод доказательства отсутствия глобальных решений во внешности шара позволяет получить не только достаточное условие этого отсутствия, но и указать ту область множества B'_1 , где могут существовать локальные решения поставленной задачи. Действительно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $q < \frac{N}{N-2}$, $\int_{S^{N-1}} u \, dx > 0$. Тогда область определения любого локального решения задачи (21) содержится в шаровом слое $B_{1,R_0} = \{x \in B'_1 \mid 1 \leq |x| \leq R_0\}$, где

$$R_0 = \left(\frac{C_0}{\int_{S^{N-1}} u \, dx} \right)^{\frac{1}{2q'-N}},$$

C_0 — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство данной теоремы сразу вытекает из анализа соотношения (24). Действительно, так как $\int_{B'_1} |u|^q \varphi \, dx$ неотрицателен, то из неравенства (24) получим

$$2(N-2) \int_{S^{N-1}} u \, dx \leq \frac{c_2}{\rho^{2q'-N}}. \quad (25)$$

Левая часть этого соотношения строго положительна, фиксирована и зависит только от заданного значения функции $u = u(x)$ на множестве S^{N-1} ; правая часть монотонно убывает. Следовательно, ρ не может бесконечно возрастать. Из (25) находим условие, при котором возможно существование локального решения задачи (21):

$$\rho \leq \left(\frac{C_0}{\int_{S^{N-1}} u \, dx} \right)^{\frac{1}{2q'-N}} = R_0$$

при $C_0 = \frac{c_2}{2(N-2)}$.

Теорема доказана. \square

6.3.3.2. *Некоторые обобщения.* С помощью изложенного в предыдущем пункте приема можно также доказать отсутствие глобальных решений и для неравенств более общего вида. Здесь мы рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} -\Delta u \geq |x|^\alpha |u|^q, & u(x) : B'_1 \rightarrow \mathbb{R}, \\ u|_{S^{N-1}} \geq 0, & q > 1, \quad \alpha \geq -2, \quad N > 2. \end{cases} \quad (26)$$

По аналогии с предыдущим пунктом можно дать определение слабого решения задачи (26).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $u(x) \in C^1(\overline{B'_1})$ называется слабым решением задачи (26), если для любой функции $\varphi(x) : \overline{B'_1} \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$\varphi(x) \in C_0^2(\overline{B'_1})$ справедливо неравенство

$$-\int_{B'_1} u \Delta \varphi dx + \int_{S^{N-1}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \geq \int_{B'_1} |x|^\alpha |u|^q \varphi dx. \quad (27)$$

ТЕОРЕМА 7. Задача (26) не имеет нетривиального глобального слабого решения при $1 < q \leq \frac{N+\alpha}{N-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = u(x)$ — некоторое нетривиальное глобальное слабое решение задачи (21). Тогда согласно определению 5, для любой финитной неотрицательной функции $\varphi \in C_0^2(\overline{B'_1})$ имеет место неравенство (27). Оценим первый интеграл, стоящий в левой части этого неравенства, с помощью неравенства Юнга с параметром

$$-\int_{B'_1} u \Delta \varphi dx \leq 2 \int_{\text{supp } \Delta \varphi} |x|^\alpha |u|^q \varphi dx + 2^{q'-1} \int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx. \quad (28)$$

Таким образом, из неравенств (27) и (28) мы получим

$$\int_{B'_1} |x|^\alpha |u|^q \varphi dx + 2 \int_{S^{N-1}} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \leq c_1 \int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{|x|^{\alpha(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx. \quad (29)$$

Воспользуемся теперь функцией $\varphi = \varphi(x)$, построенной в первом пункте. Тогда в соответствии с теоремой 1 найдем

$$\int_{B'_1} |x|^\alpha |u|^q \varphi dx + 2(N-2) \int_{S^{N-1}} u dx \leq \frac{c_2}{\rho^{2q'-N+\alpha(q'-1)}}. \quad (30)$$

Очевидно также неравенство

$$\int_{B'_1} |x|^\alpha |u|^q \varphi dx \leq \frac{c_2}{\rho^{2q'-N+\alpha(q'-1)}}.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$, считая $2q' - N + \alpha(q' - 1) > 0$, тогда

$$\int_{B'_1} |x|^\alpha |u|^q \varphi^* dx = 0.$$

Следовательно, $u \equiv 0$. В случае $2q' - N + \alpha(q' - 1) = 0$, применяя стандартные рассуждения, заключаем, что задача также не имеет нетривиальных глобальных слабых решений.

Теорема доказана. \square

ТЕОРЕМА 8. Пусть

$$1 < q < \frac{N + \alpha}{N - 2}, \quad \int_{S^{N-1}} u \, dx > 0.$$

Тогда всякое локальное решение задачи (26) может существовать лишь в шаровом слое $B_{1,R_0} = \{x \in B'_1 : 1 \leq |x| \leq R_0\}$, где

$$R_0 = \left(\frac{C_0}{\int_{S^{N-1}} u \, dx} \right)^\gamma,$$

где $\gamma = (2q' - N + \alpha(q' - 1))^{-1}$, C_0 — некоторая постоянная, а q' — сопряженный с q показатель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение этой теоремы сразу следует из неравенства (30). \square

6.3.3.3. Системы неравенств. В этом пункте будут получены оценки и результаты для систем неравенств, аналогичные результатам первого и второго пунктов.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -\Delta u \geq |v|^q, & u|_{S^{N-1}} \geq 0, \\ -\Delta v \geq |u|^p, & v|_{S^{N-1}} \geq 0, \end{cases} \quad \text{в } B'_1. \quad (31)$$

Здесь $u, v : B'_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $N > 2$, $p, q > 1$ — заданные параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пара функций $(u, v) \in C^1(\overline{B'_1}) \times C^1(\overline{B'_1})$ называется слабым решением системы (31), если справедливы неравенства

$$-\int_{B'_1} u \Delta \varphi \, dx + \int_{S^{N-1}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \geq \int_{B'_1} |v|^q \varphi \, dx, \quad (32)$$

$$-\int_{B'_1} v \Delta \varphi \, dx + \int_{S^{N-1}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \geq \int_{B'_1} |u|^p \varphi \, dx \quad (33)$$

для любой неотрицательной функции $\varphi = \varphi(x)$ из класса $C_0^2(\overline{B'_1})$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть

$$\frac{N}{2} \leq \max \left\{ \frac{q(p+1)}{pq-1}, \frac{p(q+1)}{pq-1} \right\}.$$

Тогда задача (31) не имеет глобальных нетривиальных слабых решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(u, v) \in C^1(\overline{B'_1}) \times C^1(\overline{B'_1})$ — нетривиальное глобальное слабое решение задачи (31). Оценим

$$-\int_{B'_1} u \Delta \varphi dx \quad \text{и} \quad -\int_{B'_1} v \Delta \varphi dx$$

при помощи неравенства Гёльдера и подставим полученные неравенства в (32) и (33), тогда

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |u|^p \varphi dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} + \\ & + \int_{S^{N-1}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \geq \int_{B'_1} |v|^q \varphi dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |v|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \right)^{\frac{1}{q'}} + \\ & + \int_{S^{N-1}} \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \geq \int_{B'_1} |u|^p \varphi dx, \end{aligned}$$

где p' и q' — сопряженные показатели с p и q соответственно, т.е. $p + p' = pp'$ и $q + q' = qq'$.

Воспользуемся теперь пробной функцией φ , построенной в пункте 6.3.3.1. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |u|^p \varphi dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} - \\ & - (N-2) \int_{S^{N-1}} u dx \geq \int_{B'_1} |v|^q \varphi dx, \end{aligned}$$

$$\left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |v|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \right)^{\frac{1}{q'}} - \\ - (N-2) \int_{S^{N-1}} v dx \geq \int_{B'_1} |u|^p \varphi dx.$$

Введем следующие обозначения:

$$A_{p'} = \int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}} dx, \quad A_{q'} = \int_{\text{supp } \Delta \varphi} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx.$$

Тогда предыдущие два неравенства можно записать следующим образом:

$$\int_{B'_1} |v|^q \varphi dx \leq \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |u|^p \varphi dx \right)^{\frac{1}{p}} A_{p'}^{\frac{1}{p'}} - (N-2) \int_{S^{N-1}} u dx, \quad (34)$$

$$\int_{B'_1} |u|^p \varphi dx \leq \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |v|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}} A_{q'}^{\frac{1}{q'}} - (N-2) \int_{S^{N-1}} v dx. \quad (35)$$

Подставим неравенство (35) в правую часть неравенства (34), что дает

$$\int_{B'_1} |v|^q \varphi dx \leq \left(\left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |v|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{q}} A_{q'}^{\frac{1}{q'}} - (N-2) \int_{S^{N-1}} v dx \right)^{\frac{1}{p}} A_{p'}^{\frac{1}{p'}} - \\ - (N-2) \int_{S^{N-1}} u dx \leq \left(\int_{\text{supp } \Delta \varphi} |v|^q \varphi dx \right)^{\frac{1}{pq}} A_{q'}^{\frac{1}{pq'}} A_{p'}^{\frac{1}{p'}} - (N-2) \int_{S^{N-1}} v dx.$$

Теперь воспользуемся неравенством Юнга, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad (1-\varepsilon) \int_{B'_1} |v|^q \varphi dx \leq \frac{1}{\varepsilon^{1/(pq-1)}} A_{q'}^{\frac{q-1}{pq-1}} A_{p'}^{\frac{q(p-1)}{pq-1}} - (N-2) \int_{S^{N-1}} u dx$$

или при фиксированном $\varepsilon = 1/2$

$$\int_{B'_1} |v|^q \varphi dx + c'_1 \int_{S^{N-1}} u dx \leq c'_2 A_{q'}^{\frac{q-1}{pq-1}} A_{p'}^{\frac{q(p-1)}{pq-1}}, \quad (36)$$

где c'_1 и c'_2 — положительные постоянные.

Аналогично подставим неравенство (34) в правую часть неравенства (35) и воспользуемся неравенством Юнга, что после преобразований приведет к следующему соотношению:

$$\int_{B'_1} |u|^p \varphi dx + c''_1 \int_{S^{N-1}} v dx \leq c''_2 A_{p'}^{\frac{p-1}{pq-1}} A_{q'}^{\frac{p(q-1)}{pq-1}}, \quad (37)$$

где c''_1 и c''_2 — положительные постоянные.

Поскольку интегралы по сфере S^{N-1} от функций u и v неотрицательны, то из неравенств (36) и (37) получаем следующие выражения:

$$\int_{B'_1} |u|^p \varphi dx \leq c'_2 A_{p'}^{\frac{q-1}{pq-1}} A_{q'}^{\frac{q(p-1)}{pq-1}}, \quad (38)$$

$$\int_{B'_1} |v|^q \varphi dx \leq c''_2 A_{p'}^{\frac{p-1}{pq-1}} A_{q'}^{\frac{p(q-1)}{pq-1}}. \quad (39)$$

Согласно теореме 1 для $A_{p'}$ и $A_{q'}$ справедливы оценки:

$$A_{p'} \leq \frac{C}{\rho^{2p'-N}}, \quad A_{q'} \leq \frac{C}{\rho^{2q'-N}}.$$

Учитывая это, неравенства (38) и (39) принимают вид

$$\int_{B'_1} |u|^p \varphi dx \leq \frac{C_0}{\rho^{\gamma_1}}, \quad \int_{B'_1} |v|^q \varphi dx \leq \frac{C_0}{\rho^{\gamma_2}},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{2p(q+1) - N(pq-1)}{pq-1}, \quad \gamma_2 = \frac{2q(p+1) - N(pq-1)}{pq-1},$$

а выбор константы C_0 не зависит от ρ . Далее рассуждаем аналогично случаю пункта 6.3.3.1 и получим, что $u \equiv 0$ при $\gamma_1 \geq 0$, а $v \equiv 0$ при $\gamma_2 \geq 0$. Но при $u \equiv 0$ получим $v \equiv 0$, и наоборот (это вытекает из соотношений (34) и (35)). Таким образом, условие отсутствия глобального слабого нетривиального решения задачи (31) имеет вид: $\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq 0$. Преобразуя это выражение, мы получим утверждение теоремы, что и требовалось доказать. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Следует подчеркнуть, что при доказательстве теоремы 9 мы не требовали ни положительности решений, ни однородности граничных условий.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Результат этой теоремы нетрудно обобщить и на более общие системы дифференциальных неравенств, например

$$\begin{cases} -\Delta u \geq |x|^\alpha |v|^q, & u|_{|x|=R} \geq 0, & x \in B'_R, \\ -\Delta v \geq |x|^\beta |u|^p, & v|_{|x|=R} \geq 0, & x \in B'_R. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть

$$\frac{N}{2} < \max \left\{ \frac{q(p+1)}{pq-1}, \frac{p(q+1)}{pq-1} \right\}, \quad \int_{S^{N-1}} u \, dx > 0, \quad \int_{S^{N-1}} v \, dx > 0.$$

Тогда любое локальное решение задачи (31) существует в шаре, радиус которого не превышает

$$R_0 = \min \left\{ \left(\frac{C_0}{\int_{S^{N-1}} u \, dx} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \left(\frac{C_0}{\int_{S^{N-1}} v \, dx} \right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \right\},$$

где постоянные γ_1 , γ_2 и C_0 определяются при доказательстве теоремы 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы почти очевидно и сразу следует из соотношений (36) и (37). \square

6.3.4. Бигармоническое неравенство во внешности шара. Будем рассматривать задачу

$$\begin{cases} \Delta^2 u \geq |u|^q, & x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R, \\ \int_{\partial B_R} u \, dx \leq 0 \end{cases} \quad (40)$$

с $q > 1$, $N > 4$, $R > 1$.

Заметим, что в отличие от задачи второго порядка, здесь предполагается неположительность интеграла по сфере: $\int_{\partial B_R} u \, dx \leq 0$. Мы не накладываем никаких ограничений ни на знак, ни на поведение решений при $|x| \rightarrow \infty$.

Нам удобно понимать решения задачи (40) в обобщенном смысле (как распределения), в связи с этим дадим определение слабого решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Слабым решением задачи (40) называется такая функция $u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \setminus B_R) \cap W^{(2)}_1(B_{R_1} \setminus B_R)$ (при любом $R_1 > R$), что для всякой пробной функции $\varphi(x) : \mathbb{R}^N \setminus B_R \rightarrow \mathbb{R}_+$ класса $W^4_\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_R)$ выполнено следующее интегральное неравенство:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \varphi |u|^q dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u \Delta^2 \varphi dx + \\ &+ \int_{\partial B_R} \left(\varphi \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \mathbf{n}} - \Delta u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + \Delta \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \right) dx. \end{aligned} \quad (41)$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $1 < q \leq \frac{N+2}{N-2}$. Тогда задача (40) не имеет нетривиальных глобальных слабых решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Таким образом, критический показатель $q_e^* = \frac{N+2}{N-2}$, разделяющий области существования и отсутствия глобальных решений задачи во внешности шара, меньше критического показателя $q_a^* = \frac{N}{N-4}$ для аналогичной задачи, но во всем евклидовом пространстве \mathbb{R}^N [52].

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Очевидно, что всякое классическое решение задачи (40) является слабым, но обратное утверждение неверно. Следовательно, при $q \leq \frac{N+2}{N-2}$ нет и классических решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11. Оценим первый интеграл в правой части неравенства (41) с помощью параметрического неравенства Юнга с $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |u| \cdot |\Delta^2 \varphi| dx \leq \varepsilon \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \varphi |u|^q dx + \varepsilon^{1-q'} \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx,$$

где q' — сопряженный с q параметр, т.е. $q + q' = qq'$. Положим здесь $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда, подставляя полученное соотношение в (41), будем иметь оценку:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \varphi |u|^q dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} + \\ &+ 2 \int_{\partial B_R} \left(\varphi \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \mathbf{n}} - \Delta u \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + \Delta \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \right) dx \end{aligned} \quad (42)$$

с некоторой постоянной C .

Построим радиально симметричную функцию $\xi = \xi(r)$ так, чтобы выполнялись следующие свойства:

- 1) $\xi(r) \geq 0$ для всех $r \geq R$;
- 2) $\xi(R) = 0$;
- 3) $\xi'(R) = 0$;
- 4) $\Delta\xi|_{\partial B_R} = 0$;
- 5) $\frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial B_R} < 0$;
- 6) $\Delta^2\xi = 0$ в $\mathbb{R}^N \setminus B_R$.

При построении этой функции можно исходить из того известного факта, что любую бигармоническую функцию можно представить в виде $\xi = (r^2 - R^2)w_1 + w_2$, где w_1, w_2 — гармонические функции. Используя свойства 2) и 4), получим

$$\xi = r^{4-N} - R^{4-N} + \frac{N-4}{N}R^{2-N}(r^2 - R^2) + aR^2(R^{2-N} - r^{2-N}),$$

где параметр a следует выбирать так, чтобы выполнялись свойства 1) и 3). Легко проверить, что для этого нужно взять $a = 1 - \frac{4}{N}$. Тогда после упрощений будем иметь

$$\xi(r) = \frac{1}{r^{N-4}} - \frac{1}{R^{N-4}} + \frac{N-4}{N} \left(\frac{r^2}{R^{N-2}} - \frac{R^2}{r^{N-2}} \right),$$

а также

$$\begin{aligned} \xi(r) &\geq 0 \quad \text{при} \quad r \geq R, \\ \Delta\xi &= 2(N-4) \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right), \quad \Delta\xi|_{\partial B_R} = 0, \\ \frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial B_R} &= -\frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial r}|_{\partial B_R} = -2(N-2)(N-4)R^{1-N} < 0. \end{aligned}$$

В качестве пробной функции возьмем

$$\varphi = \xi(r)\varphi_0(r), \quad r = |x|,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq \rho, \\ 0, & r \geq 2\rho, \end{cases} \quad \rho > R, \quad \varphi_0 \in C^4(\mathbb{R}_+), \\ \frac{|\nabla^m \varphi_0|^p}{\varphi_0^{p-1}} &\leq \frac{c_\varphi}{\rho^{mp}} \quad (\rho \leq r \leq 2\rho). \end{aligned}$$

Отметим, что существование указанной функции φ_0 является известным фактом [51, 52].

Справедливы также неравенства при $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$c_0 \rho^{2-k} \leq |\nabla^k \xi| \leq c_1 \rho^{2-k} \quad (\rho \leq r \leq 2\rho)$$

с некоторыми константами c_0 и c_1 .

Оценим $|\Delta^2 \varphi|^{q'}/\varphi^{q'-1}$ при $x \in \text{supp } \Delta^2 \varphi \subset \{x | \rho \leq |x| \leq 2\rho\}$. Для этого воспользуемся формулой

$$|\Delta^2 \varphi| = \left| \sum_{k=0}^4 C_4^k \nabla^{4-k} \varphi_0 \cdot \nabla^k \xi \right| \leq c_2 \sum_{k=0}^4 |\nabla^{4-k} \varphi_0| \cdot |\nabla^k \xi|.$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} &\leq \sum_{k=0}^4 \frac{c_3 |\nabla^{4-k} \varphi_0|^{q'} \cdot |\nabla^k \xi|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1} \xi^{q'-1}} \leq \\ &\leq c_4 \sum_{k=0}^4 \frac{\rho^{(2-k)q'}}{\rho^{2(q'-1)} \rho^{(4-k)q'}} = c_5 \rho^{2(1-2q')}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq c_5 \rho^{2(1-2q')} \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} dx \leq c_6 \rho^{N+2(1-2q')}.$$

Вспоминая неравенство (42) и учитывая свойства функций $\varphi = \varphi_0 \xi$ и $u = u(x)$ на сфере ∂B_R , получим соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \varphi |u|^q dx \leq c_7 \rho^{N+2(1-2q')}. \quad (43)$$

Пусть $N + 2(1 - 2q') < 0$. Перейдем к пределу в (43) при $\rho \rightarrow \infty$, тогда

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \varphi |u|^q dx = 0.$$

Следовательно, $u = 0$ п.в. Стандартными рассуждениями (метод Митидиери и Похожаева) также убеждаемся, что $u = 0$ и при $N + 2(1 - 2q') = 0$. Итак, задача (40) не имеет нетривиальных глобальных слабых (а в силу замечания 9, и классических) решений

при $N + 2(1 - 2q') \leq 0$, т.е.

$$q \leq \frac{N+2}{N-2}.$$

Теорема доказана. \square

Приведем пример решения задачи при $q > q_e^* = \frac{N+2}{N-2}$:

$$u = -\varepsilon |x|^{-4/(q-1)}$$

с некоторым достаточно малым $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{4\varepsilon}{q-1} \left(N - \frac{4}{q-1} - 2 \right) r^{-\frac{4}{q-1}-2}; \\ \Delta^2 u &\equiv -\frac{4\varepsilon}{q-1} \left(\frac{4}{q-1} + 2 \right) \left(N - \frac{4}{q-1} - 2 \right) \times \\ &\times \left(N - \frac{4}{q-1} - 4 \right) r^{-\frac{4}{q-1}-4} \geq \varepsilon^q r^{-\frac{4q}{q-1}}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\left(N - \frac{4}{q-1} - 2 \right) \left(N - \frac{4}{q-1} - 4 \right) < 0$ при $\frac{N+2}{N-2} < q < \frac{N}{N-4}$, т.е. функция $u = -\varepsilon r^{-4/(q-1)}$ является решением задачи (40) при $q_e^* < q < q_a^*$ с надлежащим выбором параметра ε .

Используя соотношения (42) и (43), можно также получить оценку области существования возможных локальных решений рассматриваемой задачи. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 12. Пусть $1 < q < q_e^*$. Тогда область определения любого локального решения задачи (40) содержится в шаровом слое

$$B_{R,R_0} = \{x \in \mathbb{R}^N | R \leq |x| \leq R_0\}$$

при

$$R_0 = \frac{C}{\left(\int_{\partial B_R} u \, dx \right)^\gamma}$$

с $\gamma = \frac{q-1}{q(N-2)-N-2}$ и некоторой постоянной C , если $\int_{\partial B_R} u \, dx < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство получается из анализа неравенства (42). \square

ТЕОРЕМА 13. Пусть $N > 4$, $q > 1$. Тогда задача

$$\begin{cases} \Delta^2 u \geq |u|^q, & x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R, \\ \int_{\partial B_R} u \, dx \geq 0, & \int_{\partial B_R} \Delta u \, dx \geq 0 \end{cases} \quad (44)$$

имеет нетривиальные глобальные решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи ищем в виде

$$u = \varepsilon r^{-\alpha}, \quad r = |x|, \quad (45)$$

где α и ε — подходящие положительные параметры. Подставляя эту функцию в (44), получим

$$\begin{aligned} u|_{\partial B_R} &= \varepsilon R^{-\alpha} > 0, \\ \Delta u &= -\varepsilon \alpha(N - \alpha - 2)r^{-\alpha-2}, \quad \Delta u|_{\partial B_R} \geq 0 \text{ при } -\alpha(N - \alpha - 2) \geq 0, \\ \Delta^2 u &\equiv \varepsilon \alpha(\alpha + 2)(N - \alpha - 2)(N - \alpha - 4)r^{-\alpha-4} \geq \varepsilon^q r^{-\alpha q}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что данные соотношения справедливы при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \alpha \geq \frac{4}{q-1}, \\ \alpha > N - 2, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon < (\alpha(\alpha + 2)(N - \alpha - 2)(N - \alpha - 4))^{1/(q-1)}.$$

Таким образом, для каждого $q > 1$ найдутся такие ε и α , что (45) будет решением (44). Что и требовалось доказать. \square

Итак, мы видим, что критический показатель q_e^* для задачи с бигармоническим оператором во внешности шара существенным образом зависит от краевых условий.

6.4. Отсутствие решений эволюционных дифференциальных неравенств высокого порядка*

Здесь исследуется отсутствие глобальных решений полулинейных эволюционных дифференциальных неравенств второго порядка по пространственной переменной x и высокого порядка по «времени» t . По переменной x мы предполагаем, что задачи ставятся во внешности шара $|x| > R$, $R > 0$.

В качестве примера рассмотрим параболическую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^q & \text{в } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0 & \text{в } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1)$$

* Лаптев Г.Г. Отсутствие решений эволюционных дифференциальных неравенств высокого порядка // Сиб. матем. журнал. 2003. Т.44, N1. С. 143–159.

Классический результат Фужиты–Хаякавы утверждает, что эта задача не имеет глобального неотрицательного решения для любых (ненулевых неотрицательных) начальных данных, если

$$1 < q \leq q^* = 1 + \frac{2}{N}.$$

Полученное значение q^* , называемое критическим показателем Фужиты, является неулучшаемым, т.е. для $q > q^*$ при дополнительных условиях на u_0 задача имеет глобальное неотрицательное решение.

В дальнейшем теория отсутствия решений эволюционных уравнений получила большое развитие. Из множества литературы по параболическим задачам упомянем книгу [58] и обзоры [18], [5], по гиперболическим — книги [1, 12, 52] и статьи [4, 10]. К настоящему времени стала очевидной необходимость выделить некоторые общие свойства, влияющие на отсутствие решения эволюционных уравнений и неравенств, чтобы в рамках единого подхода охватить задачи как параболические и гиперболические, так и «эволюционные высокого порядка» [44]. Здесь делается попытка провести такое исследование на базе метода пробных функций [39, 51, 42], систематически используемого, в частности, в книге [52]. Заметим, что все другие известные подходы неприменимы в данном случае из-за отсутствия линейной теории рассматриваемых задач.

Пусть $N \geq 3$, Ω — неограниченная область пространства \mathbb{R}^{N+1} с кусочно-гладкой границей. Далее используются пространства С.Л. Соболева $W_q^2(\Omega)$, а также локальное пространство $L_{q,\text{loc}}(\Omega)$, элементы которого принадлежат $L_q(\Omega')$ для любого компактного подмножества Ω' : $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Через $C(\overline{\Omega})$ обозначается пространство непрерывных функций, через $C^m(\overline{\Omega})$ — пространство гладких функций на замкнутой области $\overline{\Omega}$. Анизотропные (по переменным x и t) варианты таких пространств, обозначаемые $W_q^{2,k}(\Omega)$ и $C^{2,k}(\overline{\Omega})$, будут активно применяться при введении пробных функций. Детальные описания этих классов имеются в [23].

Символ Δ обозначает оператор Лапласа по пространственным переменным (x_1, \dots, x_N) , вектор из частных производных обозначаем $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_i})$. Для двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $\varphi(x)$ полагаем $Du D\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Выражение $\frac{\partial u}{\partial n}$ обозначает

производную функции u по направлению внешней нормали n к рассматриваемой области. В основном такой областью будет внешность шара B_R радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Через c и C с индексами будем обозначать постоянные, точные значения которых нас не интересуют.

6.4.1. Предварительные оценки. В этой секции устанавливаются вспомогательные оценки некоторых интегралов от пробных функций в зависимости от параметра ρ , $\rho \rightarrow \infty$, которые составляют основу используемого метода.

Рассмотрим «стандартную срезающую функцию» [23] $\zeta(y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ со следующими свойствами:

$$0 \leq \zeta(y) \leq 1, \quad \zeta(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{если } y \geq 2. \end{cases}$$

Введем функцию

$$\eta(y) = (\zeta(y))^{kp_0}$$

с некоторыми положительными параметрами p_0 и k , где k — натуральное. Для первой и второй производных (для $1 < p \leq p_0$) устанавливаются оценки:

$$\begin{aligned} |\eta'(y)|^p &= (kp_0)^p \zeta^{kp_0(p-1)} \zeta^{kp_0-p} |\zeta'|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y), \\ |\eta''(y)|^p &\leq (kp_0)^p \zeta^{kp_0(p-1)} \zeta^{kp_0-2p} ((kp_0-1)|\zeta'|^2 + \zeta|\zeta''|)^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y) \end{aligned}$$

с некоторой постоянной c_η . Действуя аналогично, легко проверить выполнение такого рода оценки для производной до порядка k включительно, т.е.

$$|\eta^{(k)}(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y).$$

Вводя замену переменной $y = t/\rho^\theta$, где $\theta > 0$, $\rho > 2R$, t — новая переменная, для функции $\eta(t/\rho^\theta)$, у которой

$$\text{supp} \left| \eta \left(\frac{t}{\rho^\theta} \right) \right| = \{t < 2\rho^\theta\}, \quad \text{supp} \left| \frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k} \right| = \{\rho^\theta < t < 2\rho^\theta\},$$

легко установить неравенство

$$\int_{\text{supp} \left| \frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k} \right|} \frac{\left| \frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k} \right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)} dt \leq c_\eta \rho^{-\theta(kp-1)}. \quad (2)$$

Параметр θ в дальнейшем будет подбираться в зависимости от оператора.

Для пространственной переменной x , $|x| = r$, вводим функции $\eta(r/\rho)$ и

$$\xi(x) \equiv \xi(r) = \frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s}, \quad (3)$$

а также произведение

$$\psi_\rho(x) \equiv \psi_\rho(r) = \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s} \right) \eta\left(\frac{r}{\rho}\right), \quad (4)$$

где в дальнейшем положим $s = N - 2$. При $r \gg R$ первый сомножитель в определении ψ_ρ ведет себя как $1/R^s$, и $0 \leq \psi_\rho(x) \leq 1/R^s$. Отметим некоторые свойства функции ψ_ρ : $\psi_\rho = 0$ и $\frac{\partial \psi_\rho}{\partial r} \geq 0$ для $r = R$.

Получим оценки для первой и второй производных функции $\psi_\rho(r)$ (с учетом предположения $r > 2R$):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi_\rho}{\partial r} \right|^p &\leq \left| \frac{s}{r^{s+1}} \eta\left(\frac{r}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s} \right) \eta'\left(\frac{r}{\rho}\right) \frac{1}{\rho} \right|^p \leq \\ &\leq c \eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right) \frac{1}{R^{ps} r^p} \left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \psi_\rho}{\partial r^2} \right|^p &\leq \left| -\frac{s(s+1)}{r^{s+2}} \eta\left(\frac{r}{\rho}\right) + \right. \\ &+ \frac{2s}{r^{s+1} \rho} \eta'\left(\frac{r}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s} \right) \frac{1}{\rho^2} \eta''\left(\frac{r}{\rho}\right) \left. \right|^p \leq \\ &\leq c \eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right) \frac{1}{R^{sp} r^{2p}} \left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \right), \end{aligned}$$

где константа c не зависит от r и ρ . Объединяя эти неравенства, приходим к оценке для оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} |\Delta \psi_\rho(x)|^p &= \left| \frac{\partial^2 \psi_\rho}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial r} \right|^p \leq c \left| \frac{\partial^2 \psi_\rho}{\partial r^2} \right|^p + c \frac{1}{r^p} \left| \frac{\partial \psi_\rho}{\partial r} \right|^p \leq \\ &\leq c \eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right) \frac{1}{R^{sp} r^{2p}} \left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \right) \leq \\ &\leq c \psi_\rho^{p-1}(x) \frac{1}{r^{2p}} \left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \right). \quad (5) \end{aligned}$$

На последнем этапе мы использовали очевидное при $r > 2R$ соотношение

$$\frac{1}{R^s} - \frac{1}{r^s} \geq \frac{1}{R^s} - \frac{1}{2^s R^s} \geq \frac{c}{R^s}.$$

Теперь положим $s = N - 2$. Напомним, что $\Delta(1/r^{N-2}) = 0$ для $r \neq 0$. Поэтому $\Delta\psi_\rho = 0$ для $r < \rho$ и $\text{supp } |\Delta\psi_\rho| = \{\rho < r < 2\rho\}$. На множестве $\text{supp } |\Delta\psi_\rho|$ справедлива оценка:

$$1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \leq c,$$

где постоянная c не зависит от r и ρ . Следовательно, из (5) получим для $\rho < r < 2\rho$

$$|\Delta\psi_\rho(x)|^p \leq c\psi_\rho^{p-1}(x)\frac{1}{\rho^{2p}},$$

откуда для любого параметра $\sigma \in \mathbb{R}$ вытекает оценка:

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } |\Delta\psi_\rho|} \frac{|\Delta\psi_\rho(x)|^p}{\psi_\rho^{p-1}(x)|x|^{\sigma(p-1)}} dx &\leq c \int_\rho^{2\rho} \frac{\psi_\rho^{p-1}(x)}{\psi_\rho^{p-1}(x)} \frac{r^{N-1}}{\rho^{2p+\sigma(p-1)}} dr \leq \\ &\leq c_\psi \rho^{-p(\sigma+2)+N+\sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, для общей пробной функции вида

$$\varphi_\rho(x, t) = \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right) \psi_\rho(x) \quad (7)$$

с учетом интегрирования по переменной t получим

$$\begin{aligned} \iint_{\text{supp } |\Delta\varphi_\rho|} \frac{|\Delta\varphi_\rho(x, t)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x, t)|x|^{\sigma(p-1)}} dx dt &\leq \\ &\leq \int_0^{2\rho^\theta} \eta(t/\rho^\theta) dt \int_{\text{supp } |\Delta\psi_\rho|} \frac{|\Delta\psi_\rho|^p}{\psi_\rho^{p-1}|x|^{\sigma(p-1)}} dx \leq \\ &\leq c_\varphi \rho^{\theta-p(\sigma+2)+N+\sigma}. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь оценим (с учетом (2)) аналогичный интеграл для производной порядка k по переменной t :

$$\begin{aligned}
& \iint_{\text{supp } |\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}|} \frac{|\frac{\partial^k \varphi_\rho(x,t)}{\partial t^k}|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x,t) |x|^{\sigma(p-1)}} dx dt \leq \\
& \leq \int_{\text{supp } |\frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|} \frac{|\frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)} dt \int_{R < |x| < 2\rho} \frac{\psi_\rho(x)}{|x|^{\sigma(p-1)}} dx \leq \\
& \leq c_\eta \rho^{-\theta(kp-1)} c \int_R^{2\rho} \frac{r^{N-1}}{r^{\sigma(p-1)}} dr \leq \\
& \leq c_\varphi \begin{cases} \rho^{N-\sigma(p-1)-\theta(kp-1)}, & \text{если } N - \sigma(p-1) > 0, \\ \rho^{-\theta(kp-1)} \ln \rho, & \text{если } N - \sigma(p-1) = 0, \\ \rho^{-\theta(kp-1)} R^{N-\sigma(p-1)}, & \text{если } N - \sigma(p-1) < 0. \end{cases} \quad (9)
\end{aligned}$$

При $\theta = 2/k$ первый показатель степени ρ в этой оценке совпадает с показателем из (8):

$$N - \sigma(p-1) - \theta(kp-1) = \theta - p(\sigma+2) + N + \sigma \equiv -p(\sigma+2) + N + \sigma + 2/k.$$

Поскольку далее в модельной задаче мы считаем $\sigma = 0$, выделим этот случай отдельно. Тогда из правой части неравенства (9) остается первый вариант, и общая оценка (при $\theta = 2/k$) принимает вид

$$\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta \varphi_\rho|} \frac{\left| (-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta \varphi_\rho \right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} dx dt \leq c_0 \rho^{-2p+N+2/k}. \quad (10)$$

Пусть теперь $T > 0$ фиксировано. Нам понадобятся аналогичные (2), (8) и (9) оценки в области $t > T$:

$$\int_{\text{supp } |\frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|} \frac{|\frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta) t^{\gamma(p-1)}} dt \leq c_\eta \rho^{-\theta(p(k+\gamma)-1-\gamma)}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho(x, t)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x, t) t^{\gamma(p-1)}} dx dt &\leq \int_T^{2\rho^\theta} \frac{\eta(t/\rho^\theta)}{t^{\gamma(p-1)}} dt \int_{\text{supp } |\Delta \psi_\rho|} \frac{|\Delta \psi_\rho|^p}{\psi_\rho^{p-1}} dx \leq \\
&\leq c_\varphi \begin{cases} \rho^{-\gamma\theta(p-1)+\theta-2p+N}, & \text{если } 1 - \gamma(p-1) > 0, \\ \rho^{-2p+N} \ln \rho, & \text{если } 1 - \gamma(p-1) = 0, \\ \rho^{-2p+N} T^{1-\gamma(p-1)}, & \text{если } 1 - \gamma(p-1) < 0; \end{cases} \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\text{supp } |\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}|} \frac{|\frac{\partial^k \varphi_\rho(x, t)}{\partial t^k}|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x, t) t^{\gamma(p-1)}} dx dt &\leq \\
&\leq \int_{\text{supp } |\frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|} \frac{|\frac{d^k \eta(t/\rho^\theta)}{dt^k}|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta) t^{\gamma(p-1)}} dt \int_{R < |x| < 2\rho} \psi_\rho(x) dx \leq \\
&\leq c_\varphi \rho^{-\theta(p(k+\gamma)-1-\gamma)+N}. \quad (13)
\end{aligned}$$

При $\theta = 2/k$ имеем

$$\begin{aligned}
-\gamma\theta(p-1) + \theta - 2p + N &= -\theta(p(k+\gamma) - 1 - \gamma) + N = \\
&= -2\gamma(p-1)/k - 2p + N + 2/k.
\end{aligned}$$

6.4.2. Модельная задача: отсутствие глобального решения. Пусть $R > 0$. Введем область $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus B_R$ (т.е. внешность шара B_R) и рассмотрим проблему отсутствия глобального нетривиального решения задачи для некоторого натурального числа k :

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |u|^q & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}|_{t=0} \geq 0, & u \not\equiv 0. \end{cases} \quad (14)$$

Далее слабое решение будет пониматься в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $u(x, t) \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$ при $t = 0$. Функция $u(x, t)$ называется *слабым решением задачи (14)*, если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_\infty^{2,k}(\Omega \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (0, \infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t ,

выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\infty \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial r} dx dt + \int_0^\infty \int_\Omega u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dx dt \geq \\
 & \geq \int_0^\infty \int_\Omega |u|^q \varphi dx dt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_\Omega \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x, 0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x, 0) dx + \\
 & \quad + \int_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi(x, 0) dx.
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В приведенном определении не ставилось целью получить предельные условия на гладкость или суммируемость решения $u(x, t)$. Возможны обобщения на решения из L_q при дополнительных предположениях о суммируемости следов на границе шара. Чтобы не затруднять изложение, ограничимся непрерывными решениями на замыкании Ω , которые имеют непрерывный след на границе шара ∂B_R .

ТЕОРЕМА 1. *При*

$$1 < q \leq q_k^* = \frac{N + 2/k}{N - 2 + 2/k}$$

задача (14) не имеет нетривиального глобального решения.

Эта теорема включает в себя как частные случаи несколько классических результатов для параболических и гиперболических задач. Заметим, что хотя мы и не исследуем вопрос о неуллучшаемости q_k^* , в приводимых ниже примерах q_k^* совпадает с уже известными точными показателями.

При $k = 1$ получаем упомянутый ранее критический показатель Фужиты – Хаякавы

$$q_1^* = 1 + \frac{2}{N}.$$

При $k = 2$ имеем

$$q_2^* = \frac{N + 1}{N - 1},$$

критический показатель Като для гиперболических уравнений. Однако при использовании доказательства Като (через сведение к обыкновенному дифференциальному неравенству) возможно рассматривать лишь задачи с компактным носителем начальных

данных и с конечной скоростью распространения возмущений [4], для которых этот показатель не точен. В то же время без этих предположений показатель Като является в некотором смысле неулучшаемым [21].

Наконец, интересно отметить, что при $k \rightarrow \infty$ в пределе приходим к точному критическому показателю для эллиптических неравенств (см. [52, 38] и ссылки там)

$$q_{\infty}^* = \frac{N}{N-2}.$$

Необходимо также упомянуть, что в отличие от многих работ здесь рассматриваются решения без предположения об их положительности. Вместо этого требуется положительность (неотрицательность) на границе. Для эволюционного неравенства высокого порядка принцип максимума в общем случае не имеет места, поэтому из положительности граничных значений не следует положительность решения в области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $u(x, t)$ — нетривиальное глобальное решение задачи (14). Согласно определению 1 с пробной функцией $\varphi(x, t) = \varphi_{\rho}(x, t)$, введенной по формуле (7) с $p = q' > 1$ и $\theta = 2/k$, с учетом очевидных равенств

$$\frac{\partial^i \varphi_{\rho}}{\partial t^i}(x, 0) \equiv 0 \text{ для } i = 1, \dots, k-1$$

это означает, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_{\rho}(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} |u|^q \varphi_{\rho} dx dt \leq & - \int_0^{\infty} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} dx dt + \\ & + \iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho} \right) dx dt. \quad (15) \end{aligned}$$

Как уже отмечалось ранее, производная $\frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r}$ при $r = R$ неотрицательна, а следовательно и $\frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r}|_{r=R} \geq 0$, поэтому первый интеграл в правой части будет неположительным благодаря условию $u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0$.

Для оценки последнего интеграла в (15) применим неравенство Гёльдера. Получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_{\rho}(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} |u|^q \varphi_{\rho} dx dt = \\
& = \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_{\rho}(x, 0) dx + \iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} |u|^q \varphi_{\rho} dx dt + \\
& \quad + \iint_{\varphi_{\rho}(x, t) = \xi(x)} |u|^q \xi(x) dx dt \leq \\
& \leq \iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} |u| \left| (-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho} \right| dx dt \leq \\
& \leq \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} |u|^q \varphi_{\rho} dx dt \right)^{1/q} \times \\
& \times \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} \frac{\left| (-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho} \right|^{q'}}{\varphi_{\rho}^{q'-1}} dx dt \right)^{1/q'} , \quad (16)
\end{aligned}$$

откуда, отбрасывая неотрицательные начальные условия и с учетом оценки (10) (при $p = q'$) для последнего интеграла справа, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \iint_{\varphi_{\rho}(x, t) = \xi(x)} |u|^q \xi(x) dx dt \leq \iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} \frac{\left| (-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho} \right|^{q'}}{\varphi_{\rho}^{q'-1}} dx dt \leq \\
& \leq c_0 \rho^{-2q' + N + 2/k} . \quad (17)
\end{aligned}$$

Так как подынтегральное выражение в левой части не зависит от ρ , можем перейти к пределу по $\rho \rightarrow \infty$. В случае

$$-2q' + N + 2/k \leq 0$$

это приводит к соотношению

$$\int_0^\infty \int_\Omega |u|^q \xi \, dx dt \leq c_0.$$

Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега по мере и оценки $\varphi_\rho \leq \xi$ имеем

$$\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta \varphi_\rho|} |u|^q \varphi_\rho \, dx dt \leq \iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta \varphi_\rho|} |u|^q \xi \, dx dt = \varepsilon(\rho) \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow \infty$. Возвращаясь теперь к неравенству (16), получим

$$\iint_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q \xi \, dx dt \leq \varepsilon^{1/q}(\rho) c_0^{1/q'} \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow \infty$, т.е. в пределе

$$\int_0^\infty \int_\Omega |u|^q \xi \, dx dt = 0.$$

Так как $\xi > 0$ в Ω , то $u \equiv 0$, что противоречит предположению о существовании ненулевого решения.

Из неравенства

$$-2q' + N + 2/k \leq 0$$

получаем условие отсутствия нетривиального решения из формулировки теоремы $1 < q \leq q_k^*$. \square

6.4.3. Неоднородная задача. По аналогии с (14) рассмотрим неравенство с дополнительным слагаемым $w(x) \geq 0$, $w(x) \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, т.е. задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |u|^q + w(x) & \text{в } \Omega \times (0, \infty), & w(x) \not\equiv 0, \\ u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}|_{t=0} \geq 0, & u \not\equiv 0. \end{cases} \quad (18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $u(x, t) \in C(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$ при $t = 0$. Функция $u(x, t)$ называется *слабым решением задачи (18)*, если для любой

неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_{\infty}^{2,k}(\Omega \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (0, \infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t , выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial r} dx dt + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dx dt \geqslant \\ & \geqslant \int_0^{\infty} \int_{\Omega} |u|^q \varphi dx dt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x, 0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x, 0) dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} w(x) \varphi dx dt. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. При

$$1 < q < q^* = \frac{N}{N-2}$$

задача (18) не имеет нетривиального глобального решения, каким бы малым ни было $w(x) \geqslant 0$, $w(x) \not\equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству теоремы 1, получаем «априорную оценку»:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\rho^{2/k}} \int_{R < |x| < \rho} w(x) \xi dx dt + \int_{R < |x| < \rho} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \xi(x) dx + \\ & + \iint_{\varphi_{\rho}(x, t) = \xi(x)} |u|^q \xi dx dt \leqslant c_1 \rho^{-2q' + N + 2/k}, \end{aligned}$$

откуда

$$c_1 \rho^{-2q' + N + 2/k} \geqslant \int_0^{\rho^{2/k}} \int_{R < |x| < \rho} w(x) \xi(x) dx dt \geqslant \rho^{2/k} c_w \quad (19)$$

при ρ таких, что

$$\int_{R < |x| < \rho} w(x) \xi(x) dx \geqslant c_w \equiv \text{const} > 0.$$

Для получения противоречия при $\rho \rightarrow \infty$ достаточно предполагать, что $-2q' + N < 0$, т.е. $q < N/(N-2)$. Теорема доказана. \square

Такого рода результаты для параболических задач были получены в работе [22]. Там же на основе теоремы сравнения доказано, что и в критическом случае $q = q^*$ задача не имеет решения, однако для гиперболического и общего эволюционного неравенства вопрос остается открытым. Как видно из теоремы 2, критический показатель для неоднородной задачи совпадает с эллиптическим независимо от порядка уравнения k .

Возможно изучить и зависимость критического показателя от роста неоднородности.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $w(x) \geq \frac{c_\beta}{|x|^\beta}$, где $\beta > 2$. Тогда задача (18) не имеет глобального нетривиального решения при $1 < q < \frac{\beta}{\beta-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях теоремы неравенство (19) принимает вид

$$c_1 \rho^{-2q' + N + 2/k} \geq \rho^{2/k} \rho^{N-\beta} c_w,$$

откуда $c_1 \geq c_w \rho^{2q' - \beta}$. Неравенство невозможно, если $2q' - \beta > 0$, т.е. $q < \beta/(\beta - 2)$. \square

6.4.4. Сингулярное неравенство. Пусть $R > 0$ и $-2 < \sigma < +\infty$. Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |x|^\sigma |u|^q & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}|_{t=0} \geq 0, & u \not\equiv 0. \end{cases} \quad (20)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $u(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$ при $t = 0$. Функция $u(x, t)$ называется *слабым решением задачи* (20), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_\infty^{2,k}(\Omega \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (0, \infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t ,

выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\infty \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial r} dx dt + \int_0^\infty \int_\Omega u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dx dt \geq \\
 & \geq \int_0^\infty \int_\Omega |x|^\sigma |u|^q \varphi dx dt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_\Omega \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x, 0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x, 0) dx + \\
 & \quad + \int_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \quad (21)
 \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. При $\sigma > -2$ и

$$1 < q \leq q^* = \frac{N + 2/k + \sigma}{N - 2 + 2/k}$$

задача (20) не имеет нетривиального глобального решения.

Для параболических неравенств ($k = 1$) аналогичный результат имеется в [19] (см. также ссылки на результаты для соответствующих уравнений в обзорах [18, 5]).

Гиперболическая задача (20) (т.е. когда $k = 2$) в случае компактных начальных данных и в предположении о конечной скорости распространения возмущений рассматривалась (через сведение к обыкновенному дифференциальному уравнению) в [9] при дополнительном ограничении $\sigma < N(q - 1)$.

Не включенный в теорему 4 случай $\sigma \leq -2$, так называемые «критическая и суперкритическая сингулярности», вызвал большой интерес после появления работы [3], в которой исследуется аналогичная задача в ограниченной области. Дальнейшее развитие это направление получило в книге [52] и работе автора [44], где рассмотрены также некоторые эволюционные неравенства высокого порядка. Основной результат состоит в том, что задача в шаре B_R с критической или суперкритической сингулярностью (в точке $|x| = 0$) не имеет глобального по времени t решения для всех $q > 1$. Более того, параболическая задача не имеет даже локального по t решения. Это явление получило название «полного и мгновенного разрушения» решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $u(x, t)$ — нетривиальное решение. Из (21) с пробной функцией $\varphi(x, t) = \varphi_\rho(x, t)$, определенной в (7), с $p = q' > 1$, $\theta = 2/k$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_{\Omega} |u|^q |x|^\sigma \varphi_\rho dx dt \leq \\ & \leq - \int_0^\infty \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} dx dt + (-1)^k \iint_{\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} = 0} u \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} dx dt - \iint_{\Delta \varphi_\rho = 0} u \Delta \varphi_\rho dx dt + \\ & + (-1)^k \iint_{\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \neq 0} u \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} dx dt - \iint_{\Delta \varphi_\rho \neq 0} u \Delta \varphi_\rho dx dt. \quad (22) \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части неположителен, второй и третий равны нулю. Применяя неравенство Гёльдера к оставшимся интегралам, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_{\Omega} |u|^q |x|^\sigma \varphi_\rho dx dt = \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \iint_{\varphi_\rho(x, t) \neq \xi(x)} |u|^q |x|^\sigma \varphi_\rho dx dt + \\ & + \iint_{\varphi_\rho(x, t) = \xi(x)} |u|^q |x|^\sigma \xi(x) dx dt \leq \\ & \leq \iint_{\text{supp } |\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}|} |u| \left| \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \right| dx dt + \iint_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} |u| |\Delta \varphi_\rho| dx dt \leq \\ & \leq \left(\iint_{\text{supp } |\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}|} |u|^q |x|^\sigma \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q} \left(\iint_{\text{supp } |\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}|} \frac{\left| \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt \right)^{1/q'} + \end{aligned}$$

$$+ \left(\iint_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} |u|^q |x|^\sigma \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q} \left(\iint_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt \right)^{1/q'}. \quad (23)$$

Наконец, используя неравенство Юнга с параметром, находим

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q |x|^\sigma \xi(x) dx dt &\leq c \iint_{\text{supp } |\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}|} \frac{\left| \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt + \\ &+ c \iint_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Последнее слагаемое в силу (8) (с $p = q'$ и $\theta = 2/k$) не превосходит

$$c\rho^{-q'(\sigma+2)+N+\sigma+2/k}.$$

Если

$$-q'(\sigma+2) + N + \sigma + 2/k \leq 0, \quad (25)$$

то последний интеграл в (24) ограничен при $\rho \rightarrow \infty$.

Что касается первого интеграла в правой части (24), легко видеть, что в условиях (25) он также ограничен. Действительно, если $N - \sigma(q' - 1) > 0$, то показатель роста в (9) совпадает с $-q'(\sigma+2) + N + \sigma + 2/k \leq 0$. Если же $N - \sigma(q' - 1) \leq 0$, то множитель $\rho^{-\theta(kq'-1)}$ стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$ и, следовательно, рассматриваемый интеграл ограничен.

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, в случае (25) приходим к оценке:

$$\int_0^\infty \int_\Omega |u|^q |x|^\sigma \xi dx dt \leq c_0,$$

откуда с помощью наших стандартных рассуждений получаем отсутствие нетривиального глобального решения при выполнении неравенства (25). \square

Введем теперь сингулярность по t . Пусть $T > 0$, $R > 0$ и $-k < \gamma \leq 0$. Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq t^\gamma |u|^q & \text{в } \Omega \times (T, \infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}|_{t=T} \geq 0, & u \not\equiv 0. \end{cases} \quad (26)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $u(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times [T, \infty))$ и определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$ при $t = T$. Неотрицательная функция $u(x, t)$ называется *слабым решением задачи* (26), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_\infty^{2,k}(\Omega \times (T, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (T, \infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t , выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned} & - \int_T^\infty \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial r} dx dt + \int_T^\infty \int_\Omega u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dx dt \geq \\ & \geq \int_T^\infty \int_\Omega t^\gamma |u|^q \varphi dx dt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_\Omega \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x, 0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x, 0) dx + \\ & \quad + \int_\Omega \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

ТЕОРЕМА 5. При $-k < \gamma \leq 0$ и

$$1 < q \leq q^* = \frac{N + 2/k + 2\gamma/k}{N - 2 + 2/k}$$

задача (26) не имеет нетривиального глобального решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, t)$ — нетривиальное решение. Действуя аналогично доказательству теоремы 4 (очевидно, мы можем брать ту же самую пробную функцию φ_ρ , в частности

$\theta = 2/k$), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} |u|^q t^\gamma \xi(x) dx dt \leq c \iint_{\text{supp } |\frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k}|} \frac{\left| \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} t^{\gamma(q'-1)}} dx dt + \\ + c \iint_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1} t^{\gamma(q'-1)}} dx dt. \quad (28) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в силу (13) (с $p = q'$) не превосходит

$$c \rho^{-2\gamma(q'-1)/k - 2q' + N + 2/k},$$

поэтому интеграл ограничен при

$$-2\gamma(q'-1)/k - 2q' + N + 2/k \leq 0. \quad (29)$$

Так как по предположению $\gamma < 0$, то справедливо неравенство $1 - \gamma(q'-1) > 0$, поэтому второй интеграл (по оценке (12)) также ограничен при условии (29).

Тогда переходя к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, приходим к оценке:

$$\int_T^\infty \int_\Omega |u|^q t^\gamma \xi dx dt \leq c_0,$$

откуда вытекает отсутствие нетривиального решения при выполнении условия (29). Теорема доказана. \square

Параболическому случаю ($k = 1$) задачи (26) уделяется много внимания, в частности аналогичный результат, но для $\gamma \geq 0$, приводится в обзорах [18, 5]:

$$1 < q < q^* = \frac{N + 2 + 2\gamma}{N}.$$

Насколько известно автору, соответствующее гиперболическое неравенство ранее не рассматривалось.

6.4.5. Система неравенств. Рассмотрим слабо связанную систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - \Delta u \geq |v|^{q_1} & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial^k v}{\partial t^k} - \Delta v \geq |u|^{q_2} & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \quad v|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}|_{t=0} \geq 0, \quad \frac{\partial^{k-1} v}{\partial t^{k-1}}|_{t=0} \geq 0, & u \neq 0, \quad v \neq 0. \end{cases} \quad (30)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пара функций $u, v \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$, у которых определены локально суммируемые следы $\frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ и $\frac{\partial^i v}{\partial t^i}$, $i = 1, \dots, k-1$ при $t = 0$, называется *слабым решением задачи* (30), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_{\infty}^{2,k}(\Omega \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial B_R \times (0, \infty)} = 0$, и финитной по переменным $r = |x|$ и t , выполнены интегральные неравенства:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial r} dx dt + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} u \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dx dt \geq \\ & \geq \int_0^{\infty} \int_{\Omega} |v|^{q_1} \varphi dx dt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1-i} u}{\partial t^{k-1-i}}(x, 0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x, 0) dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi(x, 0) dx, \\ & - \int_0^{\infty} \int_{\partial B_R} v \frac{\partial \varphi}{\partial r} dx dt + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} v \left((-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} - \Delta \varphi \right) dx dt \geq \\ & \geq \int_0^{\infty} \int_{\Omega} |u|^{q_2} \varphi dx dt + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1-i} v}{\partial t^{k-1-i}}(x, 0) \frac{\partial^i \varphi}{\partial t^i}(x, 0) dx + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} v}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. Задача (30) не имеет глобального нетривиального решения, если

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{N-2+2/k}{2}, \quad \text{где} \quad \gamma_1 = \frac{q_1+1}{q_1 q_2 - 1}, \quad \gamma_2 = \frac{q_2+1}{q_1 q_2 - 1},$$

и $q_1 > 1, q_2 > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u, v — слабое решение задачи (30). Выберем пробную функцию, как в доказательстве теоремы 1, и будем использовать соответствующие обозначения. В частности, справедлива оценка (10).

Применяя в определении слабого решения неравенство Гёльдера, приходим к неравенствам:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_{\rho}(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} |v|^{q_1} \varphi_{\rho} dx dt \leq \\
 & \leq \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} |u|^{q_2} \varphi_{\rho} dx dt \right)^{1/q_2} \times \\
 & \times \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} \frac{|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|^{q'_2}}{\varphi_{\rho}^{q'_2-1}} dx dt \right)^{1/q'_2} \equiv \\
 & \equiv \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} |u|^{q_2} \varphi_{\rho} dx dt \right)^{1/q_2} J_1^{1/q'_2}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} v}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \varphi_{\rho}(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \int_{\Omega} |u|^{q_2} \varphi_{\rho} dx dt \leq \\
 & \leq \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} |v|^{q_1} \varphi_{\rho} dx dt \right)^{1/q_1} \times \\
 & \times \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|} \frac{|(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{\rho}}{\partial t^k} - \Delta \varphi_{\rho}|^{q'_1}}{\varphi_{\rho}^{q'_1-1}} dx dt \right)^{1/q'_1} \equiv
 \end{aligned}$$

$$\equiv \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta \varphi_\rho|} |v|^{q_1} \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q_1} J_2^{1/q'_1}, \quad (32)$$

причем согласно (10)

$$J_1 \leq c_0 \rho^{-2q'_2 + N + 2/k}, \quad J_2 \leq c_0 \rho^{-2q'_1 + N + 2/k}.$$

Подставим неравенство (32) в (31). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) \psi_\rho(x) dx + \int_0^\infty \int_{\Omega} |v|^{q_1} \varphi_\rho dx dt &\leq \\ &\leq \left(\iint_{\text{supp } |(-1)^k \frac{\partial^k \varphi_\rho}{\partial t^k} - \Delta \varphi_\rho|} |v|^{q_1} \varphi_\rho dx dt \right)^{1/(q_1 q_2)} J_2^{1/(q'_1 q_2)} J_1^{1/q'_2}, \end{aligned}$$

откуда после упрощения степеней получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\Omega} |v|^{q_1} \varphi_\rho dx dt &\leq \left(J_2^{q_1-1} J_1^{q_1(q_2-1)} \right)^{1/(q_1 q_2 - 1)} \leq \\ &\leq C \rho^{((N-2+2/k)(q_1 q_2 - 1) - 2(q_1 + 1))/(q_1 q_2 - 1)} = C \rho^{N-2+2/k-2\gamma_1}. \quad (33) \end{aligned}$$

Отсюда, рассуждая как и раньше, выводим отсутствие нетривиального $v(x, t)$ в случае

$$N - 2 + 2/k - 2\gamma_1 \leq 0.$$

Аналогично, подставляя (31) в (32), приходим к оценке:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\Omega} |u|^{q_2} \varphi_\rho dx dt &\leq \left(J_1^{q_2-1} J_2^{q_2(q_1-1)} \right)^{1/(q_1 q_2 - 1)} \leq \\ &\leq C \rho^{((N-2+2/k)(q_1 q_2 - 1) - 2(q_2 + 1))/(q_1 q_2 - 1)} = C \rho^{N-2+2/k-2\gamma_2}, \quad (34) \end{aligned}$$

т.е. нетривиальное решение $u(x, t)$ отсутствует при

$$N - 2 + 2/k - 2\gamma_2 \leq 0.$$

Очевидно, что если хотя бы одна из функций $u(x, t)$ или $v(x, t)$ тождественно равна нулю, то равна нулю и другая. Таким образом, условие отсутствия нетривиального решения принимает вид

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{N - 2 + 2/k}{2},$$

что и требовалось доказать. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Возможна геометрическая интерпретация приведенных условий. Степени q_1 и q_2 входят в соотношение нелинейно, так что после упрощения получаем объединение областей над прямыми $q_1 = 1$, $q_2 = 1$ и под гиперболами:

$$1 < q_1 \leq \frac{N + 2/k}{(N - 2 + 2/k)q_2 - 2}, \quad 1 < q_2 \leq \frac{N + 2/k}{(N - 2 + 2/k)q_1 - 2}.$$

Точки пересечения гипербол и прямых (т.е. значения q_1^* при $q_2 = 1$ и q_2^* при $q_1 = 1$) даются формулами

$$q_1^* = \frac{N + 2/k}{N - 4 + 2/k}, \quad q_2^* = \frac{N + 2/k}{N - 4 + 2/k}.$$

Приведем частные случаи теоремы 6. При $k = 1$ (параболическая система) приходим к варианту результата Эскобедо – Херреро [5]: задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq |v|^{q_1} & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \geq |u|^{q_2} & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \quad v|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \\ u(x, 0) \geq 0, \quad v(x, 0) \geq 0, & u \not\equiv 0, \quad v \not\equiv 0 \end{cases}$$

не имеет глобального нетривиального решения при

$$\max \left\{ \frac{q_1 + 1}{q_1 q_2 - 1}, \frac{q_2 + 1}{q_1 q_2 - 1} \right\} \geq \frac{N}{2}.$$

Утверждение Эскобедо – Херреро, однако, является несколько более общим, поскольку доказано в предположении $q_1 q_2 > 1$, тогда как мы считаем $q_1 > 1$, $q_2 > 1$.

При $k = 2$ для гиперболической системы

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \geq |v|^{q_1} & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v \geq |u|^{q_2} & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \quad v|_{\partial B_R \times (0, \infty)} \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} \geq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} \geq 0, & u \not\equiv 0, \quad v \not\equiv 0 \end{cases}$$

схожие утверждения об отсутствии решения при

$$\max \left\{ \frac{q_1 + 1}{q_1 q_2 - 1}, \frac{q_2 + 1}{q_1 q_2 - 1} \right\} \geq \frac{N - 1}{2}$$

имеются в работах [4] (при дополнительных предположениях) и [21] (общий случай). Отметим, однако, что в статьях [4] и [21] исследованы задачи во всем пространстве \mathbb{R}^N , тогда как мы рассматриваем внешность шара $\mathbb{R}^N \setminus B_R$.

В пределе $k \rightarrow \infty$ приходим к известным условиям отсутствия для эллиптической системы (см. [52] и ссылки там):

$$\max \left\{ \frac{q_1 + 1}{q_1 q_2 - 1}, \frac{q_2 + 1}{q_1 q_2 - 1} \right\} \geq \frac{N - 2}{2}.$$

Используя предлагаемый подход, можно рассмотреть также системы неравенств с сингулярными коэффициентами и установить зависимость критического показателя от включенных в систему неоднородностей. Еще одним вариантом обобщения теоремы 6 являются утверждения об отсутствии решений систем смешанного типа, включающих в себя параболическое и гиперболическое неравенства, т.е. эволюционные неравенства разных порядков.

ГЛАВА 7

Некоторые приложения

В приложениях используются все типы уравнений математической физики. Так, волновое уравнение хорошо описывает колебания в канатах подъемных установок. Уравнения теплопроводности и Лапласа активно используются для изучения процессов самовозгорания угля и переноса газов в шахтах. Ниже приведены наиболее яркие примеры применения уравнений с частными производными в горном деле. Отметим, что эти примеры носят иллюстративный характер.

7.1. Моделирование процесса самовозгорания угля

Описание процесса самовозгорания скоплений угля является наиболее впечатляющим примером применения математики в горном деле, так как из совершенно абстрактных рассуждений получается конкретный результат. Приведем эти рассуждения, опираясь на работы [48, 31, 60]. Хорошо известно, что пожары на шахтах — грозное явление. На них приходится около половины общего числа аварий. В основе процесса самовозгорания угля лежат окислительные реакции. Этот процесс делят на окисление, самонагревание и самовозгорание угля. Пожары зарождаются в разрыхленных и деформированных целиках угля при условии достаточного притока воздуха. Так как речь идет о распространении тепла в пространстве, то естественно предположить, что процесс описывается уравнением теплопроводности, которое было выведено в главе 1:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + f(T). \quad (1)$$

Здесь T — искомая температура, t — время, a — коэффициент температуропроводности, Δ — оператор Лапласа. Отличие уравнения (1) от ранее изученного состоит в дополнительном слагаемом

f , которое описывает источник тепла. Так как этот источник химический, то вполне естественно предположить, что он зависит от температуры T , что и указано в обозначениях. Никакой дополнительной информацией о функции $f(T)$ мы не располагаем, поэтому примем следующее рассуждение. На малом участке изменения аргумента всякую функцию можно считать линейной. На фоне температуры возгорания ($\geq 500^\circ \text{C}$) изменение температуры, скажем, на 50°C можно считать малым. Поэтому предположим, что $f(T) = b(T - T_0)$, где T_0 — температура окружающей среды, b — константа. Тем самым учитывается только прирост температуры угля в сравнении с окружающим пространством. При таком предположении уравнение (1) принимает следующий вид:

$$T_t = a\Delta T + b(T - T_0). \quad (2)$$

Теперь выберем форму тела V , заполненного углем. Заметим, что эта форма полностью в нашей власти, и ее можно выбрать, исходя из соображений удобства. Например, можно считать, что V — это шар радиусом R . Соответствующая задача решена в книге [48, с.99]. Можно предположить также, что объем V занимает все пространство. Соответствующая задача также решена в книгах [31, 60]. Однако решения в указанных случаях математически сложны. Поэтому мы рассмотрим наиболее простой случай, когда тело V — куб с ребром l . Это дает возможность решать уравнение (2) с граничными условиями, приняв температуру на границе равной температуре окружающей среды. Предположим также, что начальная температура угля имеет некоторое приращение θ :

$$T|_{t=0} = T_0 + \theta, \quad U|_{\text{г.р.}} = T_0. \quad (3)$$

Метод Фурье удобно применять для случая нулевых граничных условий, поэтому предварительно сделаем замену неизвестной функции: $U = T - T_0$. В результате для новой неизвестной функции получим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + bU, \quad (4)$$

$$U|_{t=0} = \theta, \quad U|_{\text{г.р.}} = 0. \quad (5)$$

Напомним, что решается эта задача в кубе V с ребром l . Для простоты считаем, что куб V описывается неравенствами

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq z \leq l.$$

В соответствии с методом Фурье ищем решение уравнения (4) в специальном виде:

$$U(t, x, y, z) = \tau(t)X(x)Y(y)Z(z). \quad (6)$$

Подставив в уравнение (4) и разделив затем на произведение (6), получим

$$\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = a \frac{X''(x)}{X(x)} + a \frac{Y''(y)}{Y(y)} + a \frac{Z''(z)}{Z(z)} + b. \quad (7)$$

Здесь каждое слагаемое зависит только от своей переменной и поэтому полученное равенство выполняется только при условии, что каждое слагаемое является постоянной величиной. Поэтому считаем, что

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda_1^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda_2^2, \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda_3^2. \quad (8)$$

Граничные условия (5) принимают следующий вид:

$$X(0) = X(l) = 0, \quad Y(0) = Y(l) = 0, \quad Z(0) = Z(l) = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) — это три обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами. Более того, это просто уравнения гармонических колебаний. С учетом граничных условий (9) эти уравнения имеют следующие решения:

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin \frac{\pi n x}{l}, & \lambda_1 &= \frac{\pi n}{l}, & n &= 1, 2, 3, \dots; \\ Y(y) &= \sin \frac{\pi m y}{l}, & \lambda_2 &= \frac{\pi m}{l}, & m &= 1, 2, 3, \dots; \\ Z(z) &= \sin \frac{\pi k z}{l}, & \lambda_3 &= \frac{\pi k}{l}, & k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Тем самым получается бесконечное число решений вида (6). Их линейная комбинация также дает решение уравнения (4) в силу его линейности. Поэтому полное решение ищем в виде ряда

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{nmk}(t) \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi m y}{l} \sin \frac{\pi k z}{l}. \quad (10)$$

Чтобы получить коэффициенты $\tau_{nmk}(t)$, нужно соотношения (8) подставить в формулу (7), что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -a \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - a \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 - a \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 + b = K_{nmk}. \quad (11)$$

Отсюда $\tau' = K_{nmk}\tau$, так что $\tau_{nmk}(t) = A_{nmk}e^{tK_{nmk}}$, где A_{nmk} — постоянные интегрирования.

Подставляя в (10) указанные коэффициенты $\tau_{nmk}(t)$, получим решение задачи (2)–(3) в виде

$$T - T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nmk} e^{tK_{nmk}} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi my}{l} \sin \frac{\pi kz}{l}. \quad (12)$$

Коэффициенты A_{nmk} можно получить из начального условия $T|_{t=0} = T_0 + \theta$. Однако в этом нет необходимости, так как из вида решения (12) непосредственно следует, что возрастать температура T может только за счет экспоненциальных множителей $e^{tK_{nmk}}$. Если хотя бы одно из чисел K_{nmk} положительно, то функция T неограниченно возрастает. Следовательно, критерием роста температуры угля является неравенство $K_{nmk} > 0$, или более подробно

$$b > a \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 + a \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 + a \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2.$$

Правая часть здесь достигает наименьшего значения при $n = m = k = 1$, так что процесс самонагрева угля начинается при условии

$$b > \frac{3\pi^2 a}{l^2}.$$

Решение уравнения $b = \frac{3\pi^2 a}{l^2}$ относительно l естественно назвать *критическим размером*. Тем самым критический размер задается формулой

$$l_{\text{кр}} = \pi \sqrt{3} \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (13)$$

Как видно, критический размер зависит всего от одного параметра $\frac{a}{b}$. Чтобы представить реальные критические размеры, воспользуемся данными, взятыми из книги [48] для углей пласта Мощного Кузнецкого бассейна (с. 100): $\frac{a}{b} = 0,135$. Отсюда $l_{\text{кр}} = 2$ (м).

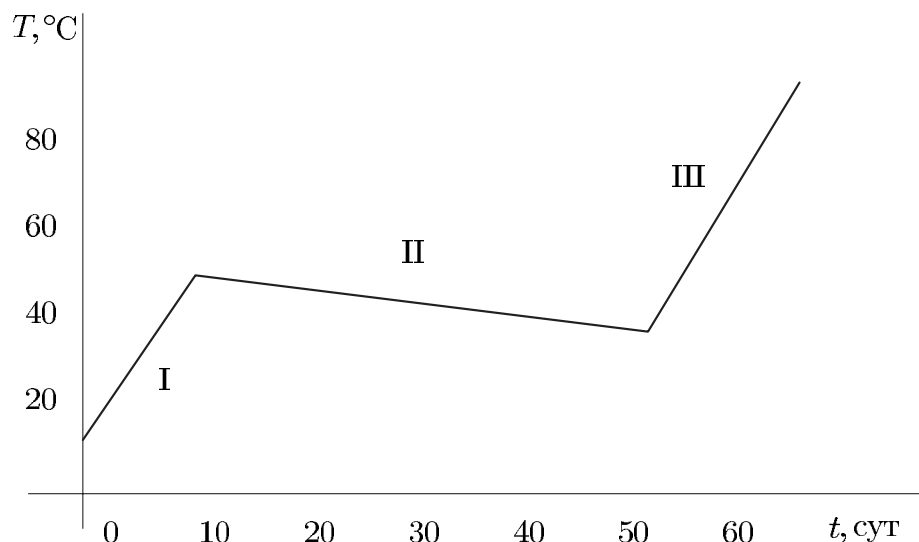


Рис. 7.1.

В куб с таким ребром при насыпной плотности угля $\gamma = 0,8 \text{ т/м}^3$ вмещается 6,4 т угля.

Как видим, совершенно ничтожная для производственных условий масса угля при благоприятных условиях способна путем самонагревания привести к пожару. Впрочем, здесь возникает естественный вопрос — не является ли все изложенное игрой в абстракцию? Очевидно, что полученный теоретический результат требует всесторонней экспериментальной проверки. Напомним, что уравнение теплопроводности описывает только один физический процесс, тогда как в естественных условиях участвуют многие химические и физические процессы. Кроме того, добавочное слагаемое $f(T)$ предполагалось линейным, что также является не вполне естественным предположением. Поэтому представляет интерес приводимый здесь график температуры угля, который очень схематично повторяет натурные испытания (рис. 7.1).

Поясним этот график. Участок I возрастания температуры как раз соответствует изложенной выше теории. Неожиданный для рассмотренной теории участок II просто означает, что в ход вступил другой физический процесс — выпаривание воды из массы угля. Наконец, на участке III снова можно применять изложенную выше теорию. На этот раз выделяемое тепло идет только на повышение температуры угля, что и приводит к его возгоранию. Впрочем, можно предположить, что для этого участка линейная

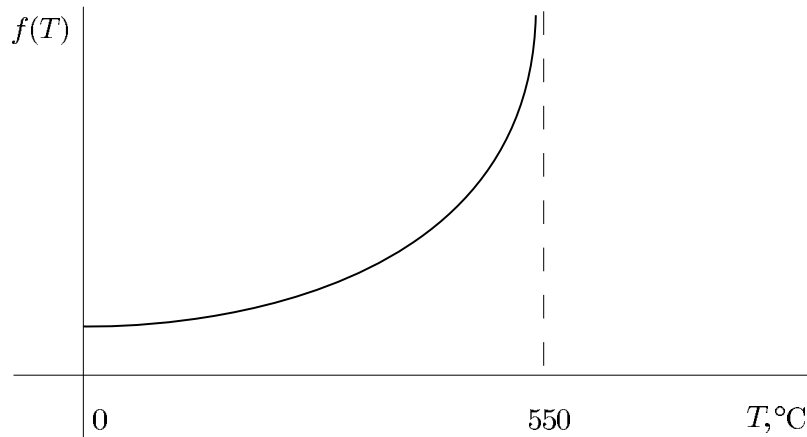


Рис. 7.2.

аппроксимация функции $f(T)$ может оказаться недостаточной. Но это уже другая теория (рис. 7.2).

7.2. Фильтрация воздуха в выработанном пространстве

Движение газовой смеси в выработанном пространстве является важнейшим фактором, обуславливающим газовую и пожарную опасность. Именно в результате этого движения выносятся в выработки метан, создаются пожарные концентрации кислорода. Изучение этого процесса осложняется тем, что перепады давления воздуха и скорость фильтрации в зоне обрушения практически замерить невозможно. Поэтому возникает необходимость в математическом и аналоговом моделировании. Приведем один из подходов, опираясь на работу [31, с. 42–49].

Для вывода уравнения процесса фильтрации применим стандартные рассуждения. Пусть V — произвольный объем с границей S . Газовый поток в расчете на единицу времени вычисляется по известной формуле

$$\Pi = - \iint_S k (\nabla p)_n dS = - \iiint_V \operatorname{div} (k \nabla p) dV. \quad (1)$$

Здесь n — внешняя нормаль к поверхности, ∇p — градиент давления, $(\nabla p)_n$ — проекция градиента на нормаль, k — коэффициент газопроницаемости среды. Одновременно в (1) применена формула Остроградского, которая позволяет поверхностный интеграл представить в виде тройного интеграла. Поток Π идет на изменение

массы M газа в объеме V , задавая скорость этого изменения, так что с учетом направления потока из мест с высокой концентрацией газа имеем

$$\Pi = -\frac{\partial M}{\partial t}.$$

Массу газа выразим через плотность по формуле $M = \iiint_V \rho dV$, а плотность, в свою очередь — через уравнение состояния газа

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n,$$

где ρ_0, p_0 — начальные плотность и давление. В результате получим

$$\Pi = -\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = -\frac{\rho_0}{p_0^n} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} p^n dV. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2) и учитывая произвольность объема V , получим уравнение фильтрации газа в такой форме:

$$c \frac{\partial}{\partial t} p^n = \operatorname{div} (k \nabla p).$$

Если процесс считать стационарным, а коэффициент k постоянным, то приходим к уравнению Лапласа:

$$\Delta p = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Специализируем полученное уравнение для случая выработанного пространства. Так как протяженность выработки по простиранию к падению пласта несоизмеримо больше, чем вынимаемая мощность, то процесс фильтрации можно рассматривать как двумерный. В частности, уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Координату x условимся отсчитывать вглубь выработанного пространства, а координату y — вдоль лавы по направлению движения вентиляционной струи. Пусть L — длина лавы; P_1 из P_2 — давление воздуха на сопряжении воздухоподающего и соответственно вентиляционного штреков с лавой, $\Delta P = P_1 - P_2$ — депрессия лавы. Согласно договоренности тогда координата y меняется в пределах $0 \leq y \leq L$, а координата x — в пределах $0 \leq x < \infty$ (рис. 7.3). Рассмотрим простейший случай, когда

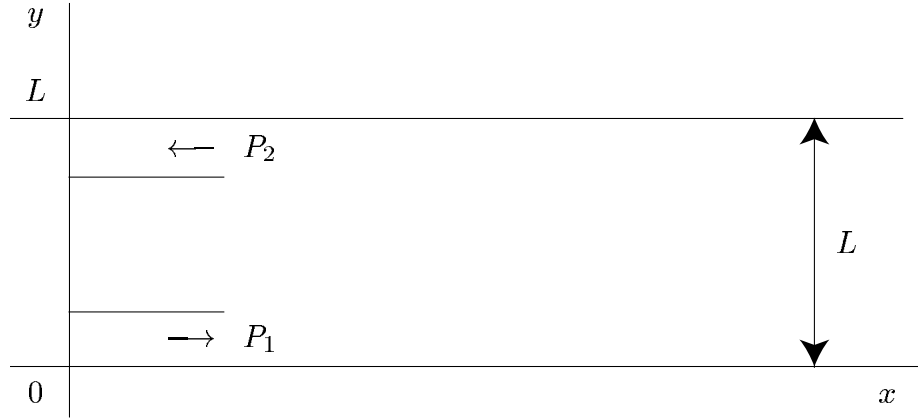


Рис. 7.3.

вентиляционная струя примыкает к выработанному пространству лишь со стороны лавы. Тем самым предполагается, что со стороны стенок $y = 0$ и $y = L$ нет источника воздуха, что соответствует граничным условиям вида

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=L} = 0. \quad (5)$$

Остается сообразить, как описать давление у лавы, т.е. какое граничное условие задать для $x = 0$.

Согласно предположению в начале координат давление $p = P_1$ известно. Известно оно также в точке с координатами $(0, L)$, именно $p(0, L) = P_2$. Предполагается вполне естественным связать эти давления линейной функцией, т.е. считать, что

$$p|_{x=0} = P_1 - \frac{\Delta P}{L} y \quad (0 \leq y \leq L). \quad (6)$$

Тем самым решается следующая математическая задача: уравнение Лапласа (4) в бесконечном прямоугольнике при граничных условиях (5) и (6). Благодаря специальной форме области эту задачу снова удобно решать методом Фурье. Итак, ищем частные решения уравнения (4) специального вида $p = X(x)Y(y)$. Подставив в уравнение и разделив результат на p , получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0. \quad (7)$$

Так как здесь каждое слагаемое зависит только от своей переменной, то равенство (7) возможно лишь при условии, что слагаемые

— числа. Это приводит к равенствам

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2. \quad (8)$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0, \quad y'(0) = y'(L) = 0. \quad (9)$$

Здесь граничные условия получены из (5). Уравнение гармонических колебаний (9) имеет известные решения. Приведем их:

$$Y_n(y) = \cos \frac{\pi n}{L} y, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решая первое из уравнений (8) для каждого λ_n , получим

$$X_n(x) = e^{-\pi n x / L}.$$

Тем самым получено счетное число решений уравнения (4). Их линейная комбинация также дает решение, поэтому ищем решение рассматриваемой задачи в виде ряда

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\pi n x / L} \cos \frac{\pi n}{L} y. \quad (10)$$

Коэффициент A_n получим, подставив сюда $x = 0$ и используя граничное условие (6), что приводит к равенству

$$P_1 - \frac{\Delta P}{P} y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{L} y. \quad (11)$$

Получился ряд Фурье для линейной функции, заданной на отрезке $[0, L]$. Этот ряд известен и имеет вид

$$P_1 - \frac{\Delta P}{L} y = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{4\Delta P}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{L}. \quad (12)$$

Сравнение рядов (11) и (12) дает возможность выписать коэффициенты A_n , а с их помощью — решение рассматриваемой задачи

$$p(x, y) = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{4\Delta P}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\pi x / L}}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{L}. \quad (13)$$

Следует отметить, что при изучении реальных физических процессов ответ вида (13) не является окончательным. Из него стараются извлечь простые числовые критерии, которые поддаются

экспериментальной проверке. В рассматриваемой задаче физически значимой величиной является скорость фильтрации газа — это вектор с координатами

$$V_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y},$$

где r — удельное аэродинамическое сопротивление среды. Используя (13), получаем

$$V_x = \frac{4\Delta P}{\pi r L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\pi x/L}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{L}. \quad (14)$$

Физической величиной, которую удобно проверять экспериментально, является утечка воздуха θ_{yT} через выработанное пространство. Она вычисляется по формуле

$$\theta_{yT} = h_b \int_0^{L/2} V_x(0, y) dy, \quad (15)$$

где h_b — вынимаемая мощность пласта. Ряд для функции $V_x(0, y)$ имеет вид в соответствии с (14):

$$V_x(0, y) = \frac{4\Delta P}{\pi r L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{L}. \quad (16)$$

Этот ряд сходится медленно, а в точках $y = 0$ и $y = L$ он даже расходится. Это может дать повод усомниться в надежности всей схемы. Поэтому заметим следующее. Каждая задача, описывающая реальный процесс, должна быть устойчивой, т.е. приводить к близким результатам для близких начальных данных. Поведение ряда (16) определяется плохой сходимостью ряда (12), дающего разложение линейной функции, которая, заметим, является плодом нашего воображения. С таким же правом вместо линейной функции можно брать любую другую, не сильно от нее отличающуюся. В качестве такого приближения удобно взять просто первые слагаемые ряда (12). Другими словами, вместо условия (6) предлагается использовать граничное условие вида

$$p|_{x=0} = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{4\Delta P}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{L}. \quad (17)$$

Это приближение отличается от линейной функции (6) на 5–10%, что вполне приемлемо в подобных вычислениях, носящих оценочный характер. В то же время последующие вычисления резко упрощаются. В частности, решение уравнения (4) при дополнительных условиях (5) и (17) принимает вид

$$\tilde{p}(x, y) = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{4\Delta P}{\pi^2} e^{-\pi x/L} \cos \frac{\pi y}{L}.$$

Первая координата скорости фильтрации дается формулой

$$\tilde{V}_x = \frac{4\Delta P}{\pi r L} e^{-\pi x/L} \cos \frac{\pi y}{L}.$$

Утечка воздуха через выработанное пространство также вычисляется без труда:

$$\tilde{\theta}_{yt} = h_b \int_0^{L/2} \tilde{V}_x(0, y) dy = \frac{4\Delta P}{\pi r L} h_b \int_0^{L/2} \cos \frac{\pi y}{L} dy = \frac{4\Delta P}{\pi^2 r} h_b.$$

В книге [31, с. 47] приведена формула для утечки, полученная для решения вида (16). Она имеет вид

$$\theta_{yt} = \frac{4\Delta P}{\pi^2 r} h_b G, \quad G = 0,916. \quad (18)$$

Здесь G — так называемая постоянная Каталана.

Сравнение двух формул для утечек дает равенство $\theta_{yt} = \tilde{\theta}_{yt} \cdot G$. Учитывая значение постоянной G , убеждаемся, что отличие составляет около 10%. В книге [31, с. 49] приведены таблицы сравнения расчетных точек, вычисленных по формуле (18), с фактическим. Отличие доходит до 30–40%. На этом фоне отличие $\tilde{\theta}_{yt}$ от θ_{yt} в 10% выглядит вполне приемлемым. Это показывает, что разумная замена начальных и граничных условий может значительно упростить последующую обработку результата без существенных потерь для сравнения теоретических и экспериментальных данных.

7.3. Массоперенос углекислого газа в массиве и вентиляционных потоках

Углекислый газ делает воздух в шахтах непригодным для дыхания. Для прогноза и управления газовыделениями необходимо знание закономерностей генезиса, фильтрации и диффузионного переноса углекислого газа в вентиляционном потоке. Решению этих вопросов посвящена книга [60]. Разберем более подробно некоторые вопросы, изложенные в этой книге, обращая основное внимание на математическую сторону дела.

Для прогнозирования газовыделения в горные выработки предлагается следующая математическая модель, дополняющая ту, которая изложена в предыдущем разделе. Составим уравнение баланса массы для произвольного объема V пористой среды с границей S . Считаем, что газовый поток $\bar{\gamma}$, численно равный количеству вещества, переносимому через единицу поверхности S в единицу времени, складывается из фильтрационного потока $\bar{\gamma}_f$ и диффузии $\bar{\gamma}_D$ в твердой фазе. Тем самым

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_f + \bar{\gamma}_D. \quad (1)$$

Для каждого потока применяем линейные законы связи их с градиентом давления. Так, фильтрационный поток в соответствии с законом Дарси выразится в виде

$$\bar{\gamma}_f = \rho \bar{v} = -\frac{k\rho}{\mu} \text{grad } p, \quad (2)$$

где \bar{v} — вектор скорости фильтрации, p — давление газа в свободном поровом пространстве, k — коэффициент газопроницаемости, ρ, μ — плотность и динамическая вязкость углекислого газа. Диффузионный поток в твердой фазе в соответствии с законом Фика выразится в виде

$$\bar{\gamma}_D = -D \text{grad } q, \quad (3)$$

где D — коэффициент диффузии углекислого газа в угле, q — масса газа, сорбированная единичным объемом угля. Количество газа, проходящего через поверхность S , дается интегралом

$$\iint_S \bar{\gamma} \cdot d\bar{S}$$

и идет на изменение всей массы газа в объеме в единицу времени. Это изменение задается формулой

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (M + q) dV = \iint_S \bar{\gamma} \cdot d\bar{S}, \quad (4)$$

где M — масса свободного газа в единичном объеме угля. Для преобразования правой части равенства (4) используем формулу Остроградского, что дает

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (M + q) dV = - \iiint_V \operatorname{div} \bar{\gamma} dV.$$

Так как объем V выбран произвольно, то полученное равенство возможно лишь в том случае, если

$$\frac{\partial}{\partial t} (M + q) = - \operatorname{div} \bar{\gamma}.$$

Подставляя сюда вместо $\bar{\gamma}$ формулы (1), (2), (3), получим первое уравнение:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{k\rho}{\mu} \operatorname{grad} p \right) + \operatorname{div} (D \operatorname{grad} q). \quad (5)$$

Неизвестными здесь являются величины M , q , ρ , p . Некоторые связи между ними можно выразить относительно просто. Так, считаем, что $M = t\rho$, где t — коэффициент пористости угля. Связь между ρ и p обычно задается в форме уравнения газового состояния $\rho = f(p)$. Чаще всего оно применяется в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n}, \quad (6)$$

где ρ_0 , p_0 — начальные давление и плотность, n — показатель политропы. Отсюда

$$M = t\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n}. \quad (7)$$

Зависимость q от остальных переменных сложна, поэтому не будем ее пока специализировать. Сводя все остальные переменные по формулам (6) и (7) к единой переменной p , получим из (5)

следующее дифференциальное уравнение:

$$m\rho_0 p_0^{-1/n} \frac{\partial}{\partial t} (p^{1/n}) = \operatorname{div} \left(\frac{k}{\mu} \rho_0 p_0^{-1/n} p^{1/n} \operatorname{grad} p \right) + \operatorname{div}(D \operatorname{grad} q) - \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (8)$$

Здесь еще нужно учесть связь между p и q . Обычно она нелинейна, поэтому уравнение еще более усложняется. Как же его решать? Разумеется, можно и сложное уравнение решить приближенно, если зафиксировать входящие в коэффициенты параметры как конкретные числа. Однако для практики как раз важна зависимость решения от входящих в коэффициенты параметров. Именно поэтому решение стараются найти в виде формулы из элементарных функций.

Получить такую формулу для уравнения (8) совершенно невозможно, поэтому обычно поступают следующим образом. Подбирают ситуации, когда многими величинами, входящими в уравнение, можно пренебречь, а другие — заменить усреднениями, т.е. постоянными. В результате остается упрощенное линейное уравнение, для которого можно найти подходящие формулы. Продемонстрируем этот подход на уравнении (8). Коэффициент диффузии D на несколько порядков меньше величины $k\rho/\mu$, поэтому слагаемым $\operatorname{div}(D \operatorname{grad} q)$ пренебрегают.

Пренебрежем также слагаемым $\frac{\partial q}{\partial t}$, т.е. рассмотрим ситуацию, когда сорбированным газом можно пренебречь в сравнении с массой свободного газа. После этого уравнение (8) оказывается самодостаточным, так как содержит только одну неизвестную функцию p , но уравнение получается нелинейным. Поэтому продолжим искать упрощающие предположения.

Будем считать процесс изотермическим. Тогда показатель политропы $n = 1$, что обеспечивает линейность левой части уравнения. Однако в коэффициенте правой части остается множитель p . Заменяем его усреднением $p_{\text{ср}}$. Впрочем, часто полагают $p = p_0$ — это начальное давление газа.

В результате уравнение станет линейным, но все еще сложным из-за трехмерности пространства. Поэтому последнее упрощающее предположение состоит в следующем. Какое-то направление в пространстве выберем за основное, а другими пренебрежем, т.е.

ищем решение в виде $p = p(x, t)$, где x направлена, например, параллельно напластованию. В результате уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad a = \frac{k}{m\mu} p_{\text{ср}}. \quad (9)$$

Получилось простейшее параболическое уравнение. Но его еще нужно дополнить начальным и граничным условиями. Считая размер пласта по координате x неограниченным, введем такие дополнительные условия:

$$p|_{t=0} = p_0 = \text{const}; \quad p|_{x=0} = p_c = \text{const}, \quad (10)$$

где p_c — статическое давление воздуха на контуре стока. Уравнение (9) совместно с условиями (10) определяет корректную математическую постановку задачи. Более того, ее решение можно уже представить в виде формулы, хотя и не простой.

Уравнение (9) уже встречалось в разделе 7.1, однако для случая конечного отрезка $0 \leq x \leq L$. Рассматриваемый здесь бесконечный промежуток $x \geq 0$ резко меняет ситуацию, так как решение нельзя искать в виде ряда, требуются более сложные приемы. Такие приемы были выработаны — это интегральные преобразования. Так как прикладных задач имеется великое множество, то интегральных преобразований также предложено достаточно много. Для полубесконечной прямой $t \geq 0$ и постоянных коэффициентов наиболее часто применяется преобразование Лапласа, которое определяется формулой

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Функция $f(t)$ предполагается заданной в интервале $t \geq 0$. Подчеркнем, что интегральных преобразований предложено в настоящее время много, и каждое из них содержит сотни формул, так что нет возможности запомнить эти формулы, и приходится прибегать к помощи таблиц. Небольшие таблицы приводятся, как правило, во всех учебниках, посвященных интегральным преобразованиям. В более сложных случаях необходимо прибегать к специальным математическим справочникам. Примером служит книга [33].

Вернемся к уравнению (9). Особенность применения интегральных преобразований к уравнениям с частными производными состоит в том, что выбранное преобразование, как правило, применяется только к части переменных, с тем, чтобы в результате получилось обыкновенное дифференциальное уравнение.

В частности, к уравнению (9) применим преобразование Лапласа только по переменной t , т.е. используем следующие формулы:

$$\tilde{p}(x, s) = \int_0^{\infty} p(x, t) e^{-st} dt; \quad (11)$$

$$\left(\widetilde{\frac{\partial p}{\partial t}} \right) = s\tilde{p} - p(x, 0). \quad (12)$$

Применив их к уравнению (9), получим

$$s\tilde{p}(x, s) - p_0 = a \frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2}. \quad (13)$$

По отношению к переменной x это есть обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Заметим, что постоянной считается также s . Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\tilde{p}(x, s) = C_1 e^{x\sqrt{s/a}} + C_2 e^{-x\sqrt{s/a}} + \frac{p_0}{s}. \quad (14)$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Из физических соображений ясно, что растущие неограниченно решения не требуются, поэтому полагаем $C_1 = 0$. Для определения постоянной C_2 воспользуемся граничным условием $p|_{x=0} = p_c$, подставив $x = 0$ в формулу (11). Это дает

$$\tilde{p}(0, s) = p_c \int_0^{\infty} e^{-st} dt = p_c \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{p_c}{s}.$$

Подставив $x = 0$ в формулу (14), получим

$$\tilde{p}(0, s) = C_2 + \frac{p_0}{s} = \frac{p_c}{s} \Rightarrow C_2 = \frac{p_c - p_0}{s}.$$

Тем самым формула (14) принимает вид

$$\tilde{p}(x, s) = \frac{p_c - p_0}{s} e^{-x\sqrt{s/a}} + \frac{p_0}{s}. \quad (15)$$

Получилось очень простое выражение, однако требуется вернуться к исходной переменной t , применив обратное преобразование Лапласа. Сверившись с таблицей, обнаружим, что истинное решение имеет не столь простой вид и дается формулой

$$p(x, t) = p_0 + \frac{2(p_c - p_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{at})}^{\infty} e^{-s^2} ds. \quad (16)$$

Полученный здесь интеграл $\int e^{-s^2} ds$ нельзя вычислить в элементарных функциях, поэтому приходится оставлять ответ (16) в форме интеграла. Зато производная от него легко вычисляется — она равна подынтегральной функции, взятой со знаком минус, так как переменным является нижний предел. Другими словами, имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2(p_c - p_0)}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} \bigg|_{s=\frac{x}{2\sqrt{at}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) = \frac{p_0 - p_c}{\sqrt{\pi at}} \cdot e^{-x^2/(4at)}. \quad (17)$$

В частности,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \bigg|_{x=0} = \frac{p_0 - p_c}{\sqrt{\pi at}}.$$

Эта формула используется для подсчета дебета газа. Из полученной формулы очевидно, что дебет газа уменьшается с течением времени, что достаточно очевидно. Однако формула (17) дает возможность подсчитать дебет газа более точно в любой момент времени, что и составляет ее силу.

7.4. Газовыделение из осушенных угольных пластов

Усложним несколько задачу, решенную в предыдущем разделе, допустив возможность поступления дополнительного газа за счет его выделения из сорбционного объема или за счет окисления угля. Оба источника зачастую действуют совместно, поэтому отделить газ десорбции от газа окисления довольно сложно. Предполагается, однако, что их совместный вклад можно описать известной функцией $g(x, t)$. Другими словами, остаются в силе все упрощающие предположения для уравнения (8) раздела 7.3, кроме одного. Именно, считаем, что $-\partial q/\partial t = g(x, t)$.

В результате задача примет такой вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (1)$$

$$p|_{t=0} = p_0, \quad p|_{x=0} = p_c. \quad (2)$$

Функция $g(x, t)$ как раз призвана описать источник дополнительного поступления газа в фильтрационный поток за счет процессов десорбции и окисления. Многочисленные эксперименты и результаты натурных наблюдений показывают, что эта функция хорошо приближается экспонентой, так что полагаем

$$g(x, t) = q_0 e^{-\alpha t}, \quad (3)$$

где q_0 — постоянная, связанная с максимальным значением удельной мощности источника; α — эмпирический коэффициент, характеризующий уменьшение количества десорбированного во времени газа.

Так как рассматриваемое уравнение (1) линейно, то естественно решение полной задачи (1)–(2) искать как сумму двух решений

$$p = p_1 + p_2, \quad (4)$$

где p_1 удовлетворяет однородному уравнению

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \\ p_1|_{t=0} = p_0, \quad p_1|_{x=0} = p_c. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что эта задача решена в предыдущем параграфе, так что можно пользоваться готовым решением. Вторая функция p_2 должна давать решение неоднородного уравнения при однородных граничных условиях:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + q_0 e^{-\alpha t}, \quad (6)$$

$$p_2|_{t=0} = 0, \quad p_2|_{x=0} = 0. \quad (7)$$

Задачу (6)–(7) будем решать снова через преобразование Лапласа по формулам

$$\tilde{p}_2(x, s) = \int_0^{\infty} p_2(x, t) e^{-st} dt, \quad (8)$$

$$\widetilde{\left(\frac{\partial p_2}{\partial t}\right)} = s\tilde{p}_2(x, s) - p_2(x, 0), \quad \widetilde{(e^{-\alpha t})} = \frac{1}{s + \alpha}.$$

Подставляя эти формулы в преобразование Лапласа по переменной t , примененное к уравнению (6), и учитывая, что $p_2(x, 0) = 0$ в соответствии с условиями (7), получим уравнение

$$s\tilde{p}_2(x, s) = a \frac{\partial^2 \tilde{p}_2}{\partial x^2} + \frac{q_0}{s + \alpha}. \quad (9)$$

Получилось обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$\tilde{p}_2(x, s) = C_1 e^{x\sqrt{s/a}} + C_2 e^{-x\sqrt{s/a}} + \frac{q_0}{s(s + \alpha)}. \quad (10)$$

Сразу полагаем $C_1 = 0$, чтобы иметь только ограниченные решения. Чтобы вычислить постоянную интегрирования C_2 , полагаем в (10) $x = 0$, что дает

$$\tilde{p}_2(0, s) = C_2 + \frac{q_0}{s(s + \alpha)}. \quad (11)$$

Аналогично, полагая $x = 0$ в формуле (8), получим

$$\tilde{p}_2(0, s) = \int_0^{\infty} p_2(0, t) e^{-st} dt = 0, \quad (12)$$

так как $p_2(0, t) = 0$ в соответствии с условиями (7). Сравнивая равенства (11) и (12), определяем постоянную $C_2 = -q_0/[s(s + \alpha)]$.

Подставляя ее в общее решение (10), получим частное решение

$$\tilde{p}_2(x, s) = \frac{q_0}{s(s + \alpha)} \left(1 - e^{-x\sqrt{s/a}}\right). \quad (13)$$

Чтобы получить функцию $p_2(x, t)$, достаточно применить обратное преобразование Лапласа. Это приведет к ответу типа (16) из раздела 7.3. Заметим, что во многих вопросах не требуется немедленный переход к функции $p_2(x, t)$. Можно пользоваться ее образом (13). Например, физически значимой величиной в изучаемом

вопросе является дебет газа, определяемый формулой

$$J(t) = \theta \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (14)$$

где θ — подходящий числовой коэффициент.

Представим дебет в виде суммы

$$J = J_1 + J_2, \quad (15)$$

где J_1 вычисляется по давлению p_1 , J_2 — по давлению p_2 . Величина J_1 уже вычислена в конце предыдущего раздела и имеет вид

$$J_1(t) = \frac{\theta(p_0 - p_c)}{\sqrt{\pi a t}}. \quad (16)$$

Она убывает пропорционально $1/\sqrt{t}$ по времени. Вычислим добавку J_2 , определяемую давлением p_2 , по формуле

$$J_2(t) = \theta \frac{\partial p_2(0, t)}{\partial x}. \quad (17)$$

Чтобы воспользоваться известным уже выражением для $\tilde{p}_2(x, t)$, применим преобразование Лапласа к равенству (17), что дает

$$\tilde{J}_2(s) = \theta \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}_2(0, s). \quad (18)$$

Из формулы (13) находим без труда, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}_2(x, s) = \frac{q_0}{s(s + \alpha)} \cdot \sqrt{\frac{s}{a}} e^{-x\sqrt{s/a}},$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{p}_2(0, s) = \frac{q_0 \sqrt{s}}{s(s + \alpha) \sqrt{a}}.$$

Подставляя в (18), найдем

$$\tilde{J}_2(s) = \frac{\theta q_0 \sqrt{s}}{s(s + \alpha) \sqrt{a}} = \frac{\theta q_0}{\alpha \sqrt{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{s + \alpha} \right).$$

Чтобы получить функцию $J_2(t)$, придется воспользоваться таблицей преобразования Лапласа, что приводит к такому ответу:

$$J_2(t) = \frac{2\theta q_0 e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi \alpha a}} \int_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{\sigma^2} d\sigma. \quad (19)$$

Благодаря интегралу с переменным верхним пределом, поведение функции (19) при больших значениях аргумента $t \rightarrow \infty$ не очень ясно с первого взгляда. Дополнительное изучение этой функции показывает, что сначала она монотонно возрастает, а затем монотонно убывает таким образом, что ее вклад становится пренебрежимо малым в сравнении с функцией $J_1(t)$, задаваемой формулой (16). Это значит, что с течением времени влияние $J_2(t)$ ослабевает, что совпадает с натурными наблюдениями.

7.5. Задачи

1. В разделе 7.1 решена задача о самонагревании угля в форме куба. Решить ту же задачу в предположении, что уголь имеет форму шара радиуса R . Вычислить минимальную массу угля, достаточную для начала процесса самонагревания. Указание: схема решения этой задачи приведена в книге [48, с. 99].

2. Решить задачу о самонагревании угля при следующих предположениях. Угольное скопление занимает все пространство с постоянной температурой T_0 . В момент времени $t = 0$ шар радиуса R приобрел температуру $T_1 > T_0$. Указание: схема решения этой задачи дана в книге [31, с. 126–132].

3. Фильтрация воздуха в выработанное пространство для прямоточной схемы проветривания описывается уравнением Лапласа в прямоугольнике

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < D; \ 0 < y < L)$$

с граничными условиями

$$p|_{x=0} = p_1 - \beta_1 y, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=D} = 0 \quad (0 \leq y \leq D),$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad p|_{y=L} = p_2 - \beta_2 x.$$

Решить эту задачу и сравнить ответ с задачей 2. Указание: схема решения дана в книге [31, с. 52–56].

4. В разделах 7.3–7.4 решена задача о газовыделении осушенных пластов. Ответ получен в форме суммы двух слагаемых. Второе слагаемое $J_2(t)$ вычисляется по формуле (18) раздела 7.4, и

существенно зависит от параметра α . В книге [60] даны результаты лабораторных экспериментов: $\alpha = (1 \div 3) \cdot 10^{-10}$ (1/с). Считая время $t \leq 1$ год, убедиться, что для вычисления функции $J_2(t)$ можно использовать ряды, в которых достаточно сохранить только первое слагаемое, что дает формулу:

$$J_2 = \frac{2\theta q_0}{\sqrt{\pi\alpha}} \sqrt{t}.$$

Библиографический список

1. *Alinhac S.* Blowup for nonlinear hyperbolic equations. Birkhäuser: Boston, 1995. 113 p.
2. *Bidaut-Veron M.* Local and global behaviour of solutions of quasilinear equations of Emden–Fowler type // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 107. P. 293–324.
3. *Brezis H., Cabré X.* Some simple nonlinear PDE's without solutions // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B. 1998. V. 8. P. 223–262.
4. *Del Santo D., Georgiev V., Mitidieri E.* Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems / Progress in Nonlinear Diff. Equations and Their Applications. Birkhäuser: Boston, 1997. V. 32, P. 117–140.
5. *Deng K., Levine H. A.* The role of critical exponent in blow-up theorem: the sequel // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243. P. 85–126.
6. *El Hamidi A., Laptev G.G.* Nonexistence of solutions to systems of higher-order semilinear inequalities in cone-like domains // Electron. J. Differential Equations. 2002. V. 2002, N. 97, P. 1–19.
7. *El Hamidi A., Laptev G.G.* Existence and nonexistence results for reaction–diffusion equations in product of cones // Central European Journal of Mathematics. 2003. V. 1, N 1. P. 61–78.
8. *Fujita H.* On the blowing-up of solutions of the Cauchy problems for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1966. V. 13. P. 109–124.
9. *Galaktionov V.A., Pohozaev S.I.* Blow-up, critical exponents and asymptotic spectra for nonlinear hyperbolic equations: Math. Preprint Univ. of Bath 00/10, 2000.
10. *Georgiev V., Linblad H., Sogge C.* Weighted Strichartz estimate and global existence for semilinear wave equation // Amer. J. Math. 1997. V. 119. P. 1291–1319.
11. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 525–598.
12. *John F.* Nonlinear wave equations, formation of singularities. University Lecture Ser., V.2, Amer. Math. Soc. 1990. 150 p.
13. *Kato T.* Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations // Comm. Pure. Appl. Math. 1980. V. 33. P. 501–505.

14. *Laptev G.G.* Some nonexistence results for higher-order evolution inequalities in cone-like domains // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 7. P. 87–93.
15. *Laptev G.G.* Absence of solutions to evolution-type differential inequalities in the exterior of a ball // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9, N 2. P. 180–187.
16. *Laptev G.G.* Nonexistence of solutions for parabolic inequalities in unbounded cone-like domains via the test function method // J. Evolution Equations. 2002. V. 2, N 3. P. 459–470.
17. *Laptev G.G.* Nonexistence results for higher-order evolution partial differential inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V.131, N 2. P. 415–423.
18. *Levine H. A.* The role of critical exponents in blow-up theorems // SIAM Reviews. 1990. V. 32. P. 371–386.
19. *Pinsky R. G.* Existence and nonexistence of global solutions for $u_t = \Delta u + a(x)u^p$ in R^d // J. Differential Equations. 1997. V. 133. P. 152–177.
20. *Pohozaev S., Tesei A.* Blow-up of nonnegative solutions to quasilinear parabolic inequalities // Rend. Mat. Acc. Lincei. s. 9. 2000. V.11. P.99-109.
21. *Veron L., Pohozaev S.I.* Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequalities // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 2000. V. 29, N2. P. 393–420.
22. *Zhang Q.* Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds // Duke Math. J. 1999. V. 97. N.3. P. 515–539.
23. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996. 480 с.
24. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.
25. *Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985. 310 с.
26. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. М.: Наука, 1991. 448 с.
27. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 684 с.
28. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
29. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. М.: Наука, 1982. 256 с.
30. *Володин Ю.В.* Об отсутствии глобальных решений эллиптических неравенств и систем неравенств // Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Инф. 2001. Т. 7, Вып. 1. С. 61–68.
31. *Глузберг Е.И., Гращенков Н.Ф., Шалаев В.С.* Комплексная профилактика газовой и пожарной опасности в угольных шахтах. М.: Недра, 1988. 181 с.
32. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Ч.II. М.: Высш. школа, 1980. 365 с.
33. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

34. Жукова Г.С. Дифференциальные уравнения. М.: РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2001. 347 с.
35. Жукова Г.С., Четкина Е.М., Богин Е.С. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2001. 196 с.
36. Жукова Г.С., Четкина Е.М. Уравнения математической физики. М.: РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2002. 111 с.
37. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 623 с.
38. Коньков А.А. О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств // Изв. РАН. Сер. математическая. 1999. Т. 63, N 2. С. 41–127.
39. Курта В.В. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МИАН, 1994. 323 с.
40. Курта В.В. Об отсутствии положительных решений у полулинейных эллиптических уравнений // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 162–169.
41. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
42. Лаптев Г.Г. Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64. С. 107–124.
43. Лаптев Г.Г. Отсутствие решений полулинейных параболических дифференциальных неравенств в конусах // Матем. сб. 2001. Т. 192. С. 60–76.
44. Лаптев Г.Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 223–235.
45. Лаптев Г.И. Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени // Матем. сб. 2000. Т. 191, N9. С. 43–64.
46. Лаптев Г.И. Условия несуществования глобальных решений задачи Коши для параболического уравнения с интегральным нелинейным возмущением // Дифференц. уравн. 2002. Т. 38, N4. С. 435–446.
47. Лаптев Г.И. Возрастающие монотонные операторы в банаховом пространстве // Матем. заметки. 2002. Т. 71, N2. С. 214–226.
48. Линденау Н.И., Маевская В.М., Крылов В.Ф. Происхождение, профилактика и тушение эндогенных пожаров в угольных шахтах. М.: Недра, 1977. 320 с.
49. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1989. 600 с.
50. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: РУДН, 1997. 447 с.

51. Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в \mathbb{R}^N // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 192–222.
52. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. М.: Наука, 2001. (Тр. МИАН, Т. 234).
53. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.
54. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977. 431 с.
55. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
56. Пикун В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1995. 224 с.
57. Рыбников К.А. История математики. М.: Изд-во МГУ, 1974. 455 с.
58. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
59. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992. 431 с.
60. Соколов Э.М., Качурин Н.М. Угольный газ в угольных шахтах. М.: Недра, 1987. 142 с.
61. Старостина С.В. О методе пробных функций исследования отсутствия решений обыкновенных дифференциальных неравенств // Диф. уравнения и прикл. задачи: Сб. науч. тр. Тула: ТулГУ, 2001. С. 120–124.
62. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
63. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.: Высш. школа, 1983. 112 с.
64. Шкловский И.С. Вселенная, жизнь, разум. М.: Наука, 1976. 368 с.
65. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001. 303 с.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Эволюционные уравнения с двумя переменными	6
1.1. Простейшие уравнения с частными производными	6
1.2. Приведение уравнений второго порядка с двумя переменными к каноническому виду	10
1.3. Уравнение колебаний струны	16
1.4. Задача Коши для уравнения колебаний струны	19
1.5. Метод бегущих волн для струны	26
1.6. Примеры краевых задач на собственные значения	35
1.7. Колебания ограниченной струны	39
1.8. Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня	45
1.9. Распространение тепла в конечном стержне	49
1.10. Колебания прямоугольной мембраны	56
Глава 2. Уравнения в полярной системе координат ..	63
2.1. Уравнение Лапласа в кольце	63
2.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге и во внешности круга	67
2.3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце	72
2.4. Уравнение Пуассона в кольце	76
2.5. Цилиндрические функции	82
2.6. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций	86
2.7. Уравнение Гельмгольца в круге	91
2.8. Уравнение теплопроводности в круге для случая радиальной симметрии	97
2.9. Колебания круглой мембраны для случая радиальной симметрии	104

2.10.	Уравнение теплопроводности в цилиндре для случая радиальной симметрии	109
Глава 3. Уравнения в сферической системе		
	координат	116
3.1.	Функции Лежандра	116
3.2.	Уравнение Лапласа в шаровом слое для случая радиальной симметрии	123
3.3.	Общий случай уравнения Лапласа в шаровом слое	126
3.4.	Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое	131
3.5.	Пример решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаровом слое	135
3.6.	Формула решения волнового уравнения в пространстве	139
3.7.	Задача Коши для волнового уравнения в пространстве	144
3.8.	Решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости	149
Глава 4. Функция Грина краевой задачи		
4.1.	Формулы Грина для оператора Лапласа	155
4.2.	Интегральное представление дифференцируемых функций	159
4.3.	Гармонические функции и их свойства	163
4.4.	Задача Дирихле для уравнения Пуассона	167
4.5.	Примеры построения функции Грина	171
Глава 5. Основы общей теории уравнений с частными		
	производными	177
5.1.	Метрические пространства	177
5.2.	Нормированные пространства	184
5.3.	Линейные операторы и функционалы в банаховом пространстве	189
5.4.	Обобщенные функции конечного порядка	196
5.5.	Дифференцирование обобщенных функций	204
5.6.	Гильбертовы пространства	209
5.7.	Пространство $L^2(\Omega)$	218

5.8.	Пространство Соболева $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$	223
5.9.	Существование решений краевых задач	228
Глава 6. Глобальные решения дифференциальных уравнений и неравенств		
		234
6.1.	Глобальные решения дифференциальных уравнений ..	235
6.2.	Отсутствие глобальных решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств	245
6.3.	Глобальные решения эллиптических дифферен- циальных неравенств с частными производными	250
6.4.	Отсутствие решений эволюционных дифферен- циальных неравенств высокого порядка	277
Глава 7. Некоторые приложения		
		300
7.1.	Моделирование процесса самовозгорания угля	300
7.2.	Фильтрация воздуха в выработанном пространстве ...	305
7.3.	Массоперенос углекислого газа в массиве и вентиляционных потоках	311
7.4.	Газовыделение из осушенных угольных пластов	316
7.5.	Задачи	320
Библиографический список		322