$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

А. Д. ПОЛЯНИН, А. И. ЖУРОВ

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

$$\int f\,du$$

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Д. ПОЛЯНИН, А. И. ЖУРОВ

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Москва
ИПМех РАН
2020

УДК 517.9
ББК 517.2
П 54

Полянин А. Д., Журов А. И. **Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики**. — М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020. — 384 с. — ISBN 978-5-91741-258-0.

Книга посвящена описанию и применению методов обобщенного и функционального разделения переменных, используемых для поиска точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Достаточно подробно рассматривается также прямой метод построения редукций (во многом родственный методам функционального разделения переменных) и его более общая версия, основанная на принципе расщепления. Кроме того, дано описание метода дифференциальных связей, который обобщает многие другие точные методы. Изложение сопровождается многочисленными примерами использования методов для поиска точных решений конкретных нелинейных уравнений математической физики. Исследуются уравнения тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамики, нелинейной оптики, теории горения, химической технологии, биологии и др. Особое внимание уделено нелинейным уравнения достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Такие уравнения наиболее сложны для анализа, а их точные решения представляют больший практический интерес и могут применяться для оценки точности численных методов решения соответствующих начально-краевых задач. Книга содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался.

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной и вычислительной математики, теоретической физики, механики, теории управления и химической технологии. Отдельные разделы книги и примеры могут быть использованы в курсах лекций по уравнениям математической физики, методам математической физики и уравнениям с частными производными, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Табл. 24. Ил. 3. Библиогр. 378 назв.

ISBN 978-5-91741-258-0

Оглавление

Нашему другу и соавтору
Валентину Федоровичу Зайцеву
посвящается

Предисловие

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Точные решения уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной и вычислительной математике, асимптотическим методам, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих различным начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных нелинейных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для формулировки тестовых задач, предназначенных для проверки корректности и оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple, Maxima и др.)

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперименты для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий.

В данной книге под точными решениями нелинейных уравнений в частных производных понимаются следующие решения:

(a) Решения, которые выражаются через элементарные функции.

(b) Решения, которые выражаются в виде квадратур*.

(c) Решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

Допускаются также комбинации случаев (a) и (b), а также (b) и (c).

Простейший случай (a) специально выделен из более общего случая (b), поскольку некоторые авторы ограничиваются поиском только таких точных решений. В случаях (a) и (b) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме.

Под точными методами решения нелинейных уравнений с частными производными понимаются методы, позволяющие получать точные решения.

Наиболее распространенные и весьма эффективные точные методы решения нелинейных уравнений с частными производными перечислены ниже в сводной таблице. Эти методы имеют широкую область применимости, позволяя строить точные решения нелинейных УрЧП разных типов и разных порядков (в настоящее время имеется много публикаций, в которых с помощью этих методов получено большое число точных решений).

Замечание 1. *Наиболее популярными методами являются методы группового анализа и обратной задачи рассеяния (данные основаны на поиске ключевых слов в интернете). Описанию этих методов посвящена обширная литература, см., например, книги [32, 91, 92, 197, 259] (методы группового анализа) и [70, 71, 107, 140, 151, 256, 268] (методы обратной задачи).*

Замечание 2. *В теории тепло- и массопереноса и гидродинамике** эффективно работают только первые шесть методов, указанных в таблице.*

В книге основное внимание уделено описанию и применению методов обобщенного (нелинейного) и функционального разделения переменных. Эти методы являются наиболее эффективными для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Важно отметить, что именно такие нелинейные УрЧП наиболее сложны для анализа и построения точных решений. Достаточно подробно рассматривается также прямой метод поиска редукций (во многом родственный методам функционального разделения переменных) и его более общая версия,

*Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, при записи которых используются указанный априори набор допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение (это необходимо, когда рассматриваемое уравнение зависит от произвольных или специальных функций), а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции), операций дифференцирования и взятия неопределенного интеграла.

**Здесь имеется в виду поиск точных решений уравнений Навье — Стокса и уравнений гидродинамического пограничного слоя.

ТАБЛИЦА
Основные методы поиска точных решений
нелинейных уравнений с частными производными

№	Название метода	Характерные особенности
1	Классический метод поиска симметрий (метод группового анализа)	Основан на поиске однопараметрических групп Ли непрерывных преобразований, которые сохраняют вид УрЧП. Позволяет получать автомодельные и другие инвариантные решения
2	Неклассический метод поиска симметрий (допускает различные модификации)	Обобщает классический метод поиска симметрий (основан на условии инвариантной поверхности). Позволяет описать более широкий класс точных решений, но более сложен для использования
3	Прямой метод построения редукций (метод Кларксона — Крускала)	Задается общий вид решения с несколькими свободными функциями. Для определения этих функций используются специальные приемы, одна из искомых функций должна удовлетворять ОДУ
4	Метод дифференциальных связей	Основан на анализе совместности рассматриваемого УрЧП и вспомогательных (более простых) дифференциальных уравнений, называемых дифференциальными связями
5	Методы обобщенного разделения переменных	Решение ищется в виде суммы попарных произведений функций разных аргументов. Для определения искомых функций используют несколько разных методов
6	Методы функционального разделения переменных	Задается вид решения (в явной или неявной форме) с несколькими свободными функциями. Эти функции определяются методами дифференцирования или расщепления
7	Метод обратной задачи рассеяния (теория солитонов)	Основан на специальном представлении уравнения (с помощью пары Лакса линейных операторов) или на условии совместности двух систем линейных дифференциальных уравнений
8	Метод усеченных разложений Пенлеве	Основан на поиске решений в виде усеченных разложений, имеющих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается произвольной функцией

основанная на использовании принципа расщепления. Кроме того, излагается метод дифференциальных связей, который обобщает многие другие точные методы. Проведено сопоставление эффективности упомянутых методов.

Изложение сопровождается многочисленными конкретными примерами, в которых авторы старались давать неформальные пояснения и высказывать соображения, которые использовались при построении тех или иных решений. Для иллюстрации широкой области применимости описанных методов рассматриваются как нелинейные уравнения второго порядка, так и различные уравнения старших порядков.

При отборе практического материала авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим двум важным типам УрЧП:

- нелинейным уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, нелинейной оптике, химической технологии, биологии и др.);
- нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют наибольший интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов).

Важно отметить, что подавляющее большинство известных общих решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений представляется в неявной или параметрической форме (подобный вывод следует из статистической обработки материалов наиболее полных справочников по точным решениям ОДУ [285, 288]). Данное обстоятельство позволяет высказать правдоподобную гипотезу о том, что нелинейные уравнения с частными производными также допускают точные решения (в виде квадратур) в неявной или параметрической форме чаще, чем в явной форме*. Поэтому в данную книгу включены разработанные в последние несколько лет прямые методы построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявной форме (характерная качественная особенность этих методов заключается в том, что они обычно позволяют получать решения в замкнутом виде).

В целом, данная книга содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался.

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно, чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом.

Авторы надеются, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной и вычислительной математики, теоретической физики, механики, теории управления, химической технологии и биологии. Отдельные разделы книги и примеры могут быть использованы в курсах лекций по уравнениям математической физики, методам математической физики и уравнениям с частными производными, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Авторы

* В частности, известные в настоящее время нелинейные УрЧП, зависящие от одной или нескольких произвольных функций искомой величины, не имеют невырожденных решений, которые допускают представление в явной форме.

Некоторые обозначения и замечания

Латинские буквы

$C_1, C_2, \ldots$ — произвольные постоянные;
t — время ($t \geqslant 0$);
u — искомая функция (зависимая переменная);
x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);
$x_1, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в n-мерном пространстве;
$\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Греческие буквы

Δ — оператор Лапласа:
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — в двумерном случае,
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — в трехмерном случае,
$\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — в n-мерном случае;
$\Delta\Delta$ — бигармонический оператор,
$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — в двумерном случае.

Краткие обозначения производных

Частные производные функции $u = u(x,t)$:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad u_x^{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Обыкновенные производные функции $f = f(x)$:

$$f'_x = \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} = \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f''''_{xxxx} = \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad f_x^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при} \quad n > 4.$$

Замечания

1. В книге часто используются сокращения ОДУ и УрЧП, которые соответственно обозначают «обыкновенное дифференциальное уравнение» (или «обыкновенные дифференциальные уравнения») и «уравнение с частными производными» (или «уравнения с частными производными»).

2. Если формула или решение содержит производные некоторых функций, то предполагается, что эти производные существуют.

3. Если формула или решение содержит неопределенные или определенные интегралы, то предполагается, что эти интегралы существуют.

4. В формулах и решениях, содержащих выражения типа $\dfrac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.

5. В книге опускаются простые решения, которые зависят только от одной независимой переменной, входящей в исходное уравнение.

6. В книге часто используется очень простая и наглядная классификация наиболее распространенных решений по их внешнему виду, которая не связана с типом и видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

ТАБЛИЦА

Наиболее распространенные типы точных решений для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией u

№	Название решения	Структура решения (x и t можно поменять местами)
1	Решение с аддитивным разделением переменных	$u = \varphi(x) + \psi(t)$
2	Решение с мультипликативным разделением переменных	$u = \varphi(x)\psi(t)$
3	Решение типа бегущей волны*	$u = U(z),\quad z = \alpha x + \beta t,\quad \alpha\beta \neq 0$
4	Автомодельное решение	$u = t^\alpha F(z),\quad z = xt^\beta$
5	Обобщенное автомодельное решение	$u = \varphi(t)F(z),\quad z = \psi(t)x$
6	Решение типа обобщенной бегущей волны	$u = U(z),\quad z = \varphi(t)x + \psi(t)$
7	Решение с обобщенным разделением переменных	$u = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных (специальный случай)	$u = U(z),\quad z = \varphi(x) + \psi(t)$
9	Решение с функциональным разделением переменных	$u = U(z)$, $z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе независимые переменные могут играть роль пространственных координат.

1. Методы обобщенного разделения переменных

1.1. Решения с простым разделением переменных

1.1.1. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных

Линейные уравнения математической физики. Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики [60, 110, 215, 280, 281, 378]. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией $u = u(x, t)$ этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\psi(t), \tag{1.1.1.1}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и определяются в ходе последующего анализа.

► Пример 1.1. Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{1.1.1.2}$$

Его точные решения ищем в виде произведения функций (1.1.1.1). Подставив (1.1.1.1) в (1.1.1.2), имеем

$$\varphi\psi_t' = \psi\varphi_{xx}''. \tag{1.1.1.3}$$

Разделяя переменные путем деления обеих частей на $\varphi\psi$, получим

$$\frac{\psi_t'}{\psi} = \frac{\varphi_{xx}''}{\varphi}. \tag{1.1.1.4}$$

Левая часть этого равенства зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно лишь когда обе части равенства (1.1.1.4) по отдельности равны одной и той же постоянной, т. е.

$$\frac{\psi_t'}{\psi} = C, \quad \frac{\varphi_{xx}''}{\varphi} = C, \tag{1.1.1.5}$$

где C называется *константой разделения* и является свободным параметром.

При $C = -\lambda^2 \leqslant 0$ общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1.1.5) определяются формулами

$$\varphi = A_1\cos(\lambda x) + A_2\sin(\lambda x), \quad \psi = A_3\exp(-\lambda^2 t), \tag{1.1.1.6}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные. Так как функции φ и ψ входят в решение (1.1.1.1) в виде произведения, то постоянную A_3 без ограничения общности можно положить равной единице.

Разным значениям $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda = \lambda_n$ в (1.1.1.6) соответствуют разные решения. Поскольку уравнение (1.1.1.2) линейное, то эти решения в силу принципа линейной суперпозиции можно складывать. В результате можно получить точное решение уравнения (1.1.1.2) в виде суммы

$$u = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(t), \tag{1.1.1.7}$$

где

$$\varphi_k(x) = A_{k1}\cos(\lambda_k x) + A_{k2}\sin(\lambda_k x), \quad \psi_k(t) = A_{k3}\exp(-\lambda_k^2 t), \tag{1.1.1.8}$$

а A_{k1}, A_{k2}, A_{k3} — произвольные постоянные.

Решение начально-краевых задач для уравнения (1.1.1.2) на конечном отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ ищется в виде бесконечного ряда (1.1.1.7) при $n = \infty$, где константы λ_k, A_{k1}, A_{k2} определяются из граничных условий (и дополнительного условия типа нормировки), а константы A_{k3} — из начального условия [60, 280, 281]. ◄

Замечание 1.1. *Уравнение (1.1.1.3) является функционально-дифференциальным уравнением простейшего вида. В общем случае к функциональным уравнениям относятся уравнения, содержащие функции разных аргументов, а к функционально-дифференциальным уравнениям — уравнения, содержащие функции разных аргументов и производные этих функций.*

Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. Интегрирование отдельных классов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов [207, 280, 289]:

$$u = \varphi(x) + \psi(t). \tag{1.1.1.9}$$

Многие линейные уравнения с частными производными первого, второго и более высоких порядков также допускают точные решения вида (1.1.1.9).

► Пример 1.2. Свободное вертикальное падение точечного тела вблизи поверхности Земли описывается нелинейным уравнением с частными производными первого порядка (уравнение Гамильтона—Якоби) [28, 178]:

$$u_t + a u_x^2 = bx, \tag{1.1.1.10}$$

где u — производящая функция Гамильтона (в аналитической механике обычно обозначается буквой S), t — время, x — координата вдоль оси, направленной вертикально вниз, $m = \frac{1}{2a}$ — масса тела, $g = 2ab$ — ускорение силы тяжести.

Точное решение уравнения (1.1.1.10) ищем в виде суммы функций разных аргументов (1.1.1.9). Подставим (1.1.1.9) в (1.1.1.10), а затем перенесем член $a(\varphi'_x)^2$ в правую часть уравнения. В результате получим равенство

$$\psi'_t = -a(\varphi'_x)^2 + bx, \tag{1.1.1.11}$$

левая часть которого зависит от переменной t, а правая — от x. Приравнивая, как и в примере 1, обе части (1.1.1.11) одной и той же константе, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\psi'_t = C, \quad -a(\varphi'_x)^2 + bx = C. \tag{1.1.1.12}$$

Общее решение этих уравнений определяется формулами

$$\psi = Ct + C_2, \quad \varphi = \pm\frac{2a}{3b}\left(\frac{bx - C}{a}\right)^{3/2} + C_3, \tag{1.1.1.13}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Подставим (1.1.1.13) в (1.1.1.9), переобозначим $C = -C_1$ и положим $C_3 = 0$ (в каждую из функций (1.1.1.13) входит произвольная аддитивная постоянная, поэтому при сложении функций одну из этих постоянных можно положить равной нулю). В результате получим точное решение уравнения (1.1.1.10):

$$u = -C_1 t \pm \frac{2a}{3b}\left(\frac{bx + C_1}{a}\right)^{3/2} + C_2.$$

В теории нелинейных уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными подобные решения, содержащие две произвольные постоянные, называются *полными интегралами*. Эти решения позволяют строить общие решения рассматриваемых уравнений в параметрической форме [207, 289]. ◄

Некоторые нелинейные уравнения математической физики второго и более высоких порядков также имеют точные решения вида (1.1.1.1) или (1.1.1.9). Подобные решения будем называть соответственно *решениями с мультипликативным* и *аддитивным разделением переменных* [48, 286].

1.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях с частными производными

Нелинейные уравнения с двумя независимыми переменными. В простейших случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях с частными производными с двумя независимыми переменными проводится по той же схеме, что и в линейных уравнениях. Точное решение ищется в виде произведения или суммы функций разных аргументов. Подставив (1.1.1.1) или (1.1.1.9) в рассматриваемое уравнение и делая элементарные алгебраические операции, приходят к равенству двух выражений (для уравнений с двумя переменными), зависящих от разных аргументов. Такая ситуация возможна только в том случае, когда каждое из указанных выражений равно одной и той же постоянной величине. В результате для определения двух искомых величин $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получают два обыкновенных дифференциальных уравнения (одно для φ, а другое для ψ). Точные решения с подобным разделением переменных будем называть *решениями с простым разделением переменных*.

Замечание 1.2. *Точные решения вида (1.1.1.1) и (1.1.1.9) не относятся к решениями с простым разделением переменных, если хотя бы одна из искомых функций φ или ψ описывается переопределенной системой ОДУ.*

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

► Пример 1.3. Уравнение теплопроводности со степенно́й нелинейностью
$$u_t = a(u^k u_x)_x \tag{1.1.2.1}$$
имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов. Подставив (1.1.1.1) в уравнение (1.1.2.1), приходим к выражению
$$\varphi\psi'_t = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi'_x)'_x.$$
Разделив обе части на $\varphi\psi^{k+1}$, получим
$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi}.$$
Левая часть этого равенства зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно лишь при выполнении условий
$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = C, \qquad \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi} = C, \tag{1.1.2.2}$$
где C — произвольная постоянная. Решение первого ОДУ (1.1.2.2) выражается в элементарных функциях*, а решение второго ОДУ может быть представлено в неявной форме.

Процедура построения решения с разделяющимися переменными вида (1.1.1.1) нелинейного уравнения (1.1.2.1) полностью аналогична процедуре, используемой для решения линейного уравнения теплопроводности (1.1.1.2) и других линейных УрЧП.

Принципиальная разница между линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями заключается в том, что для решений нелинейных уравнений не применим принцип суперпозиции, т. е. нельзя складывать решения вида (1.1.1.1) уравнения (1.1.2.1), полученные путем интегрирования ОДУ (1.1.2.2) для различных констант C. ◄

► Пример 1.4. Волновое уравнение с экспоненциальной нелинейностью
$$u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x \tag{1.1.2.3}$$
имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов. Подставим выражение (1.1.1.9) в уравнение (1.1.2.3). После деления обеих частей на $e^{\lambda\psi}$ приходим к равенству
$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x, \tag{1.1.2.4}$$

* Данная книга посвящена описанию методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Поэтому решения возникающих на последнем этапе существенно более простых обыкновенных дифференциальных уравнений (таких как в примерах 1.3 и 1.4) часто будут опускаться, чтобы не отвлекать внимание читателей от основной темы. О методах интегрирования ОДУ см. справочники [208, 253, 285, 288], в которых приведено также много точных решений подобных и более сложных уравнений.

левая часть которого зависит только от переменной t, а правая — только от x. Приравнивая левую и правую части (1.1.2.4) константе, имеем

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = C, \quad a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C. \tag{1.1.2.5}$$

Оба ОДУ (1.1.2.5) являются автономными (т. е. не зависят явно от независимых переменных), поэтому они допускают понижение порядка [285, 288] и приводятся к простым уравнениям. Кроме того, второе уравнение (1.1.2.5) после однократного интегрирования сводится к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными. В итоге можно получить решение уравнения (1.1.2.3) вида (1.1.1.9), которое выражается в элементарных функциях. ◀

► Пример 1.5. Уравнение теплопроводности в анизотропной среде с источником логарифмического типа

$$[f(x)u_x]_x + [g(y)u_y]_y = au\ln u \tag{1.1.2.6}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\psi(y). \tag{1.1.2.7}$$

Подставим выражение (1.1.2.7) в уравнение (1.1.2.6). После деления на $\varphi\psi$ и переноса отдельных слагаемых в разные части полученного равенства, имеем

$$\frac{1}{\varphi}[f(x)\varphi'_x]'_x - a\ln\varphi = -\frac{1}{\psi}[g(y)\psi'_y]'_y + a\ln\psi.$$

Левая часть этого выражения зависит только от переменной x, а правая — только от y. Приравнивая их постоянной величине, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$. ◀

В табл. 1.1 приведены другие примеры уравнений с простым (аддитивным или мультипликативным) разделением переменных некоторых нелинейных уравнений.

Нелинейные УрЧП с тремя и более независимыми переменными. Нелинейные уравнения математической физики с тремя и более независимыми переменными также могут иметь решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных.

► Пример 1.6. Нелинейное уравнение теплопроводности произвольной размерности

$$u_t = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u^k\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) \tag{1.1.2.8}$$

допускает решение с мультипликативным разделением переменных в виде произведения функций разных аргументов

$$u = t^{-1/k}\varphi(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.1.2.9}$$

где функция $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ описывается стационарным уравнением

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\varphi^k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big) + \frac{1}{k}\varphi = 0.$$

◀

Таблица 1.1. Некоторые нелинейные уравнения математической физики, допускающие решения с простым разделением переменных.

Уравнение	Название	Вид решений	Определяющие уравнения
$u_t=au_{xx}+bu\ln u$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx}/\varphi-b\ln\varphi=$ $-\psi'_t/\psi+b\ln\psi=C$
$u_t=a(u^ku_x)_x+bu$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$(\psi'_t-b\psi)/\psi^{k+1}=$ $a(\varphi^k\varphi'_x)'_x/\varphi=C$
$u_t=a(u^ku_x)_x+bu^{k+1}$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$\psi'_t/\psi^{k+1}=$ $a(\varphi^k\varphi'_x)'_x/\varphi+b\varphi^k=C$
$u_t=a(e^{\lambda u}u_x)_x+b$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$e^{-\lambda\psi}(\psi'_t-b)=a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x=C$
$u_t=a(e^uu_x)_x+be^u$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$e^{-\psi}\psi'_t=a(e^\varphi\varphi'_x)'_x+be^\varphi=C$
$u_t=au_{xx}+bu_x^2$	Потенциальное уравнение Бюргерса	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$\psi'_t=a\varphi''_{xx}+b(\varphi'_x)^2=C$
$u_t=au_x^ku_{xx}$	Уравнение фильтрации	$u=\varphi(x)+\psi(t)$, $u=f(x)g(t)$	$\psi'_t=a(\varphi'_x)^k\varphi''_{xx}=C_1$, $g'_t/g^{k+1}=a(f'_x)^kf''_{xx}/f=C_2$
$u_t=f(u_x)u_{xx}$	Уравнение фильтрации	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$\psi'_t=f(\varphi'_x)\varphi''_{xx}=C$
$u_{tt}=a(u^ku_x)_x$	Волновое уравнение	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$\psi''_{tt}/\psi^{k+1}=a(\varphi^k\varphi'_x)'_x/\varphi=C$
$u_{tt}=a(e^{\lambda u}u_x)_x$	Волновое уравнение	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt}=a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x=C$
$u_{tt}=au_{xx}+bu\ln u$	Волновое уравнение с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$\psi''_{tt}/\psi-b\ln\psi=$ $a\varphi''_{xx}/\varphi+b\ln\varphi=C$
$u_{xx}+a(u^ku_y)_y=0$	Анизотропное стационарное уравнение теплопроводности	$u=\varphi(x)\psi(y)$	$\varphi''_{xx}/\varphi^{k+1}=-a(\psi^k\psi'_y)'_y/\psi=C$
$u_{xx}+au_yu_{yy}=0$	Уравнение стационарного трансзвукового газового потока	$u=\varphi(x)+\psi(y)$, $u=f(x)g(y)$	$\varphi''_{xx}=-a\psi'_y\psi''_{yy}=C_1$, $f''_{xx}/f=-ag'_yg''_{yy}/g=C_2$
$u_{xy}^2=u_{xx}u_{yy}$	Уравнение Монжа — Ампера	$u=\varphi(x)+\psi(y)$, $u=f(x)g(y)$	$\varphi''_{xx}=0$ или $\psi''_{yy}=0$, $(f'_x)^2/(ff''_{xx})=gg''_{yy}/(g'_y)^2=C$
$u_t=au_{xxx}+bu_x^2$	Потенциальное уравнение Кортевега — де Фриза	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$\psi'_t=a\varphi'''_{xxx}+b(\varphi'_x)^2=C$
$u_yu_{xy}-u_xu_{yy}=au_{yyy}$	Уравнение пограничного слоя	$u=\varphi(x)+\psi(y)$, $u=f(x)g(y)$	$-\varphi'_x=a\psi'''_{yyy}/\psi''_{yy}=C_1$, $f'_x=ag'''_{yyy}[(g'_y)^2-gg''_{yy}]^{-1}=C_2$

Системы нелинейных уравнений математической физики. Некоторые системы нелинейных уравнений математической физики также имеют точные решения с простым разделением переменных. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

► Пример 1.7. Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + uf(u/v), \\ v_t &= bv_{xx} + vg(u/v), \end{aligned} \tag{1.1.2.10}$$

которые содержат две произвольные функции $f(z)$ и $g(z)$, а также две константы a и b.

Точное решение системы (1.1.2.10) ищем в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi_1(x)\psi_1(t), \quad v = \varphi_2(x)\psi_2(t). \tag{1.1.2.11}$$

Поделим уравнения (1.1.2.10) соответственно на u и v, а затем подставим в них (1.1.2.11). В результате получим функционально-дифференциальные уравнения

$$\frac{(\psi_1)'_t}{\psi_1} = a\frac{(\varphi_1)''_{xx}}{\varphi_1} + f\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{\psi_1}{\psi_2}\right), \quad \frac{(\psi_2)'_t}{\psi_2} = b\frac{(\varphi_2)''_{xx}}{\varphi_2} + g\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{\psi_1}{\psi_2}\right), \tag{1.1.2.12}$$

левые части которых зависят только от t, а первые члены справа — только от x. Переменные в этих уравнениях разделяются, если функции $f(\ldots)$ и $g(\ldots)$ зависят только от x или только от t. Рассмотрим указанные возможности по порядку.

1°. Полагая $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi(t)$ в (1.1.2.10) и разделяя переменные, в итоге приходим к следующим трем уравнениям:

$$\psi'_t = C\psi, \tag{1.1.2.13}$$

$$a(\varphi_1)''_{xx} - C\varphi_1 + \varphi_1 f(\varphi_1/\varphi_2) = 0, \tag{1.1.2.14}$$

$$b(\varphi_2)''_{xx} - C\varphi_2 + \varphi_2 g(\varphi_1/\varphi_2) = 0, \tag{1.1.2.15}$$

где C — произвольная постоянная. Интегрируя уравнение (1.1.2.13), получим решение с мультипликативным разделением переменных системы (1.1.2.10):

$$u = \exp(Ct)\varphi_1(x), \quad v = \exp(Ct)\varphi_2(x),$$

где функции $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ второго порядка (1.1.2.14) — (1.1.2.15).

Укажем два простых семейства точных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1.2.14) — (1.1.2.15).

(a) Семейство решений тригонометрического вида:

$$\varphi_1(x) = k[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)], \quad \varphi_2(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

где A и B — произвольные постоянные, а постоянные k и λ определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений

$$\begin{aligned} -a\lambda^2 - C + f(k) &= 0, \\ -b\lambda^2 - C + g(k) &= 0. \end{aligned}$$

(b) Семейство решений экспоненциального вида:

$$\varphi_1(x) = k(Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}), \quad \varphi_2(x) = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x},$$

где A и B — произвольные постоянные, а постоянные k и λ определяются из алгебраической (трансцендентной) системы уравнений

$$a\lambda^2 - C + f(k) = 0,$$
$$b\lambda^2 - C + g(k) = 0.$$

2°. Полагая $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$ в (1.1.2.10) и разделяя переменные, приходим к системе ОДУ:

$$\varphi''_{xx} = C\varphi, \tag{1.1.2.16}$$
$$(\psi_1)'_t = aC\psi_1 + \psi_1 f(\psi_1/\psi_2), \tag{1.1.2.17}$$
$$(\psi_2)'_t = bC\psi_2 + \psi_2 g(\psi_1/\psi_2). \tag{1.1.2.18}$$

Интегрируя уравнение (1.1.2.16), в зависимости от знака произвольной постоянной C получим два различных невырожденных решения с мультипликативным разделением переменных системы УрЧП (1.1.2.10):

(a) при $C = -\lambda^2 < 0$:

$$u = [A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)]\psi_1(t), \quad v = [A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)]\psi_2(t), \tag{1.1.2.19}$$

(b) при $C = \lambda^2 > 0$:

$$u = (Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x})\psi_1(t), \quad v = (Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x})\psi_2(t), \tag{1.1.2.20}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ второго порядка (1.1.2.17) — (1.1.2.18).

Отметим, что система ОДУ (1.1.2.17) — (1.1.2.18) допускает точное решение экспоненциального вида $\psi_1 = A_1 e^{\beta t}$, $\psi_2 = A_2 e^{\beta t}$. ◀

Некоторые обобщения. Ниже приведены два утверждения, которые позволяют обобщать решения с простым разделением переменных специального вида.

Утверждение 1. Пусть уравнение

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \tag{1.1.2.21}$$

допускает решение с простым разделением переменных специального вида

$$u = t^\beta \varphi(x), \quad \beta \neq 0, \tag{1.1.2.22}$$

которое не меняется (т. е. сохраняет вид, инвариантно) при преобразовании растяжения

$$t \longmapsto \lambda t, \quad u \longmapsto \lambda^\beta u \quad (\lambda > 0 \text{ — произвольная постоянная}). \tag{1.1.2.23}$$

Пусть уравнение (1.1.2.21) также не меняется при преобразовании (1.1.2.23). Тогда уравнение (1.1.2.21) допускает более сложное решение вида

$$u = (t + C_1)^\beta \theta(z), \quad z = x + C_2 \ln|t + C_1| + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

► Пример 1.8. Нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = a(u^k u_x)_x \tag{1.1.2.24}$$

имеет решение с мультипликативным разделением переменных вида (1.1.2.22) при $\beta = -2/k$. Поэтому уравнение (1.1.2.24) также имеет более сложное решение

$$u = (t + C_1)^{-2/k}\theta(z), \quad z = x + C_2 \ln|t + C_1| + C_3.$$

Функция $\theta = \theta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2(k+2)}{k^2}\theta - \frac{k+4}{k}C_2\theta'_z + C_2^2\theta''_{zz} = a(\theta^k\theta'_z)'_z. \qquad ◄$$

► Пример 1.9. Нелинейное волновое уравнение (1.1.2.24) имеет также решение

$$u = x^{2/k}\psi(t), \tag{1.1.2.25}$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет автономному ОДУ

$$\psi''_{tt} = 2a(k+2)k^{-2}\psi^{k+1}.$$

Переобозначая независимые переменные $x \rightleftarrows t$ в утверждении 1, приходим к выводу, что уравнение (1.1.2.24) имеет также точное решение более общего вида

$$u = (x + C_1)^{2/k}\omega(\zeta), \quad \zeta = t + C_2 \ln|x + C_1| + C_3,$$

где функция $\omega = \omega(\zeta)$ описывается ОДУ

$$\omega''_{\zeta\zeta} = a(k+2)k^{-2}\omega^k(2\omega + C_2k\omega'_\zeta) + aC_2k^{-1}[\omega^k(2\omega + C_2k\omega'_\zeta)]'_\zeta. \qquad ◄$$

Утверждение 1 может применяться также к уравнениям с тремя и более независимыми переменными.

► Пример 1.10. Нелинейное уравнение теплопроводности с n пространственными переменными (1.1.2.8) имеет решение с мультипликативным разделением переменных вида (1.1.2.9). Это уравнение и его решение инвариантны относительно преобразования (1.1.2.23) при $\beta = -1/k$. Поэтому уравнение (1.1.2.8) допускает также более сложное точное решение вида

$$u = (t + C)^{-1/k}\theta(z_1, \ldots, z_n), \quad z_i = x_i + A_i \ln(t + C) + B_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1.2.26}$$

где A_i, B_i, C — произвольные постоянные. Подставив (1.1.2.26) в (1.1.2.8), приходим к стационарному уравнению для функции $\theta = \theta(z_1, \ldots, z_n)$:

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\theta^k\frac{\partial\theta}{\partial z_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}A_i\frac{\partial\theta}{\partial z_i} + \frac{1}{k}\theta = 0. \qquad ◄$$

Утверждение 2. Пусть уравнение (1.1.2.21) допускает решение с простым разделением переменных вида

$$u = e^{\lambda_0 t}\varphi(x), \tag{1.1.2.27}$$

где $\lambda_0 \neq 0$ некоторая константа. Тогда уравнение (1.1.2.21) также допускает более сложное решение вида

$$u = C_1 e^{\lambda t}\theta(z), \quad z = x + C_2 t + C_3, \tag{1.1.2.28}$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные.

► Пример 1.11. Нелинейное уравнение

$$u_t = au_{xx} + uf(u_x/u) \tag{1.1.2.29}$$

имеет решение с мультипликативным разделением переменных (1.1.2.27) при $\lambda_0 = 1$. Поэтому уравнение (1.1.2.29) имеет также более сложное решение вида (1.1.2.28), где функция $\theta = \theta(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda\theta + C_2\theta'_z = a\theta''_{zz} + \theta f(\theta'_z/\theta).$$ ◄

1.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях

Во многих случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях с частными производными происходит иначе, чем в линейных уравнениях. Для иллюстрации сказанного приведем несколько конкретных нелинейных уравнений, допускающих решения вида (1.1.1.1) или (1.1.1.9), которые однако не относятся к решениям с простым разделением переменных.

► Пример 1.12. Рассмотрим уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$u_t = f(t)u_{xx} + uu_x^2 - au^3, \tag{1.1.3.1}$$

где $f(t)$ — произвольная функция.

Ищем точные решения в виде произведения функций разных аргументов. Подставим (1.1.1.1) в (1.1.3.1) и поделим обе части полученного равенства на $f(t)\varphi(x)\psi(t)$. В результате имеем

$$\frac{\psi'_t}{f\psi} = \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} + \frac{\psi^2}{f}[(\varphi'_x)^2 - a\varphi^2]. \tag{1.1.3.2}$$

Левая часть функционально-дифференциального уравнения (1.1.3.2) зависит только от t, а правая содержит сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от x, а другое представляет собой произведение функций разных аргументов. Уравнение (1.1.3.2) никаким способом не удается представить в виде равенства функций разных аргументов (в отличие от примеров, рассмотренных ранее в разд. 1.1.1 и 1.1.2). Это, однако, не означает, что уравнение (1.1.3.1) не имеет решений вида (1.1.1.1).

1°. Прямой проверкой можно убедиться, что функционально-дифференциальное уравнение (1.1.3.2) при $a > 0$ имеет два решения

$$\varphi(x) = C\exp\bigl(\pm x\sqrt{a}\,\bigr), \quad \psi(t) = \exp\Bigl[a\int f(t)\,dt\Bigr], \tag{1.1.3.3}$$

где C — произвольная постоянная. Оба решения (1.1.3.3) для φ обращают в нуль выражение в квадратных скобках в (1.1.3.2), что позволяет разделить переменные.

2°. При $a>0$ имеется более общее решение функционально-дифференциального уравнения (1.1.3.2):

$$\varphi(x)=C_1\exp\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr)+C_2\exp\bigl(-x\sqrt{a}\,\bigr),$$
$$\psi(t)=e^F\Bigl(C_3+8aC_1C_2\int e^{2F}\,dt\Bigr)^{-1/2},\quad F=a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. В данном случае функция $\varphi=\varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (1.1.3.2), которые зависят от x, одновременно будут равны некоторым постоянным:

$$\varphi''_{xx}/\varphi=a,\quad (\varphi'_x)^2-a\varphi^2=4aC_1C_2.$$

Это обстоятельство и позволяет разделить переменные. Отметим, что функция $\psi=\psi(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли $\psi'_t=af(t)\psi-4aC_1C_2\psi^3$.

3°. Имеется другое решение функционально-дифференциального уравнения (1.1.3.2) при $a<0$:

$$\varphi(x)=C_1\sin\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr)+C_2\cos\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr),$$
$$\psi(t)=e^F\Bigl[C_3+2a(C_1^2+C_2^2)\int e^{2F}\,dt\Bigr]^{-1/2},\quad F=a\int f(t)\,dt.$$

Функция $\varphi=\varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (1.1.3.2), зависящие от x, будут равны константам. Функция $\psi=\psi(t)$ описывается уравнением Бернулли $\psi'_t=af(t)\psi-a(C_1^2+C_2^2)\psi^3$. ◀

► Пример 1.13. Рассмотрим уравнение с частными производными третьего порядка с квадратичной нелинейностью

$$u_yu_{xx}+au_xu_{yy}=bu_{xxx}+cu_{yyy}. \tag{1.1.3.4}$$

Будем искать точные решения уравнения (1.1.3.4) с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов

$$u=f(x)+g(y). \tag{1.1.3.5}$$

Подставив (1.1.3.5) в (1.1.3.4), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$g'_yf''_{xx}+af'_xg''_{yy}=bf'''_{xxx}+cg'''_{yyy}, \tag{1.1.3.6}$$

которое нельзя представить в виде равенства функций разных аргументов.

В данном случае нетрудно догадаться, что функционально-дифференциальному уравнению (1.1.3.6) можно удовлетворить:

$$\text{если } g'_y=C_1 \implies g(y)=C_1y+C_2,\quad f(x)=C_3e^{C_1x/b}+C_4x \quad (\text{случай } 1),$$
$$\text{если } f'_x=C_1 \implies f(x)=C_1x+C_2,\quad g(y)=C_3e^{aC_1y/c}+C_4y \quad (\text{случай } 2),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные. В указанных случаях два члена из четырех в (1.1.3.6) одновременно обращаются в нуль, что позволяет разделить переменные.

Уравнение (1.1.3.4) имеет также более сложное решение вида (1.1.3.5):

$$u = C_1 e^{-a\lambda x} + \frac{c\lambda}{a} x + C_2 e^{\lambda y} - ab\lambda y + C_3.$$

где λ — произвольная постоянная. Механизм разделения здесь иной: оба нелинейных члена в левой части (1.1.3.6) содержат одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку слагаемые, которые нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. При сложении нелинейных членов указанные слагаемые сокращаются, что в итоге и приводит к разделению переменных:

$$\begin{array}{rl} + \begin{array}{c} g'_y f''_{xx} \\ a f'_x g''_{yy} \end{array} & \begin{array}{l} = \ C_1 C_2 a^2 \lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} - C_1 b (a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} \\ = -C_1 C_2 a^2 \lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} + C_2 c \lambda^3 e^{\lambda y} \end{array} \\ \hline g'_y f''_{xx} + a f'_x g''_{yy} & = -C_1 b (a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} + C_2 c \lambda^3 e^{\lambda y} = b f'''_{xxx} + c g'''_{yyy} \end{array}$$

◄

► Пример 1.14. Рассмотрим уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$(1 + u^2)(u_{xx} + u_{yy}) - 2uu_x^2 - 2uu_y^2 = au(1 - u^2). \tag{1.1.3.7}$$

Ищем точное решение уравнения (1.1.3.7) с разделяющимися переменными в виде произведения функций разных аргументов

$$u = f(x)g(y). \tag{1.1.3.8}$$

Подставив это выражение в (1.1.3.7), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$(1 + f^2 g^2)(g f''_{xx} + f g''_{yy}) - 2fg[g^2 (f'_x)^2 + f^2 (g'_y)^2] = afg(1 - f^2 g^2), \tag{1.1.3.9}$$

которое нельзя представить в виде равенства функций разных аргументов. Тем не менее уравнение (1.1.3.7) имеет решения вида (1.1.3.8).

Покажем, что функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$, удовлетворяющие следующим нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка [338]:

$$\begin{aligned} (f'_x)^2 &= Af^4 + Bf^2 + C, \\ (g'_y)^2 &= Cg^4 + (a - B)g^2 + A, \end{aligned} \tag{1.1.3.10}$$

где A, B, C — произвольные постоянные, обращают функционально-дифференциальное уравнение (1.1.3.9) в тождество. Действительно, продифференцировав (1.1.3.10), получим два следствия:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 2Af^3 + Bf, \\ g''_{yy} &= 2Cg^3 + (a - B)g. \end{aligned} \tag{1.1.3.11}$$

Исключив из уравнения (1.1.3.9) производные с помощью (1.1.3.10) и (1.1.3.11), приходим к тождеству. Отметим, что уравнения (1.1.3.10) интегрируются в квадратурах. ◀

Замечание 1.3. *Уравнение (1.1.3.7) заменой* $w = 4\operatorname{arctg} u$ *сводится к стационарному уравнению теплопроводности с нелинейным источником синусоидального вида* $\Delta w = a \sin w$, *где* Δ — *оператор Лапласа.*

Рассмотренные примеры иллюстрируют некоторые характерные особенности решений с мультипликативным и аддитивным разделением переменных, которые не относятся к решениям с простым разделением переменных. В разд. 1.3 — 1.5 будут описаны достаточно общие методы построения таких и более сложных точных решений нелинейных уравнений с частными производными.

1.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных

1.2.1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных дифференциальных уравнений

Для простоты изложения ограничимся здесь описанием случая нелинейных уравнений математической физики с двумя независимыми переменными x, y и зависимой переменной u (одна из независимых переменных может играть роль времени).

Линейные уравнения с частными производными. Линейные уравнения математической физики с постоянными коэффициентами и многие линейные уравнения с переменными коэффициентами имеют точные решения в виде суммы попарных произведений функций разных аргументов, как в примере 1.1 (см. также [60, 280, 281]):

$$u(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \qquad (1.2.1.1)$$

где $u_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ — соответствующие частные решения. При этом функции $\varphi_i(x)$, как и функции $\psi_i(y)$, при разных значениях i не связаны друг с другом.

Линейные уравнения с частными производными часто допускают также точные решения вида (1.2.1.1), где попарные произведения функций разных аргументов $\varphi_i(x)\psi_i(y)$ не являются частными решениями этих уравнений.

▶ Пример 1.15. Линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = au_{xx}$$

допускает следующие решения [281]:

$$
\begin{aligned}
&u = x^2 + 2at,\\
&u = x^3 + 6atx,\\
&u = x^4 + 12atx^2 + 12a^2t^2,\\
&u = x^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)(2n-1)\dots(2n-2k+1)}{k!}(at)^k x^{2n-2k},\\
&u = x^{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)(2n)\dots(2n-2k+2)}{k!}(at)^k x^{2n-2k+1},\\
&u = e^{-\mu x}\cos(\mu x)\cos(2a\mu^2 t) + e^{-\mu x}\sin(\mu x)\sin(2a\mu^2 t),\\
&u = e^{-\mu x}\sin(\mu x)\cos(2a\mu^2 t) - e^{-\mu x}\cos(\mu x)\sin(2a\mu^2 t),
\end{aligned}
$$

где n — натуральное число, μ — произвольная постоянная. Отдельные слагаемые в этих решениях не являются решениями рассматриваемого уравнения теплопроводности. ◄

Нелинейные уравнения с частными производными. Многие нелинейные уравнения математической физики с частными производными с квадратичными и степенны́ми нелинейностями вида

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[u] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[u] + \dots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[u] = 0, \quad (1.2.1.2)$$

где $\Pi_i[u]$ — дифференциальные формы, представляющие собой произведения целых неотрицательных степеней функции u и ее частных производных u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, $\dots$, также имеют точные решения вида (1.2.1.1) (см., например, [12, 13, 48, 58, 59, 161–163, 287]). Такие решения будем называть *решениями с обобщенным разделением переменных*. Для нелинейных уравнений, в отличие от линейных, функции $\varphi_i(x)$ при различных значениях i обычно связаны друг с другом [и с функциями $\psi_j(y)$]. В общем случае функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ заранее неизвестны и подлежат определению в ходе исследования. Примеры точных решений нелинейных уравнений вида (1.2.1.1) для наиболее простых случаев $n = 1$ и $n = 2$ (при $\psi_1 = \varphi_2 = 1$) рассмотрены в разд. 1.1.2 и 1.1.3.

Методы поиска точных решений вида (1.2.1.1) нелинейных УрЧП будем называть *методами обобщенного разделения переменных*.

Отметим, что на практике при построении точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики наиболее часто встречаются решения специального вида, содержащие три искомые функции [12, 13, 48, 287]:

$$u(x, y) = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x) \quad (1.2.1.3)$$

(в правой части независимые переменные можно поменять местами). В частном случае $\psi(x) = 0$ это решение переходит в решение с мультипликативным разделением переменных, а в случае $\varphi(x) = 1$ — в решение с аддитивным разделением переменных.

Замечание 1.4. *Функция $\theta = \theta(y)$ в (1.2.1.3) определяется с точностью до сдвига и растяжения, поскольку линейное преобразование $\theta = C_1\bar{\theta} + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, приводит к соотношению такого же вида $u = \bar{\varphi}(x)\bar{\theta}(y) + \bar{\psi}(x)$, в котором сделаны переобозначения $\bar{\varphi} = C_1\varphi$, $\bar{\psi} = \psi + C_2\varphi$.*

Замечание 1.5. *Выражения вида (1.2.1.1) часто используются в прикладной и вычислительной математике для построения приближенных аналитических и численных решений дифференциальных уравнений проекционными методами типа Бубнова — Галеркина [61, 153, 323].*

Замечание 1.6. *Решения вида (1.2.1.1) могут допускать также дифференциальные уравнения, имеющие отличные от (1.2.1.2) нелинейности (см. пример 1.38 из разд. 1.5).*

1.2.2. Функционально-дифференциальные уравнения, возникающие при обобщенном разделении переменных

В общем случае после подстановки выражения (1.2.1.1) в дифференциальное уравнение (1.2.1.2) для определения функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\Phi_1[X]\Psi_1[Y] + \Phi_2[X]\Psi_2[Y] + \cdots + \Phi_k[X]\Psi_k[Y] = 0, \tag{1.2.2.1}$$

где функционалы $\Phi_j[X]$ и $\Psi_j[Y]$ зависят соответственно от переменных x и y:

$$\begin{aligned} \Phi_j[X] &\equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\bigr), \\ \Psi_j[Y] &\equiv \Psi_j\bigl(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\bigr). \end{aligned} \tag{1.2.2.2}$$

Для наглядности формулы выписаны для случая уравнения второго порядка (1.2.1.2); для уравнений старших порядков в правые части формул (1.2.2.2) войдут соответствующие старшие производные функций φ_i и ψ_i.

Далее в разд. 1.4 и 1.5 будут описаны два достаточно простых общих метода решения функционально-дифференциальных уравнений вида (1.2.2.1) — (1.2.2.2). В разд. 1.3 также будет изложен наиболее простой метод, приводящий к меньшему объему вычислений, но не обладающий общностью. Кроме того, в разд. 1.6 будет рассмотрен достаточно общий специальный метод, который не связан с исследованием функционально-дифференциальных уравнений (1.2.2.1) — (1.2.2.2).

Замечание 1.7. *В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнения вида (1.2.2.1) — (1.2.2.2) входят несколько функций (и их производных), зависящих от разных аргументов, что приводит к необходимости использовать специальные (нестандартные) методы их решения.*

1.3. Упрощенный метод построения решений с обобщенным разделением переменных

1.3.1. Упрощенный метод, основанный на априорном задании одной системы координатных функций. Описание

Для построения точных решений дифференциальных уравнений вида (1.2.1.2) с квадратичной и степенно́й нелинейностью, которые не зависят явно от y (т. е. все $f_i = \text{const}$), можно использовать следующий упрощенный подход. Решения ищем в виде конечных сумм (1.2.1.1). Предположим, что система координатных функций $\psi_i(y)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений имеют вид

$$\psi_i(y) = y^i, \quad \psi_i(y) = e^{\lambda_i y}, \quad \psi_i(y) = \sin(\alpha_i y), \quad \psi_i(y) = \cos(\beta_i y). \qquad (1.3.1.1)$$

Конечные наборы этих функций (в различных комбинациях) можно использовать для поиска точных решений с обобщенным разделением переменных вида (1.2.1.1), где λ_i, α_i, β_i рассматриваются как свободные параметры. Вторая система функций $\varphi_i(x)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных уравнений, получаемых в результате подстановки выражения (1.2.1.1) в рассматриваемое уравнение.

Указанный подход не имеет той общности, которой обладают методы, описанные далее в разд. 1.4 и 1.5. Однако явное задание одной системы координатных функций $\{\psi_i(y)\}$ резко упрощает процедуру построения точных решений; при этом отдельные решения вида (1.2.1.1) могут быть потеряны. Важно отметить, что известные к настоящему времени точные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнений с частными производными с квадратичной нелинейностью в подавляющем большинстве задаются координатными функциями вида (1.3.1.1) (чаще всего при $n = 2$).

Замечание 1.8. *Упрощенный метод построения решений с обобщенным разделением переменных аналогичен методу неопределенных коэффициентов, который широко используется для нахождения частных решений линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений со специальной правой частью, при вычислении интегралов, построении рекуррентных соотношений и др. [98, 125, 138]. Поэтому этот подход можно называть также* методом неопределенных функций.

1.3.2. Примеры построения точных решений нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными

Рассмотрим конкретные примеры использования упрощенного метода построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений с частными производными второго и третьего порядков с двумя независимыми переменными.

► **Пример 1.16.** Рассмотрим уравнение Гудерлея

$$u_{xx} = a u_y u_{yy}, \tag{1.3.2.1}$$

которое используется для описания трансзвуковых газовых течений [177], где $\gamma = a - 1$ — показатель адиабаты.

1°. *Первая группа решений.* Сразу отметим, что уравнение (1.3.2.1) имеет очевидное вырожденное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = (C_1 x + C_2) y + C_3 x + C_4, \tag{1.3.2.2}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, для которого старшие производные обращаются в нуль $u_{xx} = u_{yy} = 0$.

Будем искать решения с обобщенным разделением переменных в виде

$$u(x, y) = \varphi(x) y^k + \psi(x), \tag{1.3.2.3}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и константа $k \neq 0$ являются искомыми (вырожденное решение (1.3.2.2) является частным случаем решения (1.3.2.3)). Важно отметить, что подобные двучленные решения УрЧП достаточно часто встречаются на практике и являются наиболее простыми решениями с обобщенным разделением переменных (наряду с решениями, в которых вместо степенной функции y^k стоит экспонента $e^{\lambda y}$).

Подставив (1.3.2.3) в (1.3.2.1), после перестановки членов приходим к соотношению

$$\varphi''_{xx} y^k - a k^2 (k-1) \varphi^2 y^{2k-3} + \psi''_{xx} = 0, \tag{1.3.2.4}$$

которое содержит степенные функции y^k и y^{2k-3} и должно удовлетворяться тождественно для любых y.

Рассмотрим два случая: $\psi''_{xx} = 0$ и $\psi''_{xx} \neq 0$.

(a) *Первый случай.* При $\psi''_{xx} = 0$ получим двучленное уравнение с разделяющимися переменными, которому можно удовлетворить, если положить

$$k = 3, \quad \varphi''_{xx} - 18 a \varphi^2 = 0. \tag{1.3.2.5}$$

Общее решение автономного уравнения для φ можно представить в неявной форме $x = \pm \int (12 a \varphi^3 + C_1)^{-1/2} d\varphi + C_2$. Кроме того, ОДУ (1.3.2.5) допускает частное решение степенного вида $\varphi = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}$, что приводит к трехпараметрическому точному решению уравнения (1.3.2.1):

$$u = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2} y^3 + C_2 x + C_3. \tag{1.3.2.6}$$

(b) *Второй случай.* Чтобы сбалансировать функцию $\psi''_{xx} \neq 0$ со вторым членом в равенстве (1.3.2.4), надо положить $k = 3/2$. В результате получим двучленное уравнение, которому можно удовлетворить, если положить

$$\varphi''_{xx} = 0, \quad \psi''_{xx} = \tfrac{9}{8} a \varphi^2. \tag{1.3.2.7}$$

Эти уравнения легко интегрируются и приводят к четырехпараметрическому точному решению уравнения (1.3.2.1):

$$u = (C_1 x + C_2) y^{3/2} + \frac{3a}{32 C_1^2}(C_1 x + C_2)^4 + C_3 x + C_4. \tag{1.3.2.8}$$

2°. *Решение Титова* (*составное решение*). Из выражений (1.3.2.6) и (1.3.2.8) следует, что уравнение (1.3.2.25) имеет два однотипных решения $u_1 = \varphi y^{3/2} + \psi$ и $u_2 = \varphi y^3 + \psi$, отличающихся друг от друга показателем степени y. Это обстоятельство наводит на мысль выдвинуть гипотезу о возможности существования более общего решения уравнения (1.3.2.25), включающего сразу оба члена с различными показателями степени. Для проверки этой гипотезы подставим предполагаемое составное решение

$$u(x,y) = \varphi_1(x)y^3 + \varphi_2(x)y^{3/2} + \psi(x) \tag{1.3.2.9}$$

в уравнение Гудерлея (1.3.2.1). После объединения членов при степенных функциях $y^{3n/2}$ ($n = 0,\ 1,\ 2$), получим

$$(\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2)y^3 + (\varphi_2'' - \tfrac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2)y^{3/2} + \psi'' - \tfrac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0. \tag{1.3.2.10}$$

Чтобы это равенство выполнялось для любых y надо приравнять нулю коэффициенты при $y^{3n/2}$. В результате приходим к системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \varphi_1'' - 18a\varphi_1^2 &= 0,\\ \varphi_2'' - \tfrac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2 &= 0,\\ \psi'' - \tfrac{9}{8}a\varphi_2^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.2.11}$$

Таким образом доказано, что уравнение (1.3.2.1) допускает решение вида (1.3.2.9) (это решение было получено в работе [58]).

Можно показать, что система (1.3.2.11) допускает точное решение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2},\\ \varphi_2 &= C_2(x + C_1)^{5/2} + C_3(x + C_1)^{-3/2},\\ \psi &= \frac{3a}{112}C_2^2(x + C_1)^7 + \frac{3}{8}aC_2C_3(x + C_1)^3 + \frac{9}{16}aC_3^2(x + C_1)^{-1} + C_4x + C_5. \end{aligned}$$

3°. *Вторая группа решений.* Уравнение Гудерлея имеет также решение полиномиального вида по y, которое можно получить исходя из следующих соображений. Будем искать решение в виде полинома степени n по переменной y, коэффициенты которого зависят от x, т. е.

$$u = P_n, \quad P_n = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x)y^i. \tag{1.3.2.12}$$

Дифференцируя (1.3.2.12) по обеим переменным и предполагая, что $(\psi_n)''_{xx} \neq 0$, имеем

$$u_{xx} = Q_n, \quad u_y = P'_{n-1}, \quad u_{yy} = P''_{n-2}, \tag{1.3.2.13}$$

где Q_n, P'_{n-1}, P''_{n-2} полиномы по y соответственно степени n, $n-1$, $n-2$. Подставив (1.3.2.13) в уравнение (1.3.2.1), видим, что в левой части полученного соотношения стоит полином степени n, а в правой части — полином степени $2n-3$ (при произведении полиномов их степени складываются). Для того чтобы в левой и правой частях были полиномы одинаковой степени (это необходимое условие существования полиномиального решения), надо положить $n = 3$.

Из приведенных рассуждений следует, что уравнение Гудерлея может иметь точное решение в виде кубического полинома по y:

$$u = \psi_1(x) + \psi_2(x)y + \psi_3(x)y^2 + \psi_4(x)y^3. \qquad (1.3.2.14)$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что выражение (1.3.2.14) действительно является решением уравнения (1.3.2.1). При этом определяющие функции $\psi_i = \psi_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений [163]:

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 2a\psi_2\psi_3, \\ \psi_2'' &= 2a(3\psi_2\psi_4 + 2\psi_3^2), \\ \psi_3'' &= 18a\psi_3\psi_4, \\ \psi_4'' &= 18a\psi_4^2. \end{aligned}$$

Данная система легко интегрируется при $\psi_4 = 0$ и позволяет найти два простых решения в виде квадратичных многочленов по y уравнения (1.3.2.1):

$$\begin{aligned} u &= C_1y^2 + 2aC_1^2x^2y + \tfrac{1}{3}a^2C_1^3x^4, \\ u &= C_1xy^2 + (\tfrac{1}{3}aC_1^2x^4 + C_2x + C_3)y \\ &\quad + \tfrac{1}{63}a^2C_1^3x^7 + \tfrac{1}{6}aC_1C_2x^4 + \tfrac{1}{3}aC_1C_3x^3 + C_4x + C_5, \end{aligned} \qquad (1.3.2.15)$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, которые являются частными случаями решения (1.3.2.14). Отметим, что первое решение в (1.3.2.15) было получено в [177]. Более сложное точное решение вида (1.3.2.14) при $\psi_4 \neq 0$ приведено в [287].

В заключение приведем два решения с аддитивным разделением переменных уравнения (1.3.2.1):

$$u = \frac{1}{2}aC_1x^2 + C_2x + C_3 \pm \frac{1}{3C_1}(2C_1y + C_4)^{3/2}.$$

◄

► **Пример 1.17.** Рассмотрим неоднородное уравнение Монжа—Ампера вида

$$u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = f(x), \qquad (1.3.2.16)$$

где $f(x)$ — произвольная функция. Отметим, что уравнения типа Монжа — Ампера встречаются дифференциальной геометрии, газовой динамике и метеорологии [62, 63, 238, 327].

Будем искать решения с обобщенным разделением переменных в виде

$$u(x, y) = \varphi(x)y^k + \psi(x), \qquad (1.3.2.17)$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и константа k являются искомыми.

Подставив (1.3.2.17) в (1.3.2.16), после элементарных преобразований имеем

$$[k^2(\varphi_x')^2 - k(k-1)\varphi\varphi_{xx}'']y^{2k-2} - k(k-1)\varphi\psi_{xx}''y^{k-2} - f(x) = 0. \qquad (1.3.2.18)$$

Это соотношение степенного вида по y; оно содержит функции y^{2k-2} и y^{k-2} и должно удовлетворяться тождественно для любых y. Поэтому, чтобы сбалансировать функцию $f(x)$ при $y = 0$, один из двух показателей степеней y в (1.3.2.18) должен обращаться в нуль. В результате получим два допустимых значения $k = 1$ и $k = 2$.

Первый случай. При $k = 1$ уравнение (1.3.2.18) принимает вид

$$(\varphi'_x)^2 - f(x) = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $\varphi(x) = \pm \int \sqrt{f(x)}\,dx$. Они порождают два решения уравнения (1.3.2.16) вида (1.3.2.17):

$$u(x,y) = \pm y \int \sqrt{f(x)}\,dx + \psi(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная функция.

Второй случай. При $k = 2$, приравнивая в (1.3.2.18) коэффициенты при различных степенях y к нулю, получим два уравнения

$$2(\varphi'_x)^2 - \varphi\varphi''_{xx} = 0,$$
$$2\varphi\psi''_{xx} + f(x) = 0.$$

Их общие решения определяются формулами

$$\varphi(x) = \frac{1}{C_1 x + C_2}, \quad \psi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)(C_1 t + C_2) f(t)\,dt + C_3 x + C_4.$$

В качестве простого обобщения уравнения Монжа—Ампера (1.3.2.16) укажем нелинейное уравнение

$$u_{xy}^2 + g(x) u_{xx} u_{yy} = f(x),$$

где $f(x)$, $g(x)$ — произвольные функции, которое также имеет точное решение вида (1.3.2.17).

Обширный список точных решений уравнений типа Монжа — Ампера (1.3.2.16) и более общих родственных уравнений имеется в книге [287] (см. также [63]). ◄

► Пример 1.18. Продемонстрируем возможный ход рассуждений при построении точных решений с обобщенным разделением для уравнения пористой среды с квадратичной нелинейностью (уравнение Буссинеска [97]):

$$u_t = a(uu_x)_x, \tag{1.3.2.19}$$

которое описывает нестационарное течение грунтовых вод при наличии свободной поверхности, где u — давление жидкости.

Замечание 1.9. *Уравнение теплопроводности с линейной зависимостью коэффициента температуропроводности от температуры $v_t = [(av+b)v_x]_x$ с помощью замены $u = v + (b/a)$ сводится к уравнению (1.3.2.19) (для многих металлов линейная аппроксимация коэффициента температуропроводности применима в широком диапазоне изменения температуры).*

Уравнение (1.3.2.19) является частным случаем уравнения (1.1.2.1) при $k=1$ и имеет квадратичное по x решение с простым разделением переменных

$$u=\varphi(t)x^2, \quad \varphi(t)=-1/(6at). \tag{1.3.2.20}$$

Возникает естественный вопрос: можно ли исходя из простого решения (1.3.2.20) построить более сложное решение с обобщенным разделением переменных уравнения (1.3.2.19)?

Попробуем искать такое решение в виде суммы

$$u(x,t)=\varphi(t)x^2+\psi(t)x^k, \quad k\neq 2, \tag{1.3.2.21}$$

первый член которой совпадает с решением (1.3.2.20). Во второе слагаемое формулы (1.3.2.21) входят функция $\psi(t)$ и коэффициент k, которые требуется найти.

Подставив (1.3.2.21) в (1.3.2.19), после элементарных преобразований получим

$$(\varphi'_t-6a\varphi^2)x^2+[\psi'_t-a(k+1)(k+2)\varphi\psi]x^k-ak(2k-1)\psi^2x^{2k-2}=0. \tag{1.3.2.22}$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при различных степенях x в (1.3.2.22) должны равняться нулю. Таким образом возможны два случая $k=0$ и $k=1/2$ (оба соответствуют обращению в нуль коэффициента при x^{2k-2}), которые надо рассмотреть отдельно.

Первый случай. При $k=0$ для определения функций $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}\varphi'_t-6a\varphi^2&=0,\\ \psi'_t-2a\varphi\psi&=0,\end{aligned}$$

общее решение которой определяется формулами

$$\varphi(t)=-\frac{1}{6a(t+C_1)}, \quad \psi(t)=\frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}}, \tag{1.3.2.23}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Второй случай (решение Баренблатта — Зельдовича дипольного типа [8]). При $k=1/2$ для функций $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ приходим к аналогичной системе уравнений

$$\begin{aligned}\varphi'_t-6a\varphi^2&=0,\\ \psi'_t-\tfrac{15}{4}a\varphi\psi&=0,\end{aligned}$$

общее решение которой записывается так:

$$\varphi(t)=-\frac{1}{6a(t+C_1)}, \quad \psi(t)=\frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}. \tag{1.3.2.24}$$

Учитывая формулы (1.3.2.21), (1.3.2.23), (1.3.2.24), в итоге получим два решения с обобщенным разделением переменных уравнения (1.3.2.19) [378]:

$$\begin{aligned}u&=-\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2+\frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}},\\ u&=-\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2+\frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}(x+C_3)^{1/2},\end{aligned}$$

где в целях бóльшей общности дополнительно добавлен произвольный сдвиг по пространственной переменной x. ◀

Замечание 1.10. *Уравнение (1.3.2.19) допускает также простое решение с аддитивным разделением переменных*

$$u = C_1 x + aC_1^2 t + C_2.$$

Инвариантные решения уравнения (1.3.2.19) получены в [30] (см. также [11, 32, 197]). Более сложные решения уравнения (1.3.2.19) приведены в [47, 287].

Замечание 1.11. *Волновое уравнение с квадратичной нелинейностью*

$$u_{tt} = a(uu_x)_x,$$

также допускает решения вида (1.3.2.21) при $k = 0$ и $k = 1/2$.

▶ Пример 1.19. В некоторых случаях можно другим способом (отличным от использованного в примере 1.18) строить достаточно сложные решения с обобщенным разделением переменных, получая на начальном этапе более простые точные решения. Продемонстрируем сказанное на примере нелинейного уравнения диффузии с объемной химической реакцией второго порядка

$$u_t = a(uu_x)_x - bu^2. \tag{1.3.2.25}$$

1°. *Решение экспоненциального вида по x*. Точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (1.3.2.25) ищем в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \tag{1.3.2.26}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ и постоянная λ подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Подставив (1.3.2.26) в (1.3.2.25) и собрав подобные члены при экспонентах $e^{n\lambda x}$ ($n = 0,\ 1,\ 2$), получим

$$(b - 2a\lambda^2)\varphi^2 e^{2\lambda x} + [\varphi'_t + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi]e^{\lambda x} + \psi'_t + b\psi^2 = 0. \tag{1.3.2.27}$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ надо приравнять к нулю. В результате приходим к простой дифференциально-алгебраической системе

$$\begin{aligned} b - 2a\lambda^2 &= 0,\\ \varphi'_t + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi &= 0,\\ \psi'_t + b\psi^2 &= 0, \end{aligned} \tag{1.3.2.28}$$

которая допускает два решения

$$\lambda = \pm\Big(\frac{b}{2a}\Big)^{1/2}, \quad \varphi = \frac{C_1}{|t + C_2|^{3/2}}, \quad \psi = \frac{1}{b(t + C_2)}, \tag{1.3.2.29}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. *Составное решение экспоненциального вида по x*. Из соотношений (1.3.2.26) и (1.3.2.29) следует, что уравнение (1.3.2.25) имеет два решения:

$u_{1,2} = \varphi e^{\pm\lambda x} + \psi$. Они отличаются друг от друга только знаком показателя экспоненты λ.

Это обстоятельство наводит на мысль выдвинуть гипотезу о возможности существования более общего решения уравнения (1.3.2.25), включающего сразу оба экспоненциальных члена. Для проверки этой гипотезы подставим предполагаемое составное решение

$$u(x,t) = \varphi_1(t)e^{-\lambda x} + \varphi_2(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}. \tag{1.3.2.30}$$

в (1.3.2.25). После элементарных преобразований имеем

$$[(\varphi_1)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_1\psi]e^{-\lambda x} + [(\varphi_2)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_2\psi]e^{\lambda x} + \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0.$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ $(n = 0, \pm 1)$, приходим к системе ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} (\varphi_1)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_1\psi &= 0,\\ (\varphi_2)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_2\psi &= 0,\\ \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.2.31}$$

Таким образом доказано, что уравнение (1.3.2.25) допускает решение вида (1.3.2.30).

Исключив ψ из первых двух уравнений в (1.3.2.31), получим равенство $(\varphi_1)'_t/\varphi_1 = (\varphi_2)'_t/\varphi_2$. Отсюда следует, что $\varphi_1 = A\varphi(t)$, $\varphi_2 = B\varphi(t)$, где A и B — произвольные постоянные. Поэтому решение с обобщенным разделением переменных (1.3.2.30) приводится к виду

$$u(x,t) = \varphi(t)(Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}) + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \tag{1.3.2.32}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ, состоящей из двух уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi\psi &= 0,\\ \psi'_t + b(2AB\varphi^2 + \psi^2) &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.2.33}$$

Эта автономная система путем исключения t сводится к одному ОДУ, которое является однородным и поэтому может быть проинтегрировано [285]. Отметим, что система (1.3.2.33) при $AB > 0$ допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{1}{3b\sqrt{AB}\,(t+C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t+C)}, \tag{1.3.2.34}$$

которые определяют решение (1.3.2.32) в виде произведения функций разных аргументов.

3°. *Решение тригонометрического вида по x.* При записи формул (1.3.2.30) и (1.3.2.32) неявно подразумевалось, что $ab > 0$. При $ab < 0$ имеем

$$\lambda = i\beta, \quad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad i^2 = -1.$$

В этом случае в решении (1.3.2.32) вместо экспоненциальных функций появляются тригонометрические функции, т. е. его можно представить в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)[A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad (1.3.2.35)$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные. Подставив (1.3.2.35) в уравнение (1.3.2.25) и проведя выкладки аналогичные сделанным в п. 2, получим следующую нелинейную систему ОДУ для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\begin{gathered} \varphi'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi\psi = 0, \\ \psi'_t + b[\tfrac{1}{2}(A_1^2 + B_1^2)\varphi^2 + \psi^2] = 0. \end{gathered} \quad (1.3.2.36)$$

Эта система допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{2}{3b\sqrt{A_1^2+B_1^2}\,(t+C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t+C)}, \quad (1.3.2.37)$$

которые определяют решение (1.3.2.35) в виде произведения функций разных аргументов. ◀

Замечание 1.12. *Решение (1.3.2.35) и систему (1.3.2.36) можно получить непосредственно из решения (1.3.2.32) и системы (1.3.2.33), если в последних формально положить*

$$\begin{gathered} e^{\lambda x} = e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x), \quad e^{-\lambda x} = e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x), \\ A = \tfrac{1}{2}(A_1 + iB_1), \quad B = \tfrac{1}{2}(A_1 - iB), \quad A_1 = A + B, \quad B_1 = i(B - A). \end{gathered}$$

► Пример 1.20. Рассмотрим уравнение Мизеса с кубической нелинейностью

$$u_{tt} + 2u_xu_{xt} + au_{xx} + bu_tu_{xx} + cu_x^2u_{xx} = 0, \quad (1.3.2.38)$$

которое при некоторых значениях постоянных a, b, c описывает одномерное течение сжимаемого газа [57].

Будем искать решения уравнения (1.3.2.38) в виде полинома по x с коэффициентами, зависящими от t. Искомый полином степени n обозначим P_n. Рассуждая так же, как в примере 1.16 (см. п. 3°), подставим предполагаемое решение $u = P_n$ в рассматриваемое уравнение. Каждому члену уравнения (1.3.2.38) поставим в соответствие степень полинома, который образуется в результате подстановки в него $u = P_n$. Результаты представлены ниже в виде небольшой таблицы:

член уравнения	u_{tt}	u_xu_{xt}	u_{xx}	u_tu_{xx}	$u_x^2u_{xx}$
степень полинома	n	$2n-2$	$n-2$	$2n-2$	$3n-4$

По крайней мере два из пяти полученных полиномов должны иметь одинаковую максимальную степень, чтобы они могли скомпенсировать (уравновесить) друг друга. Приравнивая попарно степени n, $2n-2$, $3n-4$, находим искомое значение $n = 2$ (в этом случае сразу четыре полученных полинома имеют одинаковую степень).

Учитывая сказанное, ищем точное решение уравнения (1.3.2.38) в виде квадратичного многочлена по x (указано Мизесом, см. [57, 163]):

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2. \tag{1.3.2.39}$$

Подставив (1.3.2.39) в (1.3.2.38), в итоге приходим к следующей системе ОДУ для функций $\psi_i = \psi_i(t)$:

$$\begin{aligned} \psi_1'' + 2\psi_2\psi_2' + 2a\psi_3 + 2b\psi_3\psi_1' + 2c\psi_2^2\psi_3 &= 0,\\ \psi_2'' + 2(2+b)\psi_3\psi_2' + 4(\psi_3' + 2c\psi_3^2)\psi_2 &= 0,\\ \psi_3'' + 2(4+b)\psi_3\psi_3' + 8c\psi_3^3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.2.40}$$

Первое уравнение системы (1.3.2.40) линейно относительно ψ_1 и допускает понижение порядка с помощью подстановки $z = \psi_1'$. Поэтому его решение можно выразить через решения второго и третьего уравнений системы. Второе уравнение системы (1.3.2.40) линейно относительно ψ_2 и имеет частное решение $\psi_2 = \psi_3$ (т. к. при $\psi_2 = \psi_3$ второе и третье уравнения системы совпадают).

Учитывая сказанное, можно показать, что система уравнений (1.3.2.40) допускает два четырехпараметрических точных решения вида

$$\begin{aligned} &\psi_1 = \frac{C_2^2}{4\beta}(t+C_1)^{-1} - \frac{a}{b}(t+C_1) + C_3(t+C_1)^{1-2b\beta} + C_4,\\ &\psi_2 = C_2(t+C_1)^{-1}, \quad \psi_3 = \beta(t+C_1)^{-1}, \end{aligned} \tag{1.3.2.41}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а $\beta = \beta_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$4c\beta^2 - (4+b)\beta + 1 = 0.$$ ◀

Замечание 1.13. *Более общее, чем (1.3.2.38), нелинейное УрЧП*

$$\begin{aligned} u_{tt} + f_1(t, u_{xx}) + uf_2(t, u_{xx}) + u_t f_3(t, u_{xx}) &+ \\ + u_x^2 f_4(t, u_{xx}) + u_x u_{xt} f_5(t, u_{xx}) &= 0 \end{aligned}$$

где $f_i(t, w)$ — произвольные функции двух аргументов, также допускает точное решение вида (1.3.2.39).

► Пример 1.21. Установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое продольно обтекаемой тонкой плоской пластины описывается нелинейным уравнением третьего порядка для функции тока (вывод этого уравнения см. в [27, 64] и в разд. 3.2.3):

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = \nu u_{yyy}, \tag{1.3.2.42}$$

где x и y — продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Будем искать точное решение с обобщенным разделением переменных уравнения (1.3.2.42) в виде

$$u(x, y) = x^k\varphi(y) + \psi(y), \tag{1.3.2.43}$$

где функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и константа k являются искомыми. Подставив (1.3.2.43) в (1.3.2.42), после перегруппировки членов имеем

$$kx^{2k-1}[(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy}] + kx^{k-1}(\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy}) - \nu x^k\varphi'''_{yyy} - \nu\psi'''_{yyy} = 0. \quad (1.3.2.44)$$

Это соотношение содержит степенные функции x^{2k-1}, x^{k-1}, x^k и должно удовлетворяться тождественно для любых x. Чтобы можно было сбалансировать последний член в (1.3.2.44) при $\psi'''_{yyy} \not\equiv 0$ один из показателей степеней x должен обращаться в нуль. Отбрасывая вырожденный случай $k = 0$, в результате находим два допустимых значения $k = 1$ и $k = 1/2$.

Первый случай. Подставив $k = 1$ в (1.3.2.44) и сделав перегруппировку членов, получим

$$x[(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} - \nu\varphi'''_{yyy}] + [\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy}] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству при любых значениях x, надо приравнять нулю оба выражения в квадратных скобках. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$:

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} - \nu\varphi'''_{yyy} = 0,$$
$$\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy} = 0.$$

Эта система имеет, например, точное решение

$$\varphi = \frac{6\nu}{y + C_1}, \quad \psi = \frac{C_2}{y + C_1} + \frac{C_3}{(y + C_1)^2} + C_4.$$

Второй случай. При $k = 1/2$ приходим к вырожденному решению, которое малоинтересно. Вырожденное решение также получим для произвольного k, если считать, что $\psi'''_{yyy} \equiv 0$.

Другие точные решения нелинейного УрЧП (1.3.2.42) указаны в справочнике [287] (см. также пример 1.28). ◄

Замечание 1.14. *Уравнение пограничного слоя обладает замечательным свойством [32, 33], которое можно сформулировать так: если $u(x, y)$ — решение уравнения (1.3.2.42), то и*

$$u_1 = u(x, y + \theta(x)),$$

где $\theta(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, также является решением этого уравнения.

Таким же свойством обладает более широкий класс уравнений гидродинамического типа любого порядка [47, 286]:

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = F(x, u, u_y, u_{yy}, \ldots, u_y^{(n)}).$$

Замечание 1.15. *Точное решение с обобщенным разделением переменных вида (1.3.2.43) при $k = 1$ допускает также нелинейное уравнение с частными производными n-го порядка*

$$f(y)u_y u_{xy} + g(y)u_x u_{yy} = h(y)u_y^{(n)} + p(y)u + q(y),$$

где $f(y)$, $g(y)$, $h(y)$, $p(y)$, $q(y)$ — произвольные функции.

► Пример 1.22. Рассмотрим нелинейное УрЧП третьего порядка со смешанной производной

$$u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = \nu u_{xxx}, \qquad (1.3.2.45)$$

которое встречается в гидродинамике [4, 35, 37].

Ищем точные решения вида

$$u = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \qquad \lambda \neq 0. \qquad (1.3.2.46)$$

Подставив (1.3.2.46) в (1.3.2.45), имеем

$$\varphi'_t - \lambda\varphi\psi = \nu\lambda^2\varphi.$$

Разрешим это уравнение относительно ψ и подставим полученное выражение в (1.3.2.46). В результате находим решение уравнения (1.3.2.45) в виде

$$u = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \nu\lambda, \qquad (1.3.2.47)$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, а λ — произвольная постоянная.

В качестве возможного обобщения уравнения гидродинамического типа (1.3.2.45) приведем нелинейное уравнение n-го порядка

$$u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = f(t)u_x^{(n)},$$

где $f(t)$ — произвольная функция. Оно допускает точное решение вида (1.3.2.46):

$$u = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2}f(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, а λ — произвольная постоянная. ◄

Замечание 1.16. *Уравнение гидродинамического типа (1.3.2.45) обладает замечательным свойством [36, 47], которое можно сформулировать так: если $u(x,t)$ — решение уравнения (1.3.2.45), то и*

$$u_1 = u(x + \theta(t), t) + \theta'_t(t),$$

где $\theta(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, также является решением этого уравнения.

Замечание 1.17. *Аналогичным свойством обладает более широкий класс уравнений гидродинамического типа любого порядка [286]:*

$$u_{xt} = a(t)uu_{xx} + F(t, u_x, u_{xx}, \ldots, u_x^{(n)}). \qquad (1.3.2.48)$$

А именно, если $u(x,t)$ — решение уравнения (1.3.2.48), то и

$$u_1 = u(x + \theta(t), t) + \frac{\theta'_t(t)}{a(t)},$$

где $\theta(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, также является решением этого уравнения.

1.3.3. Уравнения с тремя и более независимыми переменными. Точные решения уравнений Навье — Стокса

Решения с обобщенным разделением переменных УрЧП с тремя и более независимыми переменными. Методы обобщенного разделения переменных могут применяться также для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики с тремя и более независимыми переменными (увеличение числа независимых переменных в УрЧП не носит принципиальный характер, но технически усложняет практическое использование методов). В частности, для уравнений с тремя независимыми переменными x, y, t искомая величина u ищется в виде конечных сумм

$$u = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x,t)\psi_k(y). \tag{1.3.3.1}$$

При использовании упрощенного метода построения решений с обобщенным разделением переменных функции $\psi_k(y)$ задаются из априорных соображений, а функции $\varphi_k(x,t)$ ищутся в ходе исследования. Переменные x, y, t в (1.3.3.1) можно поменять местами.

Уравнения Навье — Стокса. Точные решения. Для иллюстрации сказанного рассмотрим двумерные нестационарные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, которые включают два уравнения Навье—Стокса и уравнение неразрывности [27, 64]:

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_y &= -\frac{1}{\rho}p_x + \nu\Delta U, \\ V_t + UV_x + VV_y &= -\frac{1}{\rho}p_y + \nu\Delta V, \\ U_x + V_y &= 0. \end{aligned} \tag{1.3.3.2}$$

Здесь t — время, x и y — декартовы координаты, U и V — компоненты скорости жидкости, p — давление, жидкости, ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости, Δ — оператор Лапласа.

Система уравнений (1.3.3.2) путем введения функции тока u по формулам

$$U = u_y, \quad V = -u_x \tag{1.3.3.3}$$

с последующим исключением давления p с помощью перекрестного дифференцирования второго и третьего уравнения сводится к одному нелинейному уравнению четвертого порядка [27, 64, 142]:

$$(\Delta u)_t + u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \tag{1.3.3.4}$$

Далее, опуская промежуточные выкладки, приведем некоторые точные решения уравнения (1.3.3.4) (подробности см. в [37]).

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda y}\big[A(t)e^{\beta x} + B(t)e^{-\beta x}\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$
$$A(t) = C_1 \exp\left[\nu(\lambda^2+\beta^2)t - \beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\right],$$
$$B(t) = C_2 \exp\left[\nu(\lambda^2+\beta^2)t + \beta\int\psi(t)\,dt - \lambda\int\varphi(t)\,dt\right],$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, а C_1, C_2, λ, β — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = e^{-\lambda y}\big[A(t)\sin(\beta x) + B(t)\cos(\beta x)\big] + \varphi(t)x + \psi(t)y.$$

Здесь $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, λ и β — произвольные постоянные, а функции $A = A(t)$ и $B = B(t)$ удовлетворяют линейной неавтономной системе ОДУ

$$A'_t = \big[\nu(\lambda^2-\beta^2) - \lambda\varphi(t)\big]A + \beta\psi(t)B,$$
$$B'_t = \big[\nu(\lambda^2-\beta^2) - \lambda\varphi(t)\big]B - \beta\psi(t)A,$$

общее решение которой имеет вид

$$A(t) = \exp\left[\nu(\lambda^2-\beta^2)t - \lambda\int\varphi\,dt\right]\left[C_1\sin\left(\beta\int\psi\,dt\right) + C_2\cos\left(\beta\int\psi\,dt\right)\right],$$
$$B(t) = \exp\left[\nu(\lambda^2-\beta^2)t - \lambda\int\varphi\,dt\right]\left[C_1\cos\left(\beta\int\psi\,dt\right) - C_2\sin\left(\beta\int\psi\,dt\right)\right].$$

В частности, при $\varphi = \dfrac{\nu}{\lambda}(\lambda^2-\beta^2)$ и $\psi = a$, получим семейство периодических решений

$$A(t) = C_1\sin(a\beta t) + C_2\cos(a\beta t),$$
$$B(t) = C_1\cos(a\beta t) - C_2\sin(a\beta t).$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = A(t)\exp(k_1x+\lambda_1y) + B(t)\exp(k_2x+\lambda_2y) + \varphi(t)x + \psi(t)y,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, четыре постоянные k_1, λ_1, k_2, λ_2 связаны одним из двух соотношений

$$k_1^2+\lambda_1^2 = k_2^2+\lambda_2^2 \quad \text{(первое семейство решений)},$$
$$k_1\lambda_2 = k_2\lambda_1 \quad \text{(второе семейство решений)},$$

а функции $A = A(t)$ и $B = B(t)$ удовлетворяют линейным независимым ОДУ

$$A'_t = \big[\nu(k_1^2+\lambda_1^2) + \lambda_1\varphi(t) - k_1\psi(t)\big]A,$$
$$B'_t = \big[\nu(k_2^2+\lambda_2^2) + \lambda_2\varphi(t) - k_2\psi(t)\big]B.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$A(t) = C_1 \exp\left[\nu(k_1^2 + \lambda_1^2)t + \lambda_1 \int \varphi(t)\,dt - k_1 \int \psi(t)\,dt\right],$$
$$B(t) = C_2 \exp\left[\nu(k_2^2 + \lambda_2^2)t + \lambda_2 \int \varphi(t)\,dt - k_2 \int \psi(t)\,dt\right].$$

Использование преобразований независимых переменных для построения точных решений. Для нелинейных УрЧП с тремя и более независимыми переменными методы обобщенного разделения переменных могут применяться последовательно несколько раз по мере уменьшения размерностей возникающих редуцированных уравнений. Кроме того, для построения точных решений на начальном или промежуточном этапе иногда могут использоваться также преобразования независимых переменных.

Для иллюстрации сказанного вернемся опять к нелинейному уравнению гидродинамического типа с тремя независимыми переменными (1.3.3.4). Нетрудно показать, что это уравнение допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = xf(t,y) + g(t,y), \tag{1.3.3.5}$$

где функции двух переменных $f = f(t,y)$ и $g = g(t,y)$ удовлетворяют системе из двух уравнений с частными производными четвертого порядка

$$f_{tyy} + f_y f_{yy} - f f_{yyy} = \nu f_{yyyy}, \tag{1.3.3.6}$$
$$g_{tyy} + g_y f_{yy} - f g_{yyy} = \nu g_{yyyy}. \tag{1.3.3.7}$$

Уравнение (1.3.3.6) содержит одну искомую функцию f и не зависит от уравнения (1.3.3.7). Наиболее полный обзор точных решений уравнения (1.3.3.6) и системы (1.3.3.6)—(1.3.3.7) дан в [287] (см. также [4, 37, 53, 142]). Ниже кратко описаны более сложные решения, полученные в [305].

Сформулируем два полезных утверждения, которые позволяют обобщать и строить новые (более сложные) точные решения уравнения (1.3.3.6) и системы (1.3.3.6)—(1.3.3.7) с помощью известного (более простого) решения уравнения (1.3.3.6).

Утверждение 1. Пусть $f = f(t,y)$ — решение уравнения (1.3.3.6). Тогда уравнение (1.3.3.7) допускает точное решение

$$g = Cf_y + a(t)f - a_t'(t)y, \tag{1.3.3.8}$$

где C — произвольная постоянная, а $a = a(t)$ — произвольная функция.

Это утверждение доказывается путем подстановки выражения (1.3.3.8) в (1.3.3.7) с учетом уравнения (1.3.3.6) и его следствия

$$f_{tyyy} + f_{yy}^2 - f f_{yyyy} = \nu f_{yyyyy},$$

полученного путем дифференцирования (1.3.3.6) по y.

Утверждение 2. Пусть $f = f(t, y)$ — решение уравнения (1.3.3.6). Тогда система (1.3.3.6) — (1.3.3.7) допускает точное решение

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t, y+b) + b'_t, \\ g_1 &= C f_y(t, y+b) + a f(t, y+b) - a'_t y, \end{aligned} \tag{1.3.3.9}$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ — произвольные функции.

► Пример 1.23. *Решение системы* (1.3.3.6) — (1.3.3.7)*, рациональное по* y. Нетрудно проверить, что уравнение (1.3.3.6) имеет стационарное решение $f = 6\nu/y$. Используя формулы (1.3.3.9), получим следующее точное решение системы (1.3.3.6) — (1.3.3.7):

$$f = \frac{6\nu}{y+b} + b'_t, \quad g = \frac{C_1}{(y+b)^2} + \frac{6\nu a}{y+b} - a'_t y,$$

которое включает две произвольные функции $a = a(t)$ и $b = b(t)$ и произвольную постоянную $C_1 = -6\nu C$. ◄

Для построения более сложных точных решений вместо y введем новую независимую переменную $z = \lambda(t) y$, где $\lambda = \lambda(t)$ — произвольная функция. В результате система (1.3.3.6) — (1.3.3.7) преобразуется к следующему виду:

$$\lambda f_{tzz} + \lambda'_t z f_{zzz} + 2\lambda'_t f_{zz} + \lambda^2 (f_z f_{zz} - f f_{zzz}) = \nu \lambda^3 f_{zzzz}, \tag{1.3.3.10}$$

$$\lambda g_{tzz} + \lambda'_t z g_{zzz} + 2\lambda'_t g_{zz} + \lambda^2 (g_z f_{zz} - f g_{zzz}) = \nu \lambda^3 g_{zzzz}. \tag{1.3.3.11}$$

При $g = f$ уравнение (1.3.3.11) совпадает с уравнением (1.3.3.10). Поэтому при поиске точных решений с обобщенным разделением переменных берем функции f и g аналогичного вида (по переменной z). Ниже приведены итоговые результаты [305] без промежуточных выкладок.

1°. *Решение, содержащее экспоненциальные функции.* Система (1.3.3.6) — (1.3.3.7) допускает точные решения вида

$$\begin{aligned} f &= a(t) e^{-\lambda(t) y} + b(t) y + c(t), \\ g &= \alpha(t) e^{-\lambda(t) y} + \beta(t) y, \end{aligned} \tag{1.3.3.12}$$

где шесть функциональных коэффициентов $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ удовлетворяют трем уравнениям:

$$\begin{aligned} &\lambda'_t - b\lambda = 0, \\ &a'_t + 3ab + ac\lambda - \nu a \lambda^2 = 0, \\ &\alpha'_t + 2b\alpha + a\beta + c\alpha\lambda - \nu\alpha\lambda^2 = 0. \end{aligned} \tag{1.3.3.13}$$

Здесь второе и третье уравнения были преобразованы с помощью первого уравнения. Функции a, α, λ в (1.3.3.13) будем считать произвольными. Тогда другие три функции можно найти без интегрирования по формулам

$$\begin{aligned} &b = \frac{\lambda'_t}{\lambda}, \quad c = -\frac{1}{a\lambda}(a'_t + 3ab) + \nu\lambda, \\ &\beta = \frac{1}{a}(-\alpha'_t - 2b\alpha - c\alpha\lambda + \nu\alpha\lambda^2). \end{aligned} \tag{1.3.3.14}$$

Ниже приведены два примера, иллюстрирующих использование формул (1.3.3.12) и (1.3.3.14) для построения решений модельных задач гидродинамики.

► **Пример 1.24.** Рассмотрим специальный случай решения (1.3.3.12) при

$$\lambda = \text{const}, \quad b = 0, \quad c = \nu\lambda - \frac{a'_t}{a\lambda}, \quad \alpha = a\sigma, \quad \beta = -\sigma'_t, \tag{1.3.3.15}$$

где $a = a(t)$ и $\sigma = \sigma(t)$ — произвольные функции. Выражения (1.3.3.15) удовлетворяют системе (1.3.3.13) и получены из (1.3.3.14).

Подставляя (1.3.3.15) в (1.3.3.12) и учитывая (1.3.3.5), находим функцию тока

$$u = x\Big(ae^{-\lambda y} + \nu\lambda - \frac{a'_t}{a\lambda}\Big) + a\sigma e^{-\lambda y} - \sigma'_t y. \tag{1.3.3.16}$$

Компоненты скоростей жидкости определяем по формулам (1.3.3.3):

$$U = -a\lambda x e^{-\lambda y} - a\sigma\lambda e^{-\lambda y} - \sigma'_t, \quad V = -ae^{-\lambda y} - \nu\lambda + \frac{a'_t}{a\lambda}. \tag{1.3.3.17}$$

Положив $y = 0$ в (1.3.3.17), имеем

$$U|_{y=0} = -a\lambda x - a\sigma\lambda - \sigma'_t, \quad V|_{y=0} = -a - \nu\lambda + \frac{a'_t}{a\lambda}. \tag{1.3.3.18}$$

Свободные функции a и σ выбираем так:

$$a = -\frac{\nu\lambda}{C_1\exp(\nu\lambda^2 t) + 1}, \quad \sigma = \frac{C_2\exp(\nu\lambda^2 t)}{C_1\exp(\nu\lambda^2 t) + 1}, \tag{1.3.3.19}$$

где C_2 — произвольная постоянная, а C_1 — произвольная постоянная, удовлетворяющая одному из неравенств $C_1 \geqslant 0$ или $C_1 < -1$. Тогда граничные условия (1.3.3.18) значительно упрощаются и принимают вид

$$U|_{y=0} = A(t)\,x, \quad V|_{y=0} = 0, \tag{1.3.3.20}$$

где

$$A(t) = \frac{\nu\lambda^2}{C_1\exp(\nu\lambda^2 t) + 1}.$$

При $\lambda > 0$ формулы (1.3.3.17) с функциями (1.3.3.19) описывают нестационарные течения вязкой жидкости в полуплоскости $0 \leqslant y < \infty$, вызванные растяжением (при $A > 0$) или сжатием (при $A < 0$) поверхности $y = 0$ по закону (1.3.3.20) при специальных начальных условиях (соответствующих $t = 0$ в (1.3.3.19)). В специальном случае $C_1 = C_2 = 0$, приведенные выше формулы дают стационарное решение [135], моделирующее процесс экструзии. При $C_2 = 0$ и $C_1 \neq 0$ формулы (1.3.3.17) и (1.3.3.19) определяют решение, полученное в [4]. ◄

► **Пример 1.25.** Подставляя (1.3.3.12) и (1.3.3.14) при $\alpha = \beta = 0$ в (1.3.3.5), получим функцию тока

$$u = x\Big(ae^{-\lambda y} + \frac{\lambda'_t}{\lambda}y + \nu\lambda - 3\frac{\lambda'_t}{\lambda^2} - \frac{a'_t}{a\lambda}\Big). \tag{1.3.3.21}$$

Соответствующие компоненты скорости жидкости определяются формулами

$$
\begin{aligned}
U &= x\Big(-a\lambda e^{-\lambda y} + \frac{\lambda'_t}{\lambda}\Big),\\
V &= -a e^{-\lambda y} - \frac{\lambda'_t}{\lambda} y - \nu\lambda + 3\frac{\lambda'_t}{\lambda^2} + \frac{a'_t}{a\lambda},
\end{aligned}
\qquad (1.3.3.22)
$$

где $a = a(t)$ и $\lambda = \lambda(t)$ — произвольные функции. Решение (1.3.3.22) удовлетворяет следующим граничным условиям при $y \to \infty$:

$$
U \to \Lambda(t)x, \quad V \to -\Lambda(t)y, \quad \text{где} \quad \Lambda = \lambda'_t/\lambda.
$$

Эти условия используются для моделирования вязких течений вблизи застойной точки (см., например, [4, 142, 185, 353, 354]).

Рассмотрим подробнее специальный случай

$$
a = \frac{a_0}{\sqrt{t+C}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{t+C}}, \quad a_0 = -\frac{1}{\lambda_0}(\nu\lambda_0 + 2), \qquad (1.3.3.23)
$$

где $C > 0$ и $\lambda_0 > 0$ — произвольные постоянные. На поверхности $y = 0$ решение (1.3.3.22), (1.3.3.23) удовлетворяет условиям

$$
U|_{y=0} = -A(t)x, \quad V|_{y=0} = 0, \qquad (1.3.3.24)
$$

где

$$
A(t) = -\frac{2\nu\lambda_0^2 + 3}{t + C}.
$$

Поэтому решение (1.3.3.22), (1.3.3.23) описывает нестационарное движение вязкой жидкости около сжимающейся плоскости. ◄

2°. *Решение, содержащее тригонометрические функции.* Система уравнений (1.3.3.6) — (1.3.3.7) допускает точные решения вида

$$
\begin{aligned}
f &= a(t)\cos[\lambda(t)y + \sigma(t)] + b(t)y + c(t),\\
g &= \alpha(t)\cos[\lambda(t)y + \sigma(t)] + s(t)\sin[\lambda(t)y + \sigma(t)] + \beta(t)y,
\end{aligned}
\qquad (1.3.3.25)
$$

где восемь функциональных коэффициентов $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $s = s(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $\sigma = \sigma(t)$ удовлетворяют пяти уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&\lambda'_t - b\lambda = 0,\\
&\sigma'_t - c\lambda = 0,\\
&a'_t + 3ab + \nu a\lambda^2 = 0,\\
&\alpha'_t + 2b\alpha + a\beta + \nu\alpha\lambda^2 = 0,\\
&s'_t + 2bs + \nu s\lambda^2 = 0.
\end{aligned}
\qquad (1.3.3.26)
$$

Здесь последние три уравнения были преобразованы с использованием первых двух уравнений.

Функции λ, σ, α будем считать произвольными. Тогда другие пять функций определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
&a = \frac{a_0}{\lambda^3}\exp\Big(-\nu\int\lambda^2\,dt\Big), \quad b = \frac{\lambda'_t}{\lambda}, \quad c = \frac{\sigma'_t}{\lambda},\\
&\beta = -\frac{1}{a}(\alpha'_t + 2b\alpha + \nu\alpha\lambda^2), \quad s = \frac{s_0}{\lambda^2}\exp\Big(-\nu\int\lambda^2\,dt\Big),
\end{aligned}
\qquad (1.3.3.27)
$$

где a_0 и s_0 — произвольные постоянные.

► Пример 1.26. Рассмотрим специальный случай уравнения (1.3.3.25) при

$$\begin{aligned} &\lambda = \text{const}, \quad \sigma = \pi/2, \quad b = c = 0, \quad \alpha = \beta = \omega = 0, \\ &a = a_1 E(t), \quad s = s_1 E(t), \quad E(t) = \exp(-\nu\lambda^2 t), \end{aligned} \tag{1.3.3.28}$$

где $a_1 = a_0\lambda^{-3}$ и $s_1 = s_0\lambda^{-2}$ — произвольные постоянные. Выражения (1.3.3.28) удовлетворяют системе (1.3.3.26) и согласуются с формулами (1.3.3.27).

Подставляя (1.3.3.28) в (1.3.3.25) и учитывая соотношение (1.3.3.5), находим функцию тока

$$u = -a_1 E(t) x \sin(\lambda y) + s_1 E(t) \cos(\lambda y). \tag{1.3.3.29}$$

Используя формулы (1.3.3.3), определяем компоненты скорости жидкости

$$\begin{aligned} &U = -a_1 \lambda E(t) x \cos(\lambda y) - s_1 \lambda E(t) \sin(\lambda y), \\ &V = a_1 E(t) \sin(\lambda y), \quad E(t) = \exp(-\nu\lambda^2 t). \end{aligned} \tag{1.3.3.30}$$

Полагая $y = 0$ в (1.3.3.30), получим

$$U|_{y=0} = -a_1 \lambda E(t) x, \quad V|_{y=0} = 0.$$

Из этих условий следует, что граница $y = 0$ растягивается при $a_1\lambda < 0$ и сжимается при $a_1\lambda > 0$. Решение (1.3.3.30) является периодическим по y. Таким образом формулы (1.3.3.30) описывают течение в полосе $0 \leqslant y \leqslant 2\pi/\lambda$, границы которой деформированы согласованным образом (например, в процессе экструзии). ◄

3°. *Решения, содержащие гиперболические функции.*

3.1. Система (1.3.3.6) — (1.3.3.7) допускает точные решения вида

$$\begin{aligned} &f = a(t) \operatorname{ch}[\lambda(t) y + \sigma(t)] + b(t) y + c(t), \\ &g = \alpha(t) \operatorname{ch}[\lambda(t) y + \sigma(t)] + s(t) \operatorname{sh}[\lambda(t) y + \sigma(t)] + \beta(t) y. \end{aligned} \tag{1.3.3.31}$$

Здесь $\lambda = \lambda(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, $\alpha = \alpha(t)$ — произвольные функции, а остальные функциональные коэффициенты определятся формулами

$$\begin{aligned} &a = \frac{a_0}{\lambda^3} \exp\left(\nu \int \lambda^2\, dt\right), \quad b = \frac{\lambda'_t}{\lambda}, \quad c = \frac{\sigma'_t}{\lambda}, \\ &\beta = -\frac{1}{a}(\alpha'_t + 2b\alpha - \nu\alpha\lambda^2), \quad s = \frac{s_0}{\lambda^2} \exp\left(\nu \int \lambda^2\, dt\right), \end{aligned} \tag{1.3.3.32}$$

где a_0 и s_0 — произвольные постоянные.

3.2. Система (1.3.3.6) — (1.3.3.7) допускает другое решение

$$\begin{aligned} &f = a(t) \operatorname{sh}[\lambda(t) y + \sigma(t)] + b(t) y + c(t), \\ &g = \alpha(t) \operatorname{sh}[\lambda(t) y + \sigma(t)] + s(t) \operatorname{ch}[\lambda(t) y + \sigma(t)] + \beta(t) y, \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, $\alpha = \alpha(t)$ — произвольные функции, а функциональные коэффициенты $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $s = s(t)$, $\beta = \beta(t)$ также определятся формулами (1.3.3.32).

Замечание 1.18. *Другие точные решения двумерных и трехмерных стационарных и нестационарных уравнений Навье — Стокса можно найти, например, в [3–7, 27, 32, 37, 52, 53, 64, 78, 87, 94, 108, 134, 135, 139, 142, 172, 175, 195, 227, 230, 231, 240, 243, 244, 252, 287, 287, 292, 305, 320, 325, 326, 353, 354, 368].*

Свойства уравнения (1.3.3.4). Ниже описаны важные свойства уравнения (1.3.3.4), позволяющие размножать и обобщать его точные решения. А именно, справедливо следующее утверждение (подробности см. в [32, 108, 227, 320]).

Пусть $u(x,y,t)$ — решение уравнения (1.3.3.4). Тогда функции

$$
\begin{aligned}
&u_1 = -u(y,\,x,\,t),\\
&u_2 = u(C_1x + C_2,\, C_1y + C_3,\, C_1^2t + C_4) + C_5,\\
&u_3 = u(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\, -x\sin\alpha + y\cos\alpha,\, t),\\
&u_4 = u(x\cos\beta t + y\sin\beta t,\, -x\sin\beta t + y\cos\beta t,\, t) - \tfrac{1}{2}\beta(x^2+y^2),\\
&u_5 = u(x+\varphi(t),\, y+\psi(t),\, t) + \psi'_t(t)x - \varphi'_t(t)y + \chi(t),
\end{aligned}
$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_5,\,\alpha,\,\beta$ — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, также являются решениями этого уравнения.

1.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования

1.4.1. Описание метода дифференцирования

При поиске точных решений с обобщенным разделением переменных часто приходится рассматривать функционально-дифференциальные уравнения вида (1.2.2.1)—(1.2.2.2). В данном разделе описана простая и достаточно общая процедура решения таких уравнений, которая состоит из трех последовательных этапов, описанных ниже.

1°. Предположим, что $\Psi_k \not\equiv 0$. Поделим уравнение (1.2.2.1) на Ψ_k, а затем продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов:

$$
\begin{gathered}
\widetilde{\Phi}_1[X]\widetilde{\Psi}_1[Y] + \widetilde{\Phi}_2[X]\widetilde{\Psi}_2[Y] + \cdots + \widetilde{\Phi}_{k-1}[X]\widetilde{\Psi}_{k-1}[Y] = 0,\\
\widetilde{\Phi}_j[X] = \Phi_j[X], \quad \widetilde{\Psi}_j[Y] = (\Psi_j[Y]/\Psi_k[Y])'_y.
\end{gathered}
\tag{1.4.1.1}
$$

Повторим аналогичную процедуру еще $(k-3)$ раза. В итоге приходим к двучленному уравнению с разделяющимися переменными

$$
\widehat{\Phi}_1[X]\widehat{\Psi}_1[Y] + \widehat{\Phi}_2[X]\widehat{\Psi}_2[Y] = 0. \tag{1.4.1.2}
$$

Теперь надо рассмотреть две возможные ситуации.

Невырожденный случай. Пусть $\widehat{\Phi}_2[X] \not\equiv 0$ и $\widehat{\Psi}_1[Y] \not\equiv 0$. Перенесем второе слагаемое уравнения (1.4.1.2) в правую часть, а затем обе части поделим на

$\widehat{\Phi}_2[X]\widehat{\Psi}_1[Y]$. В результате получим равенство двух величин, зависящих от разных переменных. Приравнивая, как обычно, эти величины константе C, имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\widehat{\Phi}_1[X]+C\widehat{\Phi}_2[X]=0, \quad C\widehat{\Psi}_1[Y]-\widehat{\Psi}_2[Y]=0. \qquad (1.4.1.3)$$

Вырожденные случаи. В этих случаях оба слагаемых в сумме (1.4.1.2) одновременно обращаются в нуль:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Phi}_1[X]\equiv 0,\ \ \widehat{\Phi}_2[X]\equiv 0 &&\Longrightarrow\ \ \widehat{\Psi}_1[Y] \text{ и } \widehat{\Psi}_2[Y]\text{ — любые;}\\
&\widehat{\Psi}_1[Y]\equiv 0,\ \ \widehat{\Psi}_2[Y]\equiv 0 &&\Longrightarrow\ \ \widehat{\Phi}_1[X] \text{ и } \widehat{\Phi}_2[X]\text{ — любые;}\\
&\widehat{\Phi}_1[X]\equiv 0,\ \ \widehat{\Psi}_2[Y]\equiv 0 &&\Longrightarrow\ \ \widehat{\Phi}_2[X] \text{ и } \widehat{\Psi}_1[Y]\text{ — любые;}\\
&\widehat{\Phi}_2[X]\equiv 0,\ \ \widehat{\Psi}_1[Y]\equiv 0 &&\Longrightarrow\ \ \widehat{\Phi}_1[X] \text{ и } \widehat{\Psi}_2[Y]\text{ — любые.}
\end{aligned} \qquad (1.4.1.4)$$

Хотя два последних (перекрестных) вырожденных случая $\widehat{\Phi}_1=0$, $\widehat{\Psi}_2=0$ и $\widehat{\Phi}_2=0$, $\widehat{\Psi}_1=0$ и являются следствиями уравнений (1.4.1.3) в предельных случаях при $C\to 0$ и $C\to\infty$, их надо рассмотреть отдельно поскольку могут не существовать соответствующие предельные решения уравнений (1.4.1.3).

2°. Полученные решения двучленного уравнения (1.4.1.2) надо подставить в исходное функционально-дифференциальное уравнение (1.2.2.1) — (1.2.2.2), чтобы убрать лишние постоянные интегрирования (они появляются из-за того, что уравнение (1.4.1.2) получено из (1.2.2.1) путем дифференцирования).

3°. Случай $\Psi_k\equiv 0$ надо рассмотреть отдельно (поскольку уравнение на первом этапе делилось на Ψ_k). Аналогично следует исследовать все другие случаи тождественного обращения в нуль функционалов, на которые делились промежуточные функционально-дифференциальные уравнения.

Замечание 1.19. *Функционально-дифференциальное уравнение (1.2.2.1)—(1.2.2.2) может иметь одно или несколько решений, а может вообще не иметь решений.*

Замечание 1.20. *На каждом этапе число членов рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения можно понижать путем дифференцирования как по переменной y, так и по переменной x. На первом этапе, например, можно предположить, что $\Phi_i\not\equiv 0$ (i — любое, $1\leqslant i\leqslant k$). Поделив уравнение (1.2.2.1) на Φ_i и продифференцировав по x, получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов.*

При практическом использовании описанного метода путем дифференцирования в первую очередь следует «убирать» члены, содержащие старшие производные или/и наиболее сложные нелинейности. Такой подход позволяет в итоге получить наиболее простые двучленные уравнения вида (1.4.1.2).

1.4.2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных методом дифференцирования

Ниже даны конкретные примеры использования метода дифференцирования для построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных УрЧП.

► Пример 1.27. Рассмотрим уравнение параболического типа с квадратичной нелинейностью

$$u_t = auu_{xx} + bu_x^2 + c. \tag{1.4.2.1}$$

Будем искать точные решения с разделением переменных вида

$$u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{1.4.2.2}$$

Подставляя решение (1.4.2.2) в уравнение (1.4.2.1) и группируя слагаемые, имеем

$$\psi_t' - c + \varphi_t'\theta = a\varphi\psi\theta_{xx}'' + \varphi^2\bigl[a\theta\theta_{xx}'' + b(\theta_x')^2\bigr]. \tag{1.4.2.3}$$

Сначала устраним наиболее сложную нелинейность, стоящую в квадратных скобках. Разделив соотношение (1.4.2.3) на φ^2 и продифференцировав по t и x, получим двучленное функционально-дифференциальное уравнение

$$(\varphi_t'/\varphi^2)_t'\theta_x' = a(\psi/\varphi)_t'\theta_{xxx}'''. \tag{1.4.2.4}$$

Разделяя переменные, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\theta_{xxx}''' = K\theta_x', \tag{1.4.2.5}$$

$$(\varphi_t'/\varphi^2)_t' = aK(\psi/\varphi)_t', \tag{1.4.2.6}$$

где K — произвольная постоянная. Общее решение уравнения (1.4.2.5) имеет вид

$$\theta = \begin{cases} A_1x^2 + A_2x + A_3 & \text{при } K = 0,\\ A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x} + A_3 & \text{при } K = \lambda^2 > 0,\\ A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x) + A_3 & \text{при } K = -\lambda^2 < 0, \end{cases} \tag{1.4.2.7}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные. Интегрируя уравнение (1.4.2.6), получим

$$\begin{aligned} &\varphi = \frac{B}{t + C_1}, \quad \psi(t) \text{ — любая} && \text{при } K = 0,\\ &\psi = B\varphi + \frac{1}{aK}\frac{\varphi_t'}{\varphi}, \quad \varphi(t) \text{ — любая} && \text{при } K \neq 0, \end{aligned} \tag{1.4.2.8}$$

где B — произвольная постоянная. Подставив решения (1.4.2.7) и (1.4.2.8) в уравнение (1.4.2.3), можно убрать лишние константы и определить функции ψ и φ. Результаты приводятся ниже.

1°. Решение при $b \neq -a$ и $b \neq -\frac{1}{2}a$:

$$u = \frac{c(a+2b)}{2(a+b)}(t+C_1) + C_2(t+C_1)^{-\frac{a}{a+2b}} - \frac{(x+C_3)^2}{2(a+2b)(t+C_1)} \quad (\text{соответствует } K = 0),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение при $b = -a$:

$$u = \frac{1}{a\lambda^2}\frac{\varphi_t'}{\varphi} + \varphi(A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x}) \quad (\text{соответствует } K = \lambda^2 > 0),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = ac\lambda^2 + 4a^2\lambda^4 A_1 A_2 e^{2Z}, \qquad \varphi = e^Z,$$

решение которого можно получить в неявном виде. В частном случае $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$, легко получаем $\varphi = C_1 \exp\bigl(\frac{1}{2}ac\lambda^2 t^2 + C_2 t\bigr)$.

3°. Решение при $b = -a$:

$$u = -\frac{1}{a\lambda^2}\frac{\varphi'_t}{\varphi} + \varphi[A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x)] \quad (\text{соответствует } K = -\lambda^2 < 0),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = -ac\lambda^2 + a^2\lambda^4 (A_1^2 + A_2^2) e^{2Z}, \qquad \varphi = e^Z,$$

решение которого можно получить в неявном виде.

4°. При $b = -\frac{1}{2}a$ имеется вырожденное решение $u = ct + A_1$.

Вырожденное решение двучленного функционально-дифференциального уравнения (1.4.2.4) ($\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$) приводит к стационарному решению рассматриваемого уравнения. Подобные решения, здесь и далее, не рассматриваются. ◄

Замечание 1.21. *Решения с обобщенным разделением переменных уравнения (1.4.2.1) другим методом были получены в [159].*

► Пример 1.28. Рассмотрим опять нелинейное УрЧП третьего порядка

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = \nu u_{yyy}, \tag{1.4.2.9}$$

которое описывает ламинарный пограничный слой на плоской пластине (см. уравнение (1.3.2.42)).

Ищем решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x). \tag{1.4.2.10}$$

Подставляя (1.4.2.10) в (1.4.2.9) и сокращая на φ, приходим у функционально-му дифференциальному уравнению

$$\varphi'_x[(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy}] - \psi'_x\theta''_{yy} = \nu\theta'''_{yyy}. \tag{1.4.2.11}$$

Сначала устраним старшую производную. Для этого продифференцируем уравнение (1.4.2.11) по x. В результате получим

$$\varphi''_{xx}[(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy}] = \psi''_{xx}\theta''_{yy}. \tag{1.4.2.12}$$

Невырожденный случай. Разделяя переменные в (1.4.2.12), имеем

$$\psi''_{xx} = C_1\varphi''_{xx},$$
$$(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy} - C_1\theta''_{yy} = 0.$$

Интегрируя, находим неизвестные функции

$$\varphi(x) - \text{любая}, \quad \psi(x) = C_1\varphi(x) + C_2 x + C_3, \quad \theta(y) = C_4 e^{\lambda y} - C_1, \tag{1.4.2.13}$$

где λ — постоянная интегрирования. Подставив (1.4.2.13) в (1.4.2.11), устанавливаем связь между константами: $C_2 = -\nu\lambda$. Наконец, с учетом сказанного и формул (1.4.2.10), (1.4.2.13), получаем решение уравнение (1.4.2.9) вида (1.4.2.10):

$$u = \varphi(x)e^{\lambda y} - \nu\lambda x + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а C и λ — произвольные постоянные ($C = C_3$, $C_4 = 1$).

Вырожденный случай. Из (1.4.2.12) следует, что

$$\varphi''_{xx} = 0, \quad \psi''_{xx} = 0, \quad \theta(y) \text{ — произвольная функция.} \tag{1.4.2.14}$$

Дважды интегрируя первые два равенства в (1.4.2.14), получим

$$\varphi(x) = C_1x + C_2, \quad \psi(x) = C_3x + C_4. \tag{1.4.2.15}$$

Подставляя (1.4.2.15) в (1.4.2.11), приходим к ОДУ для $\theta = \theta(y)$:

$$C_1(\theta'_y)^2 - (C_1\theta + C_3)\theta''_{yy} = \nu\theta'''_{yyy}. \tag{1.4.2.16}$$

Формулы (1.4.2.10) и (1.4.2.15) совместно с уравнением (1.4.2.16) определяют точное решение уравнения (1.4.2.9).

Обширный список точных решений уравнения пограничного слоя (1.4.2.9) и родственных уравнений гидродинамики приведен в справочнике [287]. ◄

► Пример 1.29. Двумерные установившиеся движения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье — Стокса и уравнением неразрывности (1.3.3.2) при $U_t = V_t = 0$. Эти уравнения путем введения функции тока u по формулам (1.3.3.3) сводятся к одному нелинейному стационарному уравнению четвертого порядка:

$$u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \tag{1.4.2.17}$$

Отметим свойство уравнения (1.4.2.17): если $u(x,y)$ — решение данного уравнения, то и $-u(y,x)$ — решение этого уравнения (в данном примере будут опускаться решения, которые можно получить из рассматриваемых ниже решений путем использования описанного свойства; о других свойствах уравнения (1.4.2.17) см. [287]).

Будем искать точные решения уравнения (1.4.2.17) в виде

$$u = \varphi(x) + \psi(y). \tag{1.4.2.18}$$

Подставив (1.4.2.18) в (1.4.2.17), имеем

$$\psi'_y\varphi'''_{xxx} - \varphi'_x\psi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{xxxx} + \nu\psi''''_{yyyy}. \tag{1.4.2.19}$$

Продифференцировав обе части (1.4.2.19) по x и y, устраним члены, содержащие старшие производные. В результате получим

$$\psi''_{yy}\varphi''''_{xxxx} - \varphi''_{xx}\psi''''_{yyyy} = 0. \tag{1.4.2.20}$$

Невырожденный случай. При $\varphi''_{xx} \not\equiv 0$ и $\psi''_{yy} \not\equiv 0$, разделяя в (1.4.2.20) переменные, приходим к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi''''_{xxxx} = C\varphi''_{xx}, \tag{1.4.2.21}$$

$$\psi''''_{yyyy} = C\psi''_{yy}, \tag{1.4.2.22}$$

которые имеют решения различного вида в зависимости от величины константы интегрирования C.

1°. Решения уравнений (1.4.2.21), (1.4.2.22) при $C = 0$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3, \end{aligned} \tag{1.4.2.23}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k = 1, 2, 3, 4$). Подставив (1.4.2.23) в (1.4.2.19), находим значения постоянных:

$$\begin{aligned} &A_4 = B_4 = 0, && A_n, B_n - \text{любые} && (n = 1, 2, 3); \\ &A_k = 0, && B_k - \text{любые} && (k = 1, 2, 3, 4); \\ &B_k = 0, && A_k - \text{любые} && (k = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Первые два набора постоянных определяют два известных полиномиальных решения уравнения (1.4.2.17) второй и третьей степени относительно независимых переменных [27]:

$$\begin{aligned} u &= C_1 x^2 + C_2 x + C_3 y^2 + C_4 y + C_5, \\ u &= C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4, \end{aligned} \tag{1.4.2.24}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

2°. Решения уравнений (1.4.2.21), (1.4.2.22) при $C = \lambda^2 > 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 e^{\lambda y} + B_4 e^{-\lambda y}. \end{aligned} \tag{1.4.2.25}$$

Подставим (1.4.2.25) в (1.4.2.19). После сокращения на λ^3 и приведения подобных членов получим

$$A_3(\nu\lambda - B_2)e^{\lambda x} + A_4(\nu\lambda + B_2)e^{-\lambda x} + B_3(\nu\lambda + A_2)e^{\lambda y} + B_4(\nu\lambda - A_2)e^{-\lambda y} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах нулю, находим значения постоянных:

$$\begin{aligned} &A_3 = A_4 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda && (\text{случай } 1), \\ &A_3 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda && (\text{случай } 2), \\ &A_3 = B_4 = 0,\ A_2 = -\nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda && (\text{случай } 3). \end{aligned}$$

(Остальные постоянные могут принимать произвольные значения.) Указанные наборы постоянных определяют три решения уравнения (1.4.2.17) вида (1.4.2.18) [37]:

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y + C_3 + \nu\lambda x, \\ u &= C_1 e^{-\lambda x} + \nu\lambda x + C_2 e^{-\lambda y} - \nu\lambda y + C_3, \\ u &= C_1 e^{-\lambda x} - \nu\lambda x + C_2 e^{\lambda y} - \nu\lambda y + C_3, \end{aligned}$$

где λ — произвольная постоянная.

3°. Решения уравнений (1.4.2.21), (1.4.2.22) при $C = -\lambda^2 < 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 \cos(\lambda x) + A_4 \sin(\lambda x),\\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 \cos(\lambda y) + B_4 \sin(\lambda y). \end{aligned} \qquad (1.4.2.26)$$

Подстановка выражений (1.4.2.26) в (1.4.2.19) не дает новых действительных решений.

Вырожденные случаи. В случаях $\varphi''_{xx} \equiv 0$ и $\psi''_{yy} \equiv 0$ уравнение (1.4.2.20) обращается в тождество соответственно для любой функции $\psi = \psi(y)$ и любой функции $\varphi = \varphi(x)$. Эти случаи надо рассматривать отдельно. Например, при $\varphi''_{xx} \equiv 0$ имеем $\varphi(x) = Ax + B$, где A, B — любые. Подставив эту функцию в (1.4.2.19), приходим к уравнению $-A\psi'''_{yyy} = \nu\psi''''_{yyyy}$. Его общее решение описывается формулой $\psi(y) = C_1 \exp(-Ay/\nu) + C_2 y^2 + C_3 y + C_4$. В итоге находим еще одно решение уравнения (1.4.2.17) вида (1.4.2.18):

$$u = C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 + \nu\lambda x \quad (A = \nu\lambda,\ B = 0),$$

которое с помощью группового анализа было получено в [320].

Обширный список точных решений уравнения (1.4.2.17) и родственных уравнений гидродинамики приведен в [142, 287]. ◀

Важно отметить, что результаты, полученные для нелинейных уравнений математической физики с помощью обобщенного разделения переменных, часто без особых усилий удается существенно обобщить, распространив их на целые классы нелинейных уравнений более высокого порядка (нередко, даже произвольного порядка) с более сложными коэффициентами, зависящими от независимых переменных. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

▶ Пример 1.30. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = f(x) u_y^{(n)}, \qquad (1.4.2.27)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, $n \geqslant 1$ — любое целое число. В частном случае $n = 3$, $f(x) = \nu = \mathrm{const}$ оно совпадает с уравнением пограничного слоя (1.3.2.42).

Как и в примере 1.28, ищем точное решение уравнения (1.4.2.27) с обобщенным разделением переменных в виде (1.4.2.10). Подставив (1.4.2.10) в (1.4.2.27) и сократив на φ, получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\varphi'_x[(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy}] - \psi'_x\theta''_{yy} = f(x)\theta_y^{(n)}. \qquad (1.4.2.28)$$

Чтобы устранить старшую производную, поделим обе части уравнения (1.4.2.28) на $f = f(x)$, а затем продифференцируем по x. В результате имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x[(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy}] - (\psi'_x/f)'_x\theta''_{yy} = 0. \qquad (1.4.2.29)$$

Невырожденный случай. Разделяя в (1.4.2.29) переменные, получим

$$(\psi'_x/f)'_x = C_1(\varphi'_x/f)'_x,$$
$$(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy} - C_1\theta''_{yy} = 0.$$

Интегрируя, приходим к следующим выражениям:

$$\varphi(x) - \text{любая}, \quad \psi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\int f(x)\,dx + C_3, \quad \theta(y) = C_4e^{\lambda y} - C_1, \tag{1.4.2.30}$$

где λ — постоянная интегрирования. Подставив (1.4.2.30) в (1.4.2.28), находим связь между константами: $C_2 = -\lambda^{n-2}$. Учитывая сказанное, а также формулы (1.4.2.10) и (1.4.2.30), в итоге получим решение уравнения (1.4.2.27) вида (1.4.2.10):

$$u = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а C, λ — произвольные постоянные ($C = C_3$, $C_4 = 1$).

Вырожденный случай. Из уравнения (1.4.2.29) имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x = 0, \quad (\psi'_x/f)'_x = 0, \quad \theta(y) - \text{любая}. \tag{1.4.2.31}$$

Интегрируя дважды первые два уравнения (1.4.2.31), находим

$$\varphi(x) = C_1\int f(x)\,dx + C_2, \quad \psi(x) = C_3\int f(x)\,dx + C_4. \tag{1.4.2.32}$$

Подставив выражения (1.4.2.32) в (1.4.2.28), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $\theta = \theta(y)$:

$$C_1(\theta'_y)^2 - (C_1\theta + C_3)\theta''_{yy} = \theta_y^{(n)}. \tag{1.4.2.33}$$

В результате получим точное решение уравнения (1.4.2.27) в виде

$$u = \Bigl(C_1\int f(x)\,dx + C_2\Bigr)\theta(y) + C_3\int f(x)\,dx + C_4,$$

где функция $\theta = \theta(y)$ удовлетворяет автономному ОДУ (1.4.2.33).

Отметим, что автономное уравнение (1.4.2.33) имеет точные решения степенного и экспоненциального вида

$$\theta(y) = \frac{1}{C_1}[K_n(y+A)^{2-n} - C_3], \quad K_n = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!}{(n-2)!} \quad (n = 2, 3, \ldots);$$
$$\theta(y) = Ae^{\lambda y} - \frac{1}{C_1}(\lambda^{n-2} + C_3),$$

где A, C_1, C_3 — произвольные постоянные ($C_1 \neq 0$). При $n = 1$ в первом решении следует положить $K_1 = 1$.

Видно, что процедура построения решения с обобщенным разделением переменных уравнения пограничного слоя (1.3.2.42) и значительно более общего уравнения (1.4.2.27) очень похожи и одинаковы по сложности. ◄

Для функционально-дифференциальных уравнений, содержащих много слагаемых, метод дифференцирования может применяться несколько раз для последовательного уточнения структуры решений. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

▶ **Пример 1.31.** Рассмотрим уравнение типа теплопроводности с квадратичной нелинейностью

$$u_t = auu_{xx} + bu_x^2, \tag{1.4.2.34}$$

которое является частным случаем уравнения (1.4.2.1) при $c = 0$.

Ищем решение уравнения (1.4.2.34) в виде

$$u = \psi(t)\xi(x) + \varphi(t)\eta(x), \tag{1.4.2.35}$$

где все четыре функции справа подлежат определению. Подставив (1.4.2.35) в (1.4.2.34), имеем

$$\begin{aligned}\psi_t'\xi + \varphi_t'\eta = \psi^2[a\xi\xi_{xx}'' + b(\xi_x')^2] + \\ + \psi\varphi[a(\xi\eta)_{xx}'' + 2(b-a)\xi_x'\eta_x'] + \varphi^2[a\eta\eta_{xx}'' + b(\eta_x')^2].\end{aligned} \tag{1.4.2.36}$$

Невырожденный случай. Умножая соотношение (1.4.2.36) на подходящие функции, зависящие от t, а затем дифференцируя по t (три раза), уничтожим второй член слева и второй и третий члены справа. В результате приходим к двучленному уравнению

$$p_1(t)\xi = p_2(t)[a\xi\xi_{xx}'' + b(\xi_x')^2], \tag{1.4.2.37}$$

где функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ зависят от ψ и φ (конкретный вид этих функций для дальнейшего пока несуществен).

Нетрудно проверить, что уравнению (1.4.2.37) удовлетворяет функция

$$\xi(x) = x^2, \tag{1.4.2.38}$$

в которой взят масштабный множитель, равный единице (это всегда можно сделать за счет перенормировки функции ψ в (1.4.2.35)).

Умножая уравнение (1.4.2.36) на другие подходящие функции, зависящие от t, а затем дифференцируя по t, уничтожим первый член слева и первый и третий члены справа. Получим уравнение

$$q_1(t)\eta = q_2(t)[a(\xi\eta)_{xx}'' + 2(b-a)\xi_x'\eta_x']. \tag{1.4.2.39}$$

Подставив в него функцию (1.4.2.38), приходим к линейному однородному уравнению по x:

$$q_1(t)\eta = q_2(t)[a(x^2\eta)_{xx}'' + 4(b-a)x\eta_x'], \tag{1.4.2.40}$$

которому удовлетворяет любая степенная функция

$$\eta(x) = x^k. \tag{1.4.2.41}$$

Подставив далее функции (1.4.2.38) и (1.4.2.41) в (1.4.2.36), после объединения членов при разных степенях x получим

$$\begin{aligned}[\psi_t' - 2(a+2b)\psi^2]x^2 + \{\varphi_t' - [a(k^2-k+2) + 4bk]\psi\varphi\}x^k - \\ - k[a(k-1) + bk]\varphi^2x^{2k-2} = 0,\end{aligned} \tag{1.4.2.42}$$

Это соотношение должно тождественно удовлетворяться для любых x. Последний член в (1.4.2.42) можно сбалансировать по показателю степени с двумя первыми членами только при $k = 2$, что соответствует малоинтересному

решению с простым мультипликативным разделением переменных. Остаются два случая
$$k = 0, \quad k = \frac{a}{a+b}, \tag{1.4.2.43}$$
которые соответствуют обращению в нуль числового множителя при x^{2k-2}.

При $k = 0$ уравнение (1.4.2.34) имеет решение в виде квадратичного двучлена по x. Это решение рассмотрено в примере 1.27 (см. формулу в п. 1° при $c = 0$).

Второе значение k в (1.4.2.43) приводит к точному решению уравнения (1.4.2.34) степенного вида по x:
$$u = \psi(t)x^2 + \varphi(t)x^{\frac{a}{a+b}}, \tag{1.4.2.44}$$
где $b \neq -a$, а функции $\psi = \psi(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ удовлетворяют ОДУ
$$\begin{gathered} \psi'_t - A\psi^2 = 0, \quad \varphi'_t - B\psi\varphi = 0, \\ A = 2(a+2b), \quad B = a(a+2b)(2a+3b)(a+b)^{-2}, \end{gathered} \tag{1.4.2.45}$$
которые получены приравниванием нулю функциональных множителей, стоящих перед степенными функциями x^2 и x^k в (1.4.2.42). Общее решение системы (1.4.2.45) имеет вид
$$\psi = -\frac{1}{A(t+C_1)}, \quad \varphi = C_2(t+C_1)^{-B/A}.$$

Вырожденные случаи. Рассмотрим теперь вырожденные случаи, когда одновременно обращаются в нуль левая и правая части двучленного уравнения (1.4.2.37).

1°. Пусть в (1.4.2.37) функция $p_1(t)$ и выражение в квадратных скобках равны нулю. В этом случае приходим к простому нелинейному уравнению
$$a\xi\xi''_{xx} + b(\xi'_x)^2 = 0, \tag{1.4.2.46}$$
имеющему несколько решений, которые анализируются ниже.

(*a*) Уравнение (1.4.2.46) для любых a и b имеет вырожденное решение $\xi = 1$, которое порождает описанные в примере 1.27 точные решения уравнения (1.4.2.34) (уравнение (1.4.2.34) совпадает с уравнением (1.4.2.1) при $c = 0$, а решение (1.4.2.35) при $\xi = 1$ с точностью до переобозначений совпадает с решением (1.4.2.2)).

(*b*) Уравнение (1.4.2.46) при $b \neq -a$ имеет степенное решение $\xi = x^{\frac{a}{a+b}}$, которое в конечном итоге приводит к рассмотренному ранее решению вида (1.4.2.44) исходного уравнения (1.4.2.34) (это решение соответствует переобозначению функций $\xi \rightleftarrows \eta$ в (1.4.2.35)).

(*c*) Уравнение (1.4.2.46) при $b = -a$ имеет экспоненциальное решение $\xi = e^{\lambda x}$, которое приводит к решениям, рассмотренным в примере 1.27 (см. п. 2° при $c = 0$ и $A_2 = 0$).

2°. Пусть в (1.4.2.37) одновременно обращаются в нуль функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$. В этом случае в итоге можно получить экспоненциальные и тригонометрические решения, рассмотренные ранее в примере 1.27 (см. пп. 2° и 3° при $c = 0$). ◄

► Пример 1.32. Рассмотрим ненормированное уравнение Буссинеска

$$u_{tt} + a(uu_x)_x + bu_{xxxx} = 0. \qquad (1.4.2.47)$$

Оно встречается в некоторых физических приложениях: распространение длинных волн в мелкой воде, нелинейные колебания атомов в кристаллической решетке, колебания в нелинейных струнах, ионно-звуковые волны в плазме [96, 335, 344].

Решение уравнения (1.4.2.47), как и в примере 1.31, ищем в виде (1.4.2.35). Подставив (1.4.2.35) в (1.4.2.47), имеем

$$\begin{aligned}\psi''_{tt}\xi + \varphi''_{tt}\eta + a\psi^2(\xi\xi'_x)'_x + a\psi\varphi(\xi\eta)''_{xx} +\\ + a\varphi^2(\eta\eta'_x)'_x + b\psi\xi''''_{xxxx} + b\varphi\eta''''_{xxxx} = 0.\end{aligned} \qquad (1.4.2.48)$$

Невырожденный случай. Умножая соотношение (1.4.2.48) на подходящие функции, зависящие от t, а затем дифференцируя по t, уничтожим все члены за исключение первого и третьего. В результате приходим к двучленному уравнению

$$p_1(t)\xi = p_2(t)(\xi\xi'_x)'_x, \qquad (1.4.2.49)$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ зависят от функций ψ и φ (конкретный вид этих функций для дальнейшего пока несуществен). Прямой проверкой можно убедиться, что уравнению (1.4.2.49) удовлетворяет квадратичная функция $\xi = x^2$.

Умножая уравнение (1.4.2.48) на другие подходящие функции, зависящие от t, а затем дифференцируя по t, уничтожим все члены за исключение второго и четвертого. Получим уравнение

$$q_1(t)\eta = q_2(t)(\xi\eta)''_{xx}. \qquad (1.4.2.50)$$

Подставив в него $\xi = x^2$, приходим к линейному (и однородному по x) уравнению

$$q_1(t)\eta = q_2(t)(x^2\eta)''_{xx}, \qquad (1.4.2.51)$$

которому удовлетворяет любая степенная функция $\eta = x^k$.

Подставив полученные функции $\xi = x^2$ и $\eta = x^k$ в (1.4.2.48), после объединения членов при разных степенях x приходим к соотношению

$$\begin{aligned}(\psi''_{tt} + 6a\psi^2)x^2 + [\varphi''_{tt} + a(k+1)(k+2)\psi\varphi]x^k +\\ + ak(2k-1)\varphi^2x^{2k-2} + bk(k-1)(k-2)(k-3)\varphi x^{k-4} = 0,\end{aligned} \qquad (1.4.2.52)$$

которое должно тождественно удовлетворяться для любых x. Последние два члена в (1.4.2.52) можно сбалансировать по показателю степени только при $k = -2$. В этом случае $\varphi = -12b/a = \mathrm{const}$ и функциональный множитель в квадратных скобках перед x^k в (1.4.2.52) обращается в нуль. В результате приходим к точному решению уравнения Буссинеска (1.4.2.47) [128]:

$$u = \psi(t)(x + C_1)^2 - \frac{12\,b}{a(x + C_1)^2}. \tag{1.4.2.53}$$

Здесь в целях общности добавлен сдвиг C_1 по переменной x, а функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\psi''_{tt} + 6a\psi^2 = 0, \tag{1.4.2.54}$$

общее решение которого можно записать в неявном виде. Уравнение (1.4.2.54) имеет простое частное решение $\psi = -a^{-1}(t + C_2)^{-2}$.

Значению $k = 0$ в (1.4.2.52) соответствует вырожденное решение, которое здесь не рассматривается.

Отметим, что в [128, 129] (см. также [286, 287]) приведено много других точных решений уравнения (1.4.2.47). ◄

1.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления

1.5.1. Предварительные замечания. Описание метода. Принцип расщепления

При уменьшении числа членов функционально-дифференциального уравнения (1.2.2.1) — (1.2.2.2) с помощью дифференцирования возникают лишние постоянные интегрирования, которые надо убирать на заключительном этапе (см. разд. 1.4). Кроме того, порядок полученного уравнения может быть выше порядка исходного. Чтобы избежать этих трудностей, решение функционально-дифференциального уравнения удобно свести к последовательному решению билинейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. исходная задача расщепляется на две более простые задачи). Ниже дано краткое описание основных этапов этого метода.

1°. На первом этапе рассмотрим уравнение (1.2.2.1) как билинейное функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{k} \Phi_n \Psi_n = 0, \tag{1.5.1.1}$$

где $\Phi_n = \Phi_n[X]$ и $\Psi_n = \Psi_n[Y]$ — искомые величины ($n = 1, \ldots, k$), а X и Y — независимые переменные.

Принцип расщепления. Все решения билинейного функционального уравнения (1.5.1.1) могут быть представлены в виде совокупности линейных комбинаций величин $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ и линейных комбинаций величин $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{k} \alpha_{ni} \Phi_n = 0, \quad i = 1, \ldots, l; \\ &\sum_{n=1}^{k} \beta_{nj} \Psi_n = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{1.5.1.2}$$

где $1 \leqslant l \leqslant k-1$ и $1 \leqslant m \leqslant k-1$. Константы α_{ni} и β_{nj} в (1.5.1.2) выбираются так, чтобы билинейное равенство (1.5.1.1) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать, как показано ниже в разд. 1.5.2). Важно отметить, что соотношения (1.5.1.2) носят чисто алгебраический характер и не зависят от конкретных выражений дифференциальных форм (1.2.2.2).

2°. На втором этапе последовательно подставляем дифференциальные формы $\Phi_i[X]$ и $\Psi_j[Y]$ из (1.2.2.2) в решения (1.5.1.2). В результате получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений (эти системы часто являются переопределенными) для определения искомых функций $\varphi_p(x)$ и $\psi_q(y)$. Решая эти системы, находим решения с обобщенным разделением переменных вида (1.2.1.1).

3°. Вырожденные случаи, когда одна или несколько дифференциальных форм Φ_n и/или Ψ_n обращаются в нуль, необходимо рассматривать отдельно, используя для остальных форм линейные соотношения вида (1.5.1.2).

Замечание 1.22. *Принцип расщепления был впервые применен Биркгофом для поиска обобщенных автомодельных решений уравнений Навье—Стокса [88].*

Замечание 1.23. *Важно подчеркнуть, что используемое в методе расщепления билинейное функциональное уравнение (1.5.1.1) (или (1.2.2.1)) и его решения при фиксированном k являются одними и теми же для разных классов исходных нелинейных уравнений математической физики.*

Замечание 1.24. *Принцип расщепления можно доказать методом математической индукции [155, 280] следующим образом.*

1°. *Действительно, этот принцип выполняется для $k = 2$ (см. формулы (1.4.1.2) и (1.4.1.3)).*

2°. *Считаем, что принцип выполняется для произвольного $k > 2$, т. е. решения описываются линейными соотношениями вида (1.5.1.2).*

3°. *Рассматриваем уравнение (1.5.1.1), в котором k заменено на $k+1$. Поделим его на Ψ_{k+1}, а затем продифференцируем по Y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов (см. уравнение (1.4.1.1), в котором $k-1$ надо заменить на k). Его решения даются формулами вида (1.5.1.2), в которых Φ_n и Ψ_n надо заменить соответственно на $\tilde{\Phi}_n = \Phi_n$ и $\tilde{\Psi}_n = (\Psi_n/\Psi_{k+1})'_y$. Первая группа линейных соотношений для $\tilde{\Phi}_n = \Phi_n$ остается неизменной. Интегрируя вторую группу линейных соотношений для $\tilde{\Psi}_n$ по Y, а затем умножая на Ψ_{k+1}, получим снова линейные соотношения*

$$\sum_{n=1}^{k} \beta_{nj} \Psi_n + C_j \Psi_{k+1} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где C_j — произвольные постоянные. Таким образом, из предположения, что для любого $k > 2$ решения функционального уравнения (1.5.1.1) определяются линейными соотношениями (1.5.1.2), следует, что решения аналогичного уравнения для $k + 1$ также удовлетворяют линейным соотношениям (что и требовалось доказать).

Замечание 1.25. *Билинейное функциональное уравнение (1.5.1.1) и его решения (1.5.1.2) играют важную роль в методах функционального разделения переменных (см. разд. 2.5.2 и 2.7.1).*

Для наглядности на рис. 1.1 изображены основные этапы построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления.

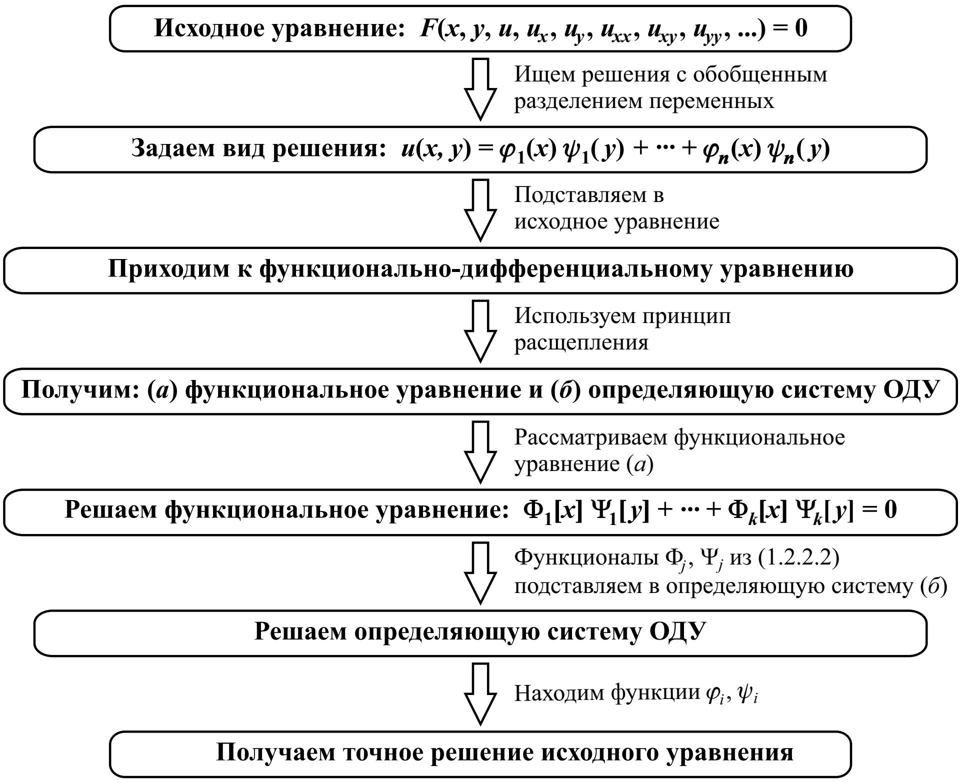

Рис. 1.1. Общая схема построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления.

1.5.2. Решения билинейных функциональных уравнений

1°. На практике для получения решений билинейного функционального уравнения (1.5.1.1) можно поступать следующим образом. Сначала из множества $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ произвольно выбираем несколько первых величин $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ ($p < k$), а затем представляем их в виде линейных комбинаций оставшихся величин этого множества $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_k$ (таким образом задаем первую группу соотношений (1.5.1.2)). Заменив в уравнении (1.5.1.1) выбранные величины $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ линейными комбинациями оставшихся величин, после объединения членов, пропорциональных Φ_q $(q=p+1, \ldots, k)$, приходим к соотношению вида

$$\sum_{q=p+1}^{k} \Omega_q \Phi_q = 0, \qquad \Omega_q = \sum_{s=1}^{k} a_{qs} \Psi_s,$$

где a_{qs} — некоторые константы. Приравнивая нулю функциональные коэффициенты Ω_q $(q = p+1, \ldots, k)$, получим вторую группу соотношений (1.5.1.2).

В силу симметрии уравнения (1.5.1.1) относительно перестановки функций $\Phi_n \rightleftarrows \Psi_n$ на первом этапе можно выбирать элементы из множества $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$.

► Пример 1.33. Рассмотрим билинейное функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 + \Phi_5\Psi_5 = 0. \tag{1.5.2.1}$$

Будем считать, что первые три функциональных коэффициента Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются линейными комбинациями двух последних коэффициентов Φ_4 и Φ_5:

$$\Phi_1 = A_1\Phi_4 + B_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4 + B_2\Phi_5, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4 + B_3\Phi_5, \tag{1.5.2.2}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Подставим выражения (1.5.2.2) в (1.5.2.1) и соберем члены, пропорциональные Φ_4 и Φ_5:

$$(A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2 + A_3\Psi_3 + \Psi_4)\Phi_4 + (B_1\Psi_1 + B_2\Psi_2 + B_3\Psi_3 + \Psi_5)\Phi_5 = 0.$$

Приравнивая выражения в скобках нулю, получим

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3, \\ \Psi_5 &= -B_1\Psi_1 - B_2\Psi_2 - B_3\Psi_3. \end{aligned} \tag{1.5.2.3}$$

Формулы (1.5.2.2), (1.5.2.3) дают одно из решений уравнения (1.5.2.1). Аналогичным образом находятся и другие решения. ◄

2°. Ниже приводятся невырожденные решения двух простых функциональных уравнений вида (1.5.1.1) (или (1.2.2.1)), которые понадобятся далее для построения точных решений конкретных нелинейных уравнений с частными производными.

Трехчленное билинейное функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0, \tag{1.5.2.4}$$

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет два решения:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2, \end{aligned} \tag{1.5.2.5}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. Функции в правых частях равенств (1.5.2.5) считаются произвольными. В решениях (1.5.2.5) все функции Φ_i (в первом решении), либо все функции Ψ_i (во втором решении), пропорциональны друг другу.

Функциональное уравнение, содержащее четыре слагаемых

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{1.5.2.6}$$

имеет решение

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, && \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4, \\ &\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, && \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \end{aligned} \tag{1.5.2.7}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных A_m. Функции в правых частях равенств (1.5.2.7) считаются произвольными.

Уравнение (1.5.2.6) имеет также два более простых решения, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4, \quad \Psi_4 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_4, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_4, \quad \Psi_3 = A_3\Psi_4, \quad \Phi_4 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2 - A_3\Phi_3. \end{aligned} \tag{1.5.2.8}$$

В решениях (1.5.2.8) все функции Φ_i, либо все функции Ψ_i, пропорциональны.

Решение (1.5.2.7) билинейного функционального уравнения (1.5.2.6) чаще, чем решения (1.5.2.8), позволяет найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений с частными производными.

3°. Можно показать, что билинейное функциональное уравнение (1.5.1.1) (или (1.2.2.1)) имеет $(k-1)$ различных невырожденных решений:

$$\begin{aligned} &\Phi_i(X) = C_{i,1}\Phi_{m+1}(X) + C_{i,2}\Phi_{m+2}(X) + \dots + C_{i,k-m}\Phi_k(X), \\ &\Psi_{m+j}(Y) = -C_{1,j}\Psi_1(Y) - C_{2,j}\Psi_2(Y) - \dots - C_{m,j}\Psi_m(Y), \\ &i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, k-m; \quad m = 1, 2, \dots, k-1; \end{aligned} \tag{1.5.2.9}$$

где $C_{i,j}$ — произвольные постоянные. Функции $\Phi_{m+1}(X)$, …, $\Phi_k(X)$ и $\Psi_1(Y)$, …, $\Psi_m(Y)$, стоящие в правых частях равенств (1.5.2.9), задаются произвольно. Общее число линейных соотношений в первой и второй строке (1.5.2.9) равно k, т. е. совпадает с числом слагаемых в билинейном функциональном уравнении (1.5.1.1). Видно, что при фиксированном m решение (1.5.2.9) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных.

Замечание 1.26. *При фиксированном m решение (1.5.2.9) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных $C_{i,j}$. При заданном k наибольшее число произвольных постоянных имеют следующие решения:*

Номер решения	*Число произвольных постоянных*	*Условия на k*
$m = \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{4}k^2$	k — *четное число,*
$m = \frac{1}{2}(k \pm 1)$	$\frac{1}{4}(k^2-1)$	k — *нечетное число.*

Именно эти решения билинейного функционального уравнения чаще всего приводят к нетривиальным решениям с обобщенным разделением переменных в нелинейных уравнениях с частными производными.

Ввиду дискретных симметрий билинейных функциональных уравнений относительно различных перестановок искомых величин, символы Φ и Ψ в решениях (1.5.2.5), (1.5.2.7), (1.5.2.8), (1.5.2.9) можно менять местами: $\Phi_p \rightleftarrows \Psi_p$; также можно делать одновременные парные перестановки $\Phi_p \rightleftarrows \Phi_q$ и $\Psi_p \rightleftarrows \Psi_q$. Повторяя эту процедуру достаточное число раз можно переставить все символы.

Замечание 1.27. *В разд. 2.7.1 также будут описаны некоторые специальные решения билинейного функционального уравнения (1.5.1.2) для произвольного k.*

1.5.3. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления

Ниже даны конкретные примеры использования метода расщепления для построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных УрЧП.

► Пример 1.34. Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического типа

$$u_{tt} = a(uu_x)_x + f(t)u + g(t), \tag{1.5.3.1}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции.

Ищем решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{1.5.3.2}$$

Подставив (1.5.3.2) в (1.5.3.1), после элементарных преобразований получим

$$a\varphi^2(\theta\theta'_x)'_x + a\varphi\psi\theta''_{xx} + (f\varphi - \varphi''_{tt})\theta + f\psi + g - \psi''_{tt} = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде билинейного функционального уравнения (1.5.2.6), где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = (\theta\theta'_x)'_x, \quad \Phi_2 = \theta''_{xx}, \quad \Phi_3 = \theta; \quad \Phi_4 = 1,\\ &\Psi_1 = a\varphi^2, \quad \Psi_2 = a\varphi\psi, \quad \Psi_3 = f\varphi - \varphi''_{tt}, \quad \Psi_4 = f\psi + g - \psi''_{tt}. \end{aligned} \tag{1.5.3.3}$$

Подставив в решение (1.5.2.7) выражения (1.5.3.3), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $\theta = \theta(x)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$:

$$\begin{aligned} &(\theta\theta'_x)'_x = A_1\theta + A_2, \qquad \theta''_{xx} = A_3\theta + A_4;\\ &f\varphi - \varphi''_{tt} = -A_1 a\varphi^2 - A_3 a\varphi\psi, \quad f\psi + g - \psi''_{tt} = -A_2 a\varphi^2 - A_4 a\varphi\psi, \end{aligned} \tag{1.5.3.4}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные. Первые два уравнения (1.5.3.4) представляют собой переопределенную систему ОДУ для одной функции θ. Второе уравнение является линейным и легко интегрируется; его решение в зависимости от значения постоянной A_3 выражается либо через тригонометрические функции (при $A_3 < 0$), либо через гиперболические функции (при $A_3 > 0$), либо имеет вид квадратичного многочлена (при $A_3 = 0$). Подставляя последовательно решения второго уравнения в первое уравнение, приходим к выводу, что совместное решение этих ОДУ представляет собой квадратичный многочлен

$$\theta(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0, \tag{1.5.3.5}$$

в котором константы B_0, B_1, B_2 следующим образом выражаются через постоянные A_n, входящие в систему (1.5.3.4):

$$A_1 = 6B_2, \quad A_2 = B_1^2 - 4B_0B_2, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 2B_2, \tag{1.5.3.6}$$

Подставив выражения для коэффициентов (1.5.3.6) в два последних уравнения (1.5.3.4), получим систему для определения функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} &\varphi''_{tt} = 6aB_2\varphi^2 + f(t)\varphi, \\ &\psi''_{tt} = [2aB_2\varphi + f(t)]\psi + a(B_1^2 - 4B_0B_2)\varphi^2 + g(t). \end{aligned} \tag{1.5.3.7}$$

Формулы (1.5.3.2), (1.5.3.5) и система (1.5.3.7) определяют точное решение уравнения (1.5.3.1) с обобщенным разделением переменных. Первое уравнение (1.5.3.7) решается независимо; оно линейно в случае $B_2 = 0$ и интегрируется в квадратурах в случае $f(t) = \mathrm{const}$. Второе уравнение (1.5.3.7) линейно относительно ψ (при известном φ).

При $\theta \not\equiv 0$, $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$ и произвольных f и g уравнение (1.5.3.1) не имеет других решений вида (1.5.3.2).

Отметим, что в уравнениях (1.5.3.1), (1.5.3.4), (1.5.3.7) вместо постоянной a может стоять произвольная функция $a(t)$. ◀

Замечание 1.28. *Уравнение (1.5.3.1) имеет более общее решение полиномиального вида по x [163]:*

$$u = x^2\psi_1(t) + x\psi_2(t) + \psi_3(t), \tag{1.5.3.8}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи обозначают производные по t):

$$\begin{aligned} &\psi_1'' = 6a\psi_1^2 + f(t)\psi_1, \\ &\psi_2'' = [6a\psi_1 + f(t)]\psi_2, \\ &\psi_3'' = [2a\psi_1 + f(t)]\psi_3 + a\psi_2^2 + g(t). \end{aligned} \tag{1.5.3.9}$$

Второе уравнение (1.5.3.9) имеет частное решение $\psi_2 = \psi_1$. Поэтому его общее решение можно представить в виде [285]:

$$\psi_2 = C_1\psi_1 + C_2\psi_1 \int \frac{dt}{\psi_1^2}.$$

► Пример 1.35. Рассмотрим нелинейное уравнение типа Монжа—Ампера

$$u_{xy}^2 + ku_{xx}u_{yy} = f(x)g(y). \tag{1.5.3.10}$$

При $k = -1$ уравнения такого вида встречаются в дифференциальной геометрии, газовой динамике и метеорологии.

Будем искать решения с обобщенным разделением переменных в виде

$$u = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x). \tag{1.5.3.11}$$

Подставив (1.5.3.11) в уравнение (1.5.3.10), получим

$$k\varphi\varphi''_{xx}\theta\theta''_{yy} + k\varphi\psi''_{xx}\theta''_{yy} + (\varphi'_x)^2(\theta'_y)^2 - f(x)g(y) = 0. \qquad (1.5.3.12)$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно свести к билинейному функциональному уравнению (1.5.2.6), положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = k\varphi\varphi''_{xx}, \quad \Phi_2 = k\varphi\psi''_{xx}, \quad \Phi_3 = (\varphi'_x)^2, \quad \Phi_4 = f(x);\\ &\Psi_1 = \theta\theta''_{yy}, \quad \Psi_2 = \theta''_{yy}, \quad \Psi_3 = (\theta'_y)^2, \quad \Psi_4 = -g(y). \end{aligned} \qquad (1.5.3.13)$$

Подставив (1.5.3.13) в (1.5.2.7), имеем

$$\begin{aligned} &k\varphi\varphi''_{xx} = A_1(\varphi'_x)^2 + A_2 f(x), \quad k\varphi\psi''_{xx} = A_3(\varphi'_x)^2 + A_4 f(x);\\ &(\theta'_y)^2 = -A_1\theta\theta''_{yy} - A_3\theta''_{yy}, \quad g(y) = A_2\theta\theta''_{yy} + A_4\theta''_{yy}. \end{aligned} \qquad (1.5.3.14)$$

Функцию $\varphi(x)$ можно определить из первого уравнения. После этого из второго уравнения находим $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x}(x-t)\frac{A_3[\varphi'_t(t)]^2 + A_4 f(t)}{\varphi(t)}\,dt + B_1 x + B_2,$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные. Третье уравнение служит для определения $\theta(y)$, а последнее уравнение позволяет найти допустимый вид функции $g(y)$.

При $A_1 = -k$ первое уравнение в (1.5.3.14) интегрируется в квадратурах для любой функции $f(x)$:

$$\varphi^2 = \frac{2A_2}{k}\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)\,dt + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а x_0 — любое число, при котором интеграл существует (если подынтегральное выражение не имеет особенностей, можно положить $x_0 = 0$).

Третье уравнение в (1.5.3.14) легко интегрируется; при $A_1 \neq 0$ без ограничения общности можно положить $A_3 = 0$ (это достигается сдвигом θ на константу, что приводит к переопределению ψ в (1.5.3.11), см. замечание 1.4). При $A_1 \neq 0$ и $A_3 = 0$ решениями этого уравнения являются степенные и экспоненциальные функции. В частном случае $A_1 = 0$ уравнению удовлетворяет логарифмическая функция. Последнее соотношение в (1.5.3.14) служит для определения допустимого вида функции $g(y)$. Указанные результаты приведены в первых трех строках табл. 1.2. В таблицу включены также три вырожденных случая, которые соответствуют обращению в нуль вторых производных определяющих функций в решении (1.5.3.11).

Важно отметить, что определяющие уравнения (1.5.3.14) и первые пять решений остаются справедливыми при произвольной $k = k(x)$; в этих решениях дробь $1/k$ сначала надо внести под знак интеграла, а затем заменить на функцию $1/k(t)$. ◀

► **Пример 1.36.** Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка гидродинамического типа

$$u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = \nu u_{xxx}. \qquad (1.5.3.15)$$

Таблица 1.2. Точные решения вида (1.5.3.11) уравнения типа Монжа — Ампера (1.5.3.10); a, b, n, λ — свободные параметры (ко всем решениям можно прибавить сумму $C_1x + C_2y + C_3$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные).

№	Функция $f(x)$	Функция $g(y)$	Решение с обобщенным разделением переменных $u(x,y)$
1	произвольная	$ay^n + by^{2n+2}$ $(n \neq -1, -2)$	$u = \varphi(x)y^{n+2} + \dfrac{a}{k(n+1)(n+2)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-t)\dfrac{f(t)}{\varphi(t)}\,dt$; $k(n+1)(n+2)\varphi\varphi''_{xx} + (n+2)^2(\varphi'_x)^2 = bf(x)$
2	произвольная	$\dfrac{a\ln y + b}{y^2}$	$u = \varphi(x)\ln y + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-t)\dfrac{[\varphi'_t(t)]^2 - bf(t)}{\varphi(t)}\,dt$; $k\varphi\varphi''_{xx} + af(x) = 0$
3	произвольная	$ae^{\lambda y} + be^{2\lambda y}$	$u = \varphi(x)e^{\lambda y} + \dfrac{a}{k\lambda^2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-t)\dfrac{f(t)}{\varphi(t)}\,dt$; $k\lambda^2\varphi\varphi''_{xx} + \lambda^2(\varphi'_x)^2 = bf(x)$
4	произвольная	произвольная	$u = \dfrac{C_1}{k}\displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-t)f(t)\,dt + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int_{y_0}^{y} (y-\xi)g(\xi)\,d\xi$
5	произвольная	1	$u = \pm y\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sqrt{f(x)}\,dx + \psi(x)$; $\psi(x)$ — произвольная функция
6	1	произвольная	$u = (ax+b)\theta(y) + c(ax+b)[\ln(ax+b) - 1]$; $a^2ck\theta''_{yy} + a^2(\theta'_y)^2 - g(y) = 0$

Ищем точные решения уравнения (1.5.3.15) вида

$$u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{1.5.3.16}$$

Подставив (1.5.3.16) в (1.5.3.15), имеем

$$\varphi'_t\theta'_x - \varphi\psi\theta''_{xx} + \varphi^2\left[(\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}\right] - \nu\varphi\theta'''_{xxx} = 0. \tag{1.5.3.17}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно свести к билинейному функциональному уравнению (1.5.2.6), положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \varphi'_t, \quad \Phi_2 = \varphi\psi, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \quad \Phi_4 = \nu\varphi;\\ &\Psi_1 = \theta'_x, \quad \Psi_2 = -\theta''_{xx}, \quad \Psi_3 = (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}, \quad \Psi_4 = -\theta'''_{xxx}. \end{aligned} \tag{1.5.3.18}$$

Первая группа решений. Подставив выражения (1.5.3.18) в (1.5.2.7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2\nu\varphi, \quad \varphi\psi = A_3\varphi^2 + A_4\nu\varphi;\\ &(\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx} = -A_1\theta'_x + A_3\theta''_{xx}, \quad \theta'''_{xxx} = A_2\theta'_x - A_4\theta''_{xx}. \end{aligned} \tag{1.5.3.19}$$

Два последних уравнения в (1.5.3.19) образуют переопределенную систему ОДУ для одной функции θ (последнее уравнение является линейным и легко интегрируется). Можно показать, что эти уравнения имеют совместные решения только при наличии линейной связи между функцией θ и ее производной:

$$\theta'_x = B_1\theta + B_2. \tag{1.5.3.20}$$

Исключив производные в двух последних уравнениях (1.5.3.19) при помощи соотношения (1.5.3.20) (и его следствий, полученных путем дифференцирования), приходим к выводу, что шесть постоянных B_1, B_2, A_1, A_2, A_3, A_4 должны удовлетворять трем условиям:

$$\begin{aligned} B_1(A_1+B_2-A_3B_1)&=0,\\ B_2(A_1+B_2-A_3B_1)&=0,\\ B_1^2+A_4B_1-A_2&=0. \end{aligned} \tag{1.5.3.21}$$

Интегрируя уравнение (1.5.3.20), получим

$$\theta=\begin{cases} B_3\exp(B_1x)-\dfrac{B_2}{B_1} & \text{при}\ \ B_1\neq 0,\\ B_2x+B_3 & \text{при}\ \ B_1=0, \end{cases} \tag{1.5.3.22}$$

где B_3 — произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (1.5.3.19) находим функции φ и ψ:

$$\varphi=\begin{cases} \dfrac{A_2\nu}{C\exp(-A_2\nu t)-A_1} & \text{при}\ \ A_2\neq 0,\\ -\dfrac{1}{A_1t+C} & \text{при}\ \ A_2=0, \end{cases} \qquad \psi=A_3\varphi+A_4\nu. \tag{1.5.3.23}$$

Формулы (1.5.3.22), (1.5.3.23) и соотношения (1.5.3.21) позволяют найти следующие точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (1.5.3.15):

$$\begin{aligned} u&=\frac{C_1e^{-\lambda x}+1}{\lambda t+C_2}+\nu\lambda && \text{при}\ \ A_2=0,\ B_1=-A_4,\ B_2=-A_1-A_3A_4;\\ u&=C_1e^{-\lambda(x+\beta\nu t)}+\nu(\lambda+\beta) && \text{при}\ \ A_1=A_3=B_2=0,\ A_2=B_1^2+A_4B_1;\\ u&=\frac{\nu\beta+C_1e^{-\lambda x}}{1+C_2e^{-\nu\lambda\beta t}}+\nu(\lambda-\beta) && \text{при}\ \ A_1=A_3B_1-B_2,\ A_2=B_1^2+A_4B_1;\\ u&=\frac{x+C_1}{t+C_2}+C_3 && \text{при}\ \ A_2=B_1=0,\ B_2=-A_1, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, β, λ — произвольные постоянные (их можно выразить через A_k, B_k).

Вторая группа решений. Пусть в уравнении (1.5.3.17) все члены, зависящие от x, пропорциональны θ'_x. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\theta'''_{xxx}=A_1\theta'_x,\quad \theta''_{xx}=A_2\theta'_x,\quad (\theta'_x)^2-\theta\theta''_{xx}=A_3\theta'_x;\\ &\varphi'_t-A_2\varphi\psi+A_3\varphi^2-A_1\nu\varphi=0. \end{aligned} \tag{1.5.3.24}$$

Переопределенная подсистема, состоящая из первых трех уравнений (1.5.3.24), допускает два совместных решения:

$$\begin{aligned} &\textit{решение 1}\text{:}\quad \theta=e^{-\lambda x} && \text{при}\ \ A_1=\lambda^2,\ A_2=-\lambda,\ A_3=0;\\ &\textit{решение 2}\text{:}\quad \theta=x && \text{при}\ \ A_1=A_2=0,\ A_3=1. \end{aligned} \tag{1.5.3.25}$$

Решения (1.5.3.25) вместе с решениями последнего уравнения (1.5.3.24), которые находятся элементарно, в итоге приводят к двум решениям исходного нелинейного дифференциального уравнения (1.5.3.15):

$$u = \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi'_t(t)}{\lambda\varphi(t)} + \nu\lambda,$$
$$u = \frac{x}{t+C} + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, а λ — произвольная постоянная. ◄

► Пример 1.37. Вернемся к нелинейному уравнению гидродинамического типа четвертого порядка (1.4.2.17). Как и в примере 1.29, ищем его решение с аддитивным разделением переменных в виде (1.4.2.18). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению (1.4.2.19), которое представим в билинейной форме

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{1.5.3.26}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{array}{llll} \Phi_1 = \varphi''''_{xxxx}, & \Phi_2 = \varphi'''_{xxx}, & \Phi_3 = \varphi'_x, & \Phi_4 = \nu; \\ \Psi_1 = \nu, & \Psi_2 = -\psi'_y, & \Psi_3 = \psi'''_{yyy}, & \Psi_4 = \psi''''_{yyyy}. \end{array} \tag{1.5.3.27}$$

Здесь для удобства верхний ряд функций Φ_i упорядочен по убыванию порядка производных функции φ. Далее воспользуемся решениями функционального уравнения (1.5.3.26), приведенными в разд. 1.5.2.

1°. Подставим выражения (1.5.3.27) в формулы (1.5.2.7), которые содержат четыре свободных параметра A_i и тождественно удовлетворяют функциональному уравнению (1.5.3.26). В результате приходим к переопределенной системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{array}{ll} \varphi''''_{xxxx} = A_1\varphi'_x + A_2\nu, & \varphi'''_{xxx} = A_3\varphi'_x + A_4\nu; \\ \psi'''_{yyy} = -A_1\nu + A_3\psi'_y, & \psi''''_{yyyy} = -A_2\nu + A_4\psi'_y. \end{array} \tag{1.5.3.28}$$

Эти уравнения легко интегрируются: сначала ищутся решения ОДУ третьего порядка, а затем постоянные интегрирования и параметры уравнений определяются путем подстановки полученных решений в ОДУ четвертого порядка. Далее последовательно рассмотрим три случая: $A_3 > 0$, $A_3 = 0$, $A_3 < 0$.

(a) При $A_3 = \lambda^2 > 0$ первые два уравнения (1.5.3.28) имеет совместное решение

$$\varphi = C_1e^{-\lambda x} + C_2\nu x + C_3, \tag{1.5.3.29}$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, при условии, что коэффициенты этих уравнений определяются так:

$$A_1 = -\lambda^3, \quad A_2 = C_2\lambda^3, \quad A_3 = \lambda^2, \quad A_4 = -C_2\lambda^2. \tag{1.5.3.30}$$

Последние два уравнения (1.5.3.28) с коэффициентами (1.5.3.30) имеют два различных совместных решения:

$$\begin{array}{ll} \psi = C_4e^{-\lambda y} - \nu\lambda y, & \text{если } C_2 = \lambda; \\ \psi = C_4e^{\lambda y} - \nu\lambda y, & \text{если } C_2 = -\lambda. \end{array} \tag{1.5.3.31}$$

Складывая составляющие решения (1.5.3.29) и (1.5.3.31), получим два решения уравнения гидродинамического типа (1.4.2.17) вида (1.4.2.18):

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{-\lambda x} + \nu\lambda x + C_3 + C_4 e^{-\lambda y} - \nu\lambda y; \\ u &= C_1 e^{-\lambda x} - \nu\lambda x + C_3 + C_4 e^{\lambda y} - \nu\lambda y. \end{aligned} \tag{1.5.3.32}$$

Кроме того, при

$$A_1 = C_5\lambda^2/\nu, \quad A_2 = -C_5\lambda^3/\nu, \quad A_3 = \lambda^2, \quad A_4 = -\lambda^3,$$

переопределенная система (1.5.3.28) допускает вырожденное решение по одной переменной ($\varphi = \nu\lambda x + C_3$) и невырожденное решение по другой переменной ($\psi = C_4 e^{-\lambda y} + C_5 y$), что приводит к следующему решению исходного уравнения (1.4.2.17):

$$u = \nu\lambda x + C_3 + C_4 e^{-\lambda y} + C_5 y. \tag{1.5.3.33}$$

Это решение отличается от первого решения (1.5.3.32) при $C_1 = 0$ произвольным множителем C_5 при последнем слагаемом.

(b) При $A_3 = 0$ переопределенная система (1.5.3.28) имеет совместное решение в виде многочленов второй и третьей степени по обеим переменным. В результате получим решения (1.4.2.24).

(c) При $A_3 = \lambda^2 < 0$ общее решение второго уравнения (1.5.3.28) содержит тригонометрические функции $\varphi(x) = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x) + A_4\nu\lambda^{-2}x + C_3$, где C_i — произвольные постоянные. Подставив это решение в первое уравнение (1.5.3.28), получим $C_1 = C_2 = 0$. Аналогичным образом рассматриваются последние два уравнения (1.5.3.28). Таким образом решение в этом случае линейным образом зависит от переменных x и y и является частным случаем решения из п. (b).

2°. Подставим теперь выражения (1.5.3.27) в верхний ряд формул (1.5.2.8), которые содержат три свободных параметра A_i и тождественно удовлетворяют функциональному уравнению (1.5.3.26). Приходим к переопределенной системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &\varphi''''_{xxxx} = A_1\nu, \quad \varphi'''_{xxx} = A_2\nu, \quad \varphi'_x = A_3\nu; \\ &\psi''''_{yyyy} = -A_1\nu + A_2\psi'_y - A_3\psi'''_{yyy}. \end{aligned} \tag{1.5.3.34}$$

Первые три уравнения (1.5.3.34) допускают простое совместное решение

$$\varphi(x) = A_3\nu x, \quad A_1 = A_2 = 0, \ A_3 \text{ — любое.} \tag{1.5.3.35}$$

При таких же значениях коэффициентов A_i общее решение последнего уравнения (1.5.3.34) определяется формулой

$$\psi(y) = C_1\exp(-A_2 y) + C_2 y^2 + C_3 y + C_4. \tag{1.5.3.36}$$

Складывая составляющие решения (1.5.3.35) и (1.5.3.36), получим решение уравнения гидродинамического типа (1.4.2.17) вида (1.4.2.18):

$$u = \nu\lambda x + C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 \quad (\lambda = A_2).$$

Это решение обобщает решение (1.5.3.33) поскольку содержит дополнительное квадратичное слагаемое C_2y^2. ◄

► **Пример 1.38.** Рассмотрим уравнение с экспоненциальной нелинейностью относительно старшей производной:

$$u_t = f(x)\exp(au_{xx}). \tag{1.5.3.37}$$

Ищем точные решения вида

$$u = \varphi(x)\theta(t) + \psi(x). \tag{1.5.3.38}$$

Подставим (1.5.3.38) в (1.5.3.37), поделим обе части полученного выражения на $f(x)$, а затем прологарифмируем. Считая $\varphi/f > 0$, после элементарных преобразований имеем

$$a\psi''_{xx} - \ln(\varphi/f) + a\theta\varphi''_{xx} - \ln\theta'_t = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно записать в билинейной форме (1.5.2.4), положив

$$\Phi_1 = a\psi''_{xx} - \ln(\varphi/f), \quad \Phi_2 = \varphi''_{xx}, \quad \Phi_3 = 1; \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = a\theta, \quad \Psi_3 = -\ln\theta'_t.$$

Подставив эти выражения в первое решение (1.5.2.5), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Phi_1 = a\psi''_{xx} - \ln(\varphi/f) = A_1, \quad \varphi''_{xx} = A_2, \quad \ln\theta'_t = A_1 + A_2a\theta.$$

Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2}A_2x^2 + C_1x + C_2,\\
\psi(x) &= \frac{1}{2a}A_1x^2 + C_3x + C_4 + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)\ln\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,\\
\theta(t) &= -\frac{1}{A_2a}\ln\bigl(C_5 - A_2ae^{A_1}t\bigr).
\end{aligned} \tag{1.5.3.39}$$

Формулы (1.5.3.38) и (1.5.3.39) описывают точное решение с обобщенным разделением переменных уравнения (1.5.3.37). ◄

1.6. Метод инвариантных подпространств

1.6.1. Подпространства, инвариантные относительно нелинейного дифференциального оператора. Описание метода

Данный раздел посвящен описанию *метода инвариантных подпространств** [159, 161, 163], который не связан с анализом функционально-дифференциальных уравнений и существенно отличается от методов, которые обсуждались ранее в разд. 1.4 и 1.5.

* В [48, 286, 287] этот метод называется *методом Титова — Галактионова*.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$u_t = F[u], \tag{1.6.1.1}$$

где $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор вида

$$F[u] \equiv F(x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)}). \tag{1.6.1.2}$$

Определение [163]. Конечномерное линейное подпространство

$$\mathscr{L}_k = \bigl\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\bigr\}, \tag{1.6.1.3}$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации линейно-независимых функций $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_k(x)$, называется *инвариантным относительно дифференциального оператора* F, если $F[\mathscr{L}_k] \subseteq \mathscr{L}_k$. В этом случае существуют функции f_1, …, f_k такие, что

$$F\Bigl[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\Bigr] = \sum_{i=1}^{k} f_i(C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x) \tag{1.6.1.4}$$

для произвольных постоянных C_1, …, C_k. Отметим, что функции $\varphi_i(x)$, входящие в (1.6.1.4), не должны зависеть от C_1, …, C_k.

Утверждение 1. Пусть линейное подпространство (1.6.1.3) инвариантно относительно дифференциального оператора F. Тогда уравнение (1.6.1.1) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида [163]:

$$u = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{1.6.1.5}$$

где функции $\psi_1(t)$, …, $\psi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_i' = f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1.6.1.6}$$

Здесь штрих обозначает производную по t.

Это утверждение доказывается следующим образом. Сначала выражение (1.6.1.5) подставляется в уравнение (1.6.1.1). Затем используется соотношение (1.6.1.4), в котором константы C_i заменены на функции $\psi_i = \psi_i(t)$. После объединения членов, пропорциональных $\varphi_i = \varphi_i(x)$, получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{k} [\psi_i' - f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k)]\varphi_i(x) = 0.$$

Поскольку функции φ_i линейно независимы, то все выражения в квадратных скобках надо приравнять нулю. В результате приходим к системе ОДУ (1.6.1.6).

Следующий пример иллюстрирует описанный метод построения решений с обобщенным разделением переменных.

► Пример 1.39. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с линейным источником

$$u_t = (uu_x)_x + bu. \tag{1.6.1.7}$$

1°. Докажем, что трехмерное линейное подпространство степенных функций вида $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора

$$F[u] = (uu_x)_x + bu, \tag{1.6.1.8}$$

определяющего правую часть уравнения (1.6.1.7). Действительно, для произвольных C_1, C_2, C_3 имеет место соотношение

$$F\bigl[C_1 + C_2x + C_3x^2\bigr] = 2C_1C_3 + C_2^2 + bC_1 + (6C_2C_3 + bC_2)x + (6C_3^2 + bC_3)x^2,$$

которое показывает, что любой квадратичный многочлен под действием оператора (1.6.1.8) преобразуется в квадратичный многочлен. Из приведенного выше утверждения 1 следует, что нелинейное уравнение теплопроводности (1.6.1.7) имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2, \tag{1.6.1.9}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= 2\psi_1\psi_3 + \psi_2^2 + b\psi_1,\\
\psi_2' &= 6\psi_2\psi_3 + b\psi_2,\\
\psi_3' &= 6\psi_3^2 + b\psi_3.
\end{aligned}$$

Эту систему можно последовательно проинтегрировать, начиная с последнего уравнения, которое является уравнением Бернулли [253, 285]. В результате получим точные решения уравнения (1.6.1.7):

$$\begin{aligned}
u &= \frac{A_1e^{bt}}{(6e^{bt} + A_2)^{1/3}} - \frac{be^{bt}}{6e^{bt} + A_2}(x + A_3)^2 &&\text{при}\ \ b \neq 0,\\
u &= \frac{A_1}{(t + A_2)^{1/3}} - \frac{1}{6(t + A_2)}(x + A_3)^2 &&\text{при}\ \ b = 0,
\end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные.

2°. Покажем, что двумерное линейное подпространство степенных функций вида $\mathscr{L}_2 = \{\sqrt{x}, x^2\}$ также инвариантно относительно дифференциального оператора (1.6.1.8). Действительно, для произвольных C_1 и C_2 имеет место соотношение

$$F\bigl[C_1\sqrt{x} + C_2x^2\bigr] = (\tfrac{15}{4}C_1C_2 + bC_1)\sqrt{x} + (6C_2^2 + bC_2)x^2.$$

Поэтому, используя утверждение 1, приходим к выводу, что нелинейное уравнение (1.6.1.7) имеет отличное от (1.6.1.9) решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t)\sqrt{x} + \psi_2(t)x^2,$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\, 2)$ описываются системой ОДУ первого порядка

$$\psi_1' = \tfrac{15}{4}\psi_1\psi_2 + b\psi_1,$$
$$\psi_2' = 6\psi_2^2 + b\psi_2.$$

Интегрируя эту систему, получим решение уравнения (1.6.1.7):

$$u = \frac{A_1 e^{bt}}{(6e^{bt} + A_2)^{5/8}}\sqrt{x + A_3} - \frac{be^{bt}}{6e^{bt} + A_2}(x + A_3)^2 \qquad \text{при} \;\; b \neq 0,$$
$$u = \frac{A_1}{(t + A_2)^{5/8}}\sqrt{x + A_3} - \frac{1}{6(t + A_2)}(x + A_3)^2 \qquad \text{при} \;\; b = 0,$$

где для общности дополнительно сделан сдвиг по переменной x. ◄

► Пример 1.40. Рассмотрим теперь нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = au_{xx} + u_x^2 + ku^2 + bu + c. \tag{1.6.1.10}$$

Покажем, что при $k > 0$ дифференциальный оператор

$$F[u] = au_{xx} + u_x^2 + ku^2 + bu + c, \tag{1.6.1.11}$$

определяющий правую часть уравнения (1.6.1.10), имеет двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \{1, \cos(x\sqrt{k}\,)\}$. Действительно, для произвольных C_1 и C_2 справедливо равенство

$$F\bigl[C_1 + C_2\cos(x\sqrt{k}\,)\bigr] = k(C_1^2 + C_2^2) + bC_1 + c + C_2(2kC_1 - ak + b)\cos(x\sqrt{k}\,).$$

Поэтому уравнение (1.6.1.10) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(x\sqrt{k}\,), \tag{1.6.1.12}$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1' &= k(\psi_1^2 + \psi_2^2) + b\psi_1 + c,\\ \psi_2' &= \psi_2(2k\psi_1 - ak + b). \end{aligned} \tag{1.6.1.13}$$

◄

Замечание 1.29. *При $k > 0$ нелинейный дифференциальный оператор $F[u]$ в (1.6.1.11) допускает трехмерное инвариантное подпространство, содержащее тригонометрические функции $\mathscr{L}_3 = \bigl\{1, \sin(x\sqrt{k}\,), \cos(x\sqrt{k}\,)\bigr\}$.*

При $k < 0$ нелинейный дифференциальный оператор $F[u]$ в (1.6.1.11) допускает трехмерное инвариантное подпространство, содержащее гиперболические функции $\mathscr{L}_3 = \bigl\{1, \operatorname{sh}(-x\sqrt{-k}\,), \operatorname{ch}(-x\sqrt{-k}\,)\bigr\}$ или эквивалентное ему подпространство, содержащее экспоненты $\mathscr{L}_3 = \bigl\{1, \exp(-x\sqrt{-k}\,), \exp(x\sqrt{-k}\,)\bigr\}$.

При $k = 0$ нелинейный оператор (1.6.1.11) допускает трехмерное инвариантное подпространство, содержащее степенные функции $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$.

Замечание 1.30. *Более общее уравнение (1.6.1.10), где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — произвольные функции и $k = \text{const} > 0$, также имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (1.6.1.12), где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6.1.13).*

► Пример 1.41. Рассмотрим нелинейное УрЧП четвертого порядка

$$u_t = -a(uu_{xxx})_x. \tag{1.6.1.14}$$

Это уравнение описывает течение в пористой среде или в ячейке Хеле-Шоу, которое образовано двумя несмешивающимися жидкостями, разделенными тонкой прослойкой толщины $2u$ [173, 336].

Покажем, что пятимерное линейное подпространство степенных функций вида $\mathscr{L}_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора

$$F[u] = (uu_{xxx})_x, \tag{1.6.1.15}$$

определяющего правую часть уравнения (1.6.1.14). Действительно, для произвольных C_i выполняется соотношение

$$\begin{aligned} F\bigl[C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4\bigr] &= 6(4C_1C_5 + C_2C_4) + \\ &+ 12(4C_2C_5 + C_3C_4)x + 18(4C_3C_5 + C_4^2)x^2 + 120C_4C_5x^3 + 120C_5^2x^4, \end{aligned}$$

которое показывает, что любой многочлен четвертой степени под действием оператора (1.6.1.15) преобразуется в многочлен четвертой степени. Из утверждения 1 следует, что нелинейное уравнение четвертого порядка (1.6.1.14) имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x + \varphi_3(t)x^2 + \varphi_4(t)x^3 + \varphi_5(t)x^4,$$

где функции $\varphi_n = \varphi_n(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений [163]:

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= -6a(4\varphi_1\varphi_5 + \varphi_2\varphi_4), \\ \varphi_2' &= -12a(4\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4), \\ \varphi_3' &= -18a(4\varphi_3\varphi_5 + \varphi_4^2), \\ \varphi_4' &= -120a\varphi_4\varphi_5, \\ \varphi_5' &= -120a\varphi_5^2. \end{aligned}$$

Эта система легко интегрируется в обратном порядке, начиная с последнего уравнения. ◄

► Пример 1.42. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$F[u] = u_x^{(m)}u_x^{(n)}. \tag{1.6.1.16}$$

1°. Очевидно, что $(m+n+1)$-мерное инвариантное подпространство

$$\mathscr{L}_{m+n} = \{1, x, x^2, \dots, x^{m+n}\}, \tag{1.6.1.17}$$

инвариантно относительно нелинейного оператора (1.6.1.17). В частности, при $m = 0$ и $n = 2$ имеем $F[u] = uu_{xx}$ и $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$.

2°. Покажем, что трехмерное подпространство

$$\mathscr{L}_3 = \bigl\{1, x^{(m+n)/2}, x^{n+m}\bigr\} \tag{1.6.1.18}$$

также инвариантно относительно нелинейного оператора (1.6.1.16).

Действительно, последовательно имеем

$$
\begin{aligned}
&F[C_1 + C_2 x^{(m+n)/2} + C_3 x^{n+m}] = \\
&\quad = (C_1 + C_2 x^{(m+n)/2} + C_3 x^{n+m})_x^{(m)} (C_1 + C_2 x^{(m+n)/2} + C_3 x^{n+m})_x^{(n)} = \\
&\quad = (C_2 a_1 x^{(n-m)/2} + C_3 b_1 x^n)(C_2 a_2 x^{(m-n)/2} + C_3 b_2 x^m) = \\
&\quad = C_2^2 a_1 a_2 + C_2 C_3 (a_1 b_2 + a_2 b_1) x^{(m+n)/2} + C_3^2 b_1 b_2 x^{n+m},
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать (a_1, b_1, a_2, b_2 — численные коэффициенты, которые не зависят от C_1, C_2, C_3). В частности, при $m = 1$ и $n = 2$ имеем $F[u] = u_x u_{xx}$ и $\mathscr{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$. ◀

Замечание 1.31. *Более общий, чем (1.6.1.16), нелинейный дифференциальный оператор*

$$
F[u] = \sum_{i=0}^{k} a_i u_x^{(m+i)} u_x^{(n-i)} \qquad (a_i \text{ — произвольные постоянные})
$$

также допускает $(m + n + 1)$*-мерное инвариантное подпространство (1.6.1.17).*

В табл. 1.3 приведены некоторые нелинейные дифференциальные операторы и линейные подпространства, инвариантные относительно этих операторов [163, 287]. Добавление линейного оператора $L[u] = \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma u + \delta$ к первым семи нелинейным операторам не меняет инвариантных подпространств (за исключением $\mathscr{L}_2$ для третьего оператора).

1.6.2. Некоторые модификации и обобщения

Нелинейный оператор параметрически зависит от *t*. Будем рассматривать уравнения более общего вида

$$
L_1[u] = L_2[w], \quad w = F[u], \tag{1.6.2.1}
$$

где $L_1[u]$ и $L_2[w]$ — линейные дифференциальные операторы по переменной t:

$$
L_1[u] \equiv \sum_{i=0}^{m_1} a_i(t) u_t^{(i)}, \quad L_2[w] \equiv \sum_{j=0}^{m_2} b_j(t) w_t^{(j)}, \tag{1.6.2.2}
$$

а $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор по переменной x:

$$
F[u] \equiv F(t, x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)}), \tag{1.6.2.3}
$$

который параметрическим образом может зависеть от t.

Утверждение 2. Пусть линейное подпространство (1.6.1.3) инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора F в том смысле, что для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$ имеет место равенство

$$
F\Big[\sum_{i=1}^{k} C_i \varphi_i(x)\Big] = \sum_{i=1}^{k} f_i(t, C_1, \ldots, C_k) \varphi_i(x), \tag{1.6.2.4}
$$

Таблица 1.3. Некоторые нелинейные дифференциальные операторы и линейные подпространства, инвариантные относительно этих операторов (a, b, c — константы).

№	Нелинейный оператор $F[u]$	Подпространства, инвариантные относительно $F[u]$
1	$au_{xx}+bu_x^2$	$\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$
2	$au_{xx}+u_x^2+bu^2$	$\mathscr{L}_3=\{1,\sin(x\sqrt{b}\,),\cos(x\sqrt{b}\,)\}$ при $b>0$, $\mathscr{L}_3=\{1,\operatorname{sh}(x\sqrt{\lvert b\rvert}\,),\operatorname{ch}(x\sqrt{\lvert b\rvert}\,)\}$ при $b<0$
3	$auu_{xx}+bu_x^2+cu^2$	$\mathscr{L}_3=\{1,\sin(\lambda x),\cos(\lambda x)\}$ при $c/(a+b)=\lambda^2>0$, $\mathscr{L}_3=\{1,\operatorname{sh}(\lambda x),\operatorname{ch}(\lambda x)\}$ при $c/(a+b)=-\lambda^2<0$, $\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$ при $c=0$, $\mathscr{L}_2=\{x^2,x^\beta\}$, $\beta=a/(a+b)$ при $c=0$, $a\neq -b$
4	$uu_{xx}-u_x^2$ (частный случай 3-го оператора)	$\mathscr{L}_3=\{1,\sin(\lambda x),\cos(\lambda x)\}$, λ — произвольная постоянная, $\mathscr{L}_3=\{1,\operatorname{sh}(\lambda x),\operatorname{ch}(\lambda x)\}$, λ — произвольная постоянная, $\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$
5	$uu_{xx}-\frac{2}{3}u_x^2$ (частный случай 3-го оператора)	$\mathscr{L}_4=\{1,x,x^2,x^3\}$
6	$uu_{xx}-\frac{3}{4}u_x^2+au^2$ (частный случай 3-го оператора)	$\mathscr{L}_5=\{1,\cos(kx),\sin(kx),\cos(2kx),\sin(2kx)\}$ при $a=k^2>0$, $\mathscr{L}_5=\{1,\operatorname{ch}(kx),\operatorname{sh}(kx),\operatorname{ch}(2kx),\operatorname{sh}(2kx)\}$ при $a=-k^2<0$, $\mathscr{L}_5=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ при $a=0$
7	$[(au^2+bu+c)u_x]_x$	$\mathscr{L}_2=\{1,x\}$
8	$u^2u_{xx}-\frac{1}{2}uu_x^2+au^3$	$\mathscr{L}_3=\{1,\cos(\sqrt{2a}\,x),\sin(\sqrt{2a}\,x)\}$ при $a>0$, $\mathscr{L}_3=\{1,\operatorname{ch}(\sqrt{2\lvert a\rvert}\,x),\operatorname{sh}(\sqrt{2\lvert a\rvert}\,x)\}$ при $a<0$, $\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$ при $a=0$
9	u_xu_{xx}	$\mathscr{L}_4=\{1,x,x^2,x^3\}$, $\mathscr{L}_3=\{1,x^{3/2},x^3\}$, $\mathscr{L}_2=\{1,\varphi(x)\}$, $\varphi'_x\varphi''_{xx}=p_1+p_2\varphi$, p_1, p_2 — константы
10	$(u^2)_{xxxx}$	$\mathscr{L}_5=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$, $\mathscr{L}_3=\{x^{1/2},x^{3/2},x^4\}$
11	$(u^2)_x^{(n)}$	$\mathscr{L}_{n+1}=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$, $\mathscr{L}_3=\{x^{k/2},x^{m/2},x^n\}$, где $k<n$ и $m<n$; k, m, $\frac{1}{2}(k+m)$ — неотрицательные целые числа
12	$u_x^{(m)}u_x^{(n)}$	$\mathscr{L}_{m+n+1}=\{1,x,x^2,\ldots,x^{m+n}\}$, $\mathscr{L}_3=\{1,x^{(m+n)/2},x^{n+m}\}$

где функции $\varphi_i(x)$ не зависят от t и постоянных C_1, …, C_k. Тогда уравнение (1.6.2.1) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида (1.6.1.5), где функции $\psi_1(t),\ldots,\psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_1\big[\psi_i(t)\big]=L_2\big[f_i(t,\psi_1,\ldots,\psi_k)\big],\qquad i=1,\ldots,k. \tag{1.6.2.5}$$

► **Пример 1.43.** Рассмотрим обобщенное уравнение Гудерлея

$$u_{tt} + a_1(t)u_t = a_2(t)u_x u_{xx}, \tag{1.6.2.6}$$

которое при $a_1(t) = 0$ и $a_2(t) = a$, а также при $a_1(t) = 1/t$ и $a_2(t) = a$, используется для описания трансзвуковых газовых течений, где t играет роль пространственной переменной [177], а $\gamma = a - 1$ — показатель адиабаты.

Уравнение (1.6.2.6) является частным случаем уравнения (1.6.2.1), где

$$L_1[u] = u_{tt} + a_1(t)u_t, \quad L_2[w] = a_2(t)w, \quad F[u] = u_x u_{xx}.$$

1°. Прямой проверкой нетрудно убедиться, что нелинейный дифференциальный оператор $F[u] = u_x u_{xx}$ допускает трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$ [58]. Из приведенного выше утверждения 2 следует, что уравнение (1.6.2.6) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x^{3/2} + \psi_3(t)x^3, \tag{1.6.2.7}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' = \tfrac{9}{8}a_2(t)\psi_2^2,\\
&\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' = \tfrac{45}{4}a_2(t)\psi_2\psi_3,\\
&\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' = 18a_2(t)\psi_3^2.
\end{aligned}$$

2°. Оператор $F[u] = u_x u_{xx}$ допускает также четырехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$ [163]. Поэтому уравнение (1.6.2.6) имеет также решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3, \tag{1.6.2.8}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' = 2a_2(t)\psi_2\psi_3,\\
&\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' = 2a_2(t)(3\psi_2\psi_4 + 2\psi_3^2),\\
&\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' = 18a_2(t)\psi_3\psi_4,\\
&\psi_4'' + a_1(t)\psi_4' = 18a_2(t)\psi_4^2.
\end{aligned}$$

Эта система для произвольных функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ допускает точные решения в явном виде при $\psi_3 = \mathrm{const}$, $\psi_4 = 0$ и сводится к одному линейному ОДУ второго порядка для функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ при $\psi_3 \neq \mathrm{const}$, $\psi_4 = 0$.

В заключение отметим, что при $a_1(t) = 1/t$, $a_2(t) = a$ уравнение (1.6.2.6) имеет решение в виде квадратичного многочлена по x [177]:

$$u = Cx^2 + aC^2t^2x + \tfrac{1}{8}a^2C^3t^4,$$

где C — произвольная постоянная (частный случай решения (1.6.2.8)).

3°. Нетрудно показать, что оператор $F[u]=u_x u_{xx}$ допускает еще двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному обыкновенному дифференциальному уравнению (для вывода этого уравнения использован метод, описанный далее в разд. 1.6.3):

$$\varphi'_x \varphi''_{xx} = p_1 + p_2\varphi, \tag{1.6.2.9}$$

где p_1 и p_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (1.6.2.9) можно представить в неявной форме

$$x = \int \left(\tfrac{3}{2} p_2\varphi^2 + 3p_1\varphi + p_0\right)^{-1/3} d\varphi + p_3, \tag{1.6.2.10}$$

где p_0 и p_3 — произвольные постоянные. Таким образом уравнение (1.6.2.6) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ задается неявно выражением (1.6.2.10), а функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i=1,\ 2)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\psi''_1 + a_1(t)\psi'_1 &= p_1 a_2(t)\psi_2^2,\\
\psi''_2 + a_1(t)\psi'_2 &= p_2 a_2(t)\psi_2^2.
\end{aligned}$$

◄

Уравнение содержит несколько нелинейных операторов. Рассмотрим теперь более общие, чем (1.6.2.1), нелинейные уравнения вида

$$\sum_{j=1}^{m} L_j[w_j] = 0, \quad w_j = F_j[u], \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1.6.2.11}$$

где $L_j[w]$ — линейные дифференциальные операторы по переменной t типа (1.6.2.2), а $F_j[u]$ — нелинейные дифференциальные операторы по переменной x типа (1.6.1.2) (некоторые из операторов F_j могут быть линейными).

Утверждение 3. Пусть конечномерное линейное подпространство (1.6.1.3) инвариантно относительно всех дифференциальных операторов $F_j[u]$, т. е. существуют функции $f_{j1}, \ldots, f_{jk}$ такие, что

$$F_j\Bigl[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\Bigr] = \sum_{i=1}^{k} f_{ji}(C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x). \tag{1.6.2.12}$$

Тогда уравнение (1.6.2.11) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида (1.6.1.5), где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} L_j\bigl[f_{ji}(\psi_1, \ldots, \psi_k)\bigr] = 0, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1.6.2.13}$$

► Пример 1.44. Представим уравнение гидродинамического типа (1.3.2.45) в виде суммы

$$L_1[w_1] + L_2[w_2] = 0, \tag{1.6.2.14}$$

где использованы обозначения

$$L_1[w_1] = (w_1)_t, \quad F_1[u] = u_x, \quad L_2[w_2] = w_2, \quad F_2[u] = u_x^2 - uu_{xx} - \nu u_{xxx}.$$

Двумерное линейное подпространство $\mathscr{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$, где λ — произвольная постоянная, инвариантно относительно обоих операторов $F_1[u]$ и $F_2[u]$, поскольку имеют место соотношения

$$F_1[C_1 + C_2 e^{\lambda x}] = C_2 \lambda e^{\lambda x}, \quad F_2[C_1 + C_2 e^{\lambda x}] = -(C_1 C_2 \lambda^2 + C_2 \nu \lambda^3) e^{\lambda x}.$$

Поэтому уравнение (1.6.2.14) и эквивалентное ему уравнение (1.3.2.45) имеют точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t) e^{\lambda x}, \tag{1.6.2.15}$$

где две функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ удовлетворяют одному уравнению

$$\psi_2' - \lambda \psi_1 \psi_2 - \nu \lambda^2 \psi_2 = 0. \tag{1.6.2.16}$$

Считая теперь ψ_2 произвольно заданной функцией, исключим из (1.6.2.15) функцию ψ_1 с помощью (1.6.2.16). В результате приходим к решению (1.3.2.47), в котором ψ_2 переобозначена на φ. ◄

Много других нелинейных уравнений и их точных решений с обобщенным разделением переменных, а также некоторые детализации и обобщения описываемого метода, можно найти в [13, 58, 159, 161, 163, 287, 340, 341].

Нелинейный оператор содержит производные по обеим переменным. Рассмотрим уравнение с частными производными общего вида

$$\mathcal{F}[u] = 0, \tag{1.6.2.17}$$

где $\mathcal{F}$ — нелинейный дифференциальный оператор, который явным образом зависит от x и t и содержит частные производные по этим переменным.

Утверждение 4. Пусть конечномерное линейное подпространство (1.6.1.3) инвариантно относительно нелинейного оператора $\mathcal{F}$, в том смысле, что для любого набора функций $C_1(t), \dots, C_k(t)$ выполняется соотношение

$$\mathcal{F}\Big[\sum_{i=1}^{k} C_i(t)\varphi_i(x)\Big] = \sum_{i=1}^{k} f_i[\mathbf{C}(t)]\varphi_i(x),$$

где использованы краткие обозначения

$$\mathbf{C}(t) = \{C_1(t), \dots, C_k(t)\}, \quad f_i[\mathbf{C}(t)] = f_i(t, \mathbf{C}(t), \mathbf{C}_t'(t), \mathbf{C}_{tt}''(t), \dots).$$

Тогда уравнение (1.6.2.17) допускает точное решение вида (1.6.1.5), где функции $\psi_i(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений [163]:

$$f_i[\boldsymbol{\psi}(t)] = 0, \quad \boldsymbol{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)\}.$$

Некоторые примеры применения утверждения 4 для построения точных решений нелинейных УрЧП можно найти в [163].

1.6.3. Нахождение линейных подпространств, инвариантных относительно заданного нелинейного оператора

Предварительные замечания. Основные трудности, возникающие при использовании метода инвариантных подпространств для построения точных решений конкретных уравнений, состоят в отыскании линейных подпространств, инвариантных относительно заданного нелинейного оператора. До сих пор эта проблема в книге не обсуждалась и неявно предполагалось, что исследователь заранее знает или из каких-то соображений (например, интуитивных) догадался, какое множество линейно независимых функций следует использовать при поиске точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Поэтому сформулированные в разд. 1.6.1 и 1.6.2 утверждения 1—4 на практике эквиваленты поиску точных решений в виде билинейной суммы (1.6.1.5), в которой функции $\varphi_i(x)$ заданы априорно (такой подход соответствует упрощенному методу построения решений с обобщенным разделением переменных, описанному ранее в разд. 1.3). Ниже описан метод, который теоретически позволяет найти функции $\varphi_i(x)$.

1°. **Простая ситуация.** Чтобы определить независимые базисные функции $\varphi_i = \varphi_i(x)$, подставим линейную комбинацию $\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)$ в нелинейный дифференциальный оператор (1.6.1.2). В результате получим выражение

$$F\biggl[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\biggr] = A_1(\mathbf{C})\Phi_1[X] + A_2(\mathbf{C})\Phi_2[X] + \dots + A_m(\mathbf{C})\Phi_m[X] + \\ + B_1(\mathbf{C})\varphi_1(x) + B_2(\mathbf{C})\varphi_2(x) + \dots + B_k(\mathbf{C})\varphi_k(x), \quad (1.6.3.1)$$

где $A_j(\mathbf{C})$ и $B_i(\mathbf{C})$ зависят только от $C_1, \dots, C_k$, а функционалы $\Phi_j[X]$ зависят от x и не зависят от $C_1, \dots, C_k$:

$$\begin{aligned} &A_j(\mathbf{C}) \equiv A_j(C_1, \dots, C_k), \quad j = 1, \dots, m;\\ &B_i(\mathbf{C}) \equiv B_i(C_1, \dots, C_k), \quad i = 1, \dots, k;\\ &\Phi_j[X] \equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_k, \varphi_k', \varphi_k''\bigr). \end{aligned} \qquad (1.6.3.2)$$

Для простоты формулы записаны для случая дифференциального оператора второго порядка. Для оператора более высокого порядка правые части соотношений (1.6.3.2) будут содержать производные φ_i более высокого порядка. Функционалы $\Phi_1[X]$, ..., $\Phi_m[X]$ предполагаются линейно независимыми, а $A_j(\mathbf{C})$ — линейно независимые функции C_1, ..., C_k.

Конечномерное линейное подпространство (1.6.1.3) будет инвариантным относительно нелинейного дифференциального оператора F (1.6.1.2), если все функционалы $\Phi_j[X]$ $(j = 1, \dots, m)$ в (1.6.3.1) будут линейными комбинациями базисных функций $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \dots, k)$. Таким образом для определения базисных функций приходим к системе (обычно переопределенной) обыкновенных дифференциальных уравнений [163, 287]:

$$\Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_k, \varphi_k', \varphi_k''\bigr) = p_{j,1}\varphi_1 + p_{j,2}\varphi_2 + \dots + p_{j,k}\varphi_k, \quad j = 1, \dots, m, \qquad (1.6.3.3)$$

где $p_{j,i}$ — некоторые константы не зависящие от параметров C_1, …, C_k. Если для некоторого набора констант $p_{i,j}$ система (1.6.3.3) разрешима (на практике достаточно найти какое-нибудь частное решение), то функции $\varphi_i = \varphi_i(x)$ определяют линейное подпространство относительно нелинейного дифференциального оператора (1.6.1.2). В этом случае функции, входящие в правую часть уравнения (1.6.1.4) имеют вид

$$f_i(\mathbf{C}) = p_{1,i}A_1(\mathbf{C}) + p_{2,i}A_2(\mathbf{C}) + \dots + p_{m,i}A_m(\mathbf{C}) + B_i(\mathbf{C}), \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.6.3.4)$$

Замечание 1.32. *Для нелинейного уравнения (1.6.2.17) в общем случае коэффициенты A_j и B_i в (1.6.3.1) и функции f_i в (1.6.3.4) будут зависеть от $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'_t$, $\boldsymbol{C}''_{tt}$, … .*

Замечание 1.33. *Анализ нелинейных дифференциальных операторов полезно начинать с поиска двумерных инвариантных подпространств вида $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$.*

Утверждение 1. Пусть нелинейный дифференциальный оператор $F[u]$ допускает двумерное инвариантное подпространство вида $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, где $\varphi(x) = p\varphi_1(x) + q\varphi_2(x)$, p, q — произвольные постоянные, а функции 1, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ линейно независимы. Тогда оператор $F[u]$ также допускает трёхмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, \varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$.

Утверждение 2. Пусть нелинейные дифференциальные операторы $F_1[u]$ и $F_2[u]$ допускают инвариантное подпространство $\mathscr{L}_n = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$. Тогда нелинейный оператор $pF_1[u] + qF_2[u]$, где p и q — произвольные постоянные, также допускает то же самое инвариантное подпространство.

В частности, операторы $F[u]$ и $aF[u] + bu$ для любых постоянных a и b имеют одинаковые инвариантные подпространства.

► Пример 1.45. Рассмотрим дифференциальный оператор (1.6.1.11). Будем искать его инвариантные подпространства вида $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$. Имеем

$$F[C_1 + C_2\varphi(x)] = C_2^2[(\varphi'_x)^2 + k\varphi^2] + C_2 a\varphi''_{xx} + kC_1^2 + bC_1 + c + (bC_2 + 2kC_1C_2)\varphi.$$

Здесь $\Phi_1[X] = (\varphi'_x)^2 + k\varphi^2$, $\Phi_2[X] = a\varphi''_{xx}$. Следовательно, базисная функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\varphi'_x)^2 + k\varphi^2 &= p_1 + p_2\varphi, \\ \varphi''_{xx} &= p_3 + p_4\varphi, \end{aligned} \quad (1.6.3.5)$$

где $p_1 = p_{1,1}$, $p_2 = p_{1,2}$, $p_3 = p_{2,1}/a$, $p_4 = p_{2,2}/a$.

Исследуем систему (1.6.3.5) на совместность. Для этого продифференцируем первое уравнение по x и разделим на φ'_x. Имеем $\varphi''_{xx} = -k\varphi + p_2/2$. Используем это соотношение для исключения второй производной из второго уравнения в (1.6.3.5). В результате получим $(p_4 + k)\varphi + p_3 - \frac{1}{2}p_2 = 0$. Чтобы это соотношение тождественно удовлетворялось, надо положить

$$p_4 = -k, \quad p_3 = \tfrac{1}{2}p_2. \quad (1.6.3.6)$$

Решение системы (1.6.3.5) при условии (1.6.3.6) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\varphi(x)=px^2+qx && \text{при}\ \ k=0 \quad (p_1=q^2,\ p_2=4p),\\
&\varphi(x)=p\sin\bigl(x\sqrt{k}\,\bigr)+q\cos\bigl(x\sqrt{k}\,\bigr) && \text{при}\ \ k>0 \quad (p_1=kp^2+kq^2,\ p_2=0),\\
&\varphi(x)=p\,\mathrm{sh}\bigl(x\sqrt{-k}\,\bigr)+q\,\mathrm{ch}\bigl(x\sqrt{-k}\,\bigr) && \text{при}\ \ k<0 \quad (p_1=-kp^2+kq^2,\ p_2=0),
\end{aligned} \tag{1.6.3.7}$$

где p и q — произвольные постоянные.

Поскольку формулы (1.6.3.7) содержат два произвольных параметра p и q, из утверждения 1 следует, что нелинейный дифференциальный оператор (1.6.1.11) допускает следующие инвариантные подпространства:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_3=\bigl\{1,x,x^2\bigr\} && \text{при}\ \ k=0,\\
&\mathscr{L}_3=\bigl\{1,\sin(x\sqrt{k}\,),\cos(x\sqrt{k}\,)\bigr\} && \text{при}\ \ k>0,\\
&\mathscr{L}_3=\bigl\{1,\mathrm{sh}(x\sqrt{-k}\,),\mathrm{ch}(x\sqrt{-k}\,)\bigr\} && \text{при}\ \ k<0.
\end{aligned}$$ ◀

▶ **Пример 1.46.** Рассмотрим уравнение теплопроводности с квадратичной нелинейностью

$$u_t=f(x)(uu_x)_x, \tag{1.6.3.8}$$

где нелинейный дифференциальный оператор явно зависит от пространственной переменной x. Имеем $F[u]=f(x)(uu_x)_x$. Будем искать инвариантные подпространства вида $\mathscr{L}_2=\{1,\varphi(x)\}$ оператора F. Получим

$$F[C_1+C_2\varphi(x)]=C_2^2f(x)[\varphi\varphi''_{xx}+(\varphi'_x)^2]+C_1C_2f(x)\varphi''_{xx}.$$

Следовательно, $\Phi_1[X]=f(x)[\varphi\varphi''_{xx}+(\varphi'_x)^2]$ и $\Phi_2[X]=f(x)\varphi''_{xx}$, а базисная функция $\varphi(x)$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
f(x)[\varphi\varphi''_{xx}+(\varphi'_x)^2]&=p_1+p_2\varphi,\\
f(x)\varphi''_{xx}&=p_3+p_4\varphi.
\end{aligned} \tag{1.6.3.9}$$

Найдём вид допустимых функций $f(x)$, для которых переопределенная система (1.6.3.9) совместна.

В невырожденном случае $\varphi''_{xx}\neq 0$ исключение $f(x)$ из (1.6.3.9) приводит к уравнению относительно φ:

$$(p_3+p_4\varphi)[\varphi\varphi''_{xx}+(\varphi'_x)^2]=(p_1+p_2\varphi)\varphi''_{xx}. \tag{1.6.3.10}$$

Любое решение этого уравнения порождает функцию $f(x)$ такую, что

$$f(x)=\frac{p_3+p_4\varphi}{\varphi''_{xx}}. \tag{1.6.3.11}$$

Подстановка $(\varphi'_x)^2=2w(\varphi)$ приводит (1.6.3.10) к линейному уравнению первого порядка с разделяющими переменными

$$[p_4\varphi^2+(p_3-p_2)\varphi-p_1]w'_\varphi=-2(p_3+p_4\varphi)w,$$

которое легко интегрируется. Некоторые случаи, когда $\varphi(x)$ выражается явно через элементарные функции, описаны в табл. 1.4.

Таблица 1.4. Определяющие функции $f(x)$, входящие в уравнение (1.6.3.8), и соответствующие им базисные функции $\varphi(x)$; a, b, n, λ — произвольные постоянные ($n \neq 2$, $\lambda \neq 0$).

№	Функция $f(x)$	Функция $\varphi(x)$	Параметры p_1, p_2, p_3, p_4
1	a	$\frac{1}{2a}x^2 + bx$	$p_1 = ab^2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$, $p_4 = 0$
2	ax^n	x^{2-n}	$p_1 = p_4 = 0$, $p_2 = a(2-n)(3-2n)$, $p_3 = a(1-n)(2-n)$
3	ax^2	$\ln x$	$p_4 = a$, $p_2 = p_3 = -a$, $p_4 = 0$
4	$ae^{\lambda x}$	$e^{-\lambda x}$	$p_1 = p_4 = 0$, $p_2 = 2a\lambda^2$, $p_3 = a\lambda^2$

Точные решения уравнения (1.6.3.8) имеют вид $u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x)$, где функции $\psi_m = \psi_m(t)$ определяются путем решения автономной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_1' = p_1\psi_2^2 + p_3\psi_1\psi_2,$$
$$\psi_2' = p_2\psi_2^2 + p_4\psi_1\psi_2,$$

штрих обозначает производную по t. Разделив первое уравнение на второе, можно преобразовать эту систему к одному однородному уравнению первого порядка, которое легко интегрируется. ◀

Замечание 1.34. *Если коэффициент диффузии линейно зависит от концентрации, то уравнение диффузионного пограничного слоя вблизи твердой поверхности сводится к уравнению (1.6.3.8), где $f(x) = a/x$ [18, 286]. К уравнениям вида (1.6.3.8) также приводятся уравнения*

$$u_t = a(z)[b(z)uu_z]_z, \tag{1.6.3.12}$$

что осуществляется с помощью подстановки $x = \int \frac{dz}{b(z)}$, где $f(x) = a(z)$. Уравнение (1.6.3.12), в котором $a(z) = z^{-n}$ и $b(z) = z^n$, описывает нелинейный тепло- и массоперенос в радиально-симметричном случае ($n = 1$ соответствует плоской задаче, а $n = 2$ — пространственной задаче).

2°. **Сложная ситуация.** Для лучшего понимания дальнейшего материала рассмотрим отдельно два последних члена суммы в верхнем ряду после знака равенства в (1.6.3.1)*:

$$A_{m-1}(\mathbf{C})\Phi_{m-1}[X] + A_m(\mathbf{C})\Phi_m[X], \tag{1.6.3.13}$$

которым соответствуют два последних уравнения системы (1.6.3.3). Возможна ситуация, когда функциональные коэффициенты в (1.6.3.13) связаны линейным соотношением, например,

$$A_m(\mathbf{C}) = \beta A_{m-1}(\mathbf{C}), \tag{1.6.3.14}$$

*В общем случае коэффициенты A_j в (1.6.3.1), включая A_{m-1} и A_m в (1.6.3.13), и функции f_i в (1.6.3.4) зависят как от $\mathbf{C}$, так и от производных $\mathbf{C}_t'$, $\mathbf{C}_{tt}''$, …, см. замечание 1.32.

где постоянная β не зависит от $\mathbf{C}$. В этом случае, заменив в частичной сумме (1.6.3.13) $A_m(\mathbf{C})$ на $A_{m-1}(\mathbf{C})$, имеем

$$A_{m-1}(\mathbf{C})(\Phi_{m-1}[X] + \beta\Phi_m[X]), \tag{1.6.3.15}$$

что соответствует образованию нового составного функционала $\Phi^*_{m-1}[X] = \Phi_{m-1}[X] + \beta\Phi_m[X]$. Рассуждая далее таким же образом, как это делалось ранее в п. 1°, приходим к системе из $m-1$ уравнения (для φ_i), которая получается из (1.6.3.3) отбрасыванием последнего уравнения и формальной заменой $\Phi_{m-1}(\ldots)$ на $\Phi^*_{m-1}(\ldots)$. В этом случае в формулах (1.6.3.4) для функциональных коэффициентов $f_i(\mathbf{C})$ следует положить $A_m(\mathbf{C}) = 0$. Решения уравнения (1.6.1.1) с оператором (1.6.1.2) ищутся в виде билинейной суммы (1.6.1.5), где функции $\psi_1(t)$, $\ldots$, $\psi_k(t)$ описываются системой ОДУ (1.6.1.6) (в правых частях уравнений функции f_i определяются по формулам (1.6.3.4), в которых $\mathbf{C}$ надо заменить на $\boldsymbol{\psi}$), дополненную уравнением (1.6.3.14). Таким образом, система уравнений для определения функций ψ_i в данном случае будет переопределенной. Сказанное в полной мере относится также к нелинейному уравнению общего вида (1.6.2.17).

Вместо одного простого соотношения (1.6.3.14), связывающего два функциональных коэффициента $A_m(\mathbf{C})$ и $A_{m-1}(\mathbf{C})$, можно рассматривать также более сложные линейные соотношения, связывающие бóльшее число коэффициентов. Кроме того, можно ввести сразу несколько линейных соотношений такого типа. Это приводит к меньшему числу ОДУ для функций $\varphi_i(x)$ и переопределенным системам для $\psi_i(t)$.

Указанная ситуация соответствует различным решениям билинейного функционального уравнения (1.5.1.1), используемым для получения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления (см. разд. 1.5). Следует отметить, что в методе расщепления обе независимые переменные x и t полностью равноправны, а в методе инвариантных подпространств эти переменные неравноправны: переменная x выбирается в качестве основной, а переменная t играет роль параметра (поэтому методом инвариантных подпространств труднее искать точные решения нелинейных УрЧП, если этих решений несколько и они существенно различаются).

1.7. Другие нелинейные уравнения, имеющие решения с обобщенным разделением переменных

1.7.1. Нелинейные уравнения в частных производных с запаздыванием

Предварительные замечания. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием. Для математического моделирования сложных явлений и процессов, состояние которых зависит не только от данного момента времени, но и от одного или нескольких моментов времени в прошлом, используются дифференциальные уравнения с запаздыванием [366]. Такие уравнения с частными производными и одним запаздыванием помимо искомой функции $u = u(x,t)$ содержат также функцию $\bar{u} = u(x, t-\tau)$, где τ — время запаздывания. Обычно τ является положительной константой, но встречаются также более сложные модели, когда $\tau = \tau(t)$ является заданной функцией времени.

Дифференциальные уравнения с запаздыванием имеют качественные особенности, которых нет у дифференциальных уравнений без запаздывания [51, 366]. Среди нелинейных УрЧП с запаздыванием в литературе и приложениях чаще всего встречаются уравнения реакционно-диффузионного типа (см., например, [51, 242, 296, 301, 302, 366]):

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u, \bar{u}), \qquad \bar{u} = u(x, t-\tau), \tag{1.7.1.1}$$

в которых запаздывание входит только в кинетическую функцию $g(u, \bar{u})$.

Термин *точное решение* в отношении нелинейных уравнений с частными производными с запаздыванием используется в следующих случаях:

(a) решение выражается в элементарных функциях или в замкнутом виде в квадратурах;

(b) решение выражается через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с запаздыванием (или систем таких уравнений);

Допускаются комбинации случаев (a)—(b).

Замечание 1.35. *Если рассматриваемое уравнение зависит от специальных или произвольных функций, то эти функции должны быть добавлены к элементарным функциям в п. (a).*

Данное определение обобщает понятие точного решения для нелинейных уравнений с частными производными без запаздывания (см. предисловие).

Решения с простым разделением переменных. Некоторые нелинейные УрЧП с запаздыванием допускают точные решения с простым разделением переменных. Проиллюстрируем сказанное на примерах конкретных уравнений, которые обсуждались в [293, 296, 298].

► Пример 1.47. Рассмотрим нелинейное УрЧП реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(\bar{u}/u), \qquad \bar{u} = u(x, t-\tau), \tag{1.7.1.2}$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

1°. Уравнение (1.7.1.2) допускает решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по пространственной координате x:

$$u = [C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x)]\psi(t), \tag{1.7.1.3}$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием

$$\psi'_t = -a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi). \tag{1.7.1.4}$$

Здесь и далее используется обозначение $\bar{\psi} = \psi(t-\tau)$.

Уравнение с запаздыванием (1.7.1.4) имеет частное решение экспоненциального вида
$$\psi(t) = C_3 \exp(-\beta\tau), \tag{1.7.1.5}$$
где β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения
$$a\lambda^2 - \beta = f(e^{\beta\tau}).$$

2°. Уравнение (1.7.1.2) допускает другое решение с мультипликативным разделением переменных:
$$u = [C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x)]\psi(t), \tag{1.7.1.6}$$
где λ — произвольная постоянная, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием
$$\psi'_t = a\lambda^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi). \tag{1.7.1.7}$$

Уравнение с запаздыванием (1.7.1.7) имеет частное решение экспоненциального вида (1.7.1.5), где β определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения
$$a\lambda^2 + \beta + f(e^{\beta\tau}) = 0.$$
◀

Замечание 1.36. *В нелинейном уравнении (1.7.1.2) запаздывание может быть произвольной функцией времени $\tau = \tau(t)$. В этом случае также имеются точные решения вида (1.7.1.3) и (1.7.1.6), где функции $\psi = \psi(t)$ соответственно удовлетворяют уравнениям (1.7.1.4) и (1.7.1.7), в которых следует положить $\bar{\psi} = \psi(t - \tau(t))$.*

▶ Пример 1.48. Рассмотрим уравнение
$$u_t = au_{xx} + bu + f(u - \bar{u}), \qquad \bar{u} = u(x, t - \tau), \tag{1.7.1.8}$$
где $f(z)$ — произвольная функция.

1°. При $ab > 0$ уравнение (1.7.1.8) допускает решение с аддитивным разделением переменных
$$u = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{b/a}, \tag{1.7.1.9}$$
где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием
$$\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi}). \tag{1.7.1.10}$$

2°. При $ab < 0$ уравнение (1.7.1.8) допускает решение с аддитивным разделением переменных
$$u = C_1 \exp(-\lambda x) + C_2 \exp(\lambda x) + \psi(t), \quad \lambda = \sqrt{-b/a}, \tag{1.7.1.11}$$
где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет ОДУ с запаздыванием (1.7.1.10).

3°. При $b = 0$ уравнение (1.7.1.8) допускает решение с аддитивным разделением переменных
$$u = C_1 x^2 + C_2 x + \psi(t), \tag{1.7.1.12}$$
где функция $\psi(t)$ описывается ОДУ с запаздыванием
$$\psi'_t = 2aC_1 + f(\psi - \bar{\psi}). \tag{1.7.1.13}$$

Уравнение с запаздыванием (1.7.1.13) имеет линейное по t частное решение

$$\psi(t) = kt + C_3,$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения $k = 2aC_1 + f(k\tau)$. ◀

Замечание 1.37. *В нелинейном уравнении (1.7.1.8) запаздывание может быть произвольной функцией времени $\tau = \tau(t)$. В этом случае также имеются точные решения (1.7.1.9), (1.7.1.11) и (1.7.1.12), где функции $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.7.1.10) и (1.7.1.13), в которых следует положить $\bar{\psi} = \psi(t - \tau(t))$.*

В табл. 1.5 собраны приведенные выше и другие примеры решений с простым (аддитивным или мультипликативным) разделением переменных для нескольких нелинейных УрЧП с запаздыванием.

Для всех указанных в табл. 1.5 нелинейных УрЧП с запаздыванием, входящие в решения функции $\varphi(x)$ удовлетворяют автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, а функции $\psi(t)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого или второго порядка с запаздыванием. Вместо постоянного времени запаздывания τ во все нелинейные УрЧП с запаздыванием может входить произвольная заданная функция времени $\tau(t)$; в этом случае в уравнениях для определения функции $\psi = \psi(t)$ следует положить $\bar{\psi} = \psi(t - \tau(t))$.

Решения с обобщенным разделением переменных. Для построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных УрЧП с запаздыванием можно использовать методы, описанные ранее в разд. 1.3—1.6.

Рассмотрим нелинейное УрЧП, содержащее линейный член с запаздыванием:

$$u_t = F[u] + s\bar{u}, \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \tag{1.7.1.14}$$

где s — некоторая константа, а $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор n-го порядка по x вида (1.6.1.2).

Утверждение 1. Пусть линейное подпространство (1.6.1.3) инвариантно относительно оператора F, т. е. выполняется соотношение (1.6.1.4). Тогда уравнение (1.7.1.14) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{1.7.1.15}$$

где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\psi_i' = f_i(\psi_1, \ldots, \psi_n) + s\bar{\psi}_i, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1.7.1.16}$$

Штрих обозначает производную по t, а $\bar{\psi}_i = \psi_i(t - \tau)$.

Отметим, что запаздывание в уравнениях (1.7.1.14) и (1.7.1.16) может зависеть от времени, т. е. $\tau = \tau(t)$.

Таблица 1.5. Некоторые нелинейные УрЧП с запаздыванием, которые допускают решения с простым разделением переменных. Обозначения: $w = u(x, t - \tau)$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau)$, $f(z)$ — произвольная функция, а C — произвольная постоянная.

№	Нелинейное УрЧП с запаздыванием	Вид решений	Определяющие уравнения
1	$u_t = au_{xx} + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx} = C\varphi$, $\psi'_t = C\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
2	$u_t = au_{xx} + bu\ln u + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx} = C\varphi - b\varphi\ln\varphi$, $\psi'_t = C\psi + b\psi\ln\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
3	$u_t = a(u^n u_x)_x + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a(\varphi^n\varphi'_x)'_x = C\varphi$, $\psi'_t = C\psi^{n+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
4	$u_t = au_{xx} + bu + f(u - \bar{u})$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	$a\varphi''_{xx} + b\varphi = C$, $\psi'_t = b\psi + C + f(\psi - \bar{\psi})$
5	$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - \bar{u})$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	$a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C$, $\psi'_t = Ce^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$
6	$u_{tt} = au_{xx} + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx} = C\varphi$, $\psi''_{tt} = C\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
7	$u_{tt} = au_{xx} + bu\ln u + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx} = C\varphi - b\varphi\ln\varphi$, $\psi''_{tt} = C\psi + b\psi\ln\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
8	$u_{tt} = a(u^n u_x)_x + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a(\varphi^n\varphi'_x)'_x = C\varphi$, $\psi''_{tt} = C\psi^{n+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
9	$u_{tt} = au_{xx} + bu + f(u - \bar{u})$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	$a\varphi''_{xx} + b\varphi = C$, $\psi''_{tt} = b\psi + C + f(\psi - \bar{\psi})$
10	$u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - \bar{u})$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	$a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C$, $\psi''_{tt} = Ce^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$

Рассмотрим несколько примеров применения утверждения 1 для построения точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений вида (1.7.1.1)

► Пример 1.49. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием вида (1.7.1.14) с квадратичной нелинейностью

$$u_t = [(a_1 u + a_0)u_x]_x + b_1 u + b_2\bar{u} + c. \qquad (1.7.1.17)$$

Дифференциальный оператор в правой части уравнения при $b_2 = 0$ допускает инвариантное линейное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ (поскольку под действием этого оператора многочлен $C_1 + C_2 x + C_3 x^2$ преобразуется в аналогичный многочлен с другими коэффициентами). Из утверждения 1 следует, что исходное уравнение (1.7.1.17) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2. \tag{1.7.1.18}$$

Функции $\psi_i = \psi_i(t)$ ($i = 1,\ 2,\ 3$) описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= 2a_1\psi_1\psi_3 + a_1\psi_2^2 + 2a_0\psi_3 + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1 + c,\\
\psi_2' &= 6a_1\psi_2\psi_3 + b_1\psi + b_2\bar{\psi}_2,\\
\psi_3' &= 6a_1\psi_3^2 + b_1\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3,
\end{aligned} \tag{1.7.1.19}$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i(t-\tau)$. ◀

▶ Пример 1.50. Рассмотрим более сложное реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием вида (1.7.1.14) с квадратичной нелинейностью

$$u_t = [(a_1u + a_0)u_x]_x + ku^2 + b_1u + b_2\bar{u} + c, \quad k \neq 0. \tag{1.7.1.20}$$

1°. При $a_1k < 0$ дифференциальный оператор в правой части уравнения (1.7.1.20) при $b_2 = 0$ допускает инвариантное линейное трехмерное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, e^{-\lambda x}, e^{\lambda x}\}$, где $\lambda = \sqrt{-k/(2a_1)}$. В этом случае из утверждения 1 следует, что уравнение (1.7.1.20) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\exp(-\lambda x) + \psi_3(t)\exp(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{-\frac{k}{2a_1}}. \tag{1.7.1.21}$$

Здесь функции $\psi = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= k\psi_1^2 + 2k\psi_2\psi_3 + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1 + c,\\
\psi_2' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + a_0\lambda^2 + b_1)\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2,\\
\psi_3' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + a_0\lambda^2 + b_1)\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3,
\end{aligned}$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i(t-\tau)$ ($i = 1,\ 2,\ 3$).

2°. При $a_1k > 0$ аналогичным образом можно показать, что уравнение (1.7.1.20) допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(\lambda x) + \psi_3(t)\sin(\lambda x), \quad \lambda = \sqrt{\frac{k}{2a_1}}, \tag{1.7.1.22}$$

где функции $\psi = \psi_n(t)$ описываются системой ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= k\psi_1^2 + \tfrac{1}{2}k(\psi_2^2 + \psi_3^2) + b_1\psi_1 + b_2\bar{\psi}_1 + c,\\
\psi_2' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + b_1 - a_0\lambda^2)\psi_2 + b_2\bar{\psi}_2,\\
\psi_3' &= (\tfrac{3}{2}k\psi_1 + b_1 - a_0\lambda^2)\psi_3 + b_2\bar{\psi}_3.
\end{aligned}$$

◀

Ниже приведены два более общих утверждения, позволяющих получать точные решения с обобщенным разделением переменных некоторых нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

Рассмотрим более сложное, чем (1.7.1.14), нелинейное УрЧП с запаздыванием вида

$$u_t = F[u] + \sum_{j=1}^{p} s_j \bar{u}_j, \quad \bar{u}_j = u(x, t - \tau_j), \tag{1.7.1.23}$$

где $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор n-го порядка по x вида (1.6.1.2), а τ_j — времена запаздывания ($j = 1, \ldots, p$), которые считаются произвольными независимыми константами. Подобные УрЧП с несколькими временами запаздывания встречаются в литературе (см., например, [113, 171, 194, 355]).

Утверждение 2. Пусть линейное подпространство (1.6.1.3) инвариантно относительно оператора F, т. е. выполняется соотношение (1.6.1.4). Тогда уравнение (1.7.1.23) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (1.7.1.15), где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с p временами запаздывания

$$\psi_i'(t) = f_i\bigl(\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)\bigr) + \sum_{j=1}^{p} s_j \psi_i(t - \tau_j), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1.7.1.24}$$

Рассмотрим теперь другое нелинейное УрЧП с запаздыванием

$$L[u] = F[u; \bar{u}], \quad \bar{u} = u(x, t - \tau), \tag{1.7.1.25}$$

где $L[u]$ — произвольный линейный дифференциальный оператор по t вида

$$L[u] \equiv \sum_{j=1}^{q} a_j(t) u_t^{(j)}, \tag{1.7.1.26}$$

а $F[u; \bar{u}]$ — нелинейный дифференциальный оператор по x, содержащий u и $\bar{u}$:

$$F[u; \bar{u}] \equiv F\bigl(u, u_x, u_{xx} \ldots, u_x^{(m)}; \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_{xx}, \ldots, \bar{u}_x^{(r)}\bigr). \tag{1.7.1.27}$$

Пусть линейно независимые функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ образуют конечномерное линейное подпространство $\mathscr{L}_k$.

Утверждение 3. Пусть $C_1, \ldots, C_k$ и $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_k$ — два множества произвольных вещественных констант и пусть существует функции $f_1, \ldots, f_k$ такие что

$$F\Bigl[\sum_{i=1}^{k} C_i \varphi_i(x); \sum_{i=1}^{k} \bar{C}_i \varphi_i(x)\Bigr] = \sum_{i=1}^{k} f_i(C_1, \ldots, C_n; \bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n) \varphi_i(x). \tag{1.7.1.28}$$

Тогда уравнение (1.7.1.25) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (1.7.1.15), где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$L[\psi_i(t)] = f_i\bigl(\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t); \psi_1(t - \tau), \ldots, \psi_k(t - \tau)\bigr), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{1.7.1.29}$$

Утверждение 3 может использоваться для построения решений с обобщенным разделением переменных нелинейных УрЧП с запаздыванием, отличных от обсуждаемых выше, в том числе гиперболических уравнений с запаздыванием. В уравнениях (1.7.1.25) и (1.7.1.29) запаздывание может зависеть от времени, т. е. $\tau = \tau(t)$.

Замечание 1.38. *Многие реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида (1.7.1.1) и другие нелинейные УрЧП с запаздыванием допускают точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных [242, 272, 283, 284, 293, 295–297, 299–303] (см. также [50, 229, 293, 295, 298]). Помимо методов, описанных выше, для построения точных решений таких уравнений можно использовать различные модификации метода функциональных связей [297, 302], которые здесь не рассматриваются.*

Дифференциально-разностные уравнения с конечным временем релаксации. Нелинейные уравнения типа теплопроводности с источником

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u) \quad (f > 0), \tag{1.7.1.30}$$

вывод которых базируется на законе Фурье для теплового потока

$$\mathbf{q} = -\lambda(u)\nabla u,$$

являются уравнениями параболического типа и обладают физически парадоксальным свойством — бесконечной скоростью распространения возмущений. Подобная ситуация не наблюдается на практике, что свидетельствует об ограниченной области применимости таких уравнений. Указанное обстоятельство привело к необходимости разработки других моделей теплопроводности, которые дают конечную скорость распространения возмущений. В результате была разработана более сложная модель теплопроводности, основанная на дифференциальном законе Каттанео — Вернотте [111, 351] (см. также [56, 154, 212]):

$$\mathbf{q} = -\lambda(u)\nabla u - \tau \mathbf{q}_t,$$

которая приводит к уравнению теплопроводности гиперболического типа

$$\tau u_{tt} + [1 - \tau g'_u(u)]u_t = [f(u)u_x]_x + g(u), \tag{1.7.1.31}$$

где τ — время релаксации считается малым. При $\tau = 0$ уравнение (1.7.1.31) переходит в (1.7.1.30).

Для теоретического обоснования дифференциальной модели Каттанео — Вернотте часто (но не всегда) используют дифференциально-разностное соотношение для теплового потока [56, 154, 345]:

$$\mathbf{q}|_{t+\tau} = -\lambda(u)\nabla u,$$

в котором левая часть вычисляется в момент времени $t + \tau$, а левая часть — в момент времени t. В результате приходим к нелинейному дифференциально-разностному уравнению теплопроводности с конечным временем релаксации

$$v_t = [f(u)u_x]_x + g(v), \qquad v = u(x, t + \tau), \tag{1.7.1.32}$$

которое заменой $\zeta = t + \tau$ сводится к УрЧП с запаздыванием.

Если формально разложить левую часть уравнения (1.7.1.32) в ряд Тейлора по малому τ и удержать два главных члена разложения, то получим гиперболическое уравнение теплопроводности (1.7.1.31).

В табл. 1.6 приведены нелинейные дифференциально-разностные УрЧП вида (1.7.1.32), которые допускают решения с аддитивным или мультипликативным разделением переменных [293].

Таблица 1.6. Дифференциально-разностные УрЧП вида $v_t = [f(u)u_x]_x + g(v)$, допускающие решения с аддитивным или мультипликативным разделением переменных. Обозначения: $v = u(x, t+\tau)$, $\bar\psi = \psi(t+\tau)$.

№	$f(u)$	$g(v)$	Вид решений
1	au	bv	$u = -\frac{1}{6}(b/a)(x+C_1)^2 + \psi(t)$, $\bar\psi'_t = -\frac{1}{3}b\psi + b\bar\psi$; $u = (x+C_1)^2\psi(t)$, $\bar\psi'_t = 6a\psi^2 + b\bar\psi$; $u = \varphi(x)\psi(t)$, $(\varphi\varphi'_x)'_x = C_1\varphi$, $\bar\psi'_t = aC_1\psi^2 + b\bar\psi$; $u = C_1x + aC_1^2t + C_2$ при $b = 0$
2	au^n	bv	$u = (x+C_1)^{2/n}\psi(t)$, $\bar\psi'_t = 2an^{-2}(n+2)\psi^{n+1} + b\bar\psi$; $u = \varphi(x)\psi(t)$, $(\varphi^n\varphi'_x)'_x = C_1\varphi$, $\bar\psi'_t = aC_1\psi^{n+1} + b\bar\psi$;
3	au^n	$bv^{n+1} + cv$	$u = e^{ct}\varphi(x)$, $a(\varphi^n\varphi'_x)'_x + be^{c(n+1)\tau}\varphi^{n+1} = 0$
4	au^{-1}	0	$u = \dfrac{2aC_1^2t + C_2}{(C_1x+C_3)^2}$; $u = \dfrac{2aC_1^2t + C_2}{\operatorname{sh}^2(C_1x+C_3)}$; $u = \dfrac{C_2 - 2aC_1^2t}{\operatorname{ch}^2(C_1x+C_3)}$; $u = \dfrac{2aC_1^2t + C_2}{\cos^2(C_1x+C_3)}$
5	au^{-1}	b	$u = \varphi(x)(C_1t + C_2)$, $a(\varphi'_x/\varphi)'_x - C_1\varphi + b = 0$
6	au^{-1}	$bv + c$	$u = C_1\exp\bigl(bt - \frac{c}{2a}x^2 + C_2x\bigr)$; $u = \varphi(x)(C_1e^{bt} + C_2)$, $a(\varphi'_x/\varphi)'_x + bC_2\varphi + c = 0$
7	$ae^{\beta u}$	b	$u = \frac{1}{\beta}\ln\lvert C_1x + C_2\rvert + bt + C_3$; $u = \frac{1}{\beta}\ln(C_1x^2 + C_2x + C_3) + \psi(t)$; $\bar\psi'_t = 2C_1e^{\beta\psi} + b\beta$
8	e^u	$ae^v + b$	$u = \ln[C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx)] + bt + C_3$, $ae^{b\tau} = k^2 > 0$; $u = \ln[C_1\operatorname{ch}(kx) + C_2\operatorname{sh}(kx)] + bt + C_3$, $ae^{b\tau} = -k^2 < 0$

В [293] было показано, что уравнение

$$v_t = [(a_1u + a_2)u_x]_x + b_1v + b_2, \qquad v = u(x, t+\tau), \tag{1.7.1.33}$$

допускает точные решения с обобщенным разделением переменных вида $u = \psi_1(t)x + \psi_2(t)$ и $u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)x + \psi_3(t)$. В частности, при $a_2 = b_2 = 0$, $a_1 = a$, $b_1 = b$ уравнение (1.7.1.33) имеет решения, допускающие представление в явной форме

$$u = C_1xe^{bt} + C_2e^{bt} + C_1^2(a/b)e^{2b(t-\tau)},$$
$$u = -\frac{b}{6a}(x+C_1)^2 + C_2e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{1}{\tau}\ln\frac{b}{3(b-1)}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные (во втором решении $b < 0$ или $b > 1$). В [293] были получены также точные решения более сложных уравнений вида (1.7.1.32), а также систем таких уравнений.

Отметим, что в [295] были построены точные решения дифференциально-разностных уравнений гидродинамики с конечной скоростью релаксации

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u},\\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,\end{gathered} \tag{1.7.1.34}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t+\tau)$. Уравнения (1.7.1.34) совпадают с уравнениями Навье — Стокса при $\tau = 0$, а также при $t \to \infty$ (стационарный случай).

Замечание 1.39. *Постановки начально-краевых задач для уравнения (1.7.1.33) и системы (1.7.1.34) могут быть некорректны по Адамару [206, 295].*

1.7.2. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения

Линейные операторы по t, стоящие в уравнениях (1.6.2.1) и (1.6.2.11), могут быть не только дифференциальными, но и интегральными или интегро-дифференциальными. В этом случае остаются справедливыми приведенные в разд. 1.6.2 утверждения 2 и 3, которые позволяют получать решения с обобщенным разделением переменных вида (1.6.1.5), где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой уравнений (1.6.2.5). Проиллюстрируем сказанное на конкретном классе интегро-дифференциальных уравнений.

► Пример 1.51. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$L[u] = [(au+b)u_x]_x + cu, \tag{1.7.2.1}$$

которое является частным случаем уравнения (1.6.2.1). На данном этапе вид линейного оператора $L[u]$, действующего по переменной t, конкретизировать не будем.

Подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора $F[u] = [(au+b)u_x]_x + cu$. Поэтому уравнение (1.7.2.1) допускает точные решения вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2, \tag{1.7.2.2}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ удовлетворяют нелинейной системе уравнений

$$\begin{aligned}L[\psi_1] &= 2(a\psi_1 + b)\psi_3 + a\psi_2^2 + c\psi_1,\\ L[\psi_2] &= 6a\psi_2\psi_3 + c\psi_2,\\ L[\psi_3] &= 6a\psi_3^2 + c\psi_3.\end{aligned} \tag{1.7.2.3}$$

Решение системы (1.7.2.3) ищем в виде

$$\psi_1 = \theta + A\psi_3, \quad \psi_2 = B\psi_3, \tag{1.7.2.4}$$

где B — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(t)$ и константа A подлежат определению. Второе уравнение (1.7.2.3) удовлетворяется тождественно в силу второго соотношения (1.7.2.4) и третьего уравнения (1.7.2.3). Исключим ψ_1 и ψ_2 из первого уравнения (1.7.2.3) с помощью соотношений (1.7.2.4), а затем заменим $L[\psi_3]$ правой частью последнего уравнения (1.7.2.3). Получим

$$L[\theta] = (2a\psi_3 + c)\theta + 2b\psi_3 + a(B^2 - 4A)\psi_3^2. \tag{1.7.2.5}$$

Постоянную A выбираем так, чтобы коэффициент при ψ_3^2 обращался в нуль. Имеем

$$A = \tfrac{1}{4}B^2. \tag{1.7.2.6}$$

В результате приходим к линейному неоднородному уравнению для функции $\theta = \theta(t)$:

$$L[\theta] = (2a\psi_3 + c)\theta + 2b\psi_3. \tag{1.7.2.7}$$

Далее для конкретности будем рассматривать линейный интегральный оператор с переменным пределом интегрирования

$$L[\psi] = \int_0^t (t - \xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{1.7.2.8}$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение (1.7.2.1) в развернутой форме записывается так:

$$\int_0^t (t - \xi)u(x, \xi)\,d\xi = [(au + b)u_x]_x + cu. \tag{1.7.2.9}$$

Найдем точное решение нелинейной системы интегральных уравнений (1.7.2.3) с оператором (1.7.2.8) при $c = 0$. Третье уравнение системы (1.7.2.3) при $c = 0$ имеет вид

$$\int_0^t (t - \xi)\psi_3(\xi)\,d\xi = 6a\psi_3^2. \tag{1.7.2.10}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что оно допускает точное решение

$$\psi_3 = \frac{1}{72a}t^2. \tag{1.7.2.11}$$

Подставив (1.7.2.11) и $c = 0$ в уравнение (1.7.2.7), ищем его решение в виде $\theta = Ct^k + m$, где C — произвольная постоянная. Для определения показателя k приходим к квадратному уравнению $(k + 1)(k + 2) = 36$. Отбросив отрицательный корень, в результате получим

$$\theta = Ct^k + \frac{b}{17a}, \quad k = \frac{1}{2}\bigl(-3 + \sqrt{145}\,\bigr). \tag{1.7.2.12}$$

Используя соотношения (1.7.2.4), (1.7.2.6), (1.7.2.11), (1.7.2.12), находим двухпараметрическое семейство точных решений нелинейной системы интегральных уравнений (1.7.2.3) при $c = 0$ с оператором (1.7.2.8):

$$\psi_1 = Ct^k + \frac{B^2}{288\,a}t^2 + \frac{b}{17a}, \quad \psi_2 = \frac{B}{72\,a}t^2, \quad \psi_3 = \frac{1}{72\,a}t^2, \tag{1.7.2.13}$$

где B и C — произвольные постоянные, $k = \frac{1}{2}\bigl(-3 + \sqrt{145}\,\bigr)$. ◀

1.7.3. Нелинейные уравнения с дробной производной

Дробные интегралы и дробные производные. Ниже даны краткие сведения о дробных интегралах и дробных производных. Более подробную информацию по этой теме можно найти в книгах [186, 214, 247, 270, 280, 334].

Определение дробных интегралов. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Интеграл

$$\mathrm{I}_a^\mu \varphi(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{1-\mu}}\, d\xi, \qquad \mu>0, \quad t>a, \tag{1.7.3.1}$$

где $\Gamma(\mu)=\int_0^\infty \xi^{\mu-1}e^{-\xi}d\xi$ — гамма-функция, называется *дробным интегралом Римана — Лиувилля* или *интегралом дробного порядка* μ. Оператор I_a^μ называется *оператором дробного интегрирования*.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$\mathrm{I}_a^\mu\, \mathrm{I}_a^\beta \varphi(t) = \mathrm{I}_a^{\mu+\beta}\varphi(t), \qquad \mu>0, \quad \beta>0.$$

Определение дробных производных. Дробное дифференцирование естественно вводить как операцию обратную к дробному интегрированию. Для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[a,b]$, выражение

$$\mathrm{D}_a^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^\mu}\, d\xi \tag{1.7.3.2}$$

называется *дробной производной Римана — Лиувилля* или *дробной производной порядка* μ. Здесь предполагается что $0<\mu<1$.

Отметим, что дробный интеграл определен для любого порядка $\mu>0$, однако дробная производная пока определена только для $0<\mu<1$.

Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то для вычисления дробной производной (1.7.3.2) можно использовать формулу

$$\mathrm{D}_a^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{f(a)}{(t-a)^\mu} + \int_a^t \frac{f'_\xi(\xi)}{(t-\xi)^\mu}\, d\xi \right].$$

Перейдем теперь к определению дробной производной порядка $\mu \geqslant 1$. Будем использовать следующие обозначения: $[\mu]$ — целая часть вещественного числа μ, а $\{\mu\}$ — дробная часть μ, $0 \leqslant \{\mu\} < 1$, так что

$$\mu = [\mu] + \{\mu\}.$$

Если μ — целое число, то под дробной производной порядка μ будет подразумеваться обычная классическая производная

$$\mathrm{D}_a^\mu = \left(\frac{d}{dt}\right)^\mu, \qquad \mu = 1, 2, \ldots\,.$$

Если μ не является целым числом, то дробная производная $\mathrm{D}_a^\mu f$ определяется так:

$$\mathrm{D}_a^\mu f(t) \equiv \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\mu]} \mathrm{D}_a^{\{\mu\}} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\mu]+1} \mathrm{I}_a^{1-\{\mu\}} f(t),$$

Таким образом, при $\mu > 0$ имеет место формула

$$\mathrm{D}_a^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\mu-n+1}}\,d\xi, \qquad n = [\mu]+1. \tag{1.7.3.3}$$

Достаточные условия существования дробных производных (1.7.3.3) обсуждаются в [186, 214, 247, 270, 280, 334].

Операторы D_a^μ, входящие в формулы (1.7.3.2) и (1.7.3.3), называются *операторами дробного дифференцирования*.

Основные свойства дробных интегралов и дробных производных. Свойства линейности дробных операторов:

$$\begin{gathered}\mathrm{I}_a^\mu[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 \mathrm{I}_a^\mu f_1(t) + C_2 \mathrm{I}_a^\mu f_2(t),\\ \mathrm{D}_a^\mu[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 \mathrm{D}_a^\mu f_1(t) + C_2 \mathrm{D}_a^\mu f_2(t),\end{gathered}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции, которые имеют дробную производные порядка μ.

При $\mu > 0$ для любой интегрируемой функции $\varphi(t)$ справедливо соотношение

$$\mathrm{D}_a^\mu\, \mathrm{I}_a^\mu \varphi(t) = \varphi(t). \tag{1.7.3.4}$$

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет интегрируемую производную $\mathrm{D}_a^\mu f(t)$. Тогда имеет место формула

$$\mathrm{I}_a^\mu \mathrm{D}_a^\mu f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu-k)} f_{n-\mu}^{(n-k-1)}(a),$$

где $n = [\mu]+1$ и $f_{n-\mu}(t) = \mathrm{I}_a^{n-\mu} f(t)$. В частности, при $0 < \mu < 1$ получим

$$\mathrm{I}_a^\mu\, \mathrm{D}_a^\mu f(t) = f(t) - \frac{f_{1-\mu}(a)}{\Gamma(\mu)}(t-a)^{\mu-1}. \tag{1.7.3.5}$$

Для степенной функции t^λ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0^\mu t^\lambda &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} t^{\lambda+\mu}, \quad \mu > 0,\ \lambda > -1,\ t > 0;\\ \mathrm{D}_0^\mu t^\lambda &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} t^{\lambda-\mu}, \quad 0 < \mu \leqslant 1,\ \lambda \notin \mathbb{Z},\ t > 0.\end{aligned} \tag{1.7.3.6}$$

Из второй формулы (1.7.3.6) видно, что дробное дифференцирование константы приводит к степенной функции, пропорциональной $t^{-\mu}$, а не к нулю, как при обычном дифференцировании.

Таблица дробных производных некоторых элементарных функций приведена в [77]. Следует отметить, что дробные производные экспоненциальной и простейших тригонометрических функций не являются элементарными функциями.

Замечание 1.40. *Существуют и другие определения дробных производных [186, 214, 247, 270, 334]. В приложениях, например, нередко используется дробная производная Капуто, которая определяется формулой [109]:*

$$\mathrm{D}_a^\mu f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\mu)} \displaystyle\int_a^t \dfrac{f_\xi^{(n)}(\xi)}{(t-\xi)^{\mu-n+1}}\, d\xi & \text{при } n-1<\mu<n, \\ f_t^{(n)}(t) & \text{при } \mu = n, \quad n\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.7.3.7}$$

Линейное дробное диффузионное уравнение. Для моделирования аномальных диффузионных процессов иногда используют дробное диффузионное уравнение вида

$$u_t^{(\mu)} = au_{xx}, \quad 0<\mu<1, \tag{1.7.3.8}$$

которое описывает медленную линейную диффузию (субдиффузию). Член в левой части уравнения (1.7.3.8) обозначает дробную производную $\mathrm{D}_0^\mu u$ по переменной t (такое обозначение совпадает со стандартным обозначением частных производных при целых значениях μ).

В [255] была дана физическая интерпретация уравнения (1.7.3.8) для $\mu = 1/2$ в рамках перколяционной (гребешковой) модели. О связи показателя μ с фрактальной размерностью Хаусдорфа рассматриваемой математической модели диффузии см. [169, 245]. Теоретические обоснования дробных кинетических уравнений диффузии, уравнений диффузии-адвекции и уравнений типа Фоккера — Планка приведены в [246]. В [234–236] для исследования решений дробного линейного уравнения (1.7.3.8) применялось преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по пространственной переменной (см. также [170]).

Нелинейные дробные диффузионные уравнения. В последнее время появилось достаточно много публикаций, в которых исследуются симметрии и строятся точные решения нелинейных УрЧП, содержащих дробные производные (см., например, [122, 123, 167, 254, 328, 330–332]). Поскольку D_0^μ является линейным оператором по t, то сохраняют силу приведенные в разд. 1.6.2 утверждения 2 и 3 относительно уравнений (1.6.2.1) и (1.6.2.11), в которых линейные операторы L_i (все или некоторые из них) могут быть операторами дробного дифференцирования.

Продемонстрируем как метод инвариантных подпространств можно использовать для построения точных решений нелинейных УрЧП с дробной производной.

► Пример 1.52. Рассмотрим нелинейное уравнение диффузии с дробной производной по времени

$$u_t^{(\mu)} = [(au+b)u_x]_x. \tag{1.7.3.9}$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (1.7.2.1) при $L[u] = u_t^{(\mu)}$ и $c = 0$. Поэтому для построения его точных решений можно использовать формулы и промежуточные уравнения, полученные в примере 1.51.

Учитывая сказанное, можно утверждать, что уравнение (1.7.3.9) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных в виде квадратичного многочлена по x вида (1.7.2.2), где функциональные коэффициенты $\psi_i = \psi_i(t)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной:

$$\begin{aligned}(\psi_1)_t^{(\mu)} &= 2(a\psi_1 + b)\psi_3 + a\psi_2^2,\\ (\psi_2)_t^{(\mu)} &= 6a\psi_2\psi_3,\\ (\psi_3)_t^{(\mu)} &= 6a\psi_3^2.\end{aligned} \tag{1.7.3.10}$$

Решение системы (1.7.3.10) ищем в виде

$$\psi_1 = \theta + \tfrac{1}{4}B^2\psi_3, \quad \psi_2 = B\psi_3, \tag{1.7.3.11}$$

где B — произвольная постоянная. В результате получим линейное неоднородное уравнение для функции $\theta = \theta(t)$:

$$\theta_t^{(\mu)} = 2a\psi_3\theta + 2b\psi_3. \tag{1.7.3.12}$$

Решение третьего уравнения (1.7.3.10) ищем виде степенной функции $\psi_3 = pt^\lambda$. Используя вторую формулу (1.7.3.6), находим

$$\psi_3 = \frac{\Gamma(1-\mu)}{6a\,\Gamma(1-2\mu)}t^{-\mu}, \quad \mu \neq \frac{1}{2}. \tag{1.7.3.13}$$

Подставив (1.7.3.13) в уравнение (1.7.3.12), ищем его решение в виде

$$\theta = Ct^k + m, \tag{1.7.3.14}$$

где C — произвольная постоянная. После несложных вычислений, имеем

$$m = \frac{b}{a}\biggl(\frac{3\,\Gamma(1-2\mu)}{\Gamma^2(1-\mu)} - 1\biggr)^{-1}, \tag{1.7.3.15}$$

а для определения k приходим к трансцендентному уравнению

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\mu+1)} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{3\,\Gamma(1-2\mu)}. \tag{1.7.3.16}$$

Формулы (1.7.2.2), (1.7.3.11), (1.7.3.13), (1.7.3.14) и трансцендентное уравнение (1.7.3.16) определяют точное решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения диффузии с дробной производной (1.7.3.9). ◄

1.7.4. Псевдодифференциальные уравнения

1°. Пусть $f = f(x)$ — функция, представимая в виде конечного или бесконечного степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n. \tag{1.7.4.1}$$

Для простоты будем считать, что радиус сходимости этого ряда бесконечно большой.

Функции (1.7.4.1) поставим в соответствие линейный дифференциальный оператор:

$$f(\mathrm{D}_x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (\mathrm{D}_x)^n, \qquad \mathrm{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{1.7.4.2}$$

Такие операторы называются *псевдодифференциальными* [143] и обладают свойствами

$$\begin{gathered} f(\mathrm{D}_x)(C_1 u_1 + C_2 u_2) = C_1 f(\mathrm{D}_x) u_1 + C_2 f(\mathrm{D}_x) u_2, \\ [f_1(\mathrm{D}_x) + f_2(\mathrm{D}_x)] u = f_1(\mathrm{D}_x) u + f_2(\mathrm{D}_x) u, \end{gathered}$$

где u_1, u_2, u — произвольные функции.

Отметим также полезные свойства

$$(\mathrm{D}_x)^n E = \lambda^n E, \quad f(\mathrm{D}_x) E = f(\lambda) E, \quad \text{где} \quad E = e^{\lambda x},$$

которые потребуются ниже.

Далее рассмотрим несколько нелинейных дифференциальных уравнений с оператором (1.7.4.2).

2°. Покажем, что нелинейное «параболическое» уравнение

$$u_t = f(\mathrm{D}_x)(u^2) + a u^2 + b u + c \tag{1.7.4.3}$$

допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \varphi(t) + e^{\lambda x} \psi(t). \tag{1.7.4.4}$$

Это утверждение доказывается следующим образом. С учетом представления (1.7.4.2) и формулы (1.7.4.4) имеем

$$\begin{aligned} u^2 &= \varphi^2 + 2\varphi\psi E + \psi^2 E^2, \quad E = e^{\lambda x}, \\ f(\mathrm{D}_x)(u^2) &= \beta_0 \varphi^2 + 2\varphi\psi E \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \lambda^n + \psi^2 E^2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (2\lambda)^n = \\ &= \beta_0 \varphi^2 + 2 f(\lambda) \varphi\psi E + f(2\lambda) \psi^2 E^2, \quad \beta_0 = f(0). \end{aligned} \tag{1.7.4.5}$$

Подставляя (1.7.4.4) в уравнение (1.7.4.3) и учитывая формулы (1.7.4.5), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_t' &= [a + f(0)]\varphi^2 + b\varphi + c, \\ \psi_t' &= 2[a + f(\lambda)]\varphi\psi + b\psi, \end{aligned} \tag{1.7.4.6}$$

и трансцендентному уравнению для постоянной λ:

$$f(2\lambda) + a = 0. \tag{1.7.4.7}$$

Замечание 1.41. *Уравнение (1.7.4.3) и аналогичные уравнения, рассматриваемые ниже, называются нелинейными псевдодифференциальными уравнениями.*

Замечание 1.42. *Трансцендентное уравнение (1.7.4.7) может иметь более одного корня или не иметь корней вовсе.*

► Пример 1.53. Рассмотрим уравнение

$$u_t = \cos(\sigma \mathrm{D}_x)(u^2) + au^2 + bu + c, \tag{1.7.4.8}$$

которое имеет точное решение вида (1.7.4.4), где функции φ_1 и φ_2 описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7.4.6), причем $f(0) = 1$ и $f(\lambda) = \cos(\sigma\lambda)$, а постоянная λ находится из трансцендентного уравнения

$$\cos(2\sigma\lambda) + a = 0. \tag{1.7.4.9}$$

При $-1 \leqslant a \leqslant 1$ уравнение (1.7.4.9) имеет бесконечное множество вещественных корней (в частности, при $a = 0$ имеем $\lambda = \frac{1}{2\sigma}(\frac{\pi}{2} + \pi m)$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которые порождают бесконечное множество точных решений вида (1.7.4.4). При $|a| > 1$ уравнение (1.7.4.9) не имеет вещественных корней, а следовательно, уравнение (1.7.4.8) не имеет вещественных точных решений вида (1.7.4.4). ◄

Аналогичным образом можно показать, что уравнение (1.7.4.3) допускает более сложные решения вида

$$u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)e^{\lambda x} + \varphi_3(t)e^{-\lambda x} \tag{1.7.4.10}$$

при условии, что вещественная константа $\lambda \neq 0$ одновременно удовлетворяет двум трансцендентным уравнениям:

$$f(2\lambda) + a = 0, \quad f(-2\lambda) + a = 0. \tag{1.7.4.11}$$

В этом случае функции $\varphi_m = \varphi_m(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= [a + f(0)](\varphi_1^2 + 2\varphi_2\varphi_3) + b\varphi_1 + c, \\ \varphi_2' &= [a + f(\lambda)]\varphi_1\varphi_2 + b\varphi_2, \\ \varphi_3' &= [a + f(-\lambda)]\varphi_1\varphi_3 + b\varphi_3. \end{aligned} \tag{1.7.4.12}$$

Переопределенная система уравнений(1.7.4.11) во многих случаях приводится к одному уравнению, два из которых указаны ниже:

(a) a — любое число, а функция $f(x)$ — четная: $f(x) = f(-x)$. В этом случай, переопределенная система приводится к одному уравнению (1.7.4.7), а из последних двух уравнений в (1.7.4.12) следует что $\varphi_2 = C\varphi_3$, где C — произвольная постоянная.

(b) $a = 0$, а функция $f(x)$—нечетная, $f(x) = -f(-x)$.

► Пример 1.54. Снова рассмотрим уравнение (1.7.4.8), которое задается четной функцией $f(x) = \cos(\sigma x)$, $\sigma = \mathrm{const}$, и, следовательно, соответствует случаю (a). Поэтому уравнение допускает точное решение

$$u = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}),$$

где постоянная λ определяется путем решения трансцендентного уравнения (1.7.4.9) (здесь была учтено, что $\varphi_3/\varphi_2 = \mathrm{const}$). Как и в примере 1.53, при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ существует бесконечное множество вещественных корней λ, которые порождают бесконечно много точных решений указанного вида. ◀

Пусть $f(x)$ — четная функция, которая соответствует случаю (a), а уравнение (1.7.4.7) имеет чисто мнимый корень $\lambda = ik$, где $i^2 = -1$, а k — вещественное число. Тогда уравнение (1.7.4.3) допускает решение, содержащее тригонометрические функции:

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(kx) + \psi_3(t)\sin(kx), \qquad (1.7.4.13)$$

где $\psi_m = \psi_m(t)$ описываются системой ОДУ:

$$\begin{aligned} &\psi_1' = [a + f(0)][\psi_1^2 + \tfrac{1}{2}(\psi_2^2 + \psi_3^2)] + b\psi_1 + c,\\ &\psi_2' = [a + f(ik)]\psi_1\psi_2 + b\psi_2,\\ &\psi_3' = [a + f(ik)]\psi_1\psi_3 + b\psi_3. \end{aligned} \qquad (1.7.4.14)$$

Этот факт можно доказать путем подстановки соотношений

$$e^{\lambda x} = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx), \quad e^{-\lambda x} = e^{-ikx} = \cos(kx) - i\sin(kx),$$
$$\varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_2 = \frac{\psi_2 - i\psi_3}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\psi_2 + i\psi_3}{2}$$

в решение (1.7.4.10) и уравнения (1.7.4.12) с последующим выделением вещественной и мнимой частей. Следует отметить, что $f(ik) = f(-ik)$ — действительное число, а последнее уравнение в (1.7.4.14) можно заменить более простым уравнением $\varphi_2 = C\varphi_3$, где C — произвольная постоянная.

► Пример 1.55. Рассмотрим уравнение (1.7.4.8), которое задается четной функцией $f(x) = \cos(\sigma x)$ и соответствует случаю $a < -1$. Трансцендентное уравнение (1.7.4.9) имеет два чисто мнимых корня $\lambda = \pm ik$, где действительное число k определяется из уравнения $\operatorname{ch}(k) = -a$. Следовательно, уравнение (1.7.4.8) имеет единственное решение вида (1.7.4.13), а оба корня $\lambda = \pm ik$ порождают одинаковые решения. ◀

► Пример 1.56. Аналогичным образом можно показать, что уравнение

$$u_t = f(\mathrm{D}_x)(u^2) + g(\mathrm{D}_x)u \qquad (1.7.4.15)$$

имеет точное решение вида (1.7.4.4), где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi_t' = f(0)\varphi^2 + g(0)\varphi,\\ &\psi_t' = 2f(\lambda)\varphi\psi + g(\lambda)\psi, \end{aligned} \qquad (1.7.4.16)$$

а константа λ определяется из трансцендентного уравнения

$$f(2\lambda) = 0.$$ ◀

3°. Более сложное уравнение

$$u_t = f(\mathrm{D}_x)u\, g(\mathrm{D}_x)u + h(\mathrm{D}_x)u, \tag{1.7.4.17}$$

где $f(\mathrm{D})u\, g(\mathrm{D})u$ обозначает произведение функций $f(\mathrm{D}_x)u$ и $g(\mathrm{D}_x)u$, также допускает точное решение вида (1.7.4.4), где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi' = f(0)g(0)\varphi^2 + h(0)\varphi,\\ &\psi' = [f(0)g(\lambda) + g(0)f(\lambda)]\varphi\psi + h(\lambda)\psi, \end{aligned} \tag{1.7.4.18}$$

а параметр λ удовлетворяет любому из двух трансцендентных уравнений

$$f(\lambda) = 0 \quad \text{или} \quad g(\lambda) = 0.$$

4°. Вместо «параболических» уравнений (1.7.4.3), (1.7.4.15), (1.7.4.17), можно рассматривать соответствующие «гиперболические» уравнения, в которых первая производная u_t заменена на вторую производную u_{tt}. В качества примера рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = f(\mathrm{D}_x)(u^2) + au^2 + bu + c, \tag{1.7.4.19}$$

параболическим аналогом которого является уравнение (1.7.4.3).

Уравнение (1.7.4.19) имеет решение вида (1.7.4.4), где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7.4.6), в которой первые производные φ'_t и ψ'_t надо заменить на вторые производные φ''_{tt} и ψ''_{tt} соответственно, а для параметра λ остается справедливым уравнение (1.7.4.7). То же самое относится и к решениям (1.7.4.10) и (1.7.4.13); при этом в системах (1.7.4.12) и (1.7.4.14) первые производные необходимо заменить соответствующими вторыми производными, а уравнения для λ не меняются.

5°. Нелинейные уравнения вида

$$f(\mathrm{D}_t)u = g(\mathrm{D}_x)(u^p)$$

допускают решения в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(t)\psi^{1/p}(x).$$

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f(\mathrm{D}_t)\varphi = C\varphi^p, \quad g(\mathrm{D}_x)\psi = C\psi^{1/p}.$$

2. Методы функционального разделения переменных

2.1. Предварительные замечания

2.1.1. Структура решений с функциональным разделением переменных

1°. Нелинейные уравнения, полученные заменой $u = U(z)$ из линейных уравнений математической физики с разделяющимися переменными для функции $z = z(x,t)$, будут иметь точные решения вида

$$u(x,t) = U(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(t). \tag{2.1.1.1}$$

Многие нелинейные уравнения с частными производными, которые не сводятся к линейным, также имеют точные решения вида (2.1.1.1). Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных*. В общем случае функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(t)$, $U(z)$ в (2.1.1.1) заранее неизвестны и подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Функцию U будем называть *внешней функцией*, а φ_m и ψ_m — *внутренними функциями*.

Замечание 2.1. *Решение с обобщенным разделением переменных (см. главу 1) является решением с функциональным разделением переменных частного вида, соответствующим случаю $U(z) = z$. Наличие внешней функции U в (2.1.1.1), которую требуется найти, является осложняющим фактором при построении точных решений с функциональным разделением переменных.*

Основная идея, которая лежит в основе метода функционального разделения переменных, заключается в следующем: дифференциально-функциональное уравнение, полученное в результате подстановки выражения (2.1.1.1) в рассматриваемое уравнение с частными производными, надо постараться свести к стандартному билинейному функциональному уравнению (1.5.1.1) из разд. 1.5.1 (или к дифференциально-функциональному уравнению (1.2.2.1) — (1.2.2.2) из разд. 1.2.2).

2°. Часто (в узком смысле) термин *уравнение с функциональным разделением переменных* используется для более простых точных решений вида (см., например, [3, 48, 141, 176, 205, 248, 249, 376]):

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(t), \tag{2.1.1.2}$$

где все три функции $U(z)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ являются искомыми. При построении решений (2.1.1.2) считается, что $\varphi \neq \text{const}$ и $\psi \neq \text{const}$.

Замечание 2.2. *При функциональном разделении переменных поиск решений простейшего вида $u = U(\varphi(x) + \psi(t))$ и $u = U(\varphi(x)\psi(t))$ приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление $U(\varphi(x)\psi(t)) = U_1(\varphi_1(x) + \psi_1(t))$, где $U_1(z) = U(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(t) = \ln\psi(t)$.*

3°. В случае линейных функций $\varphi(x) = \kappa x$ и $\psi(t) = \lambda t$, где κ и λ — константы, решение (2.1.1.2) принимает вид [48, 174, 197, 287]:

$$u = U(z), \qquad z = \kappa x + \lambda t, \tag{2.1.1.3}$$

и называется *решением типа бегущей волны*. Уравнения с частными производными, которые не зависят явно от независимых переменных x и t, вида

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \tag{2.1.1.4}$$

как правило, имеют решения типа бегущей волны (2.1.1.3), где κ и λ — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F(U, \kappa U'_z, \lambda U'_z, \kappa^2 U''_{zz}, \kappa\lambda U''_{zz}, \lambda^2 U''_{zz}, \dots) = 0. \tag{2.1.1.5}$$

Замечание 2.3. *Иногда (весьма редко) встречаются уравнения вида (2.1.1.4), которые не имеют решений типа бегущей волны (2.1.1.3). В таких случаях левая часть уравнения (2.1.1.5) при любых κ и λ будет отлична от нуля.*

► Пример 2.1. Неоднородное уравнение Монжа—Ампера

$$u_{xt}^2 - u_{xx}u_{tt} + 1 = 0,$$

которое является уравнением вида (2.1.1.4), не имеет решений типа бегущей волны, поскольку подстановка выражения (2.1.1.3) в рассматриваемое уравнение приводит к неверному равенству $1 = 0$. ◄

► Пример 2.2. Легко проверить, что нелинейное уравнение вида (2.1.1.4):

$$u_x^2 u_{tt} - u_t^2 u_{xx} + a = 0$$

при $a \neq 0$ также не имеет решений типа бегущей волны. ◄

4°. Иногда используется неявное представление решений с функциональным разделением переменных вида

$$Z(u) = \varphi(x) + \psi(t), \tag{2.1.1.6}$$

где функции $Z(u)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего исследования (см., например, [189, 205, 322, 374]).

Более общее, чем (2.1.1.6), представление решений с функциональным разделением переменных в неявной форме, которое применялось в [44, 273, 274], будет описано далее в разд. 2.5.

5°. В общем случае термин *решение с функциональным разделением переменных* в отношении нелинейных УрЧП с двумя независимыми переменными используется для точных решений, которые можно представить в виде нелинейной суперпозиции [42, 278, 309]:

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x, t), \tag{2.1.1.7}$$

где искомые функции $U(z)$ и $\varphi(x, t)$ описываются соответственно *переопределенным системами ОДУ и УрЧП*. В простейших случаях каждая из этих функций может удовлетворять одну уравнению.

Метод поиска решений с функциональным разделением переменных вида (2.1.1.7) излагается в разд. 2.6.

В разд. 2.7 описан также более эффективный метод, который основан на построении точных решений в неявной форме

$$\vartheta = \int \zeta(u)\, du,$$

где функции $\vartheta = \vartheta(x, t)$ и $\zeta = \zeta(u)$ определяются в ходе дальнейшего анализа с помощью обобщенного принципа расщепления.

2.1.2. Прямое и непрямое функциональное разделение переменных

Необходимо различать *прямое и непрямое функциональное разделение переменных*, которые основаны на одинаковом представлении решений в виде (2.1.1.1) (или (2.1.1.2), или (2.1.1.6), или (2.1.1.7)). На первом этапе прямого функционального разделения переменных, используемое представление решения подставляется в рассматриваемое УрЧП, после чего анализируется полученное функционально-дифференциальное уравнение (см., например, [42, 272–275, 287]). На первом этапе непрямого функционального разделения переменных, используемое представление решения заменяется одной или несколькими эквивалентными дифференциальными связями*, а затем состоящая из рассматриваемого уравнения и дифференциальных связей переопределенная система УрЧП исследуется на совместность (см., например, [189, 205, 277, 318]).

В данной главе будут применяться прямые методы построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые основаны на прямом функциональном разделении переменных. Эти методы приводят к меньшему числу промежуточных выкладок и технически проще, чем непрямые методы, базирующиеся на использовании эквивалентных дифференциальных связей.

*Любое дифференциальное уравнение, зависящее от тех же переменных, что и рассматриваемое УрЧП, может рассматриваться, как дифференциальная связь. Подробности см. в главе 4.

Замечание 2.4. *В разд. 4.5.3 будут обсуждаться дифференциальные связи, эквивалентные решениям с функциональным разделением переменных. Там же будет проведено сопоставление эффективности прямых и непрямых методов построения точных решений с функциональным разделением переменных.*

2.2. Упрощенный метод построения решений с функциональным разделением переменных

2.2.1. Описание упрощенного метода, основанного на преобразованиях искомой функции

В ряде случаев поиск решения в виде (2.1.1.1) удается провести в два этапа. Сначала используется преобразование, сводящее исходное уравнение к уравнению с квадратичной (иногда степенно́й) нелинейностью. Затем решение полученного уравнения ищется методами, описанными в разд. 1.3 — 1.6.

К сожалению, нет регулярных методов сведения УрЧП заданного вида к УрЧП с квадратичной нелинейностью. Уравнения с квадратичной нелинейностью иногда удается получить с помощью преобразований искомой функции вида $u = U(z)$. Наиболее распространенные преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} &u = z^{\lambda} && \text{(для уравнений со степенной нелинейностью)},\\ &u = \lambda \ln z && \text{(для уравнений с экспоненциальной нелинейностью)},\\ &u = e^{\lambda z} && \text{(для уравнений с логарифмической нелинейностью)}, \end{aligned}$$

где λ — постоянная, подлежащая определению. Указанный подход эквивалентен априорному заданию вида внешней функции $U(z)$ в выражении (2.1.1.1); успех его реализации в основном зависит от опыта и интуиции исследователя.

Много нелинейных уравнений математической физики различного типа, сводящихся с помощью подходящих преобразований к уравнениям с квадратичной нелинейностью, описаны в [12, 47, 157, 159, 161–163, 286, 287]. Некоторые результаты этих работ описаны в следующем разделе.

2.2.2. Примеры построения точных решений нелинейных уравнений

Ниже приведены примеры использования упрощенного метода построения точных решений с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений с частными производными второго порядка.

► Пример 2.3. Рассмотрим пятипараметрическое семейство нелинейных уравнений теплопроводности с источником степенного вида

$$u_t = a(u^n u_x)_x + bu^{n+1} + cu + ku^{1-n}, \tag{2.2.2.1}$$

где a, b, c, k, n — свободные параметры. Подстановка $z = u^n$ преобразует (2.2.2.1) к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = azz_{xx} + \frac{a}{n}z_x^2 + bnz^2 + cnz + kn. \tag{2.2.2.2}$$

Это уравнение допускает различные решения с обобщенным разделением переменных, вид которых зависит от коэффициентов нелинейных слагаемых в правой части (2.2.2.2). Решения уравнения (2.2.2.2) нетрудно найти, используя табл. 1.3 (см. строки 3 — 6). В частности, при выполнении неравенства $ab(n+1) > 0$ будут решения с тригонометрическими функциями, а при $ab(n+1) < 0$ — решения с экспоненциальными функциями. См. также табл. 2.1.

Указанный способ позволяет получить решения вида

$$\begin{aligned} u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/n} \quad \text{при } ab(n+1) > 0, \\ u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1\operatorname{ch}(\beta x) + C_2\operatorname{sh}(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/n} \quad \text{при } ab(n+1) < 0. \end{aligned} \tag{2.2.2.3}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$\beta = \sqrt{\frac{|b|n^2}{|a(n+1)|}},$$

а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \frac{bn(n+2)}{n+1}\varphi\psi + cn\varphi, \\ \psi'_t &= n(b\psi^2 + c\psi + k) + \frac{bn}{n+1}(C_1^2 \pm C_2^2)\varphi^2. \end{aligned} \tag{2.2.2.4}$$

Верхний знак во втором уравнении соответствует первому решению (2.2.2.3), а нижний знак — второму решению (2.2.2.3).

При $C_1 = C_2$ последнему уравнению (2.2.2.4) (с нижним знаком) можно удовлетворить, если положить $\psi = \text{const}$, где ψ — корень квадратного уравнения $b\psi^2 + c\psi + k = 0$. В этом случае общее решение первого уравнения (2.2.2.4) определяется формулой

$$\varphi = C_3\exp\Bigl[\Bigl(\frac{bn(n+2)}{n+1}\psi + cn\Bigr)t\Bigr],$$

где C_3 — произвольная постоянная. ◄

► Пример 2.4. Рассмотрим теперь пятипараметрическое семейство нелинейных уравнений теплопроводности с источником экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{\lambda u} + c + ke^{-\lambda u}. \tag{2.2.2.5}$$

Замена $z = e^{\lambda u}$ приводит (2.2.2.5) к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = azz_{xx} + b\lambda z^2 + c\lambda z + k\lambda. \tag{2.2.2.6}$$

Решения уравнения (2.2.2.6) можно найти с помощью табл. 1.3 (см. строку 3), при использовании которой надо учесть, что последние два члена в правой части (2.2.2.6) не влияют на структуру решения. Видно, что при выполнении неравенства $ab\lambda > 0$ уравнение (2.2.2.6) имеет решение с тригонометрическими функциями, при $ab\lambda < 0$ — решение с экспоненциальными функциями, а при $b = 0$ решение представляет собой квадратичный многочлен по переменной x (см. также табл. 2.1).

Указанной заменой, в частности, можно найти следующие точные решения с функциональным разделением переменных уравнения (2.2.2.1) [12]:

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{\alpha t}\bigl[C_1\cos(x\sqrt{\beta}\,) + C_2\sin(x\sqrt{\beta}\,)\bigr] + \gamma\bigr\} \quad \text{при} \ \ ab\lambda > 0,$$
$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{\alpha t}\bigl[C_1\operatorname{ch}(x\sqrt{-\beta}\,) + C_2\operatorname{sh}(x\sqrt{-\beta}\,)\bigr] + \gamma\bigr\} \quad \text{при} \ \ ab\lambda < 0.$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а

$$\alpha = \lambda(b\gamma + c), \qquad \beta = b\lambda/a,$$

где $\gamma = \gamma_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $b\gamma^2 + c\gamma + k = 0$. ◀

► Пример 2.5. Нелинейное четырехпараметрическое уравнение теплопроводности с источником логарифмического типа

$$u_t = au_{xx} + bu\ln^2 u + cu\ln u + ku \qquad (2.2.2.7)$$

заменой $u = e^z$ сводится к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = az_{xx} + az_x^2 + bz^2 + cz + k. \qquad (2.2.2.8)$$

Решения уравнения (2.2.2.8) можно найти с помощью табл. 1.3 (см. уравнения №№ 1 и 2). Видно, что при выполнении неравенства $ab > 0$ уравнение (2.2.2.8) имеет решение с тригонометрическими функциями, при $ab < 0$ — решение с экспоненциальными функциями. При $b = 0$ это уравнение допускает точное решение с обобщенным разделением переменных в виде квадратичного многочлена по пространственной переменной

$$z = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)x + \psi_3(t),$$

где функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_1' = 4a\psi_1^2 + c\psi_1,$$
$$\psi_2' = 4a\psi_1\psi_2 + c\psi_2,$$
$$\psi_3' = c\psi_3 + 2a\psi_1 + a\psi_2^2 + k.$$

Эти уравнения последовательно легко интегрируются. Первое уравнение интегрируется, поскольку является уравнением Бернулли [285]. Из сопоставления первого и второго уравнения следует, что $\psi_2 = C_1\psi_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Последнее уравнение является линейным уравнением относительно ψ_3 с известным (из решения первых двух уравнений) неоднородным членом.◀

В табл. 2.1 приведены примеры нелинейных уравнений теплопроводности со степенной, экспоненциальной и логарифмической нелинейностью, которые простой подстановкой вида $u = F(z)$ приводятся к уравнениям с квадратичной или кубической нелинейностью. Последнее УрЧП в таблице — уравнение теплопроводности гиперболического типа.

Таблица 2.1. Некоторые нелинейные уравнения теплопроводности, приводимые к уравнениям с квадратичной или кубической нелинейностью с помощью преобразований вида $u=F(z)$; константа σ выражается через коэффициенты исходного уравнения.

Исходное уравнение	Преобразование	Преобразованное уравнение	Вид решений для функции z
$u_t=a(u^n u_x)_x+bu$	$u=z^{1/n}$	$z_t=azz_{xx}+an^{-1}z_x^2+bnz$	$z=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$, $z=\varphi(t)x^2+\psi(t)x^{n/(n+1)}$
$u_t=a(u^n u_x)_x+bu+cu^{1-n}$	$u=z^{1/n}$	$z_t=azz_{xx}+an^{-1}z_x^2+bnz+cn$	$z=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$
$u_t=a(u^n u_x)_x+bu^{n+1}+cu$	$u=z^{1/n}$	$z_t=azz_{xx}+an^{-1}z_x^2+bnz^2+cnz$	$z=\varphi(t)e^{\sigma x}+\psi(t)e^{-\sigma x}+\chi(t)$, $z=\varphi(t)\sin(\sigma x)+\psi(t)\cos(\sigma x)+\chi(t)$
$u_t=a(u^{2n}u_x)_x+bu^{1-n}$	$u=z^{1/n}$	$z_t=az^2z_{xx}+a(1+n^{-1})zz_x^2+bn$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
$u_t=a(u^n u_x)_x+(bu^n+c)u_x$	$u=z^{1/n}$	$z_t=azz_{xx}+an^{-1}z_x^2+(bz+c)z_x$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
$u_t=a(u^{2n}u_x)_x+bu^n u_x$	$u=z^{1/n}$	$z_t=az^2z_{xx}+a(1+n^{-1})zz_x^2+bzz_x$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
$u_t=a(e^{\lambda u}u_x)_x+b+ce^{-\lambda u}$	$u=\lambda^{-1}\ln z$	$z_t=azz_{xx}+b\lambda z+c\lambda$	$z=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$
$u_t=a(e^{\lambda u}u_x)_x+be^{\lambda u}+c$	$u=\lambda^{-1}\ln z$	$z_t=azz_{xx}+bz^2+c\lambda z$	$z=\varphi(t)e^{\sigma x}+\psi(t)e^{-\sigma x}+\chi(t)$, $z=\varphi(t)\sin(\sigma x)+\psi(t)\cos(\sigma x)+\chi(t)$
$u_t=a(e^{2\lambda u}u_x)_x+b+ce^{-\lambda u}$	$u=\lambda^{-1}\ln z$	$z_t=az^2z_{xx}+azz_x^2+b\lambda z+c\lambda$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
$u_t=au_{xx}+bu\ln u+cu$	$u=e^z$	$z_t=az_{xx}+az_x^2+bz+c$	$z=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$
$u_t=au_{xx}+bu\ln^2 u+cu$	$u=e^z$	$z_t=az_{xx}+az_x^2+bz^2+c$	$z=\varphi(t)e^{\sigma x}+\psi(t)e^{-\sigma x}+\chi(t)$, $z=\varphi(t)\sin(\sigma x)+\psi(t)\cos(\sigma x)+\chi(t)$
$u_t=au_{xx}+b(\ln u)u_x+cu$	$u=e^z$	$z_t=az_{xx}+az_x^2+bzz_x+c$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
$u_t=[(a\ln u+b)u_x]_x+cu$	$u=e^z$	$z_t=(az+b)z_{xx}+(az+a+b)z_x^2+c$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
$u_{tt}+ku_t=au_{xx}+bu\ln u+cu$	$u=e^z$	$z_{tt}+z_t^2+kz=az_{xx}+az_x^2+bz+c$	$z=\varphi(x)+\psi(t)$

2.3. Решения с функциональным разделением переменных специального вида

2.3.1. Решения типа обобщенной бегущей волны и другие решения специального вида

Для упрощения анализа некоторые внутренние функции в (2.1.1.1) можно задавать априорно, а другие, включая внешнюю функцию U, определять в процессе решения. Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных специального вида*.

Ниже указаны наиболее простые решения с функциональным разделением переменных специального вида (x и t можно поменять местами):

$u = U(z), \quad z = \psi_1(t)x + \psi_2(t)$ (аргумент z линеен по x);

$u = U(z), \quad z = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)$ (аргумент z квадратичен по x);

$u = U(z), \quad z = \psi_1(t)e^{\lambda x} + \psi_2(t)$ (z содержит экспоненциальную функцию x).

Первое решение будем называть *решением типа обобщенной бегущей волны*; в частном случае $\psi_1(t) = k_1$, $\psi_2(t) = k_2 t$, где k_1 и k_2 — произвольные константы, это *решение типа бегущей волны*. В последней формуле вместо $e^{\lambda x}$ могут стоять также простейшие гиперболические и тригонометрические функции.

После подстановки любого из указанных выражений в рассматриваемое уравнение надо исключить x с помощью выражения для z. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами t и z. Его решение в ряде случаев можно получить при помощи методов, описанных в главе 1.

Для наглядности общая схема построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений изображена на рис. 2.1.

Замечание 2.5. *Алгоритм, изображенный на рис. 2.1, может использоваться также для построения точных решений более общего вида** $u = \sigma(t)F(z) + \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$, *где* $z = \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$. *Пример подобного решения рассмотрен далее в разд. 3.1.1 (пример 3.3).*

2.3.2. Примеры построения точных решений типа обобщенной бегущей волны

Рассмотрим примеры нелинейных уравнений, допускающих точные решения с функциональным разделением переменных частного вида, когда сложный аргумент z линеен или квадратичен по одной из независимых переменных.

► Пример 2.6. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a(u_{yy})^{n-1} u_{yyy}, \tag{2.3.2.1}$$

которое описывает пограничный слой степенно́й жидкости на плоской пластине. Здесь u — функция тока, x и y — декартовы координаты (x отсчитывается вдоль пластины), n — реологический параметр (значение $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости).

Точные решения этого уравнения ищем в виде обобщенной бегущей волны

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x)y + \psi(x). \tag{2.3.2.2}$$

*Указанный класс решений содержит в себе как частные случаи все наиболее распространенные решения: решения типа бегущей волны, автомодельные решения, обобщенные автомодельные решения, решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (а также многие инвариантные решения).

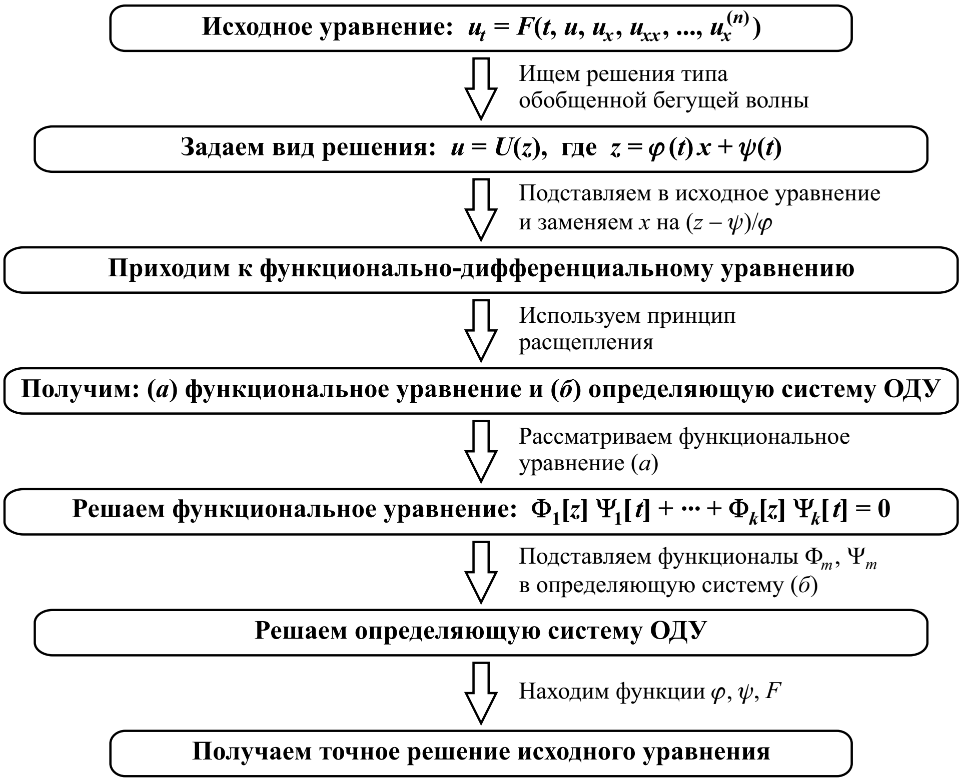

Рис. 2.1. Алгоритм построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений.

Подставив (2.3.2.2) в (2.3.2.1), получим уравнение $\varphi'_x(U'_z)^2 = a\varphi^{2n}(U''_{zz})^{n-1}U'''_{zzz}$, которое не зависит от функции ψ. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\varphi(x) = \begin{cases} (ax+C)^{1/(1-2n)} & \text{при } n \neq 1/2, \\ C\exp(ax/\lambda) & \text{при } n = 1/2, \end{cases} \qquad \psi(x) \ \text{— произвольная функция.}$$

Функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} (U'_z)^2 &= (1-2n)(U''_{zz})^{n-1}U'''_{zzz} && \text{при } n \neq 1/2, \\ (U'_z)^2 &= \lambda(U''_{zz})^{-1/2}U'''_{zzz} && \text{при } n = 1/2. \end{aligned}$$

Первое уравнение при $\frac{1}{2} < n < 2$ допускает точное решение степенного вида

$$U(z) = Az^{\frac{2n-1}{n-2}}, \quad A = \left[\frac{3(2-n)}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2-n}}\left[\frac{(2n-1)(n+1)}{(2-n)^2}\right]^{\frac{n}{2-n}}.$$ ◄

► Пример 2.7. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$u_t = u_{xx} + f(u). \qquad (2.3.2.3)$$

Ищем точные решения уравнения (2.3.2.3) в виде обобщенной бегущей волны*

$$u = u(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{2.3.2.4}$$

Требуется найти функции $u(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, а также последний член $f(u)$ в правой части уравнения.

Подставив выражение (2.3.2.4) в (2.3.2.3) и поделив на u'_z, имеем

$$\varphi'_t x + \psi'_t = \varphi^2 \frac{u''_{zz}}{u'_z} + \frac{f(u)}{u'_z}. \tag{2.3.2.5}$$

Выразив в (2.3.2.4) x через z, получим $x = (z-\psi)/\varphi$. Исключим с помощью этого выражения x в (2.3.2.5). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными t и z:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi} z + \varphi^2 \frac{u''_{zz}}{u'_z} + \frac{f(u)}{u'_z} = 0,$$

которое удобно представить в билинейном виде

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{2.3.2.6}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, \quad &&\Phi_2 = -\frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad &&\Phi_3 = \varphi^2, \quad &&\Phi_4 = 1,\\ &\Psi_1 = 1, &&\Psi_2 = z, &&\Psi_3 = \frac{u''_{zz}}{u'_z}, &&\Psi_4 = \frac{f(u)}{u'_z}. \end{aligned} \tag{2.3.2.7}$$

Подставив выражения (2.3.2.7) в формулы (1.5.2.7), которые тождественно удовлетворяют соотношению (2.3.2.6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t &= A_1\varphi^2 + A_2, \quad & -\frac{\varphi'_t}{\varphi} &= A_3\varphi^2 + A_4,\\ \frac{u''_{zz}}{u'_z} &= -A_1 - A_3 z, & \frac{f(u)}{u'_z} &= -A_2 - A_4 z, \end{aligned} \tag{2.3.2.8}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Случай 1. При $A_4 \neq 0$ решение системы (2.3.2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \pm\Bigl(C_1 e^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\Bigr)^{-1/2},\\ \psi(t) &= -\varphi(t)\biggl[A_1\int \varphi(t)\,dt + A_2\int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\biggr],\\ u(z) &= C_3\int \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\bigr)\,dz + C_4,\\ f(u) &= -C_3(A_4 z + A_2)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\bigr), \end{aligned} \tag{2.3.2.9}$$

*Здесь и далее, когда в рассматриваемое уравнение входит функция $f(u)$, которая ищется вместе с решением методом функционального разделения переменных, вместо $u = U(z)$ решение будем обозначать $u = u(z)$. Вид аргумента $z = z(x,t)$ может выбираться по-разному, см. разд. 2.1.1.

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Зависимость $f = f(u)$ задается двумя последними выражениями в параметрическом виде (z играет роль параметра). При $A_3 \neq 0$ функцию источника $f(u)$ в (2.3.2.9) можно выразить через элементарные функции и функцию, обратную интегралу вероятностей.

В частном случае $A_3 = C_4 = 0$, $A_1 = -1$, $C_3 = 1$ функцию источника можно представить в явном виде:

$$f(u) = -u(A_4 \ln u + A_2). \tag{2.3.2.10}$$

Решение уравнения (2.3.2.3) в этом случае можно получить также с помощью группового анализа [11].

Случай 2. При $A_4 = 0$, $A_3 \neq 0$ решения первых двух уравнений (2.3.2.8) имеют вид

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2A_3t + C_1}}, \qquad \psi(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2A_3t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3t + C_1), \tag{2.3.2.11}$$

а решения остальных уравнений описываются двумя последними формулами (2.3.2.9) при $A_4 = 0$.

При $A_4 = A_3 = 0$ решения первых двух уравнений (2.3.2.8) даются формулами

$$\varphi = C_1, \qquad \psi(t) = -(A_1C_1^2 + A_2)t + C_2, \tag{2.3.2.12}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. ◄

► Пример 2.8. Рассмотрим нелинейное уравнение конвективной теплопроводности с переменными коэффициентами и источником

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)f(u), \tag{2.3.2.13}$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — произвольные функции. Это уравнение переходит в уравнение (2.3.2.3) при $a = c = 1$, $b = 0$.

Решения ищем в виде (2.3.2.4). Рассуждая аналогично тому, как это делалось в примере 2.7, приходим с системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t + b\varphi = A_1a\varphi^2 + A_2c, \quad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3a\varphi^2 + A_4c, \\ \frac{u''_{zz}}{u'_z} = -A_1 - A_3z, \qquad \frac{f(u)}{u'_z} = -A_2 - A_4z. \end{gathered} \tag{2.3.2.14}$$

Видно, что по сравнению с системой (2.3.2.8) в системе (2.3.2.14) изменились только первые два уравнения для функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$. Несмотря на некоторое усложнение эти уравнения можно полностью проинтегрировать, поскольку второе уравнение является уравнением Бернулли, а первое уравнение линейно относительно функции ψ. В результате получим

$$\varphi(t) = \pm\left[C_1E(t) + 2A_3E(t)\int\frac{a(t)}{E(t)}\,dt\right]^{-1/2}, \qquad E(t) = \exp\left(2A_4\int c(t)\,dt\right),$$

$$\psi(t) = -\varphi(t)\left[A_1\int a(t)\varphi(t)\,dt + A_2\int\frac{c(t)}{\varphi(t)}\,dt - \int b(t)\,dt + C_2\right].$$

Функции $u(z)$ и $f(u)$, как и ранее, будут описываться двумя последними формулами (2.3.2.9). ◀

▶ Пример 2.9. Нелинейное уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом переноса и источником

$$u_t = [g(u)u_x]_x + f(u) \qquad (2.3.2.15)$$

также имеет решения вида (2.3.2.4). Искомые величины в этом случае описываются системой ОДУ:

$$\begin{gathered}
-\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' = A_1\varphi^2 + A_2, \quad -\frac{\varphi_t'}{\varphi} = A_3\varphi^2 + A_4,\\
\frac{[g(u)u_z']_z'}{u_z'} = -A_1 - A_3 z, \quad \frac{f(u)}{u_z'} = -A_2 - A_4 z.
\end{gathered} \qquad (2.3.2.16)$$

Видно, что по сравнению с системой (2.3.2.8) в системе (2.3.2.16) изменились только третье уравнение. Поэтому функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (2.3.2.9). Одна из двух функций $g(u)$ или $f(u)$ в уравнении (2.3.2.15) может быть задана произвольно, а другая находится из последних двух ОДУ (2.3.2.16).

В последние два уравнения (2.3.2.16) входят три неизвестные функции $f = f(u)$, $g = g(u)$, $u = u(z)$, поэтому одну из них можно задать произвольно. В дальнейшем будем считать, что зависимость $u = u(z)$ задана в неявном виде $z = Z(u)$, где функция $Z(u)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Используя соотношение $u_z' = 1/Z_u'$, из последних двух уравнений (2.3.2.16) можно получить формулы

$$\begin{aligned}
f(u) &= -[A_2 + A_4 Z(u)]\frac{1}{Z_u'(u)},\\
g(u) &= -\left[A_1 u + A_3\int Z(u)\,du + C\right]Z_u'(u),
\end{aligned} \qquad (2.3.2.17)$$

которые в параметрической форме задают допустимый вид функций $f = f(u)$ и $g = g(u)$, входящих в уравнение (2.3.2.15). Это уравнение имеет решение вида (2.3.2.4), где функция $u = u(z)$ задается неявно $z = Z(u)$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (2.3.2.9) (при $A_4 \neq 0$) или формулами (2.3.2.11) (при $A_4 = 0$, $A_3 \neq 0$) и (2.3.2.12) (при $A_4 = A_3 = 0$). Рассмотрим примеры использования формул (2.3.2.17).

1°. Положив в (2.3.2.17)

$$Z(u) = u^k, \quad A_1 = -\frac{a_1}{k}, \quad A_2 = -b_2 k, \quad A_3 = -\frac{a_2(k+1)}{k}, \quad A_4 = -b_1 k, \quad C = 0,$$

приходим к уравнению вида (2.3.2.15) со степенными нелинейностями

$$u_t = [(a_1 u^k + a_2 u^{2k})u_x]_x + b_1 u + b_2 u^{1-k},$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны (2.3.2.4) при $u(z) = z^{1/k}$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (2.3.2.9) (при $b_1 \neq 0$) или формулами (2.3.2.11) (при $b_1 = 0$, $a_2 \neq 0$) и (2.3.2.12) (при $b_1 = a_2 = 0$).

2°. Положив в (2.3.2.17)

$$Z(u) = e^{\lambda u}, \quad A_1 = -\frac{a_1}{\lambda}, \quad A_2 = -b_2\lambda, \quad A_3 = -a_2, \quad A_4 = -b_1\lambda, \quad C = 0,$$

получим уравнение вида (2.3.2.15) с экспоненциальными и экспоненциально-степенной нелинейностями

$$u_t = [(a_1 u e^{\lambda u} + a_2 e^{2\lambda u}) u_x]_x + b_1 + b_2 e^{-\lambda u},$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны (2.3.2.4) при $u(z) = (\ln u)/\lambda$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (2.3.2.9) (при $b_1 \neq 0$) или формулами (2.3.2.11) (при $b_1 = 0$, $a_2 \neq 0$) и (2.3.2.12) (при $b_1 = a_2 = 0$). ◀

▶ Пример 2.10. Аналогичным образом рассматривается нелинейное уравнение n-го порядка

$$u_t = u_x^{(n)} + f(u). \tag{2.3.2.18}$$

Как и ранее, решения ищем в виде обобщенной бегущей волны (2.3.2.4). Рассуждая также, как и в примере 2.7, приходим с системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} -\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' = A_1\varphi^n + A_2, \quad -\frac{\varphi_t'}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4, \\ \frac{u_z^{(n)}}{u_z'} = -A_1 - A_3 z, \quad \frac{f(u)}{u_z'} = -A_2 - A_4 z, \end{gathered} \tag{2.3.2.19}$$

При $A_4 \neq 0$ общее решение первых двух уравнений системы (2.3.2.19) имеет вид

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = \Big(C_1 e^{A_4 n t} - \frac{A_3}{A_4}\Big)^{-1/n}, \\ &\psi(t) = -\varphi(t)\Big[A_1\int \varphi^{n-1}(t)\,dt + A_2\int\frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\Big], \end{aligned} \tag{2.3.2.20}$$

При $A_4 \neq 0$ решение второго уравнения (2.3.2.19) дается формулой

$$\varphi(t) = (A_3 n t + C_1)^{-1/n};$$

подставив ее во вторую формулу (2.3.2.20) можно найти функцию $\psi(t)$. Рассмотрим некоторые уравнения вида (2.3.2.18) и их решения.

1°. Положив в последних двух ОДУ (2.3.2.19) $A_1 = -1$, $A_3 = 0$ и $u(z) = e^z$, приходим к уравнению с логарифмической нелинейностью

$$u_t = u_x^{(n)} - A_4 u \ln u - A_2 u,$$

которое имеет решение вида (2.3.2.4) при $u(z) = e^z$.

2°. Для нечетных $n = 2m+1$ ($m = 1, 2, \ldots$), положив $A_1 = (-1)^{m+1}$, $A_3 = 0$ и $u(z) = \sin z$, приходим к уравнению

$$u_t = u_x^{(2m+1)} - (A_2 + A_4 \arcsin u)\sqrt{1-u^2},$$

которое имеет решение вида (2.3.2.4) при $u(z) = \sin z$. ◀

► Пример 2.11. Для обобщенного уравнения Кортевега — де Фриза n-го порядка

$$u_t = u_x^{(n)} + f(u)u_x, \tag{2.3.2.21}$$

поиск точного решения вида (2.3.2.4) приводит к следующей системе уравнений для определения функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $u(z)$, $f(u)$:

$$\begin{gathered} -\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' = A_1\varphi^n + A_2\varphi, \quad -\frac{\varphi_t'}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4\varphi, \\ \frac{u_z^{(n)}}{u_z'} = -A_1 - A_3 z, \qquad f(u) = -A_2 - A_4 z. \end{gathered} \tag{2.3.2.22}$$

По сравнению с (2.3.2.19) в системе (2.3.2.22) изменились первые два уравнения и последнее уравнение. Первые два уравнения можно полностью проинтегрировать, поскольку второе уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, а первое уравнение линейно относительно функции ψ.

Далее рассмотрим случай $A_3 = 0$, когда можно представить в явном виде функцию $f(u)$. При $A_3 = 0$ общие решения первых двух уравнений (2.3.2.22) записываются так:

$$\varphi(t) = \frac{1}{A_4 t + C_1}, \qquad \psi(t) = \frac{A_1}{A_4(n-2)}(A_4 t + C_1)^{1-n} - \frac{A_2 t + C_2}{A_4 t + C_1}.$$

Приведем некоторые уравнения вида (2.3.2.21) и их решения.

1°. Положив в последних двух ОДУ (2.3.2.22) $A_1 = -1$, $A_3 = 0$ и $u(z) = e^z$, приходим к уравнению с логарифмической нелинейностью

$$u_t = u_x^{(n)} - (A_4 \ln u + A_2)u_x,$$

которое имеет решение вида (2.3.2.4) при $u(z) = e^z$.

2°. Для нечетных $n = 2m+1$ ($m = 1, 2, \ldots$), положив $A_1 = (-1)^{m+1}$, $A_3 = 0$ и $u(z) = \sin z$, приходим к уравнению

$$u_t = u_x^{(2m+1)} - (A_2 + A_4 \arcsin u)u_x,$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны (2.3.2.4) при $u(z) = \sin z$. ◄

► Пример 2.12. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^n \partial y} = f(u). \tag{2.3.2.23}$$

Ищем решение типа обобщенной бегущей волны

$$u = u(z), \qquad z = \varphi(y)x + \psi(y). \tag{2.3.2.24}$$

Подставим (2.3.2.24) в (2.3.2.23), а затем исключим x с помощью выражения для z. В результате после деления на $u_z^{(n+1)}$ и перегруппировки членов получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами:

$$\varphi^n\psi_y' - \varphi^{n-1}\psi\varphi_y' + \varphi^{n-1}\varphi_y'\left(z + n\frac{u_z^{(n)}}{u_z^{(n+1)}}\right) - \frac{f(u)}{u_z^{(n+1)}} = 0. \tag{2.3.2.25}$$

Оно сводится к трехчленному билинейному функциональному уравнению вида (1.5.2.4), которое имеет два решения (1.5.2.5) (см. разд. 1.5). В соответствии с этим рассмотрим два случая.

1°. В первом случае выражение в круглых скобках и последнюю дробь в (2.3.2.25) приравниваем к константам. В результате после элементарных преобразований получим

$$
\begin{aligned}
(z - C_1)u_z^{(n+1)} + nu_z^{(n)} &= 0,\\
C_2 u_z^{(n+1)} - f(u) &= 0,\\
\varphi^n \psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y + C_1\varphi^{n-1}\varphi'_y - C_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 0$ (это соответствует сдвигу по z и переобозначению функции ψ) и интегрируя, имеем

$$
\begin{aligned}
u &= A\ln|z| + B_{n-1}z^{n-1} + \dots + B_1 z + B_0,\\
f(u) &= AC_2 n!\,(-1)^n z^{-n-1},\\
\psi(y) &= C_2\varphi(y)\int\frac{dy}{[\varphi(y)]^{n+1}} + C_3\varphi(y),
\end{aligned}
\tag{2.3.2.26}
$$

где A, B_m, C_3 — произвольные постоянные, $\varphi(y)$ — произвольная функция.

Первые две формулы в (2.3.2.26) дают параметрическое представление для функции $f(u)$. В частном случае при $B_{n-1} = \dots = B_0 = 0$ после исключения z приходим к экспоненциальной зависимости

$$
f(u) = \alpha e^{\beta u}, \qquad \alpha = AC_2 n!\,(-1)^n, \quad \beta = -(n+1)/A.
$$

В силу (2.3.2.26) соответствующее точное решение уравнения (2.3.2.23) с экспоненциальной правой частью будет иметь функциональный произвол.

2°. Во втором случае в (2.3.2.25) приравниваем к константам разность первых двух членов и функциональный множитель, стоящий перед выражением в круглых скобках. В результате приходим к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{n-1}\varphi'_y &= C_1,\\
\varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y &= C_2,\\
(C_1 z + C_2)u_z^{(n+1)} + C_1 n u_z^{(n)} - f(u) &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.3.2.27}
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решения двух первых уравнений имеют вид

$$
\varphi = (C_1 nt + C_3)^{1/n}, \qquad \psi = C_4(C_1 nt + C_3)^{1/n} - \frac{C_2}{C_1}.
$$

Эти формулы вместе с последним ОДУ (2.3.2.27) дают решение типа обобщенной бегущей волны вида (2.3.2.24) нелинейного уравнения (2.3.2.23) с произвольной функцией $f(u)$. ◄

2.3.3. Построение других точных решений с функциональным разделением переменных специального типа

Ниже на конкретном примере проиллюстрируем процедуру построения более сложных, чем решения типа обобщенной бегущей волны, точных решений с функциональным разделением переменных специального вида.

► **Пример 2.13.** Рассмотрим класс нелинейных уравнений теплопроводности с источником

$$u_t = x^{1-n}[x^{n-1}g(u)u_x]_x + f(u). \tag{2.3.3.1}$$

Значению $n=2$ в (2.3.3.1) соответствуют плоские задачи с осевой симметрией, а значению $n=3$ — пространственные задачи с радиальной симметрией. При $n=1$ уравнение (2.3.3.1) совпадает с уравнением (2.3.2.15).

Будем искать точные решения уравнения (2.3.3.1) с квадратичной зависимостью сложного аргумента по x:

$$u = u(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t). \tag{2.3.3.2}$$

Подставим это выражение в (2.3.3.1). В результате приходим к уравнению, которое содержит члены с x^2 (и не содержит членов, линейных по x). Исключив из полученного уравнения x^2 с помощью (2.3.3.2), имеем

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi}z + 2\varphi\Bigl(ng + 2z\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z}\Bigr) - 4\varphi\psi\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z} + \frac{f(u)}{u'_z} = 0. \tag{2.3.3.3}$$

Для решения этого функционально-дифференциального уравнения с двумя аргументами применим метод расщепления, описанный в разд. 1.5. Для этого представим уравнение (2.3.3.3) в билинейной форме

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 + \Phi_5\Psi_5 = 0, \tag{2.3.3.4}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, \quad \Phi_2 = -\frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad \Phi_3 = 2\varphi, \quad \Phi_4 = -4\varphi\psi, \quad \Phi_5 = 1;\\ \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = z, \quad \Psi_3 = ng + 2z\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z}, \quad \Psi_4 = \frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z}, \quad \Psi_5 = \frac{f(u)}{u'_z}.\end{gathered} \tag{2.3.3.5}$$

Невырожденные случаи. Прямой проверкой можно убедиться, что билинейному уравнению (2.3.3.4) можно тождественно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -A_1\Phi_3 - A_3\Phi_4 - A_5\Phi_5, \quad \Phi_2 = -A_2\Phi_3 - A_4\Phi_4 - A_6\Phi_5;\\ \Psi_3 = A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2, \quad \Psi_4 = A_3\Psi_1 + A_4\Psi_2, \quad \Psi_3 = A_5\Psi_1 + A_6\Psi_2,\end{gathered} \tag{2.3.3.6}$$

где A_i — произвольные постоянные. Подставив (2.3.3.5) в (2.3.3.6), приходим к системе ОДУ:

$$\begin{gathered}-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = -2A_1\varphi + 4A_3\varphi\psi - A_5, \quad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = -2A_2\varphi + 4A_4\varphi\psi - A_6;\\ ng + 2z\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z} = A_1 + A_2 z, \quad \frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z} = A_3 + A_4 z, \quad \frac{f(u)}{u'_z} = A_5 + A_6 z.\end{gathered} \tag{2.3.3.7}$$

Из сопоставления третьего и четвертого уравнения (2.3.3.7) следует, что функция g квадратична по z:

$$g = -\frac{2A_4}{n}z^2 + \frac{1}{n}(A_2 - 2A_3)z + \frac{A_1}{n}. \tag{2.3.3.8}$$

Интегрирование четвертого уравнения (2.3.3.7) дает

$$u = C_1\int \exp\Bigl(\int \frac{A_3 + A_4 z}{g}\,dz\Bigr)\frac{dz}{g} + C_2, \tag{2.3.3.9}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция g определена в (2.3.3.8). Формулы (2.3.3.8) и (2.3.3.9) задают зависимость $g = g(u)$ в параметрической форме.

Из пятого уравнения (2.3.3.7) с учетом формулы (2.3.3.9) получим выражение для кинетической функции

$$f = C_1 \frac{A_5 + A_6 z}{g} \exp\biggl(\int \frac{A_3 + A_4 z}{g}\, dz\biggr). \tag{2.3.3.10}$$

Формулы (2.3.3.9) и (2.3.3.10) определяют зависимость $f = f(u)$ в параметрической форме.

Рассмотрим примеры использования формул (2.3.3.8) — (2.3.3.10).

1°. Полагая

$$A_1 = n, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = 1, \quad A_4 = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \tag{2.3.3.11}$$

получим

$$g = 1, \quad u = e^z, \quad z = \ln u, \quad f = (A_5 + A_6 z)e^z = A_6 u \ln u + A_5 u,$$

что приводит к уравнению вида (2.3.3.1) с логарифмическим источником

$$u_t = u_{xx} + (n-1)x^{-1} u_x + A_6 u \ln u + A_5 u.$$

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ в решении (2.3.3.2) определяются из первых двух уравнений системы (2.3.3.7) с коэффициентами (2.3.3.11), что дает

$$\begin{aligned}
&\varphi = \Bigl(C_3 e^{-A_6 t} - \frac{4}{A_6}\Bigr)^{-1}, \\
&\psi = \varphi \exp\biggl(-4 \int \varphi\, dt\biggr)\biggl[\int \Bigl(2n + \frac{A_5}{\varphi}\Bigr) \exp\Bigl(4 \int \varphi\, dt\Bigr)\, dt + C_4\biggr],
\end{aligned}$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

2°. Полагая

$$A_1 = A_3 = A_4 = 0, \quad A_2 = an, \quad A_5 = c\lambda, \quad A_6 = b\lambda, \quad C_1 = a/\lambda, \quad C_2 = 0,$$

имеем

$$g = az = ae^{\lambda u}, \quad u = \frac{1}{\lambda} \ln z, \quad z = e^{\lambda u}, \quad f = (A_5 + A_6 z)\frac{1}{\lambda z} = b + ce^{-\lambda u},$$

что приводит к уравнению

$$u_t = ax^{1-n}(x^{n-1} e^{\lambda u} u_x)_x + b + ce^{-\lambda u}.$$

Функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ в решении (2.3.3.2) этого уравнения определяются формулами

$$\varphi = \Bigl(C_3 e^{-b\lambda t} - \frac{2an}{b\lambda}\Bigr)^{-1}, \qquad \psi = -\frac{c}{b}\varphi\bigl(C_3 e^{-b\lambda t} + 2ant + C_4\bigr).$$

3°. Полагая

$$\begin{aligned}
&A_1 = A_4 = 0, \quad A_2 = an + \frac{2a}{k}, \quad A_3 = \frac{a}{k}, \quad A_5 = ck, \\
&A_6 = bk, \quad C_1 = \frac{a}{k}, \quad C_2 = 0,
\end{aligned}$$

получим

$$g = az = au^k, \quad u = z^{1/k}, \quad z = u^k, \quad f = (A_5 + A_6 z)\frac{1}{k} z^{(1-k)/k} = bu + cu^{1-k}.$$

В результате получим уравнение

$$u_t = ax^{1-n}(x^{n-1}u^k u_x)_x + bu + cu^{1-k},$$

которое имеет решение с функциональным разделением переменных (2.3.3.2), где

$$\varphi(t) = \left[C_3 e^{-bkt} - \frac{4a(nk+2)}{bk^2}\right]^{-1},$$
$$\psi(t) = \varphi(t)\exp\left(-\frac{4a}{k}\int \varphi(t)\,dt\right)\left[ck\int \exp\left(\frac{4a}{k}\int \varphi(t)\,dt\right)\frac{dt}{\varphi(t)} + C_4\right].$$

4°. Полагая

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad A_4 = -\frac{an}{2}, \quad A_5 = -\frac{2c}{n+2},\\ &A_6 = -\frac{2b}{n+2}, \quad C_1 = -\frac{1}{2}a(n+2), \quad C_2 = 0, \end{aligned} \qquad (2.3.3.12)$$

имеем

$$\begin{aligned} &g = az^2 = au^{-\frac{4}{n+2}}, \quad u = z^{-\frac{n+2}{2}}, \quad z = u^{-\frac{2}{n+2}},\\ &f = cz^{-\frac{n+4}{2}} + bz^{-\frac{n+2}{2}} = bu + cu^{\frac{n+4}{n+2}}. \end{aligned}$$

В результате приходим к уравнению

$$u_t = ax^{1-n}\bigl(x^{n-1}u^{-\frac{4}{n+2}}u_x\bigr)_x + bu + cu^{\frac{n+4}{n+2}},$$

которое допускает решение с функциональным разделением переменных вида (2.3.3.2), где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются первыми двумя уравнениями системы (2.3.3.7) с коэффициентами (2.3.3.12).

Вырожденные случаи. Рассмотрим теперь вырожденные случаи, когда одна или несколько функций Φ_i обращаются в нуль.

1°. При $\psi = 0$, что соответствует $\Phi_1 = \Phi_4 = 0$, в уравнении (2.3.3.4) остаются только три слагаемых. Ему можно тождественно удовлетворить, если положить

$$\Phi_2 + A_1\Phi_3 + A_2\Phi_5 = 0, \qquad \Psi_3 = A_1\Psi_2, \qquad \Psi_5 = A_2\Psi_2. \qquad (2.3.3.13)$$

Подставив в (2.3.3.13) соотношения (2.3.3.5), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'_t = 2A_1\varphi^2 + A_2\varphi,\\ &ng + 2z\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z} = A_1 z,\\ &\frac{f(u)}{u'_z} = A_2 z. \end{aligned} \qquad (2.3.3.14)$$

Общее решение первого уравнения (2.3.3.14) при $A_2 \neq 0$ имеет вид

$$\varphi(t) = \left(C_1 e^{-A_2 t} - \frac{2A_1}{A_2}\right)^{-1}. \qquad (2.3.3.15)$$

В последние два уравнения (2.3.3.14) входят три неизвестные функции $f = f(u)$, $g = g(u)$, $u = u(z)$, поэтому одну из них можно задать произвольно. В дальнейшем будем считать, что зависимость $u = u(z)$ задана в неявном виде $z = Z(u)$, где функция $Z(u)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Учитывая соотношение $u'_z = 1/Z'_u$, из последних двух уравнений (2.3.3.14) можно получить формулы

$$f(u) = \frac{A_2 Z}{Z'_u}, \qquad Z = Z(u),$$
$$g(u) = Z^{-n/2} Z'_u \biggl(C_2 + \frac{A_1}{2}\int Z^{n/2}\,du\biggr), \tag{2.3.3.16}$$

которые в параметрической форме задают допустимый вид функций $f = f(u)$ и $g = g(u)$, входящих в уравнение (2.3.3.1). Решение этого уравнения допускает представление в неявной форме

$$\biggl(C_1 e^{-A_2 t} - \frac{2A_1}{A_2}\biggr)^{-1} x^2 = Z(u).$$

2°. При $\varphi = \frac{1}{2}a = \text{const}$, что соответствует $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = a = \text{const}$, уравнение (2.3.3.3) значительно упрощается:

$$-\psi'_t - 2a\psi \frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z} + a\biggl(ng + 2z\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z}\biggr) + \frac{f(u)}{u'_z} = 0 \tag{2.3.3.17}$$

и может быть записано в виде трехчленного билинейного уравнения (1.5.2.4), которому можно тождественно удовлетворить, если положить

$$-\psi'_t - 2aA_1\psi + A_2 = 0,$$
$$\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z} = A_1, \tag{2.3.3.18}$$
$$a\biggl(ng + 2z\frac{[g(u)u'_z]'_z}{u'_z}\biggr) + \frac{f(u)}{u'_z} = A_2.$$

Общее решение первого уравнения (2.3.3.18) дается формулой

$$\psi = C_1 e^{-2aA_1 t} + \frac{A_2}{2aA_1}. \tag{2.3.3.19}$$

Анализ последних двух уравнений (2.3.3.18) показывает, что справедливо следующее утверждение. Пусть две функции $f(u)$ и $g(u)$ следующим образом выражаются через одну дважды непрерывно дифференцируемую функцию $Z(u)$ (которая может быть задана произвольно):

$$f(u) = [A_2 - 2A_1 a Z(u)]\frac{1}{Z'_u(u)} - an(A_1 u + C_2),$$
$$g(u) = (A_1 u + C_2) Z'_u(u). \tag{2.3.3.20}$$

Тогда уравнение (2.3.3.1) имеет решение, которое задается неявно

$$\tfrac{1}{2}ax^2 + C_1 e^{-2aA_1 t} + \frac{A_2}{2aA_1} = Z(u).$$

◀

2.4. Метод дифференцирования. Использование нелинейных функциональных уравнений

2.4.1. Краткое описание метода дифференцирования

Обычно процедура построения точных решений с функциональным разделением переменных, основанная на методе дифференцирования, состоит из нескольких последовательных этапов, кратко описанных ниже.

1°. Выражение (2.1.1.2) подставляется в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными. В результате получается функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами (первые два аргумента — x и t — обычные, а третий аргумент — z — сложный).

2°. Функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами путем умножения на подходящие функции и дифференцирования по x или/и t сводится к функционально-дифференциальному уравнению с двумя аргументами стандартного вида (исключается переменная x или t), которое рассматривалось в разд. 1.2.

3°. Методом расщепления строится решение функционально-дифференциального уравнения с двумя аргументами из п. 2° (используются формулы, приведенные в разд. 1.5).

4°. Решение из п. 3° подставляется в функционально-дифференциальное уравнение, полученное в п. 1°. В результате определяются связи между постоянными интегрирования, устраняются лишние константы (которые могут появиться из-за дифференцирования в п. 2°) и находятся все искомые величины.

5°. Отдельно рассматриваются возможные вырожденные случаи (возникающие при нарушении использованных при решении предположений).

Замечание 2.6. *Наиболее сложной является вторая стадия, которую не всегда удается реализовать.*

Описанная выше процедура построения точных решений с функциональным разделением переменных на практике чаще всего реализуется следующим образом. После подстановки выражения

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(t)$$

в нелинейные уравнения с частными производными получают функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\begin{aligned}\Phi_1(x)\Psi_1(t,z) + \Phi_2(x)\Psi_2(t,z) + \cdots + \Phi_k(x)\Psi_k(t,z) +{}\\ + \Psi_{k+1}(t,z) + \Psi_{k+2}(t,z) + \cdots + \Psi_n(t,z) = 0,\end{aligned} \tag{2.4.1.1}$$

где функционалы $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(t,z)$ зависят соответственно от переменных x и t, z:

$$\Phi_j(x) \equiv \Phi_j\bigl(x,\varphi,\varphi'_x,\varphi''_{xx}\bigr), \quad \Psi_j(t,z) \equiv \Psi_j\bigl(t,\psi,\psi'_t,\psi''_{tt},U,U'_z,U''_{zz}\bigr). \tag{2.4.1.2}$$

(Данные выражения соответствуют уравнению второго порядка.)

Для решения уравнения (2.4.1.1) используем метод дифференцирования. Поделим уравнение (2.4.1.1) на Ψ_1, а затем продифференцируем по t. В результате приходим к уравнению такого же вида, но с меньшим числом членов, содержащих функции Φ_m:

$$\Phi_2(x)\Psi_2^{(2)}(t,z)+\dots+\Phi_k(x)\Psi_k^{(2)}(t,z)+\Psi_{k+1}^{(2)}(t,z)+\dots+\Psi_n^{(2)}(t,z)=0, \quad (2.4.1.3)$$

где $\Psi_m^{(2)} = (\Psi_m/\Psi_1)_t + \psi_t'(\Psi_m/\Psi_1)_z$. Продолжая аналогичную процедуру, в итоге можно получить уравнение, не зависящее явно от x:

$$\Psi_{k+1}^{(k+1)}(t,z) + \dots + \Psi_n^{(k+1)}(t,z) = 0, \quad (2.4.1.4)$$

где $\Psi_m^{(k+1)} = \bigl(\Psi_m^{(k)}/\Psi_k^{(k)}\bigr)_t + \psi_t'\bigl(\Psi_m^{(k)}/\Psi_k^{(k)}\bigr)_z$.

Уравнение (2.4.1.4) можно рассматривать как уравнение с двумя независимыми переменными t и z. Если $\Psi_m^{(k+1)}(t,z) = \sum_s Q_{m,s}^{(k+1)}(t)R_{m,s}^{(k+1)}(z)$ для всех $m=k+1,\dots,n$, то для решения уравнения (2.4.1.4) можно использовать метод расщепления, описанный в разд. 1.5.

Отметим, что в формулах (2.4.1.1)–(2.4.1.4) можно поменять местами независимые переменные x и t.

2.4.2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных методом дифференцирования

Ниже приведены примеры применения метода дифференцирования для построения точных решений с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений диффузионного и волнового типов. Основное внимание уделяется методическим аспектам получения билинейного функционального уравнения стандартного вида и его использования, поэтому некоторые решения детально не исследуются или опускаются.

► **Пример 2.14.** Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = [f(u)u_x]_x. \quad (2.4.2.1)$$

В общем случае уравнение (2.4.2.1) допускает решение типа бегущей волны $u = U(kx - \lambda t)$ [11], а также автомодельное решение $u = U(xt^{-1/2})$ [30].

Ищем точные решения с функциональным разделением переменных уравнения (2.4.2.1) в следующем виде:

$$u = u(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \quad (2.4.2.2)$$

Подставим (2.4.2.2) в (2.4.2.1). После деления на u_z' получим функционально-дифференциальное уравнение с тремя переменными

$$\psi_t' = \varphi_{xx}'' f(u) + (\varphi_x')^2 H(z), \quad (2.4.2.3)$$

где

$$H(z) = f(u)\frac{u_{zz}''}{u_z'} + f_z'(u), \qquad u = u(z). \quad (2.4.2.4)$$

Дифференцируя (2.4.2.3) по x, имеем

$$\varphi'''_{xxx} f(u) + \varphi'_x \varphi''_{xx}[f'_z(u) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z = 0. \qquad (2.4.2.5)$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными можно рассматривать как трехчленное билинейное функциональное уравнение (1.5.2.4) из разд. 1.5, которое имеет два различных решения. Поэтому надо рассмотреть два случая.

Случай 1. Решения функционально-дифференциального уравнения (2.4.2.5) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} f'_z + 2H = 2A_1 f, \quad H'_z = A_2 f, \\ \varphi'''_{xxx} + 2A_1 \varphi'_x \varphi''_{xx} + A_2 (\varphi'_x)^3 = 0, \end{gathered} \qquad (2.4.2.6)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Первые два уравнения (2.4.2.6) линейны и не зависят от третьего уравнения. Их общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &f = \begin{cases} e^{A_1 z}(B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) & \text{при } A_1^2 > 2A_2, \\ e^{A_1 z}(B_1 + B_2 z) & \text{при } A_1^2 = 2A_2, \\ e^{A_1 z}[B_1 \sin(kz) + B_2 \cos(kz)] & \text{при } A_1^2 < 2A_2, \end{cases} \qquad k = |A_1^2 - 2A_2|^{1/2}, \\ &H = A_1 f - \tfrac{1}{2} f'_z, \end{aligned} \qquad (2.4.2.7)$$

где B_1 и B_2 — постоянные интегрирования.

Подставим выражение для H из (2.4.2.7) в (2.4.2.4). Получим дифференциальное уравнение для определения функции $u = u(z)$. В результате интегрирования имеем

$$u = C_1 \int e^{A_1 z} |f(z)|^{-3/2} dz + C_2, \qquad (2.4.2.8)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формула (2.4.2.7) для f вместе с выражением (2.4.2.8) задают зависимость $f = f(u)$ в параметрической форме.

Рассмотрим подробнее случай $A_2 = 0$ и $A_1 \neq 0$ ($k = |A_1|$). Из формул (2.4.2.7) и (2.4.2.8) получим

$$\begin{aligned} &f(z) = B_1 e^{2A_1 z} + B_2, \quad H = A_1 B_2, \\ &u(z) = C_3 (B_1 + B_2 e^{-2A_1 z})^{-1/2} + C_2 \quad (C_1 = A_1 B_2 C_3). \end{aligned} \qquad (2.4.2.9)$$

Исключая z, имеем

$$f(u) = \frac{B_2 C_3^2}{C_3^2 - B_1 u^2}. \qquad (2.4.2.10)$$

Первый интеграл последнего уравнения (2.4.2.6) при $A_2 = 0$ имеет вид

$$\varphi''_{xx} + A_1 (\varphi'_x)^2 = \text{const},$$

а его общее решение описывается формулами

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1}\ln\Big[\frac{D_2}{D_1}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\big(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3\big)}\Big] && \text{при}\quad D_1>0,\quad D_2>0;\\
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1}\ln\Big[-\frac{D_2}{D_1}\frac{1}{\cos^2\big(A_1\sqrt{-D_2}\,x + D_3\big)}\Big] && \text{при}\quad D_1>0,\quad D_2<0;\\
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1}\ln\Big[-\frac{D_2}{D_1}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\big(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3\big)}\Big] && \text{при}\quad D_1<0,\quad D_2>0,
\end{aligned}
\tag{2.4.2.11}
$$

где D_1, D_2, D_3 — постоянные интегрирования. Во всех трех случаях выполняются соотношения

$$
(\varphi'_x)^2 = D_1 e^{-2A_1\varphi} + D_2, \qquad \varphi''_{xx} = -A_1 D_1 e^{-2A_1\varphi}. \tag{2.4.2.12}
$$

Подставим выражения (2.4.2.9) и (2.4.2.12) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (2.4.2.3). Учитывая вид переменной z (2.4.2.2), получим уравнение для функции $\psi = \psi(t)$:

$$
\psi'_t = -A_1 B_1 D_1 e^{2A_1\psi} + A_1 B_2 D_2.
$$

Интегрируя, находим решение

$$
\psi(t) = \frac{1}{2A_1}\ln\frac{B_2D_2}{D_4\exp(-2A_1^2B_2D_2t) + B_1D_1}, \tag{2.4.2.13}
$$

где D_4 — произвольная постоянная.

Формулы (2.4.2.2), (2.4.2.9) (для u), (2.4.2.11), (2.4.2.13) определяют три решения нелинейного уравнения (2.4.2.1) с функцией $f(u)$ вида (2.4.2.10) (напомним, что эти решения соответствуют частному случаю $A_2 = 0$ в (2.4.2.7) и (2.4.2.8)). Отметим, что описанные решения другим методом были получены в [141].

Случай 2. Решения функционально-дифференциального уравнения (2.4.2.5) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\varphi'''_{xxx} = A_1(\varphi'_x)^3, \qquad \varphi'_x\varphi''_{xx} = A_2(\varphi'_x)^3,\\
&A_1 f + A_2(f'_z + 2H) + H'_z = 0.
\end{aligned}
\tag{2.4.2.14}
$$

Первые два уравнения (2.4.2.14) совместны в двух случаях:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = A_2 = 0 &&\Longrightarrow\quad \varphi(x) = B_1x + B_2,\\
&A_1 = 2A_2^2 &&\Longrightarrow\quad \varphi(x) = -\frac{1}{A_2}\ln|B_1x + B_2|.
\end{aligned}
\tag{2.4.2.15}
$$

Первое решение в (2.4.2.15) в конечном итоге приводит к решению уравнения (2.4.2.1) типа бегущей волны $u = u(B_1x + B_2t)$, а второе решение — к автомодельному решению вида $u = \widetilde{u}(x^2/t)$. В этих случаях функция $f(u)$ в уравнении (2.4.2.1) произвольна. ◄

Замечание 2.7. *Более общее нелинейное уравнение теплопроводности*

$$
u_t = [f(u)u_x]_x + g(u) \tag{2.4.2.16}
$$

также имеет решение вида (2.4.2.2). Для искомых функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с тремя независимыми переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} f(u) + (\varphi'_x)^2 H(z) + g(u)/u'_z,$$

где функция $H(z)$ определяется по формуле (2.4.2.4). Дифференцируя последнее равенство по x, получим

$$\varphi'''_{xxx} f(u) + \varphi'_x \varphi''_{xx}[f'_z(u) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z + \varphi'_x [g(u)/u'_z]'_z = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными можно трактовать как билинейное функциональное уравнение (1.5.2.6) из разд. 1.5 с $\Phi_1 = \varphi'''_{xxx}$, $\Phi_2 = \varphi'_x \varphi''_{xx}$, $\Phi_3 = (\varphi'_x)^3$, $\Phi_4 = \varphi'_x$.

В работе [150] рассмотрено более общее уравнение, чем (2.4.2.16).

► **Пример 2.15.** Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна—Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = f(u). \qquad (2.4.2.17)$$

Ищем точные решения в виде

$$u = u(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(t). \qquad (2.4.2.18)$$

Подставив выражение (2.4.2.18) в (2.4.2.17), получим

$$\psi''_{tt} - \varphi''_{xx} + \bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr]\, g(z) = h(z), \qquad (2.4.2.19)$$

где

$$g(z) = u''_{zz}/u'_z, \quad h(z) = f\bigl(u(z)\bigr)/u'_z. \qquad (2.4.2.20)$$

Продифференцировав уравнение (2.4.2.19) сначала по t, а затем по x, после деления на $\psi'_t \varphi'_x$ имеем

$$2(\psi''_{tt} - \varphi''_{xx})\, g'_z + \bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr]\, g''_{zz} = h''_{zz}.$$

Исключив разность $\psi''_{tt} - \varphi''_{xx}$ из этого уравнения с помощью (2.4.2.19), получим

$$\bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr](g''_{zz} - 2gg'_z) = h''_{zz} - 2g'_z h. \qquad (2.4.2.21)$$

Это равенство может выполняться только в двух случаях:

$$\begin{aligned}
&1)\quad g''_{zz} - 2gg'_z = 0, \quad h''_{zz} - 2g'_z h = 0;\\
&2)\quad (\psi'_t)^2 = A\psi + B, \quad (\varphi'_x)^2 = -A\varphi + B - C, \qquad (2.4.2.22)\\
&\qquad h''_{zz} - 2g'_z h = (Az + C)(g''_{zz} - 2gg'_z),
\end{aligned}$$

где A, B, C — произвольные постоянные*. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай 1. Первые два уравнения (2.4.2.22) позволяют найти $g(z)$ и $h(z)$. Интегрируя, из первого уравнения имеем $g'_z = g^2 + \mathrm{const}$. Интегрируя далее, получим

$$g = k, \qquad (2.4.2.23)$$

$$g = -1/(z + C_1), \qquad (2.4.2.24)$$

$$g = -k\,\mathrm{th}(kz + C_1), \qquad (2.4.2.25)$$

$$g = -k\,\mathrm{cth}(kz + C_1), \qquad (2.4.2.26)$$

$$g = k\,\mathrm{tg}(kz + C_1), \qquad (2.4.2.27)$$

*Первые два ОДУ в случае 2) появляются в результате решения функционально-дифференциального уравнения $(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2 = R(z)$, которое сводится к уравнению (2.4.3.1).

где C_1 и k — произвольные постоянные.

Второе уравнение (2.4.2.22) является линейным относительно функции h и имеет частное решение $h = g(z)$. Поэтому его общее решение определяется по формуле [19, 285]:

$$h = C_2 g(z) + C_3 g(z) \int \frac{dz}{g^2(z)}, \tag{2.4.2.28}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Из соотношений (2.4.2.20) определяются функции $u(z)$ и $f(u)$ в виде

$$u(z) = B_1 \int G(z)\,dz + B_2, \quad f(u) = B_1 h(z) G(z), \quad G(z) = \exp\left[\int g(z)\,dz\right], \tag{2.4.2.29}$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные (функция f задана в параметрической форме).

Исследуем подробнее случай (2.4.2.24). Используя формулу (2.4.2.28), находим

$$h = A_1(z + C_1)^2 + \frac{A_2}{z + C_1}, \tag{2.4.2.30}$$

где $A_1 = -C_3/3$, $A_2 = -C_2$ — любые. Подставляя выражения (2.4.2.24) и (2.4.2.30) в (2.4.2.29), получим

$$u = B_1 \ln|z + C_1| + B_2, \quad f = A_1 B_1 (z + C_1) + \frac{A_2 B_1}{(z + C_1)^2}.$$

Исключая из этих соотношений z, находим явный вид правой части уравнения (2.4.2.17):

$$f(u) = A_1 B_1 e^{w} + A_2 B_1 e^{-2w}, \quad \text{где} \quad w = \frac{u - B_2}{B_1}. \tag{2.4.2.31}$$

Для наглядности далее полагаем $C_1 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$ и введем обозначения $A_1 = a$, $A_2 = b$. Таким образом, имеем

$$u(z) = \ln|z|, \quad f(u) = ae^{u} + be^{-2u}, \quad g(z) = -1/z, \quad h(z) = az^2 + b/z. \tag{2.4.2.32}$$

Осталось определить функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$. Подставим выражения (2.4.2.32) в функционально-дифференциальное уравнение (2.4.2.19). Учитывая зависимость (2.4.2.18), после элементарных преобразований получим

$$[\psi\psi''_{tt} - (\psi'_t)^2 - a\psi^3 - b] - [\varphi\varphi''_{xx} - (\varphi'_x)^2 + a\varphi^3] + (\psi''_{tt} - 3a\psi^2)\varphi - \psi(\varphi''_{xx} + 3a\varphi^2) = 0. \tag{2.4.2.33}$$

Дифференцируя (2.4.2.33) по t и x, уничтожаем члены в квадратных скобках. В результате приходим к уравнению с разделяющимися переменными*

$$(\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t)\varphi'_x - (\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x)\psi'_t = 0,$$

решение которого описывается автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t = A\psi'_t,$$
$$\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x = A\varphi'_x,$$

*Для решения уравнения (2.4.2.33) проще всего использовать результаты решения функционального уравнения (1.5.2.6) из разд. 1.5 (см. формулы (1.5.2.7) и (1.5.2.8)).

Таблица 2.2. Нелинейные уравнения $u_{tt} - u_{xx} = f(u)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $u = u(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

№	Правая часть уравнения $f(u)$	Решение $u(z)$	Уравнения для $\psi(t)$ и $\varphi(x)$
1	$au\ln u + bu$	e^z	$(\psi'_t)^2 = C_1 e^{-2\psi} + a\psi - \frac{1}{2}a + b + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2 e^{-2\varphi} - a\varphi + \frac{1}{2}a + A$
2	$ae^u + be^{-2u}$	$\ln\lvert z\rvert$	$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2$, $(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b$
3	$a\sin u + b\Bigl(\sin u\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{4} + 2\sin\dfrac{u}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg} e^z$	$(\psi'_t)^2 = C_1 e^{2\psi} + C_2 e^{-2\psi} + b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_2 e^{2\varphi} - C_1 e^{-2\varphi} - b\varphi + A$
4	$a\operatorname{sh} u + b\Bigl(\operatorname{sh} u\ln\operatorname{th}\dfrac{u}{4} + 2\operatorname{sh}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1 e^{2\psi} + C_2 e^{-2\psi} - \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2 e^{2\varphi} + C_1 e^{-2\varphi} + \sigma b\varphi + A$
5	$a\operatorname{sh} u + 2b\Bigl(\operatorname{sh} u\operatorname{arctg} e^{u/2} + \operatorname{ch}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1\sin 2\psi + C_2\cos 2\psi + \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_1\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi - \sigma b\varphi + A$
Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma = 1$ при $z > 0$, $\sigma = -1$ при $z < 0$			

где A — константа разделения. Каждое из этих уравнений можно два раза проинтегрировать:

$$\begin{aligned}(\psi'_t)^2 &= 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,\\ (\varphi'_x)^2 &= -2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_3\varphi + C_4,\end{aligned} \tag{2.4.2.34}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные. Исключая с помощью (2.4.2.34) производные из уравнения (2.4.2.33), находим следующие связи между константами: $C_3 = -C_1$, $C_4 = C_2 + b$. Таким образом, функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ описываются автономными ОДУ первого порядка с кубической нелинейностью

$$\begin{aligned}(\psi'_t)^2 &= 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,\\ (\varphi'_x)^2 &= -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b.\end{aligned}$$

Решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции.

Для остальных случаев в (2.4.2.23) — (2.4.2.27) исследование проводится аналогичным образом. Результаты анализа для случаев (2.4.2.23) — (2.4.2.27) сведены в итоговой табл. 2.2 (впервые эти решения другим методом были получены в [176], см. также [3, 376]).

Случай 2. Интегрируя первые два уравнения (2.4.2.22) (для второго случая), имеем два решения:

$$\begin{aligned}&\psi = \pm\sqrt{B}\,t + D_1, && \varphi = \pm\sqrt{B - C}\,t + D_2 && \text{при} \quad A = 0;\\ &\psi = \frac{1}{4A}(At + D_1)^2 - \frac{B}{A}, && \varphi = -\frac{1}{4A}(Ax + D_2)^2 + \frac{B - C}{A} && \text{при} \quad A \neq 0;\end{aligned} \tag{2.4.2.35}$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные. В обоих случаях функция $f(u)$ в уравнении (2.4.2.17) является произвольной. Первое решение (2.4.2.35) соот-

Таблица 2.3. Нелинейные уравнения $u_{xx}+u_{yy}=f(u)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $u=u(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

№	Правая часть уравнения $f(u)$	Решение $u(z)$	Уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(y)$
1	$au\ln u+bu$	e^z	$(\varphi_x')^2=C_1e^{-2\varphi}+a\varphi-\frac{1}{2}a+b+A$, $(\psi_y')^2=C_2e^{-2\psi}+a\psi-\frac{1}{2}a-A$
2	ae^u+be^{-2u}	$\ln\lvert z\rvert$	$(\varphi_x')^2=2a\varphi^3+A\varphi^2+C_1\varphi+C_2$, $(\psi_y')^2=2a\psi^3-A\psi^2+C_1\psi-C_2-b$
3	$a\sin u+b\Bigl(\sin u\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{4}+2\sin\dfrac{u}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg}e^z$	$(\varphi_x')^2=C_1e^{2\varphi}+C_2e^{-2\varphi}+b\varphi+a+A$, $(\psi_y')^2=C_2e^{2\psi}+C_1e^{-2\psi}+b\psi-A$
4	$a\operatorname{sh}u+b\Bigl(\operatorname{sh}u\ln\operatorname{th}\dfrac{u}{4}+2\operatorname{sh}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi_x')^2=C_1e^{2\varphi}+C_2e^{-2\varphi}-\sigma b\varphi+a+A$, $(\psi_y')^2=-C_2e^{2\psi}-C_1e^{-2\psi}-\sigma b\psi-A$
5	$a\operatorname{sh}u+2b\Bigl(\operatorname{sh}u\operatorname{arctg}e^{u/2}+\operatorname{ch}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi_x')^2=C_1\sin 2\varphi+C_2\cos 2\varphi+\sigma b\varphi+a+A$, $(\psi_y')^2=C_1\sin 2\psi-C_2\cos 2\psi+\sigma b\psi-A$
Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma=1$ при $z>0$, $\sigma=-1$ при $z<0$			

ветствует решению типа бегущей волны $u=u(kx+\lambda t)$, а второе приводит к решению вида $u=u(x^2-t^2)$. ◀

▶ Пример 2.16. Нелинейное уравнение стационарной теплопроводности (диффузии) с источником

$$u_{xx}+u_{yy}=f(u)$$

исследуется точно так же, как и нелинейное уравнение Клейна — Гордона (см. пример 2.15). Основные результаты приведены в итоговой табл. 2.3 (впервые эти решения другим методом были получены в [249]). Для произвольной функции $f(u)$ имеется также решение типа бегущей волны $u=u(k_1x+k_2y)$ и решение с радиальной симметрией вида $u=u(x^2+y^2)$. ◀

2.4.3. Использование нелинейных функциональных уравнений для построения точных решений

В этом разделе рассматриваются некоторые функциональные уравнения с тремя аргументами специального вида, которые часто встречаются при функциональном разделении переменных в нелинейных уравнениях математической физики. Для решения этих нелинейных функциональных уравнений используется сочетание методов дифференцирования и расщепления. Полученные результаты применяются для построения точных решений некоторых классов нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн.

1°. Рассмотрим функциональное уравнение

$$p(x) + q(t) = R(z), \quad \text{где } z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{2.4.3.1}$$

Здесь одна из двух функций $p(x)$ и $\varphi(x)$ задается, а другая ищется; одна из двух функций $q(t)$ и $\psi(t)$ задается, а другая ищется; функция $R(z)$ ищется*.

Дифференцируя уравнение (2.4.3.1) по x и по t, получим $R''_{zz} = 0$. Поэтому его решение имеет вид

$$p(x) = A\varphi(x) + B, \quad q(t) = A\psi(t) - B + C, \quad R(z) = Az + C, \tag{2.4.3.2}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Рассмотрим более сложное функциональное уравнение

$$p(t) + q(x) + h(x)R(z) + S(z) = 0, \quad \text{где } z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{2.4.3.3}$$

Дифференцируя (2.4.3.3) по x, приходим к уравнению с двумя независимыми переменными

$$q'_x + h'_x R + h\varphi'_x R'_z + \varphi'_x S'_z = 0, \tag{2.4.3.4}$$

которое можно представить в виде билинейного уравнения (1.5.2.6) из разд. 1.5. Используя формулы (1.5.2.7), получим

$$\begin{aligned} q'_x &= A_1 h\varphi'_x + A_2\varphi'_x, \\ h'_x &= A_3 h\varphi'_x + A_4\varphi'_x, \\ R'_z &= -A_1 - A_3 R, \\ S'_z &= -A_2 - A_4 R, \end{aligned} \tag{2.4.3.5}$$

где $A_1, \ldots, A_4$ — произвольные постоянные. Интегрирование системы (2.4.3.5) и подстановка полученных решений в исходное функциональное уравнение дает приведенные ниже результаты.

Случай 1. Решение функционального уравнения (2.4.3.3), которое соответствует значению $A_3 = 0$ в (2.4.3.5):

$$\begin{aligned} p &= -\tfrac{1}{2}A_1A_4\psi^2 + (A_1B_1 + A_2 + A_4B_3)\psi - B_2 - B_1B_3 - B_4, \\ q &= \tfrac{1}{2}A_1A_4\varphi^2 + (A_1B_1 + A_2)\varphi + B_2, \\ h &= A_4\varphi + B_1, \\ R &= -A_1 z + B_3, \\ S &= \tfrac{1}{2}A_1A_4 z^2 - (A_2 + A_4B_3)z + B_4, \end{aligned} \tag{2.4.3.6}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

*В подобных уравнениях со сложным аргументом считается, что $\varphi(x) \neq \text{const}$ и $\psi(t) \neq \text{const}$.

Случай 2. Решение функционального уравнения (2.4.3.3), которое соответствует значению $A_3 \neq 0$ в (2.4.3.5):

$$\begin{aligned}
&p = -B_1 B_3 e^{-A_3\psi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\psi - B_2 - B_4 - \frac{A_1A_4}{A_3^2},\\
&q = \frac{A_1B_1}{A_3}e^{A_3\varphi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\varphi + B_2,\\
&h = B_1e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3},\\
&R = B_3e^{-A_3z} - \frac{A_1}{A_3},\\
&S = \frac{A_4B_3}{A_3}e^{-A_3z} + \Big(\frac{A_1A_4}{A_3} - A_2\Big)z + B_4,
\end{aligned} \tag{2.4.3.7}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

Случай 3. Функциональное уравнение (2.4.3.3) допускает также вырожденное решение

$$p = A_1\psi + B_1, \quad q = A_1\varphi + B_2, \quad h = A_2, \quad S = -A_1z - A_2R - B_1 - B_2, \tag{2.4.3.8}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $R = R(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Другое вырожденное решение имеет вид

$$p = A_1\psi + B_1, \quad q = A_1\varphi + A_2h + B_2, \quad R = -A_2, \quad S = -A_1z - B_1 - B_2, \tag{2.4.3.9}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $h = h(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения (2.4.3.8) и (2.4.3.9) можно получить из исходного уравнения (2.4.3.3) и его следствия (2.4.3.4) с помощью формул (1.5.2.8) из разд. 1.5.

► **Пример 2.17.** Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$u_t = u_{xx} + f(u). \tag{2.4.3.10}$$

Ищем точные решения вида

$$u = u(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{2.4.3.11}$$

Подставим (2.4.3.11) в (2.4.3.10). После деления на u'_z получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2\frac{u''_{zz}}{u'_z} + \frac{f(u(z))}{u'_z}.$$

Представим его в виде билинейного функционального уравнения (2.4.3.3), где

$$p(t) = -\psi'_t, \quad q(x) = \varphi''_{xx}, \quad h(x) = (\varphi'_x)^2, \quad R(z) = \frac{u''_{zz}}{u'_z}, \quad S(z) = \frac{f(u(z))}{u'_z}. \tag{2.4.3.12}$$

Используем решения уравнения (2.4.3.3). Подставив выражения (2.4.3.12) для q и h в (2.4.3.6)—(2.4.3.9), получим переопределенные системы ОДУ для определения функции $\varphi = \varphi(x)$.

Случай 1. Система

$$\varphi''_{xx} = \tfrac{1}{2}A_1A_4\varphi^2 + (A_1B_1 + A_2)\varphi + B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = A_4\varphi + B_1,$$

полученная из (2.4.3.6) и соответствующая значению $A_3 = 0$ в (2.4.3.5), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &\varphi = C_1x + C_2 && \text{при}\quad A_2 = -A_1C_1^2,\ A_4 = B_2 = 0,\ B_1 = C_1^2,\\ &\varphi = \tfrac{1}{4}A_4x^2 + C_1x + C_2 && \text{при}\quad A_1 = A_2 = 0,\ B_1 = C_1^2 - A_4C_2,\ B_2 = \tfrac{1}{2}A_4, \end{aligned} \tag{2.4.3.13}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Первое решение (2.4.3.13) при $A_1 \neq 0$ соответствует правой части уравнения (2.4.3.10), которая содержит функцию, обратную к интегралу вероятностей [вид правой части определяется из двух последних соотношений (2.4.3.6) и (2.4.3.12) для R и S]. Второе решение (2.4.3.13) соответствует правой части уравнения (2.4.3.10) логарифмического вида $f(u) = k_1u\ln u + k_2u$. В обоих случаях первое соотношение (2.4.3.6) с учетом равенства $p = -\psi'_t$ представляет собой линейное ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами, решением которого является сумма экспоненциальной функции и константы.

Случай 2. Система

$$\varphi''_{xx} = \frac{A_1B_1}{A_3}e^{A_3\varphi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\varphi + B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = B_1e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3},$$

полученная из (2.4.3.7) и соответствующая $A_3 \neq 0$ в (2.4.3.5), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$\begin{aligned} &\varphi = \pm\sqrt{-A_4/A_3}\,x + C_1 && \text{при } A_2 = A_1A_4/A_3,\ B_1 = B_2 = 0;\\ &\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln|x| + C_1 && \text{при } A_1 = \tfrac{1}{2}A_3^2,\ A_2 = A_4 = 0,\\ &&& \phantom{\text{при }} B_1 = 4A_3^{-2}e^{-A_3C_1}, B_2 = 0;\\ &\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln\big|\cos\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{A_3A_4}\,x + C_1\big)\big| + C_2 && \text{при } A_1 = \tfrac{1}{2}A_3^2,\ A_2 = \tfrac{1}{2}A_3A_4 > 0,\\ &&& \phantom{\text{при }} B_1 = A_4/A_3,\ B_2 = 0;\\ &\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln\big|\mathrm{sh}\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{-A_3A_4}\,x + C_1\big)\big| + C_2 && \text{при } A_1 = \tfrac{1}{2}A_3^2,\ A_2 = \tfrac{1}{2}A_3A_4 < 0,\\ &&& \phantom{\text{при }} B_1 = -A_4/A_3,\ B_2 = 0;\\ &\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln\big|\mathrm{ch}\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{-A_3A_4}\,x + C_1\big)\big| + C_2 && \text{при } A_1 = \tfrac{1}{2}A_3^2,\ A_2 = \tfrac{1}{2}A_3A_4 < 0,\\ &&& \phantom{\text{при }} B_1 = A_4/A_3,\ B_2 = 0, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти решения соответствуют правой части уравнения (2.4.3.10), заданной в параметрической форме.

Случай 3. Вырожденным решениям функционального уравнения (2.4.3.8) и (2.4.3.9) соответствуют решения нелинейного уравнения теплопроводности (2.4.3.10) типа бегущей волны [функция $f(u)$ — произвольна] и решения линейного уравнения (2.4.3.10) с источником вида $f(u) = k_1u + k_2$. ◂

Замечание 2.8. *Можно искать более сложные решения уравнения (2.4.3.10) с функциональным разделением вида*

$$u = u(z), \quad z = \varphi(\xi) + \psi(t), \quad \xi = x + at.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (2.4.3.10) также приводит к функциональному уравнению (2.4.3.3), в котором x надо переобозначить на ξ и положить

$$p(t) = -\psi'_t, \quad q(\xi) = \varphi''_{\xi\xi} - a\varphi'_\xi, \quad h(\xi) = (\varphi'_\xi)^2, \quad R(z) = u''_{zz}/u'_z, \quad S(z) = f(u(z))/u'_z.$$

Дальнейшая процедура построения решения проводится так же, как в примере 2.17.

► Пример 2.18. Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение

$$u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + f(u), \tag{2.4.3.14}$$

которое встречается в задачах конвективного тепло- и массообмена ($a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$), в задачах теплопереноса в анизотропных средах ($b = a'_x$), в пространственных задачах теплопроводности с осевой и центральной симметрией ($a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}/x$).

Поиск точных решений уравнения (2.4.3.14) вида (2.4.3.11) приводит к функциональному уравнению (2.4.3.3), где

$$p(t) = -\psi'_t, \quad q(x) = a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x(x),$$
$$h(x) = a(x)(\varphi'_x)^2, \quad R(z) = u''_{zz}/u'_z, \quad S(z) = f(u(z))/u'_z.$$

Подставив эти выражения в (2.4.3.6)—(2.4.3.9), можно получить системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых величин.◄

Замечание 2.9. *В примерах 2.17—2.18 построение точных решений различных уравнений математической физики сводилось к одному и тому же функциональному уравнению. Это наглядно демонстрирует полезность выделения и независимого исследования отдельных нелинейных функциональных уравнений со сложным аргументом.*

3°. Рассмотрим теперь функциональное уравнение

$$p(t) + q(x)R(z) + h(x)S(z) = 0, \quad \text{где } z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{2.4.3.15}$$

Дифференцируем (2.4.3.15) по x. Получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными x и z:

$$q'_x R + q\varphi'_x R'_z + h'_x S + h\varphi'_x S'_z = 0, \tag{2.4.3.16}$$

которое с точностью до очевидных переобозначений можно представить в виде билинейного уравнения (1.5.2.6).

Случай 1. Решение уравнения (2.4.3.16) можно получить с помощью формул (1.5.2.7) из разд. 1.5. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q'_x &= (A_1 g + A_2 h)\varphi'_x,\\ h'_x &= (A_3 g + A_4 h)\varphi'_x,\\ R'_z &= -A_1 R - A_3 S,\\ S'_z &= -A_2 R - A_4 S, \end{aligned} \tag{2.4.3.17}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Решение системы (2.4.3.17) имеет вид

$$\begin{aligned}
q(x) &= A_2 B_1 e^{k_1\varphi} + A_2 B_2 e^{k_2\varphi},\\
h(x) &= (k_1 - A_1) B_1 e^{k_1\varphi} + (k_2 - A_1) B_2 e^{k_2\varphi},\\
R(z) &= A_3 B_3 e^{-k_1 z} + A_3 B_4 e^{-k_2 z},\\
S(z) &= (k_1 - A_1) B_3 e^{-k_1 z} + (k_2 - A_1) B_4 e^{-k_2 z},
\end{aligned} \tag{2.4.3.18}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — произвольные постоянные, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$(k - A_1)(k - A_4) - A_2 A_3 = 0. \tag{2.4.3.19}$$

В случае кратных корней $k_1 = k_2$ члены $e^{k_2\varphi}$ и $e^{-k_2 z}$ в (2.4.3.18) надо заменить соответственно на $\varphi e^{k_1\varphi}$ и $z e^{-k_1 z}$. В случае чисто мнимых или комплексных корней уравнения (2.4.3.19) в решении (2.4.3.18) надо выделить действительную (или мнимую) часть.

Подставив (2.4.3.18) в исходное функциональное уравнение (2.4.3.15), получим условия, которым должны удовлетворять свободные коэффициенты, и найдем функцию $p(t)$:

$$\begin{aligned}
&B_2 = B_4 = 0 &&\Longrightarrow\quad p(t) = [A_2 A_3 + (k_1 - A_1)^2] B_1 B_3 e^{-k_1\psi},\\
&B_1 = B_3 = 0 &&\Longrightarrow\quad p(t) = [A_2 A_3 + (k_2 - A_1)^2] B_2 B_4 e^{-k_2\psi},\\
&A_1 = 0 &&\Longrightarrow\quad p(t) = (A_2 A_3 + k_1^2) B_1 B_3 e^{-k_1\psi} + (A_2 A_3 + k_2^2) B_2 B_4 e^{-k_2\psi}.
\end{aligned} \tag{2.4.3.20}$$

В решения (2.4.3.18), (2.4.3.20) входят произвольные функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$.

Случай 2. Функциональное уравнение (2.4.3.15) допускает также вырожденное решение

$$p = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad q = A_2 B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad h = B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad S = -B_2 e^{A_1 z} - A_2 R,$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $R = R(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Другое вырожденное решение имеет вид

$$p = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad h = -B_1 e^{-A_1\varphi} - A_2 q, \quad R = A_2 B_2 e^{A_1 z}, \quad S = B_2 e^{A_1 z},$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $q = q(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения можно получить из исходного уравнения (2.4.3.15) и его следствия (2.4.3.16) с помощью формул (1.5.2.8) из разд. 1.5.

► Пример 2.19. Для нелинейного уравнения теплопроводности (2.4.2.1) (см. пример 2.14 из разд. 2.4.2) поиск точных решений вида $u = u(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$ приводит к функционально-дифференциальному уравнению (2.4.2.3), которое можно представить в виде функционального уравнения (2.4.3.15), если ввести обозначения

$$p(t) = -\psi'_t, \quad q(x) = \varphi''_{xx}, \quad h(x) = (\varphi'_x)^2, \quad R(z) = f(u), \quad S(z) = \frac{[f(u)u'_z]'_z}{u'_z},$$

где $u = u(z)$. ◀

▶ Пример 2.20. Для нелинейного уравнения первого порядка

$$u_t = f(u)u_x^2 + g(x)$$

поиск точных решений вида (2.4.3.11) приводит к функциональному уравнению (2.4.3.15) при

$$p(t) = -\psi'_t, \;\; q(x) = (\varphi'_x)^2, \;\; h(x) = g(x), \;\; R(z) = f(u)u'_z, \;\; S(z) = 1/u'_z,$$

где $u = u(z)$. ◀

4°. Рассмотрим функциональное уравнение

$$p_1(x) + p_2(t) + q_1(x)P(z) + q_2(t)R(z) + S(z) = 0, \tag{2.4.3.21}$$

где $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

Дифференцируем (2.4.3.21) по t. Полученное выражение делим на $\psi'_t P'_z$ и дифференцируем по t. В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя аргументами t и z, которое может быть сведено к билинейному функциональному уравнению [см. уравнение (1.5.1.1) и его решения (1.5.2.9)].

▶ Пример 2.21. Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником

$$[a(x)u_x]_x + [b(y)u_y]_y = f(u). \tag{2.4.3.22}$$

Поиск точных решений уравнения (2.4.3.22) вида $u = u(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(y)$ приводит к функциональному уравнению (2.4.3.21) при $t = y$, где

$$p_1(x) = a(x)\varphi''_{xx} + a'_x(x)\varphi'_x, \quad p_2(y) = b(y)\psi''_{yy} + b'_y(y)\psi'_y, \quad q_1(x) = a(x)(\varphi'_x)^2,$$
$$q_2(y) = b(y)(\psi'_y)^2, \quad P(z) = R(z) = u''_{zz}/u'_z, \quad S(z) = -f(u)/u'_z, \quad u = u(z).$$

Не проводя полного анализа уравнения (2.4.3.22), ограничимся здесь изучением решений с обобщенным разделением переменных, которые существуют при произвольной кинетической функции $f(u)$.

Сделав замену $z = \zeta^2$, ищем решения уравнения (2.4.3.22) вида

$$u = u(\zeta), \qquad \zeta^2 = \varphi(x) + \psi(y). \tag{2.4.3.23}$$

Учитывая соотношения $\zeta_x = \dfrac{\varphi'_x}{2\zeta}$ и $\zeta_y = \dfrac{\psi'_y}{2\zeta}$, из (2.4.3.22) получим

$$\big[(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y\big]\frac{u'_\zeta}{2\zeta} + \big[a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2\big]\frac{\zeta u''_{\zeta\zeta} - u'_\zeta}{4\zeta^3} = f(u), \qquad f(u) = f\big(u(\zeta)\big). \tag{2.4.3.24}$$

Для разрешимости этого функционального уравнения потребуем, чтобы выражения в квадратных скобках были функциями от ζ:

$$(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y = M(\zeta), \quad a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2 = N(\zeta).$$

Продифференцировав первое из этих равенств по x и по y, приходим к уравнению $(M'_\zeta/\zeta)'_\zeta = 0$, общее решение которого имеет вид $M(\zeta) = C_1\zeta^2 + C_2$. Аналогично находим $N(\zeta) = C_3\zeta^2 + C_4$. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В итоге получим

$$(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y = C_1(\varphi+\psi) + C_2, \quad a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2 = C_3(\varphi+\psi) + C_4.$$

Разделение переменных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $\varphi(x)$, $a(x)$, $\psi(y)$, $b(y)$:

$$\begin{aligned} &(a\varphi'_x)'_x - C_1\varphi - C_2 = k_1, \qquad (b\psi'_y)'_y - C_1\psi = -k_1,\\ &a(\varphi'_x)^2 - C_3\varphi - C_4 = k_2, \qquad b(\psi'_y)^2 - C_3\psi = -k_2. \end{aligned}$$

Эта система всегда интегрируется в квадратурах и может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} &(C_3\varphi + C_4 + k_2)\varphi''_{xx} + (C_1\varphi + C_2 + k_1 - C_3)(\varphi'_x)^2 = 0,\\ &(C_3\psi - k_2)\psi''_{yy} + (C_1\psi - k_1 - C_3)(\psi'_y)^2 = 0;\\ &a = (C_3\varphi + C_4 + k_2)(\varphi'_x)^{-2},\\ &b = (C_3\psi - k_2)(\psi'_y)^{-2}, \end{aligned} \qquad (2.4.3.25)$$

где уравнения для функций φ и ψ не зависят от a и b и могут решаться независимо. Не проводя полного исследования системы (2.4.3.25), отметим простой частный случай, когда она интегрируется в явном виде.

При $C_1 = C_2 = C_4 = k_1 = k_2 = 0$, $C_3 = C \neq 0$ имеем

$$a(x) = \alpha e^{\mu x}, \quad b(y) = \beta e^{\nu y}, \quad \varphi(x) = \frac{Ce^{-\mu x}}{\alpha\mu^2}, \quad \psi(y) = \frac{Ce^{-\nu y}}{\beta\nu^2},$$

где α, β, μ, ν — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в (2.4.3.24) и учитывая вид переменной ζ (2.4.3.23), получим уравнение для функции $u(\zeta)$:

$$u''_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\zeta}u'_\zeta = \frac{4}{C}f(u).$$

Система (2.4.3.25) имеет также другие решения, приводящие к различным выражениям для функций $a(x)$ и $b(y)$. В табл. 2.4 указаны случаи, когда эти функции могут быть выражены в явном виде [18, 47, 286] (опущено решение типа бегущей волны, соответствующее $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$). В общем случае решение системы (2.4.3.24) приводит к функциям $a(x)$ и $b(y)$, которые записываются в параметрической форме [290]. ◀

Замечание 2.10. *Результаты, описанные в примере 2.21, применимы также для нелинейных уравнений гиперболического типа, когда переменная $y = t$ играет роль времени и функциональные коэффициенты $a(x)$ и $b(y)$ имеют разные знаки, т. е. $a(x)b(y) < 0$. В этом случае функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, приведенные для первых трех уравнений в табл. 2.4, также имеют разные знаки и $\varphi(x)\psi(y) < 0$. Знак параметра C выбирается так, чтобы рассматриваемой области выполнялось условие $\varphi(x)+\psi(y) \geqslant 0$.*

Замечание 2.11. *Уравнения и решения, описанные в примере 2.21, допускают различные многомерные обобщения, которые обсуждаются далее в разд. 2.6.5.*

Таблица 2.4. Решения с обобщенным разделением переменных вида $u = u(\zeta)$, где $\zeta^2 = \varphi(x) + \psi(y)$, для уравнений теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником произвольного вида.

Уравнение теплопроводности	Функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$	Уравнение для $u{=}u(\zeta)$
$(\alpha x^n u_x)_x + (\beta y^k u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \dfrac{Cx^{2-n}}{\alpha(2-n)^2}$, $\psi(y) = \dfrac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$u''_{\zeta\zeta} + \dfrac{4-nk}{(2-n)(2-k)}\dfrac{1}{\zeta}u'_\zeta = \dfrac{4}{C}f(u)$
$(\alpha e^{\mu x} u_x)_x + (\beta e^{\nu y} u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \dfrac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi(y) = \dfrac{C}{\beta\nu^2}e^{-\nu y}$	$u''_{\zeta\zeta} - \dfrac{1}{\zeta}u'_\zeta = \dfrac{4}{C}f(u)$
$(\alpha e^{\mu x} u_x)_x + (\beta y^k u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \dfrac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi(y) = \dfrac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$u''_{\zeta\zeta} + \dfrac{k}{2-k}\dfrac{1}{\zeta}u'_\zeta = \dfrac{4}{C}f(u)$
$(\alpha x^2 u_x)_x + (\beta y^2 u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \mu\ln\lvert x\rvert$, $\psi(y) = \nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (2.4.3.24), оба выражения в квадратных скобках — константы
$\alpha w_{xx} + (\beta y^2 u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \mu x$, $\psi(y) = \nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (2.4.3.24), оба выражения в квадратных скобках — константы
Обозначения: C, α, β, μ, ν, n, k — свободные параметры ($C\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$, $n\neq 2$, $k\neq 2$)		

2.5. Построение решений с функциональным разделением переменных в неявной форме

2.5.1. Предварительные замечания. Решения типа бегущей волны в неявном виде

Метод построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявной форме основан на обобщении решений типа бегущей волны различных нелинейных уравнений в частных производных. Прежде, чем описывать этот метод, приведем сначала четыре простых примера, иллюстрирующих существование решений, задаваемых в неявном виде, у диффузионных и волновых уравнений.

► Пример 2.22. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \tag{2.5.1.1}$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$. Уравнение не зависит явно от x и t и имеет решение типа бегущей волны

$$u = u(z), \qquad z = \lambda t + \kappa x, \tag{2.5.1.2}$$

где κ и λ — произвольные постоянные. Подставив (2.5.1.2) в (2.5.1.1), приходим к ОДУ $\lambda u'_z = \kappa^2[f(u)u'_z]'_z$. Интегрируя, получим его решение в неявном виде

$$\kappa^2 \int \frac{f(u)\,du}{\lambda u + C_1} = \lambda t + \kappa x + C_2, \tag{2.5.1.3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В правой части решения (2.5.1.3) переменная z была заменена на исходные переменные с помощью (2.5.1.2).

Видно, что даже для простейших функций, таких как $f(u) = u$, $f(u) = e^u$, $f(u) = \sin u$, $f(u) = \cos u$, решение (2.5.1.3) уравнения (2.5.1.1) нельзя выразить через элементарные функции. Поэтому поиск точных решений более сложных уравнений диффузионного типа в явном виде представляется малоэффективным. ◀

► **Пример 2.23.** Рассмотрим теперь обобщенное уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} - f(u)u_x, \tag{2.5.1.4}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Оно имеет решение типа бегущей волны вида (2.5.1.2), которое можно записать в неявной форме

$$\kappa^2 \int \frac{du}{\kappa F(u) + \lambda u + C_1} = \lambda t + \kappa x + C_2, \qquad F(u) = \int f(u)\,du. \tag{2.5.1.5}$$

◀

► **Пример 2.24.** Нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x, \tag{2.5.1.6}$$

где $f(u)$ — произвольная функция, имеет решение типа бегущей волны вида (2.5.1.2), которое можно представить в неявном виде

$$\int [\kappa^2 f(u) - \lambda^2]\,du = C_1(\lambda t + \kappa x) + C_2. \tag{2.5.1.7}$$

◀

► **Пример 2.25.** Нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$u_{tt} = u_{xx} + f(u), \tag{2.5.1.8}$$

где $f(u)$ — произвольная функция, также допускает решения типа бегущей волны $u = u(z)$, $z = \lambda t + \kappa x$ (при $\lambda \neq \pm\kappa$), которые можно представить в неявном виде

$$\int \Big[C_1 + \frac{2}{\lambda^2 - \kappa^2} F(u)\Big]^{-1/2} du = C_2 \pm (\lambda t + \kappa x), \qquad F(u) = \int f(u)\,du. \tag{2.5.1.9}$$

◀

Примеры 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 показывают, что нелинейные уравнения (2.5.1.1), (2.5.1.4), (2.5.1.6), (2.5.1.8), которые часто встречаются в приложениях, имеют решения типа бегущей волны, которые можно представить в неявном виде. Важно отметить, что в общем случае для произвольной функции $f(u)$ эти решения нельзя записать в явном виде. Отметим, что в [287] указаны более сложные нелинейные УрЧП, допускающие решения в неявном виде.

Замечание 2.12. *На практике для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными нередко используются методы, основанные априорном задании явного вида решений (метод tanh-функций [146, 152, 237, 263, 264, 362, 375], метод exp-функций [86, 124, 147, 183, 184, 222, 333, 371, 375], методы sin- и cos-функций [74, 84, 360, 361] и некоторые другие методы), в которые включают свободные параметры. Значения этих параметров определяются далее методом неопределенных коэффициентов обычно с привлечением методов компьютерной алгебры. Подобные прямые методы имеют весьма узкую область применимости, поскольку вид решения задается заранее («вслепую») без учета свойств рассматриваемых нелинейных уравнений. Сказанное хорошо иллюстрируют примеры 2.22–2.25, где в случае общего положения точные решения вообще не могут быть представлены в явной форме.*

Отметим, что подавляющее большинство известных общих решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений представляется в неявной или параметрической форме (подобный вывод следует из статистической обработки материалов наиболее полных справочников по точным решениям ОДУ [285, 288]). Рассмотренные выше простые примеры 2.22–2.25 позволяют высказать правдоподобную гипотезу о том, что нелинейные уравнения с частными производными также допускают точные решения в неявном или параметрическом виде чаще, чем в явном виде. В частности, наиболее общие нелинейные УрЧП, зависящие от произвольных функций искомой величины, не имеют невырожденных решений, которые допускают представление в явной форме. Поэтому весьма важной является разработка прямых методов построения точных решений в неявной форме для нелинейных УрЧП.

В разд. 2.5.2 будет описан метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, основанный на существенном обобщении решений типа бегущей волны, рассмотренных в примерах 2.22 — 2.25.

2.5.2. Прямой метод построения решений с функциональным разделением переменных в неявном виде. Описание

Будем рассматривать нелинейные уравнения в частных производных

$$G(x, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0. \qquad (2.5.2.1)$$

Точные решения ищем в неявном виде [44, 273, 274]:

$$\int h(u)\, du = \xi(x)\omega(t) + \eta(x), \qquad (2.5.2.2)$$

где функции $h = h(u)$, $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x)$, $\omega = \omega(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Замечание 2.13. *Представление решения в неявном виде (2.5.2.2) представляет собой существенное обобщение решений типа бегущей волны (2.5.1.3), (2.5.1.5), (2.5.1.7), (2.5.1.9) нелинейных УрЧП (2.5.1.1), (2.5.1.4), (2.5.1.6), (2.5.1.8), рассмотренных ранее. Например, представление решения в виде (2.5.2.2) основано на обобщении решения (2.5.1.3) уравнения (2.5.1.1), которое осуществляется следующим образом:*

$$\frac{\kappa^2 f(u)}{\lambda u + C_1} \implies h(u), \quad \lambda \implies \xi(x), \quad t \implies \omega(t), \quad \kappa x + C_2 \implies \eta(x).$$

Перейдем к описанию процедуры построения точных решений в неявном виде (2.5.2.2). Сначала с помощью (2.5.2.2) вычисляются частные производные u_x, u_t, u_{xx}, $\ldots$, которые выражаются через функции h, ξ, η, ω и их производные. Затем эти частные производные поставляются в уравнение (2.5.2.1), после чего помощью выражения (2.5.2.2) исключается переменная t. В результате (путем подходящего выбора ω) приходят к билинейному функционально-дифференциальному уравнению вида

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{N}\Phi_j[x]\Psi_j[u]=0,\\ \Phi_j[x]\equiv\Phi_j(x,\xi,\eta,\xi'_x,\eta'_x,\xi''_{xx},\eta''_{xx}\ldots),\\ \Psi_j[u]\equiv\Psi_j(u,h,h'_u,h''_{uu},\ldots).\end{gathered}\tag{2.5.2.3}$$

Здесь $\Phi_j[x]$ и $\Psi_j[u]$ — дифференциальные формы (в некоторых случаях функциональные коэффициенты), которые зависят соответственно только от x и u. Справедливо следующее утверждение.

Принцип расщепления. Функционально-дифференциальные уравнения вида (2.5.2.3) могут иметь решения, только если формы $\Psi_j[u]$ $(j=1,\ldots,N)$ связаны линейными соотношениями

$$\sum_{j=1}^{m_i}k_{ij}\Psi_j[u]=0,\qquad i=1,\ldots,n,\tag{2.5.2.4}$$

где k_{ij} — некоторые константы, $1\leqslant m_i\leqslant N-1$, $1\leqslant n\leqslant N-1$. Необходимо также рассмотреть вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений отдельные дифференциальные формы $\Psi_j[u]$ обращаются в нуль.

Принцип расщепления также справедлив и для форм $\Phi_j[x]$.

Более подробное описание принципа расщепления дано в разд. 1.5.1—1.5.2.

Указанный принцип расщепления будет использоваться в разд. 2.5.3—2.5.5 для построения решений некоторых функционально-дифференциальных уравнений вида (2.5.2.3), которые возникают при поиске точных решений нелинейных уравнений диффузионного и волнового типов.

Замечание 2.14. *Построение решения в неявном виде с интегральным членом в левой части равенства (2.5.2.2) часто приводит дифференциальным уравнениям более низкого порядка относительно функции h, чем при поиске точных решений в явном виде. Кроме того, неявное представление решения обычно приводит к более простым явным выражениям функций f и g через h (при поиске точных решений в явном виде функции f и g часто выражаются через u в параметрической форме [287]). Отметим также, что в случае общего положения различные линейные соотношения вида (2.5.2.4) соответствуют различным решениям рассматриваемого УрЧП.*

Заметим, что решения вида (2.5.2.2) обычно нельзя получить с помощью классического метода группового анализа УрЧП [32, 91, 197, 259].

2.5.3. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами

Краткий обзор точных решений нелинейных УрЧП диффузионного типа. Преобразования, симметрии и точные решения различных классов нелинейных реакционно-диффузионных, конвективно-диффузионных и родственных уравнений, не зависящих явно от переменных x и t, рассматривались во многих работах (см., например, [11, 18, 22, 23, 30, 47, 48, 54, 100, 116–118, 120, 121, 131, 141, 150, 158, 160, 163, 188, 197, 211, 217, 223, 287, 318, 322, 372] и цитируемую в них литературу). Для построения точных решений чаще всего использовались классический и неклассический методы исследования симметрий [11, 30, 48, 117, 118, 121, 131, 160, 188, 197, 287], методы обобщенного и функционального разделения переменных [48, 141, 150, 158, 163, 287, 318, 372] и метод дифференциальных связей [48, 158, 163, 211, 287, 318].

Некоторые работы (см., например, [18, 47, 101, 275, 287, 314, 318, 346, 347, 349, 350]) были посвящены нелинейным реакционно-диффузионным уравнениям с переменными коэффициентами, зависящими от пространственной переменной x (далее такие коэффициенты иногда будут называться автономными). В табл. 2.5 указан вид точных решений некоторых уравнений данного типа с одной или двумя произвольными функциями.

Таблица 2.5. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами и их точные решения.

№	Уравнение	Вид решения или замечание	Литература
1	$u_t=[a(x)u^n u_x]_x+b(x)u^{n+1}$	$u=\varphi(x)\psi(t)$	[18, 47, 287]
2	$u_t=[a(x)e^{\lambda u}u_x]_x+b(x)e^{\lambda u}$	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	[18, 47, 287]
3	$u_t=[a(x)u_x]_x+b(x)u+cu\ln u$	$u=\varphi(x)\psi(t)$	[47, 287]
4	$u_t=(u^{-4/3}u_x)_x+b(x)u^{-1/3}$	Приводится к $v_t=(v^{-4/3}v_z)_z$	[18, 47, 287]
5	$u_t=[x^n f(u)u_x]_x+x^{n-2}g(u)$	$u=U(z),\ z=xt^{1/(n-2)},\ k\neq 2$	[273]
6	$u_t=[x^2 f(u)u_x]_x+g(u)$	$u=U(z),\ z=\lambda t+\ln x$	[273]
7	$u_t=[e^{\lambda x}f(u)u_x]_x+e^{\lambda x}g(u)$	$u=U(z),\ z=\lambda x+\ln t,\ \lambda\neq 0$	[273]
8	$u_t=[a(x)u_x]_x+[x^2/a(x)]g(u)$	$u=U(z),\ z=t+\int [x/a(x)]\,dx$	[275]
9	$u_t=u_{xx}+\operatorname{th}^2(kx)g(u)$	$u=U(z),\ z=t+k^{-2}\ln\operatorname{ch}(kx)$	[275]

Здесь $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции, c, n, λ — свободные параметры.

Замечание 2.15. *Уравнения и решения №№ 5–7, приведенные в табл. 2.5, обобщают реакционно-диффузионные уравнения со степенной и экспоненциальной нелинейностями и их инвариантные решения, которые рассматривались в [346, 347, 349].*

Родственные и более сложные нелинейные уравнения диффузионного типа исследовались в работах [25, 83, 205, 223, 266, 287, 373]. Точные решения ряда систем уравнений реакционно-диффузионного типа описаны в книгах [115, 287] (в них также даны ссылки на публикации по этой тематике).

Класс рассматриваемых нелинейных реакционно-диффузионных уравнений. Будем рассматривать одномерные нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u). \tag{2.5.3.1}$$

Отметим, что уравнение (2.5.3.1) при $a(x) = b(x) = c(x) = x^n$, где x — радиальная координата, описывает реакционно-диффузионные процессы с радиальной симметрией в двумерном (при $n = 1$) и трехмерном (при $n = 2$) случаях.

Аргументы функций $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $f = f(u)$, $g = g(u)$, $h = h(u)$, $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x)$, $\omega = \omega(t)$, входящих в уравнение (2.5.3.1) и решение (2.5.2.2), ниже будут часто опускаться.

Замечание 2.16. *В [318] для поиска точных решений нелинейного уравнения (2.5.3.1) с функциями $a(x) = c(x) = 1$ использовалось неявное представление (2.5.2.2) при $\xi(x) = 1$.*

Далее основное внимание будет уделено построению точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений довольно общего вида (2.5.3.1), которые зависят от одной или двух произвольных функций. Важно отметить, что точные решения уравнений математической физики, которые содержат произвольные функции и обладают значительной общностью, представляют большой практический интерес, позволяя оценивать точность различных численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих начально-краевых задач.

Вывод функционально-дифференциального уравнения. Точные решения класса реакционно-диффузионных уравнений (2.5.3.1) ищем в неявном виде (2.5.2.2). Дифференцируя соотношение (2.5.2.2) по t и x, получим

$$\begin{aligned} hu_t &= \xi\omega'_t \implies u_t = \frac{\xi\omega'_t}{h};\\ hu_x &= \xi'_x\omega + \eta'_x \implies u_x = \frac{\xi'_x\omega + \eta'_x}{h};\\ (afu_x)_x &= \Big[(a\xi'_x\omega + a\eta'_x)\frac{f}{h}\Big]_x\\ &= [(a\xi'_x)'_x\omega + (a\eta'_x)'_x]\frac{f}{h} + a(\xi'_x\omega + \eta'_x)^2\frac{1}{h}\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u. \end{aligned} \tag{2.5.3.2}$$

Подставив эти выражения в (2.5.3.1), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$\omega'_t = Q_1(x,u)\omega^2 + Q_2(x,u)\omega + Q_3(x,u), \tag{2.5.3.3}$$

где функции Q_n не зависят явно от t и определяются формулами

$$
\begin{aligned}
&Q_1(x,u) = \frac{a(\xi'_x)^2}{c\xi}\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u,\\
&Q_2(x,u) = \frac{1}{c\xi}\Big[(a\xi'_x)'_x f + 2a\xi'_x\eta'_x\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u\Big],\\
&Q_3(x,u) = \frac{1}{c\xi}\Big[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + bgh\Big].
\end{aligned}
\tag{2.5.3.4}
$$

Уравнение (2.5.3.3)—(2.5.3.4) зависит от трех переменных t, x, u и содержит неизвестные функции (и их производные) различных аргументов, которые связаны одним дополнительным соотношением (2.5.2.2). Это уравнение является более сложным, чем уравнения вида (2.5.2.3).

Функционально-дифференциальное уравнение (2.5.3.3) — (2.5.3.4) существенно упрощается в двух случаях: (*a*) $\xi'_x = 0$ и (*b*) $(f/h)'_u = 0$. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай $\boldsymbol{\xi(x) = 1}$. Решения типа обобщенной бегущей волны при $\boldsymbol{\omega(t) = kt}$. При $\xi'_x = 0$ без ограничения общности можно положить $\xi = 1$. Подставив $\xi = 1$ в формулы (2.5.3.4), получим $Q_1(x,u) = Q_2(x,u) = 0$. В результате уравнение (2.5.3.3) приводится к виду

$$
\omega'_t = \frac{1}{c}\Big[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + bgh\Big]. \tag{2.5.3.5}
$$

Функционально-дифференциальное уравнение (2.5.3.5) является уравнением с разделенными переменными (левая часть зависит только от t, а правая зависит от x и u). Поэтому можно положить $\omega'_t = k = \text{const}$, что дает $\omega(t) = kt$. Подставив эту функцию и $\xi(x) = 1$ в (2.5.2.2), приходим к решению типа обобщенной бегущей волны, заданному в неявном виде

$$
\int h(u)\,du = kt + \int \theta(x)\,dx. \tag{2.5.3.6}
$$

Функции $h(u)$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ будут определяться в ходе дальнейшего анализа из функционально-дифференциального уравнения

$$
(a\theta)'_x f + a\theta^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + bgh - kc = 0, \tag{2.5.3.7}
$$

которое получается подстановкой функций $\omega(t) = kt$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ в равенство (2.5.3.5). Уравнение (2.5.3.7) представляет собой функционально-дифференциальное уравнение билинейного вида (2.5.2.3) при $N = 4$.

Решение 1. Рассмотрим сначала вырожденный случай, в котором дифференциальная форма $(f/h)'_u$ в (2.5.3.7) равна нулю. В этом случае согласно принципу расщепления (в дальнейшем он упоминаться не будет), уравнение (2.5.3.7) имеет решения при выполнении условий

$$
h = f, \quad g = A + \frac{B}{f}, \quad (a\theta)'_x + Ab = 0, \quad Bb - kc = 0, \tag{2.5.3.8}
$$

где A и B — произвольные постоянные. Из соотношений (2.5.3.8) при $b(x) = c(x) = 1$ следует, что уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + A + \frac{k}{f(u)}, \tag{2.5.3.9}$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)\,du = kt - A\int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \tag{2.5.3.10}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В частном случае $a(x) = 1$ уравнение (2.5.3.9) и его решение (2.5.3.10) переходят в уравнение и решение, рассмотренные в [158].

Замечание 2.17. *Легко проверить, что нелинейное УрЧП*

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x) + \frac{k}{f(u)},$$

которое содержит три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$ и обобщает уравнение (2.5.3.9), имеет точное решение в неявном виде

$$\int f(u)\,du = kt - \int \frac{1}{a(x)}\biggl(\int b(x)\,dx\biggr)dx + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2.$$

Более сложное нелинейное уравнение

$$u_t = c(x)[a(x)f(u)u_x]_x + b(x) + \frac{k(t)}{f(u)}, \tag{2.5.3.11}$$

которое содержит пять произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $k(t)$, $f(u)$, имеет точное решение в неявном виде

$$\int f(u)\,du = \int k(t)\,dt - \int \frac{1}{a(x)}\biggl(\int \frac{b(x)}{c(x)}\,dx\biggr)dx + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2.$$

Решение 2. Уравнение (2.5.3.7) тождественно удовлетворяется, если положить

$$f = A, \quad g = \frac{1}{h}\Bigl(\frac{f}{h}\Bigr)'_u, \quad A(a\theta)'_x - kc = 0, \quad b = -a\theta^2, \tag{2.5.3.12}$$

где A — произвольная постоянная.

С помощью соотношений (2.5.3.12) при $c(x) = 1$ и $A = k = 1$ можно получить нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x - \frac{x^2}{a(x)}g(u), \tag{2.5.3.13}$$

где $a(x)$ — произвольная функция. Функция $g(u)$ выражается через произвольную функцию $h = h(u)$ по формуле

$$g(u) = -h^{-3}h'_u. \tag{2.5.3.14}$$

Уравнение (2.5.3.13) при условии (2.5.3.14) допускает точное решение

$$\int h(u)\,du = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1. \tag{2.5.3.15}$$

Разрешая равенство (2.5.3.14) относительно h, получим две функции

$$h(u) = \pm\biggl(2\int g(u)\,du + C_2\biggr)^{-1/2}.$$

Исключая h из (2.5.3.15) с помощью полученного выражения, запишем решения уравнения (2.5.3.13) в виде

$$\pm\int\biggl(2\int g(u)\,du + C_2\biggr)^{-1/2} du = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1. \tag{2.5.3.16}$$

Здесь $a(x)$ и $g(u)$ — произвольные функции, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

► Пример 2.26. Подставив $a(x) = x^n$ в (2.5.3.13), приходим к уравнению

$$u_t = (x^n u_x)_x - x^{2-n} g(u),$$

решения которого определяются по формулам (2.5.3.16) при $a(x) = x^n$. ◄

Отметим, что уравнение (2.5.3.13) и его решения были получены в статье [272] из иных соображений.

Решение 3. Уравнению (2.5.3.7) можно удовлетворить, положив

$$\Bigl(\frac{f}{h}\Bigr)'_u = A, \quad g = -\frac{f}{h}, \quad Aa\theta^2 = kc, \quad (a\theta)'_x = b, \tag{2.5.3.17}$$

где A — произвольная постоянная. Если взять $c(x) = 1$, то получим два нелинейных реакционно-диффузионных уравнения

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{A}}\,\frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}(Au + B), \tag{2.5.3.18}$$

где функция $f(u)$ выражается через произвольную функцию $h = h(u)$ по формуле

$$f(u) = (Au + B)h(u). \tag{2.5.3.19}$$

Уравнения (2.5.3.18)—(2.5.3.19) допускают точные решения

$$\int h(u)\,du = kt \pm \sqrt{\frac{k}{A}}\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C. \tag{2.5.3.20}$$

Формулы (2.5.3.19) и (2.5.3.20) содержат произвольные постоянные A, B, C.

Полагая $A = 4k$ и $B = 0$ в (2.5.3.18)—(2.5.3.20), имеем уравнения

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x \mp k\frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}u, \tag{2.5.3.21}$$

которые содержат две произвольных функции $a(x)$ и $f(u)$, а также одну произвольную постоянную k. Учитывая соотношение $h(u) = f(u)/(4ku)$, точные решения этих уравнений можно представить в неявном виде

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = 4k^2 t \pm 2k \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_1, \tag{2.5.3.22}$$

где $C_1 = 4Ck$ — произвольная постоянная.

► Пример 2.27. Подставив $a(x) = x^{2\beta}$ и $k = \mp\alpha/(2\beta)$ в (2.5.3.21) и (2.5.3.22), приходим к уравнению

$$u_t = [x^{2\beta} f(u) u_x]_x + \alpha x^{\beta-1} u, \qquad \beta \neq 0,$$

которое зависит от произвольной функции $f(u)$ и допускает точные решения в неявной форме

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}t - \dfrac{\alpha}{\beta(1-\beta)}x^{1-\beta} + C_1 & \text{при } \beta \neq 1, \\ \alpha^2 t - \alpha \ln|x| + C_1 & \text{при } \beta = 1. \end{cases}$$ ◄

► Пример 2.28. Подставив $a(x) = e^{2\beta x}$ и $k = \mp\alpha/(2\beta)$ в (2.5.3.21) и (2.5.3.22), приходим к уравнению

$$u_t = [e^{2\beta x} f(u) u_x]_x + \alpha e^{\beta x} u, \qquad \beta \neq 0,$$

которое зависит от произвольной функции $f(u)$ и допускает точные решения в неявной форме

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = \frac{\alpha^2}{\beta^2}t + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta x} + C_1.$$ ◄

Решение 4. Уравнение (2.5.3.7) удовлетворяется, если положить

$$Af = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad g = \frac{k}{h}, \quad (a\theta)'_x + Aa\theta^2 = 0, \quad b = c, \tag{2.5.3.23}$$

где A — произвольная постоянная. Общее решение уравнений (2.5.3.23) имеет вид

$$g = \frac{k}{f}\left(A\int f\,du + B\right), \quad h = f\left(A\int f\,du + B\right)^{-1}, \quad \theta = \frac{1}{a}\left(A\int \frac{dx}{a} + C_1\right)^{-1}, \tag{2.5.3.24}$$

где $f = f(u)$ и $a = a(x)$ — произвольные функции, а B и C_1 — произвольные постоянные.

Подставив $c(x) = 1$ и $A = 1$ в (2.5.3.23) и (2.5.3.24), получим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x) f(u) u_x]_x + \frac{k}{f(u)}\left(\int f(u)\,du + B\right), \tag{2.5.3.25}$$

которое имеет точное решение

$$\int f(u)\,du + B = C_2 e^{kt}\biggl(\int \frac{dx}{a(x)} + C_1\biggr). \tag{2.5.3.26}$$

Уравнение (2.5.3.25) и решение (2.5.3.26) содержат произвольные функции $a(x)$, $f(u)$ и произвольные постоянные B, C_1, C_2, k. При выводе формулы (2.5.3.26) было использовано соотношение $\int h\,du = \frac{1}{A}\ln(A\int f\,du + B)$.

Отметим, что решение (2.5.3.26) является вырожденным в том смысле, что оно обращает в нуль диффузионный член $[a(x)f(u)u_x]_x$ уравнения (2.5.3.25) (однако $u_{xx} \not\equiv 0$).

► Пример 2.29. Положив $f(u) = u^m$, $B = 0$, $k = (m+1)\beta$ ($m \neq -1$) в (2.5.3.25) и (2.5.3.26), получим реакционно-диффузионное уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = [a(x)u^m u_x]_x + \beta u,$$

которое имеет точное решение

$$u = e^{\beta t}\biggl(\bar{C}_1 \int \frac{dx}{a(x)} + \bar{C}_2\biggr)^{\frac{1}{m+1}},$$

где $\bar{C}_1 = C_2(m+1)$ и $\bar{C}_2 = C_1C_2(m+1)$ — произвольные постоянные. ◄

► Пример 2.30. Положив в (2.5.3.25) и (2.5.3.26) $f(u) = e^{\lambda u}$, $B = 0$, $k = \beta\lambda$, получим реакционно-диффузионное уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$u_t = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + \beta,$$

которое имеет точное решение

$$u = \beta t + \frac{1}{\lambda}\ln\biggl(\bar{C}_1 \int \frac{dx}{a(x)} + \bar{C}_2\biggr),$$

где $\bar{C}_1 = C_2\lambda$ и $\bar{C}_2 = C_1C_2\lambda$ — произвольные постоянные. ◄

Решение 5. Уравнение (2.5.3.7) также имеет решения при выполнении следующих условий:

$$(a\theta)'_x = Ac, \quad a\theta^2 = Bc, \quad b = c, \quad Af + B\Bigl(\frac{f}{h}\Bigr)'_u + gh - k = 0, \tag{2.5.3.27}$$

где A и B — произвольные постоянные.

1°. Подставив $a(x) = b(x) = c(x) = 1$, $\theta(x) = \kappa$, $A = 0$, $B = \kappa^2$, $k = \lambda$ в (2.5.3.27), получим решение типа бегущей волны вида (2.5.1.2), которое здесь не приводится.

2°. Полагая в первых трех уравнениях (2.5.3.27) $c(x) = 1$ и $A = B = 1$, находим

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = 1, \quad \theta(x) = 1/x. \tag{2.5.3.28}$$

В результате приходим к уравнению

$$u_t = [x^2 f(u) u_x]_x + g(u), \tag{2.5.3.29}$$

где

$$g(u) = \frac{k}{h(u)} - \frac{f(u)}{h(u)} - \frac{1}{h(u)} \frac{d}{du}\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right], \tag{2.5.3.30}$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = kt + \ln x. \tag{2.5.3.31}$$

Отметим, что уравнение (2.5.3.29)—(2.5.3.30) содержит две произвольные функции $f = f(u)$ и $h = h(u)$.

Замечание 2.18. *Инвариантное решение (2.5.3.31) уравнения (2.5.3.29) можно искать в обычном виде $u = U(z)$, где $z = kt + \ln x$ (в этом случае соотношение (2.5.3.30) между g и функциями f и h не используется). Функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ:*

$$kU'_z = [f(U)U'_z]'_z + f(U)U'_z + g(U).$$

Замечание 2.19. *Некоторые другие точные решения типа обобщенной бегущей волны вида (2.5.3.6) уравнения (2.5.3.1) приведены в [273].*

Случай $\boldsymbol{\xi(x) = 1}$. Решения с функциональным разделением переменных при $\boldsymbol{\omega(t) = ke^{\lambda t}}$. Вернемся к уравнению (2.5.3.5). Функция $\omega(t)$ входит в формулу (2.5.2.2) линейным образом. Если положить $\omega(t) = ke^{\lambda t}$ (k — произвольная постоянная), то решение примет вид

$$H(u) = ke^{\lambda t} + \eta(x), \qquad H(u) = \int h(u)\,du, \tag{2.5.3.32}$$

а функцию $e^{\lambda t}$ можно исключить из уравнения (2.5.3.5) с помощью (2.5.3.32). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению вида (2.5.2.3) при $N = 5$:

$$\lambda\eta - \lambda H + \frac{(a\eta'_x)'_x}{c} f + \frac{a(\eta'_x)^2}{c}\left(\frac{f}{h}\right)'_u + \frac{b}{c} gh = 0. \tag{2.5.3.33}$$

Замечание 2.20. *Уравнение (2.5.3.33) можно вывести из других соображений. В самом деле, переписав равенство (2.5.2.2) виде*

$$\xi\omega/(H - \eta) = 1, \tag{2.5.3.34}$$

умножим правую часть уравнения (2.5.3.5) на $\xi\omega/(H-\eta)$ и после простых преобразований с учетом того, что $\xi = 1$, получим

$$\frac{\omega'_t}{\omega} = \frac{1}{c(H - \eta)}\left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + bgh\right]. \tag{2.5.3.35}$$

В уравнении (2.5.3.35) переменные разделены: левая часть зависит только от t, а правая часть — от x и u. Приравняв обе части (2.5.3.35) константе λ, получим два уравнения. Левая часть (2.5.3.35) дает уравнение $\omega'_t/\omega = \lambda$, которое имеет решение $\omega = ke^{\lambda t}$. Правая часть (2.5.3.35) приводит к уравнению (2.5.3.33).

Решение 6. Уравнение (2.5.3.33) тождественно удовлетворяется, если положить

$$\begin{aligned} &f = C_1 uh + C_2 h, \quad g = \lambda \frac{H}{h} - C_1 C_3 u - C_2 C_3, \\ &b = c, \quad (a\eta'_x)'_x = C_3 c, \quad C_1 a(\eta'_x)^2 + \lambda c\eta = 0, \end{aligned} \tag{2.5.3.36}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Соотношения (2.5.3.36) содержат две произвольных функции h и c, а остальные функции f, g, a, b, η выражаются через них.

Общее решение системы, которая состоит из последних двух уравнений (2.5.3.36), имеет вид

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{C_5}{c(x)} \left[C_3 \int c(x)\,dx + C_4 \right]^{2+\lambda/(C_1 C_3)}, \\ \eta(x) &= -\frac{C_1}{C_5 \lambda} \left[C_3 \int c(x)\,dx + C_4 \right]^{-\lambda/(C_1 C_3)}, \end{aligned} \tag{2.5.3.37}$$

где C_4 и C_5 — произвольные постоянные.

В частности, положив в (2.5.3.37) $c(x) = 1$, $C_1 = C_3 = C_5 = 1$, $C_2 = C_4 = 0$, $\lambda = n-2$, получим $a(x) = x^n$, $b(x) = 1$, $\eta(x) = x^{2-n}/(2-n)$. Учитывая первые два соотношения в (2.5.3.36), приходим к реакционно-диффузионному уравнению

$$\begin{aligned} &u_t = [x^n f(u) u_x]_x + g(u), \\ &f(u) = uh(u), \quad g(u) = \frac{(n-2)}{h(u)} \int h(u)\,du - u, \end{aligned} \tag{2.5.3.38}$$

где $h(u)$ — произвольная функция и $n \neq 2$ — произвольная постоянная, которое допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int h(u)\,du = ke^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}; \tag{2.5.3.39}$$

k — произвольная постоянная.

Принимая во внимание, что $h = f/u$, уравнение (2.5.3.38) можно представить в явном виде

$$u_t = [x^n f(u) u_x]_x - u + \frac{(n-2)u}{f(u)} \int \frac{f(u)}{u}\,du.$$

Его решение записывается так:

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = ke^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}.$$

Случай $\boldsymbol{\xi(x) = 1}$. Решения с функциональным разделением переменных при $\boldsymbol{\omega(t) = k \ln t}$. Подставив $\xi = 1$ и $\omega(t) = k \ln t$ в (2.5.2.2), ищем решения в виде

$$\int h(u)\,du = k \ln t + \eta(x). \tag{2.5.3.40}$$

Исключив t из выражений (2.5.3.5) (при $\omega = k\ln t$) и (2.5.3.40), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + bgh - kce^{\eta/k}e^{-H/k} = 0, \qquad H = \int h(u)\,du. \tag{2.5.3.41}$$

Замечание 2.21. *Уравнение (2.5.3.41) можно вывести из других соображений. Действительно, перепишем формулу (2.5.2.2) при $\xi = 1$ в виде*

$$e^{(H-\eta-\omega)/k} = 1,$$

где k — некоторая константа, а затем умножим правую часть уравнения (2.5.3.5) на $e^{(H-\eta-\omega)/k}$. После элементарных преобразований, получим

$$e^{\omega/k}\omega'_t = \frac{e^{(H-\eta)/k}}{c}\Big[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + bgh\Big]. \tag{2.5.3.42}$$

В уравнении (2.5.3.42) переменные разделены: левая часть зависит только от t, а правая часть — от x и u. Приравняв обе части (2.5.3.42) константе λ, получим два уравнения. Левая часть (2.5.3.42) дает уравнение $e^{\omega/k}\omega'_t = \lambda$, решение которого определяется формулой $\omega = k\ln(t+t_0) + k\ln(\lambda/k)$. Правая часть равенства (2.5.3.42) при $\lambda = k$ приводит к уравнению (2.5.3.41).

Решение 7. Уравнение (2.5.3.41) удовлетворяется, если положить

$$\begin{gathered}(a\eta'_x)'_x = Ace^{\eta/k}, \quad a(\eta'_x)^2 = Bce^{\eta/k}, \quad b = ce^{\eta/k},\\ Af + B\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + gh - k\exp(-H/k) = 0,\end{gathered} \tag{2.5.3.43}$$

где A и B — произвольные постоянные и $H = \int h(u)\,du$.

Подставив $c(x) = 1$, $A = 1/k$, $B = 1$ в первые три уравнения (2.5.3.43), получим

$$a(x) = b(x) = e^{\lambda x}, \quad \eta(x) = x, \quad \lambda = \frac{1}{k}. \tag{2.5.3.44}$$

В результате приходим к уравнению

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u)u_x]_x + e^{\lambda x}g(u), \tag{2.5.3.45}$$

где

$$g(u) = \frac{1}{\lambda h(u)}\exp\Big[-\lambda\int h(u)\,du\Big] - \lambda\frac{f(u)}{h(u)} - \frac{1}{h(u)}\frac{d}{du}\Big[\frac{f(u)}{h(u)}\Big], \tag{2.5.3.46}$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = x + \frac{1}{\lambda}\ln t. \tag{2.5.3.47}$$

Отметим, что уравнение (2.5.3.45) — (2.5.3.46) содержит две произвольные функции $f = f(u)$ и $h = h(u)$.

Замечание 2.22. *Инвариантное решение (2.5.3.47) уравнения (2.5.3.45) можно искать в обычном виде* $u = U(z)$, *где* $z = x + (1/\lambda)\ln t$ *(в этом случае соотношение (2.5.3.46) не используется). Функция* $U(z)$ *удовлетворяет ОДУ:*

$$\frac{1}{\lambda}U'_z = [e^{\lambda z}f(U)U'_z]'_z + e^{\lambda z}g(U).$$

Решение 8. Полагая $c(x) = 1$, $A = (1+k)/k$, $B = 1$ в первых трех уравнениях(2.5.3.43), имеем

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-2}, \quad \eta(x) = \ln x, \quad n = 2 + \frac{1}{k}. \tag{2.5.3.48}$$

В результате получим уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-2}g(u), \qquad n \neq 2, \tag{2.5.3.49}$$

где

$$g(u) = \frac{1}{(n-2)h(u)}\exp\left[-(n-2)\int h(u)\,du\right] - (n-1)\frac{f(u)}{h(u)} - \frac{1}{h(u)}\frac{d}{du}\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right], \tag{2.5.3.50}$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = \ln x + \frac{1}{n-2}\ln t. \tag{2.5.3.51}$$

Замечание 2.23. *Автомодельное решение (2.5.3.51) уравнения (2.5.3.49) можно искать в обычном виде* $u = U(z)$, *где* $z = xt^{1/(n-2)}$ *(в этом случае соотношение (2.5.3.50) не используется). Функция* $U(z)$ *определяется из ОДУ*

$$\frac{1}{n-2}zU'_z = [z^n f(U)U'_z]'_z + z^{n-2}g(U).$$

Решение 9. Уравнение (2.5.3.41) удовлетворяется, если выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\left(\frac{f}{h}\right)'_u = Af, \quad \exp(-H/k) = Bf, \quad gh = f,\\ (a\eta'_x)'_x + Aa(\eta'_x)^2 + b - Bkce^{\eta/k} = 0,\end{gathered} \tag{2.5.3.52}$$

где A и B — произвольные постоянные, $H = \int h(u)\,du$.

При $A = -1/k = \lambda$ и $B = 1$ первые три уравнения (2.5.3.52) имеют решения

$$f(u) = g(u) = e^{\lambda u}, \quad h(u) = 1. \tag{2.5.3.53}$$

В результате получим уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$c(x)u_t = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}, \tag{2.5.3.54}$$

которое допускает точное решение в явном виде

$$u = -\frac{1}{\lambda}\ln t + \eta(x), \tag{2.5.3.55}$$

где функция $\eta = \eta(x)$ удовлетворяет ОДУ:

$$[a(x)e^{\lambda\eta}\eta'_x]'_x + b(x)e^{\lambda\eta} + \frac{1}{\lambda}c(x) = 0. \qquad (2.5.3.56)$$

Уравнения (2.5.3.54) и (2.5.3.56) содержат три произвольных функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$. Отметим, что уравнение (2.5.3.56) сводится к линейному ОДУ с помощью подстановки $\zeta = e^{\lambda\eta}$.

Решение 10. Положив $A=n+1$, $B=1$, $k=-1/n$ в первых трех уравнениях (2.5.3.52), получим

$$f(u) = u^n, \quad g(u) = u^{n+1}, \quad h(u) = 1/u. \qquad (2.5.3.57)$$

В результате приходим к реакционно-диффузионному уравнению

$$c(x)u_t = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^{n+1} \qquad (2.5.3.58)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — произвольные функции, которое допускает точное решение $\ln u = -(1/n)\ln t + \eta(x)$. Это решение можно записать в явном виде

$$u = t^{-1/n}\zeta(x), \qquad \zeta(x) = e^{\eta(x)}, \qquad (2.5.3.59)$$

где функция ζ описывается ОДУ:

$$[a(x)\zeta^n\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta^{n+1} + \frac{1}{n}c(x)\zeta = 0. \qquad (2.5.3.60)$$

Случай $h(u) = f(u)$. Решения типа обобщенной бегущей волны при $\omega(t) = t$. При $(f/h)'_u = 0$ без ограничения общности можно положить $h = f$. Подставив $h = f$ в (2.5.3.3)—(2.5.3.4), получим уравнение

$$\omega'_t = \frac{(a\xi'_x)'_x}{c\xi}f\omega + \frac{1}{c\xi}\big[(a\eta'_x)'_x f + bfg\big]. \qquad (2.5.3.61)$$

Решение 11. В вырожденном случае, который возникает при условии

$$(a\xi'_x)'_x = 0, \qquad (2.5.3.62)$$

переменные в уравнении (2.5.3.61) разделяются и можно положить $\omega(t) = t$. В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$(a\eta'_x)'_x f + bfg - c\xi = 0. \qquad (2.5.3.63)$$

Интегрируя (2.5.3.62), находим связь между функциями $a=a(x)$ и $\xi=\xi(x)$:

$$\xi = C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2, \qquad (2.5.3.64)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Уравнение (2.5.3.63) допускает точные решения, если выполняются условия

$$g = k_1 + k_2 f^{-1}, \quad (a\eta'_x)'_x + k_1 b = 0, \quad k_2 b - c\xi = 0, \qquad (2.5.3.65)$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Из соотношений (2.5.3.64) и (2.5.3.65) следует, что нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + c(x)\xi(x)\Big[k + \frac{1}{f(u)}\Big], \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \tag{2.5.3.66}$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функция $\xi = \xi(x)$ определяется формулой (2.5.3.64), допускает точное решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\begin{gathered}\int f(u)\,du = \xi(x)t + \eta(x),\\ \eta(x) = -k\int \frac{1}{a(x)}\Big(\int c(x)\xi(x)\,dx\Big)dx + C_3\int \frac{dx}{a(x)} + C_4;\end{gathered} \tag{2.5.3.67}$$

C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

► Пример 2.31. Полагаем $a(x) = c(x) = 1$ в уравнении (2.5.3.66) и $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ в формулах (2.5.3.64) и (2.5.3.67). Получаем уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + x\Big[k + \frac{1}{f(u)}\Big], \tag{2.5.3.68}$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и произвольную постоянную k и имеет решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)\,du = xt - \frac{1}{6}kx^3 + C_3x + C_4.$$

В частном случае $f(u) = e^u$, уравнение (2.5.3.68) принимает вид

$$u_t = (e^u u_x)_x + x(k + e^{-u}).$$

Его решение выражается в явном виде: $u = \ln(xt - \frac{1}{6}kx^3 + C_3x + C_4)$. ◄

Решение 12. Подставим $\omega(t) = t$ в (2.5.2.2) и (2.5.3.61), а затем исключим t. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\xi(a\eta'_x)'_x - \eta(a\xi'_x)'_x + b\xi g - c\xi^2 f^{-1} + (a\xi'_x)'_x F = 0, \quad F = \int f(u)\,du, \tag{2.5.3.69}$$

при выводе которого было учтено соотношение $h = f$.

Уравнение (2.5.3.69) является частным случаем уравнения (2.5.2.3) при $N = 5$. Оно допускает решения, например, при следующих условиях:

$$g = k_1 + k_2 f^{-1} + k_3 F, \quad F = \int f(u)\,du, \tag{2.5.3.70}$$

$$\xi(a\eta'_x)'_x - \eta(a\xi'_x)'_x + k_1 b\xi = 0, \tag{2.5.3.71}$$

$$k_2 b - c\xi = 0, \tag{2.5.3.72}$$

$$(a\xi'_x)'_x + k_3 b\xi = 0, \tag{2.5.3.73}$$

где $f(u)$ — произвольная функция, k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Считая функции $a = a(x)$ и $c = c(x)$ заданными и исключая b из уравнений (2.5.3.72) и (2.5.3.73), приходим к уравнению типа Эмдена — Фаулера для функции ξ:

$$(a\xi_x')_x' + \frac{k_3}{k_2}c\xi^2 = 0. \qquad (2.5.3.74)$$

Уравнение (2.5.3.71) — линейное неоднородное ОДУ относительно η, которое имеет частное решение $\eta_p = -k_1/k_3$ (после подстановки этого значения уравнение (2.5.3.71) преобразуется к виду (2.5.3.73)). Укороченное линейное однородное уравнение (2.5.3.71), соответствующее $k_1 = 0$, имеет частное решение $\eta_0 = \xi$. Следовательно, порядок этого уравнения можно понизить [288]. С учетом сказанного находим общее решение уравнения (2.5.3.71):

$$\eta = C_1\xi + C_2\xi\int\frac{dx}{a\xi^2} - \frac{k_1}{k_3}, \qquad (2.5.3.75)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Функциональный коэффициент b определяется из уравнения (2.5.3.72).

В итоге приходим к нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + c(x)\xi(x)\left[k_1 + \frac{1}{f(u)} + k_3\int f(u)\,du\right], \qquad (2.5.3.76)$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функция $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.5.3.74) при $k_2 = 1$. Уравнение (2.5.3.76) имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\int f(u)\,du = \xi(x)t + \eta(x), \qquad (2.5.3.77)$$

где функция $\eta(x)$ определяется формулой (2.5.3.75).

Отметим, что (2.5.3.76) является обобщением уравнения (2.5.3.66).

► Пример 2.32. При $a(x) = c(x) = k_2 = 1$ уравнение (2.5.3.74) имеет точное решение $\xi = -(6/k_3)x^{-2}$. В этом случае функция η определяется по формуле (2.5.3.75) и принимает вид $\eta = A_1x^{-2} + A_2x^3 - (k_1/k_3)$, где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, которые можно выразить через C_1, C_2, k_3. ◄

Решение 13. Легко убедиться, что функционально-дифференциальное уравнение (2.5.3.69) также имеет решения при выполнении соотношений

$$g = k_1f^{-1}, \qquad F = k_2f^{-1} + k_3, \qquad (2.5.3.78)$$

где k_n — произвольные постоянные. Положив $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 0$ в (2.5.3.78), получим $f = u^{-1/2}$, $g = u^{1/2}$, $F = 2u^{1/2}$. Соответствующее нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$c(x)u_t = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + b(x)u^{1/2}, \qquad (2.5.3.79)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — произвольные функции, имеет точное решение, которое можно записать в явном виде

$$u = \tfrac{1}{4}[\xi(x)t + \eta(x)]^2. \tag{2.5.3.80}$$

Здесь функции $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(x)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} 2(a\xi'_x)'_x + b\xi - c\xi^2 = 0, \\ \xi(a\eta'_x)'_x - \eta(a\xi'_x)'_x = 0. \end{gathered} \tag{2.5.3.81}$$

Пусть $\xi = \xi(x)$ — решение первого уравнения в (2.5.3.81). Тогда общее решение второго уравнение в (2.5.3.81) можно определить по формуле (2.5.3.75) при $k_1 = 0$.

► Пример 2.33. Первому уравнению (2.5.3.81) можно удовлетворить, если положить $\xi(x) = b(x) = k = \text{const}$ и $c(x) = 1$. Поэтому уравнение

$$u_t = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + ku^{1/2},$$

которое зависит от произвольной функции $a(x)$, имеет точное решение

$$u = \frac{1}{4}\left[kt + C_1 + C_2\int\frac{dx}{a(x)}\right]^2.$$

◄

Замечание 2.24. *Более общее, чем (2.5.3.79), уравнение*

$$c(x)u_t = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + b(x)u^{1/2} + p(x), \tag{2.5.3.82}$$

содержащее четыре произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)$, имеет точное решение вида (2.5.3.80). Уравнение (2.5.3.82) принадлежит к рассматриваемому классу уравнений (2.5.3.1) в случаях $b(x) = 0$ и $p(x)/b(x) = \text{const}$.

Случай $h(u) = f(u)$. Решения с функциональным разделением переменных при $\omega(t) = e^{\lambda t}$. Подставим $\omega(t) = e^{\lambda t}$ в (2.5.2.2) и (2.5.3.61), а затем исключим t. Получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{\lambda}{f} = \frac{(a\xi'_x)'_x}{c\xi} + \left[\frac{(a\eta'_x)'_x}{c} + \frac{b}{c}g\right]\frac{1}{F-\eta}, \qquad F = \int f\,du. \tag{2.5.3.83}$$

Уравнение (2.5.3.83) тождественно удовлетворяется, если положить

$$(a\xi'_x)'_x = -k_1c\xi, \quad \eta = -k_2, \quad b = c, \quad g = \Bigl(\frac{\lambda}{f} + k_1\Bigr)(F + k_2), \tag{2.5.3.84}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Решение 14. Из соотношений (2.5.3.84) следует, что нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + c(x)\left[\frac{\lambda}{f(u)} + k_1\right]\left[\int f(u)\,du + k_2\right], \tag{2.5.3.85}$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а k_1, k_2, λ — произвольные постоянные, допускает решение с функциональным разделением переменных в неявном виде

$$\int f(u)\,du = \xi(x)e^{\lambda t} - k_2. \tag{2.5.3.86}$$

Функция $\xi = \xi(x)$ находится путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения $[a(x)\xi'_x]'_x + k_1 c(x)\xi = 0$.

В вырожденном случае $k_1 = 0$ функция $\xi = \xi(x)$ задается формулой (2.5.3.64).

► Пример 2.34. Положив $a(x) = c(x) = 1$ в (2.5.3.85) и (2.5.3.86), приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \left[\frac{\lambda}{f(u)} + k_1\right]\left[\int f(u)\,du + k_2\right], \tag{2.5.3.87}$$

точные решения которого определяются формулами

$$\int f(u)\,du = \begin{cases} e^{\lambda t}[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)] - k_2 & \text{при } k_1 = \beta^2 > 0, \\ e^{\lambda t}(C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}) - k_2 & \text{при } k_1 = -\beta^2 < 0, \\ e^{\lambda t}(C_1 + C_2 x) - k_2 & \text{при } k_1 = 0. \end{cases}$$ ◄

Случай $h(u) = f(u)$. Решения с функциональным разделением переменных при $\omega(t) = t^\beta$. Подставим $\omega(t) = t^{1/(1-n)}$ в (2.5.2.2) и (2.5.3.61), а затем исключим t. Получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{(n-1)f} = \frac{(a\xi'_x)'_x}{c\xi^{2-n}}\frac{1}{(F-\eta)^{n-1}} + \left[\frac{(a\eta'_x)'_x}{c\xi^{1-n}} + \frac{b}{c\xi^{1-n}}g\right]\frac{1}{(F-\eta)^n}, \tag{2.5.3.88}$$

где $F = \int f\,du$. Уравнению (2.5.3.88) можно удовлетворить, если положить

$$(a\xi'_x)'_x = -k_1 c\xi^{2-n}, \quad \eta = -k_2, \quad b = c\xi^{1-n}, \quad g = k_1(F + k_2) + \frac{(F+k_2)^n}{(n-1)f}, \tag{2.5.3.89}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Решение 15. Из соотношений (2.5.3.89) следует, что нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + c(x)\xi^{1-n}\left\{k_1[F(u) + k_2] + \frac{[F(u)+k_2]^n}{(n-1)f(u)}\right\}, \tag{2.5.3.90}$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, k_1, k_2, n, λ — произвольные постоянные, а $F(u) = \int f(u)\,du$, допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int f(u)\,du = \xi(x)t^{1/(1-n)} - k_2. \tag{2.5.3.91}$$

Функция $\xi = \xi(x)$ в (2.5.3.90) и (2.5.3.91) описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[a(x)\xi'_x]'_x + k_1 c(x)\xi^{2-n} = 0. \tag{2.5.3.92}$$

Отметим, что при $n = 2$ общее решение уравнения (2.5.3.92) имеет вид

$$\xi = -k_1 \int \frac{1}{a(x)} \biggl(\int c(x)\,dx \biggr) dx + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \qquad (2.5.3.93)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

► Пример 2.35. Подставив $a(x) = c(x) = 1$, $k_1 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ в (2.5.3.90) — (2.5.3.92), получим уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + x^{1-n} \frac{[F(u) + k_2]^n}{(n-1)f(u)}, \qquad F(u) = \int f(u)\,du, \qquad (2.5.3.94)$$

которое допускает точное решение в неявной форме $\int f(u)\,du = xt^{1/(1-n)} - k_2$. Это неинвариантное решение автомодельного вида, которое обращает в нуль диффузионный член $[f(u)u_x]_x$ уравнения (2.5.3.94) (причем $u_{xx} \neq 0$). ◄

2.5.4. Нелинейные конвективно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами

Класс рассматриваемых нелинейных конвективно-диффузионных уравнений. Будем рассматривать одномерные нелинейные уравнения конвективно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x. \qquad (2.5.4.1)$$

Некоторые точные решения нелинейных конвективно-диффузионных уравнений с переменными коэффициентами автономного вида, принадлежащие классу уравнений (2.5.4.1), получены в [41, 164, 200, 201, 313, 348].

Замечание 2.25. *Конвективно-диффузионное уравнение (2.5.4.1) при $a(x) = 1$, $b(x) = -1$, $c(x) = 1$, называется также уравнением Ричардса и используется для моделирования фильтрации воды в ненасыщенных почвах, где u — функция водонасыщения, $f = f(u)$ — коэффициент влагопереноса (фильтрации), $K = \int g(u)\,du$ — гидравлическая проводимость. О точных решениях уравнения Ричардса см., например, [181, 267, 339, 365].*

Далее основное внимание будет уделяться построению точных решений нелинейных конвективно-диффузионных уравнений достаточно общего вида (2.5.4.1), которые зависят от одной или двух произвольных функций. Кроме того, ряд точных решений уравнения (2.5.4.1) в случае $f(u) = 1$ описан в разд. 2.6.3.

Вывод функционально-дифференциального уравнения. Будем искать точные решения конвективно-диффузионных уравнений (2.5.4.1) в неявном виде (2.5.2.2) при $\xi(x) = 1$. Подставив формулы для производных (2.5.3.2) в (2.5.4.1), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\omega'_t = \frac{1}{c} \biggl[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \Bigl(\frac{f}{h} \Bigr)'_u + b\eta'_x g \biggr]. \qquad (2.5.4.2)$$

Здесь и далее аргументы функций $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $f = f(u)$, $g = g(u)$, $h = h(u)$, $\eta = \eta(x)$, $\omega = \omega(t)$, которое входят в уравнение (2.5.4.1) и решение (2.5.2.2) при $\xi(x) = 1$, будут часто опускаться.

Уравнение (2.5.4.2), зависящее от x, t, u, с помощью дифференцирования по x можно свести к функционально-дифференциальному уравнению билинейного вида (2.5.2.3) при $N = 6$, а затем использовать метод решения, описанный в разд. 1.5. Однако такой путь достаточно сложно реализовать технически, поскольку после дифференцирования повышается порядок производных в редуцированном уравнении и для определения функции $\omega(t)$ на заключительном этапе все равно необходимо вернуться к анализу уравнения (2.5.4.2).

В данном разделе для решения уравнения (2.5.4.2) будем применять прямой метод, основанный на принципе расщепления (см. разд. 2.5.2) и использовании функций $\omega(t) = kt$, $\omega(t) = ke^{\lambda t}$, $\omega(t) = k \ln t$, которые были получены в [41] для уравнений (2.5.4.1) специального вида при $f(u) = 1$ и произвольной $g(u)$.

Решения типа обобщенной бегущей волны при $\boldsymbol{\omega(t) = kt}$. Функционально-дифференциальное уравнение (2.5.4.2) представляет собой уравнение с разделенными переменными (левая часть зависит только от t, а правая — от x и u). Поэтому можно положить $\omega'_t = k = \text{const}$, что дает $\omega(t) = kt$. Рассматриваемая ситуация соответствуют решениям типа обобщенных бегущих волн, заданных в неявной форме

$$\int h(u)\,du = kt + \int \theta(x)\,dx. \tag{2.5.4.3}$$

Здесь подынтегральные функции $h(u)$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ будут определяться в ходе дальнейшего анализа из функционально-дифференциального уравнения

$$(a\theta)'_x f + a\theta^2 \Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + b\theta g - kc = 0, \tag{2.5.4.4}$$

которое получено путем подстановки функций $\omega(t) = kt$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ в (2.5.4.2). Уравнение (2.5.4.4) является функционально-дифференциальным уравнением билинейного вида (2.5.2.3) при $N = 4$.

Решение 1. Рассмотрим сначала вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(f/h)'_u$ в (2.5.4.4) обращается в нуль. В этом случае уравнение (2.5.4.4) имеет решения, если выполняются соотношения

$$h = f, \quad g = A + Bf, \quad (a\theta)'_x + Bb\theta = 0, \quad Ab\theta - kc = 0, \tag{2.5.4.5}$$

где A и B — произвольные постоянные. Полагая $A = k$ в (2.5.4.5), приходим к уравнению

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{c(x)}{\theta(x)}[k + Bf(u)]u_x, \tag{2.5.4.6}$$

которое для произвольных функций $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ и функции

$$\theta(x) = -\frac{B}{a(x)}\int c(x)\,dx - \frac{C_1}{a(x)}, \tag{2.5.4.7}$$

имеет решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)\,du = kt - B\int \frac{1}{a(x)}\biggl(\int c(x)\,dx\biggr)dx - C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2. \qquad (2.5.4.8)$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

► Пример 2.36. Положив $c(x)=1$, $B=1$, $C_1=0$ в (2.5.4.6)–(2.5.4.8), а затем переобозначив $a(x)$ на $xa(x)$, получим уравнение

$$u_t = [xa(x)f(u)u_x]_x - a(x)[k+f(u)]u_x,$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\int f(u)\,du = kt - \int \frac{dx}{a(x)} + C_2.$$

Здесь $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, k и C_2 — произвольные постоянные. ◄

Решение 2. Уравнение (2.5.4.4) тождественно удовлетворяется, если имеют место соотношения

$$f = A, \quad g = \Bigl(\frac{f}{h}\Bigr)'_u, \quad A(a\theta)'_x - kc = 0, \quad b = -a\theta, \qquad (2.5.4.9)$$

где A — произвольная постоянная.

Используя (2.5.4.9) при $c(x)=1$, $A=1$, $k=1$, можно получить нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)u_x]_x - xg(u)u_x, \qquad (2.5.4.10)$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а функция $g(u)$ следующим образом выражается через произвольную функцию $h=h(u)$:

$$g(u) = -h^{-2}h'_u. \qquad (2.5.4.11)$$

Уравнение (2.5.4.10) при условии (2.5.4.11) имеет точное решение

$$\int h(u)\,du = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1. \qquad (2.5.4.12)$$

Разрешив (2.5.4.11) относительно h, приходим к соотношению

$$h(u) = \biggl(\int g(u)\,du + C_2\biggr)^{-1}.$$

Исключая с помощью этого соотношения функцию h в (2.5.4.12), получим представление решения уравнения (2.5.4.10) в неявном виде

$$\int \biggl(\int g(u)\,du + C_2\biggr)^{-1} du = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1. \qquad (2.5.4.13)$$

Здесь $a(x)$ и $g(u)$ — произвольные функции, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

► Пример 2.37. Точное решение уравнения
$$u_t = (x^n u_x)_x - xg(u)u_x$$
определяется формулой (2.5.4.13) при $a(x) = x^n$. ◄

Замечание 2.26. *Уравнение (2.5.4.10) и его решение другим путем были получены в [41].*

Решение 3. Уравнению (2.5.4.4) можно удовлетворить, если положить
$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u = A, \quad g = f, \quad (a\theta)'_x + b\theta = 0, \quad Aa\theta^2 - kc = 0, \tag{2.5.4.14}$$
где A — произвольная постоянная. Из первого соотношения (2.5.4.14), находим
$$h(u) = f(u)/(Au + C_1). \tag{2.5.4.15}$$
Полагая далее $c(x) = 1$, $A = 1$, $C_1 = 0$ в (2.5.4.14) и (2.5.4.15), получим нелинейное уравнение конвективной диффузии
$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \tfrac{1}{2}a'_x(x)f(u)u_x, \tag{2.5.4.16}$$
которое имеет два решения типа обобщенной бегущей волны в неявном виде
$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = kt \pm \sqrt{k}\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_2. \tag{2.5.4.17}$$
Уравнение (2.5.4.16) и формулы (2.5.4.17) содержат две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, а также две произвольные постоянные k и C_2.

Решение 4. Уравнение (2.5.4.4) тождественно удовлетворяется, если положить
$$Af = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad g = 1, \quad (a\theta)'_x + Aa\theta^2 = 0, \quad b\theta = kc, \tag{2.5.4.18}$$
где A — произвольная постоянная. Из уравнений (2.5.4.18), находим
$$h(u) = f(u)\left(A\int f(u)\,du + C_1\right)^{-1} = \frac{1}{A}\frac{d}{du}\ln\left(A\int f(u)\,du + C_1\right),$$
$$\theta(x) = \frac{1}{Aa(x)}\left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right)^{-1}, \quad b(x) = \frac{kc(x)}{\theta(x)},$$
где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $c(x) = 1$ и $A = 1$, приходим к нелинейному уравнению конвективной диффузии
$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + ka(x)\left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right)u_x, \tag{2.5.4.19}$$
которое допускает точное решение
$$\int f(u)\,du + C_1 = e^{kt}\left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right). \tag{2.5.4.20}$$
Уравнение (2.5.4.19) и формула (2.5.4.20) содержат две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$. Решение (2.5.4.20) является вырожденным в том смысле, что оно обращает в нуль диффузионный член $[a(x)f(u)u_x]_x$ уравнения (2.5.4.19) (однако $u_{xx} \not\equiv 0$).

Замечание 2.27. *Правую часть решения (2.5.4.20) можно дополнительно умножить на новую произвольную постоянную C_3.*

► Пример 2.38. Подставив $a(x) = 1$, $C_1 = C_2 = 0$ в (2.5.4.19) и (2.5.4.20), приходим к уравнению [287]:

$$u_t = [f(u)u_x]_x + kxu_x,$$

которое имеет решение $\int f(u)\,du = xe^{kt}$. ◄

► Пример 2.39. Положив $a(x) = e^x$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ в (2.5.4.19) и (2.5.4.20), получим уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [e^x f(u)u_x]_x - ku_x.$$

Это уравнение имеет неинвариантное решение типа бегущей волны в неявной форме $\int f(u)\,du = -e^{kt-x}$. ◄

Решение 5. Уравнение (2.5.4.4) также допускает решения, если выполняются соотношения

$$(a\theta)'_x = Ac, \quad a\theta^2 = Bc, \quad b\theta = c, \quad Af + B\Bigl(\frac{f}{h}\Bigr)'_u + g - k = 0, \tag{2.5.4.21}$$

где A и B — произвольные постоянные.

1°. Подставив $a(x) = b(x) = c(x) = \theta(x) = 1$, $A = 0$, $B = 1$ в (2.5.4.21), получим решение типа бегущей волны (2.5.1.2), которое здесь опускается.

2°. Положив $c(x) = 1$ и $A = B = 1$ в первых трех уравнениях (2.5.4.21), имеем

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = x, \quad \theta(x) = 1/x. \tag{2.5.4.22}$$

В результате приходим к уравнению

$$u_t = [x^2 f(u)u_x]_x + xg(u)u_x, \tag{2.5.4.23}$$

где

$$g(u) = k - f(u) - \frac{d}{du}\Bigl[\frac{f(u)}{h(u)}\Bigr], \tag{2.5.4.24}$$

которое допускает решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = kt + \ln x. \tag{2.5.4.25}$$

Отметим, что уравнение (2.5.4.23) — (2.5.4.24) зависит от двух произвольных функций $f = f(u)$ и $h = h(u)$. Из (2.5.4.24) можно выразить функцию $h(u)$ через $f(u)$ и $g(u)$.

Замечание 2.28. *Инвариантное решение (2.5.4.25) уравнения (2.5.4.23) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = kt + \ln x$ (в этом случае не используется соотношение (2.5.4.24) между функциями f, g и h). Функция $U(z)$ определяется из автономного ОДУ:*

$$[f(U)U'_z]'_z + [f(U) + g(U) - k]U'_z = 0,$$

которое легко интегрируется.

Решения с функциональным разделением переменных при $\boldsymbol{\omega(t) = ke^{\lambda t}}$. Вернемся к уравнению (2.5.4.2). Ранее рассматривался простейший случай линейной зависимости $\omega(t) = kt$, который сразу приводил к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными вида (2.5.4.4).

Функция $\omega(t)$ входит в формулу (2.5.2.2) линейным образом. Если выбрать $\omega(t) = ke^{\lambda t}$ (k — произвольная постоянная), тогда решение (2.5.2.2) при $\xi(x) = 1$ принимает вид

$$H(u) = ke^{\lambda t} + \eta(x), \qquad H(u) = \int h(u)\, du. \tag{2.5.4.26}$$

Экспоненту $e^{\lambda t}$ удается исключить из уравнения (2.5.4.2) с помощью (2.5.4.26). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению вида (2.5.2.3) при $N = 5$:

$$\lambda\eta - \lambda H + \frac{(a\eta'_x)'_x}{c} f + \frac{a(\eta'_x)^2}{c}\left(\frac{f}{h}\right)'_u + \frac{b\eta'_x}{c} g = 0. \tag{2.5.4.27}$$

Замечание 2.29. *Уравнение (2.5.4.27) можно вывести, используя другие соображения. Действительно, переписав (2.5.2.2) при $\xi(x) = 1$ в виде*

$$\omega/(H - \eta) = 1, \tag{2.5.4.28}$$

умножим правую часть уравнения (2.5.4.2) на $\omega/(H - \eta)$. В результате после элементарных преобразований получим

$$\frac{\omega'_t}{\omega} = \frac{1}{c(H - \eta)}\left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g\right]. \tag{2.5.4.29}$$

В уравнении (2.5.4.29) переменные разделены: левая часть зависит только от t, а правая — от x и u. Приравнивая обе части (2.5.4.29) константе λ, получим два уравнения. Левая часть (2.5.4.29) дает уравнение $\omega'_t/\omega = \lambda$, которое имеет решение $\omega = ke^{\lambda t}$. Правая часть (2.5.4.29) приводит к уравнению (2.5.4.27).

Решение 6. Уравнению (2.5.4.27) можно удовлетворить, если положить

$$f = C_1uh + C_2h, \quad g = \lambda H - C_1C_3uh - C_2C_3h, \tag{2.5.4.30}$$

$$b\eta'_x = c, \quad (a\eta'_x)'_x = C_3c, \quad C_1a(\eta'_x)^2 + \lambda c\eta = 0, \tag{2.5.4.31}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Соотношения (2.5.4.30) и (2.5.4.31) включают две произвольные функции h и c, а остальные функции f, g, a, b, η через них выражаются.

Общее решение системы из двух последних уравнений (2.5.4.31), записывается так:

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{C_5}{c(x)}\left[C_3\int c(x)\, dx + C_4\right]^{2+\lambda/(C_1C_3)}, \\ \eta(x) &= -\frac{C_1}{C_5\lambda}\left[C_3\int c(x)\, dx + C_4\right]^{-\lambda/(C_1C_3)}, \end{aligned} \tag{2.5.4.32}$$

где C_4 и C_5 — произвольные постоянные. Соотношения (2.5.4.30) определяют допустимый вид двух функций f и g, которые задаются с помощью одной произвольной функции h.

► Пример 2.40. Подставив $c(x) = 1$, $C_1 = C_3 = C_5 = 1$, $C_2 = C_4 = 0$, $\lambda = n - 2$ в (2.5.4.31) и (2.5.4.32), имеем

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-1}, \quad \eta(x) = x^{2-n}/(2-n), \quad n \neq 2.$$

Учитывая соотношения (2.5.4.30), приходим к нелинейному уравнению

$$\begin{gathered} u_t = [x^n f(u) u_x]_x + x^{n-1} g(u) u_x, \\ f(u) = u h(u), \quad g(u) = (n-2) \int h(u)\, du - u h(u), \end{gathered} \tag{2.5.4.33}$$

где $h(u)$ — произвольная функция, которое допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int h(u)\, du = k e^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}; \tag{2.5.4.34}$$

k — произвольная постоянная.

Подставив $h = f/u$ в (2.5.4.33), получим уравнение

$$u_t = [x^n f(u) u_x]_x + x^{n-1} \left[(n-2) \int \frac{f(u)}{u}\, du - f(u) \right] u_x,$$

решение которого записывается так:

$$\int \frac{f(u)}{u}\, du = k e^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}.$$ ◄

Решения с функциональным разделением переменных при $\omega(t) = k \ln t$. Подставив логарифмическую функцию $\omega(t) = k \ln t$ в (2.5.2.2) при $\xi(x) = 1$, ищем точные решения в виде

$$\int h(u)\, du = k \ln t + \eta(x). \tag{2.5.4.35}$$

Исключив t из (2.5.4.2) (при $\omega = k \ln t$) и (2.5.4.35), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g - kce^{\eta/k} e^{-H/k} = 0, \qquad H = \int h(u)\, du. \tag{2.5.4.36}$$

Замечание 2.30. *Уравнение (2.5.4.36) можно вывести, исходя из других соображений. Действительно, представив формулу (2.5.2.2) при $\xi(x) = 1$ в виде*

$$e^{(H-\eta-\omega)/k} = 1,$$

где k — некоторая постоянная, умножим правую часть уравнения (2.5.4.2) на $e^{(H-\eta-\omega)/k}$. В результате, после элементарных преобразований, имеем

$$e^{\omega/k} \omega'_t = \frac{e^{(H-\eta)/k}}{c} \left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g \right]. \tag{2.5.4.37}$$

В уравнении (2.5.4.37) переменные разделены: левая часть зависит только от t, а правая — от x и u. Приравнивая обе части (2.5.4.37) константе λ, получим два уравнения. Левая часть (2.5.4.37) приводит к уравнению $e^{\omega/k}\omega'_t = \lambda$, которое имеет решение $\omega = k\ln(t + t_0) + k\ln(\lambda/k)$. Правая часть (2.5.4.37) при $\lambda = k$ приводит к уравнению (2.5.4.36).

Решение 7. Сначала рассмотрим вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(f/h)'_u$ обращается в нуль. В этом случае уравнение (2.5.4.36) допускает решения, если выполняются соотношения

$$h = f, \quad g = Af + Be^{-F/k}, \quad (a\eta'_x)'_x + Ab\eta'_x = 0, \quad Bb\eta'_x - kce^{\eta/k} = 0, \tag{2.5.4.38}$$

где A и B — произвольные постоянные, $F = \int f(u)\,du$. Из (2.5.4.38) при $B = k$ следует, что уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{c(x)e^{\eta(x)/k}}{\eta'_x(x)}\Big[Af(u) + ke^{-F(u)/k}\Big]u_x, \tag{2.5.4.39}$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функция $\eta = \eta(x)$ является решением нелинейного ОДУ второго порядка

$$[a(x)\eta'_x]'_x + Ac(x)e^{\eta/k} = 0, \tag{2.5.4.40}$$

имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$\int f(u)\,du = k\ln t + \eta(x). \tag{2.5.4.41}$$

► Пример 2.41. При $a(x) = x^n$ $(n \neq 1,\, 2)$, $c(x) = 1$, $A = -k(n-1)(n-2)$ уравнение (2.5.4.40) имеет точное решение $\eta = k(n-2)\ln x$. Поэтому уравнение

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1}\Big[-(n-1)f(u) + \frac{1}{n-2}e^{-F(u)/k}\Big]u_x \tag{2.5.4.42}$$

допускает точное решение, которое можно представить в неявной форме $\int f(u)\,du = k\ln t + k(n-2)\ln x$. ◄

► Пример 2.42. При $a(x) = e^{\lambda x}$, $c(x) = 1$, $A = -k\lambda^2$ уравнение (2.5.4.40) имеет точное решение $\eta = k\lambda x$. Поэтому уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u)u_x]_x + e^{\lambda x}\Big[-\lambda f(u) + \frac{1}{\lambda}e^{-F(u)/k}\Big]u_x \tag{2.5.4.43}$$

допускает точное решение, которое можно представить в неявной форме $\int f(u)\,du = k\ln t + k\lambda x$. ◄

Решение 8. Уравнению (2.5.4.36) можно удовлетворить, наложив условия

$$\begin{gathered}(a\eta'_x)'_x = Ace^{\eta/k}, \quad a(\eta'_x)^2 = Bce^{\eta/k}, \quad b\eta'_x = ce^{\eta/k}, \\ Af + B\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + g - k\exp(-H/k) = 0,\end{gathered} \tag{2.5.4.44}$$

где A и B — произвольные постоянные, $H = \int h(u)\,du$.

Подставив $c(x) = 1$, $A = 1/k$, $B = 1$ в первые три уравнения (2.5.4.44), находим

$$a(x) = b(x) = e^{\lambda x}, \quad \eta(x) = x, \quad \lambda = \frac{1}{k}. \tag{2.5.4.45}$$

В результате получим уравнение

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u) u_x]_x + e^{\lambda x} g(u) u_x, \tag{2.5.4.46}$$

где

$$g(u) = \frac{1}{\lambda} \exp\Big[-\lambda \int h(u)\,du\Big] - \lambda f(u) - \frac{d}{du}\Big[\frac{f(u)}{h(u)}\Big], \tag{2.5.4.47}$$

которое допускает решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = x + \frac{1}{\lambda} \ln t. \tag{2.5.4.48}$$

Отметим, что уравнение (2.5.4.46)—(2.5.4.47) содержит две произвольные функции $f = f(u)$ и $h = h(u)$.

Замечание 2.31. *Инвариантное решение (2.5.4.48) уравнения (2.5.4.46) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = x + (1/\lambda) \ln t$ (в этом случае соотношение (2.5.4.47) не используется). Функция $U(z)$ определяется из ОДУ:*

$$\frac{1}{\lambda} U'_z = [e^{\lambda z} f(U) U'_z]'_z + e^{\lambda z} g(U) U'_z.$$

Решение 9. Положив $c(x) = 1$, $A = (1 + k)/k$, $B = 1$ в первых трех уравнениях (2.5.4.44), получим

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-1}, \quad \eta(x) = \ln x, \quad n = 2 + \frac{1}{k}. \tag{2.5.4.49}$$

В результате приходим к уравнению конвективной диффузии

$$u_t = [x^n f(u) u_x]_x + x^{n-1} g(u) u_x, \qquad n \neq 2, \tag{2.5.4.50}$$

где

$$g(u) = \frac{1}{(n-2)} \exp\Big[-(n-2) \int h(u)\,du\Big] - (n-1) f(u) - \frac{d}{du}\Big[\frac{f(u)}{h(u)}\Big], \tag{2.5.4.51}$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = \ln x + \frac{1}{n-2} \ln t. \tag{2.5.4.52}$$

Замечание 2.32. *Автомодельное решение (2.5.4.52) уравнения (2.5.4.50) можно искать в обычном виде $u = U(z)$, где $z = xt^{1/(n-2)}$ (в этом случае соотношение (2.5.4.51) не используется). Функция $U(z)$ определяется из ОДУ:*

$$\frac{1}{n-2} z U'_z = [z^n f(U) U'_z]'_z + z^{n-1} g(U) U'_z.$$

Решение 10. Уравнению (2.5.4.36) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered}\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u = Af, \quad \exp(-H/k) = Bf, \quad g = f,\\ (a\eta'_x)'_x + Aa(\eta'_x)^2 + b\eta'_x - Bkce^{\eta/k} = 0,\end{gathered} \tag{2.5.4.53}$$

где A и B — произвольные постоянные, $H = \int h(u)\,du$.

Подставив $A = -1/k = \lambda$ и $B = 1$ в первые три уравнения (2.5.4.53), имеем

$$f(u) = g(u) = e^{\lambda u}, \quad h(u) = 1. \tag{2.5.4.54}$$

В результате получим уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}u_x, \tag{2.5.4.55}$$

которое содержит три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и допускает точное решение в явном виде

$$u = -\frac{1}{\lambda}\ln t + \eta(x), \tag{2.5.4.56}$$

где функция $\eta = \eta(x)$ удовлетворяет ОДУ:

$$[a(x)e^{\lambda\eta}\eta'_x]'_x + b(x)e^{\lambda\eta}\eta'_x + \frac{1}{\lambda}c(x) = 0. \tag{2.5.4.57}$$

Уравнение (2.5.4.57) сводится к линейному ОДУ заменой $\zeta = e^{\lambda\eta}$.

Решение 11. Положив $A = n+1$, $B = 1$, $k = -1/n$ в первых трех уравнениях (2.5.4.53), имеем

$$f(u) = u^n, \quad g(u) = u^n, \quad h(u) = 1/u. \tag{2.5.4.58}$$

В результате приходим к уравнению конвективной диффузии

$$c(x)u_t = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^n u_x \tag{2.5.4.59}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — произвольные функции, которое имеет точное решение $\ln u = -(1/n)\ln t + \eta(x)$. Это решение можно представить в явном виде

$$u = t^{-1/n}\zeta(x), \qquad \zeta(x) = e^{\eta(x)},$$

где функция η удовлетворяет ОДУ:

$$[a(x)\zeta^n\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta^n\zeta'_x + \frac{1}{n}c(x)\zeta = 0.$$

2.5.5. Нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с переменными коэффициентами

Краткий обзор точных решений нелинейных УрЧП типа Клейна — Гордона. Нелинейные волновые уравнения и уравнения типа Клейна — Гордона встречаются в газовой динамике, акустике, релятивистской квантовой механике, теории поля, нелинейной оптике, физике плазмы и физике элементарных частиц [103, 213]. Эти уравнения используются для моделирования различных физических явлений, включая распространение дислокаций в кристаллах, ультракороткие оптические импульсы, ферроэлектрические переходы, поведение элементарных частиц в конденсированных средах, рост кристаллов и др. [69, 103, 112, 136, 213].

Преобразования, симметрии и точные решения различных классов нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x + g(u) \tag{2.5.5.1}$$

рассматривались во многих работах (см., например, [3, 18, 20, 47, 48, 67, 75, 89, 132, 176, 197, 262, 286, 287, 319, 337, 376], а также цитируемую в них литературу). Для построения точных решений чаще всего использовались классический и неклассический методы исследования симметрий [75, 89, 197, 262, 287, 319, 337], а также методы обобщенного и функционального разделения переменных [3, 48, 150, 176, 286, 287, 376].

В общем случае уравнение (2.5.5.1) допускает решение типа бегущей волны $u = U(kx - \lambda t)$. Нелинейное волновое уравнение при $g(u) = 0$ имеет автомодельное решение $u = U(x/t)$ [75], а также более сложные точные решения, которые можно представить в неявном виде [287]:

$$x - t\sqrt{f(u)} = \varphi_1(u),$$
$$x + t\sqrt{f(u)} = \varphi_2(u),$$

где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ — произвольные функции (вырожденные случаи $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$ соответствуют автомодельным решениям специальной формы). Важно отметить, что при $g(u) = 0$ уравнение (2.5.5.1) можно линеаризовать [20, 47, 286] (см. также [89]), а некоторые точные решения для произвольной функции $f(u)$ допускают представление в параметрическом виде (см. [47, 286, 287]). Помимо этих случаев, также известны точные решения уравнения вида (2.5.5.1), в которых две функции $f(u)$ и $g(u)$ выражаются через одну произвольную функцию $h(u)$ [287].

В [18, 47, 189, 191, 193, 274, 286, 287] рассматривались нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с переменными коэффициентами

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u). \tag{2.5.5.2}$$

В табл. 2.6 указан вид точных решений некоторых уравнений данного типа с одной или двумя произвольными функциями (в решении № 1 функцию $\operatorname{ch}(\frac{1}{2}\lambda t)$ можно заменить на $\operatorname{sh}(\frac{1}{2}\lambda t)$).

В работах [18, 47, 93, 190, 192, 286] описаны симметрии и некоторые точные решения нелинейного уравнения телеграфного типа

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x;$$

в [93, 190] был рассмотрен специальный случай $a(x) = b(x) = 1$.

Другие родственные и более сложные нелинейные уравнения гиперболического типа исследовались, например, в [76, 82, 166, 198, 199, 225, 315].

Замечание 2.33. *В [229, 298] (см. также [228]) получены некоторые точные решения нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона с запаздыванием*

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w), \qquad w = u(x, t - \tau),$$

где $\tau > 0$ — время запаздывания.

Таблица 2.6. Нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона с переменными коэффициентами и их точные решения.

№	Уравнение	Вид решения или замечание	Литература
1	$u_{tt}=u_{xx}+e^{\lambda x}g(u)$	$u=U(z)$, $z=e^{\frac{1}{2}\lambda x}\operatorname{ch}(\frac{1}{2}\lambda t)$	[47, 286]
2	$u_{tt}=(u^{-4/3}u_x)_x+b(x)u^{-1/3}$	Приводится к $v_{tt}=(v^{-4/3}v_z)_z$	[18, 47, 286]
3	$u_{tt}=(x^k u_x)_x+g(u)$, $k\neq 2$	$u=U(z)$, $z=4x^{2-k}-(2-k)^2t^2$	[18, 47, 286]
4	$u_{tt}=[x^k f(u)u_x]_x+x^{k-2}g(u)$	$u=U(z)$, $z=x^{(k-2)/2}t$, $k\neq 2$	[189, 274]
5	$u_{tt}=[x^2 f(u)u_x]_x+g(u)$	$u=U(z)$, $z=\lambda t+\ln x$	[18, 274, 286]
6	$u_{tt}=(e^{\lambda x}u_x)_x+g(u)$	$u=U(z)$, $z=4e^{-\lambda x}-\lambda^2t^2$	[18, 47, 286]
7	$u_{tt}=[e^{\lambda x}f(u)u_x]_x+e^{\lambda x}g(u)$	$u=U(z)$, $z=e^{\lambda x/2}t$	[274]
8	$u_{tt}=[a(x)u^k u_x]_x+b(x)u^{k+1}$	$u=\varphi(x)\psi(t)$	[18, 274, 286]
9	$u_{tt}=[a(x)e^{\lambda u}u_x]_x+b(x)e^{\lambda u}$	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	[274, 286]
10	$u_{tt}=[a(x)u_x]_x+b(x)u+cu\ln u$	$u=\varphi(x)\psi(t)$	[47, 286]

Обозначения: $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции, а c, k, λ — свободные параметры.

Далее основное внимание будет уделено построению точных решений (в неявном виде) нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона достаточно общего вида (2.5.5.2), которые зависят от одной или двух произвольных функций (точные решения УрЧП, содержащие произвольные функции, а следовательно, обладающие значительным произволом, представляют большой практический интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов решения нелинейных уравнений).

Замечание 2.34. *Уравнение (2.5.5.2) инвариантно относительно преобразований $t=-\bar{t}$ и $t=\tilde{t}+t_0$, где t_0 — произвольная постоянная. Поэтому во всех приведенных ниже точных решениях переменную t можно заменить на $\pm t+t_0$.*

Вывод функционально-дифференциального уравнения. Ищем точные решения уравнения типа Клейна — Гордона (2.5.5.2) в неявном виде (2.5.2.2). Дифференцируя (2.5.2.2) по t и x, получим

$$u_t=\frac{\xi\omega'_t}{h},\quad u_{tt}=\frac{\xi\omega''_{tt}}{h}-\xi^2(\omega'_t)^2\frac{h'_u}{h^3},\quad u_x=\frac{\xi'_x\omega+\eta'_x}{h};$$
$$(afu_x)_x=[(a\xi'_x)'_x\omega+(a\eta'_x)'_x]\frac{f}{h}+a(\xi'_x\omega+\eta'_x)^2\frac{1}{h}\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u.$$

Подставив эти выражения в (2.5.5.2), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$\omega''_{tt}-\xi\frac{h'_u}{h^2}(\omega'_t)^2=Q_1(x,u)\omega^2+Q_2(x,u)\omega+Q_3(x,u), \tag{2.5.5.3}$$

где функции Q_n не зависят явным образом от t и определяются формулами

$$
\begin{aligned}
Q_1(x,u) &= \frac{a(\xi'_x)^2}{c\xi}\left(\frac{f}{h}\right)'_u,\\
Q_2(x,u) &= \frac{1}{c\xi}\left[(a\xi'_x)'_x f + 2a\xi'_x\eta'_x\left(\frac{f}{h}\right)'_u\right],\\
Q_3(x,u) &= \frac{1}{c\xi}\left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + bgh\right].
\end{aligned}
\tag{2.5.5.4}
$$

Уравнение (2.5.5.3)—(2.5.5.4) зависит от трех переменных t, x, u и содержит неизвестные функции (и их производные) различных аргументов, которые связаны одним дополнительным соотношением (2.5.2.2). Это уравнение является более сложным, чем уравнения вида (2.5.2.3).

Функционально-дифференциальное уравнение (2.5.5.3) — (2.5.5.4) существенно упрощается в двух случаях: (*a*) $\xi'_x = 0$ и (*b*) $(f/h)'_u = 0$. Рассмотрим эти случаи последовательно.

Случай $\boldsymbol{\xi(x) = 1}$. Решения типа обобщенной бегущей волны при $\boldsymbol{\omega(t) = kt}$. При $\xi'_x = 0$ без ограничения общности можно положить $\xi = 1$. Подставив $\xi = 1$ в формулы (2.5.5.4), получим $Q_1(x,u) = Q_2(x,u) = 0$. В результате уравнение (2.5.5.3) приводится к виду

$$
\omega''_{tt} - \frac{h'_u}{h^2}(\omega'_t)^2 = \frac{1}{c}\left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + bgh\right]. \tag{2.5.5.5}
$$

Переменные в (2.5.5.5) разделяются при $\omega(t) = kt$, где $k = \mathrm{const}$. Рассматриваемая ситуация соответствует решению типа обобщенной бегущей волны, заданному в неявной форме

$$
\int h(u)\,du = kt + \int \theta(x)\,dx. \tag{2.5.5.6}
$$

Подынтегральные функции $h(u)$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ должны определяться в ходе дальнейшего анализа из функционально-дифференциального уравнения

$$
k^2 c\frac{h'_u}{h^3} + (a\theta)'_x\frac{f}{h} + a\theta^2\frac{1}{h}\left(\frac{f}{h}\right)'_u + bg = 0, \tag{2.5.5.7}
$$

которое является частным случаем билинейного уравнения (2.5.2.3) при $N = 4$.

Решение 1. Рассмотрим сначала вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(f/h)'_u$ в (2.5.5.7) равна нулю. Согласно принципу расщепления (далее на него ссылаться не будем) уравнение (2.5.5.7) имеет решения при следующих условиях:

$$
h = f, \quad g = A + Bf^{-3}f'_u, \quad (a\theta)'_x + Ab = 0, \quad Bb + k^2c = 0, \tag{2.5.5.8}
$$

где A и B — произвольные постоянные. Из соотношения (2.5.5.8) при $c(x) = 1$ и $B = -k^2$ следует, что уравнение

$$
u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + A - k^2\frac{f'_u(u)}{f^3(u)}, \tag{2.5.5.9}
$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)\,du = kt + A\int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \tag{2.5.5.10}$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные. В частном случае $a(x) = 1$, уравнение (2.5.5.9) и его решение (2.5.5.10) переходят в уравнение и решение, полученные в [286].

Замечание 2.35. *Нетрудно убедиться, что уравнение*

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x) - k^2\frac{f'_u(u)}{f^3(u)},$$

которое содержит три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$ и обобщает уравнение (2.5.5.9), имеет два точных решения

$$\int f(u)\,du = \pm kt - \int \frac{1}{a(x)}\biggl(\int b(x)\,dx\biggr)dx + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2.$$

Решение 2. Уравнение (2.5.5.7) тождественно удовлетворяется, если положить

$$\frac{h'_u}{h^2} + A\Bigl(\frac{f}{h}\Bigr)'_u = 0, \quad g = -B\frac{f}{h}, \quad a\theta^2 = Ak^2c, \quad b = \frac{(a\theta)'_x}{B}, \tag{2.5.5.11}$$

где A и B — произвольные постоянные. Подставив $c(x) = 1$ и $B = -\frac{1}{2}k\sqrt{A}$ в (2.5.5.11), получим нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x \mp \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}g(u). \tag{2.5.5.12}$$

Здесь функциональные коэффициенты $f(u)$ и $g(u)$ выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$ по формулам

$$f(u) = C_1h + \frac{1}{A}, \quad g(u) = \frac{1}{2}k\sqrt{A}\,\Bigl(C_1 + \frac{1}{Ah}\Bigr), \tag{2.5.5.13}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Уравнения (2.5.5.12) — (2.5.5.13) имеет точные решения

$$\int h(u)\,du = kt \pm k\sqrt{A}\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_2. \tag{2.5.5.14}$$

Формулы (2.5.5.13) и (2.5.5.14) содержат две произвольные функции $a(x)$ и $h(u)$ и четыре произвольные постоянные A, C_1, C_2, k.

Положив $A = 1$, $C_1 = 0$, $k = 2$ в (2.5.5.12) — (2.5.5.14), получим $f = 1$ и $g = 1/h$. В результате приходим к уравнениям

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x \mp \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}g(u), \tag{2.5.5.15}$$

которые содержат произвольные функции $a(x)$ и $g(u)$ и допускают точные решения типа обобщенной бегущей волны

$$\int \frac{du}{g(u)} = 2t \pm 2\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_2. \tag{2.5.5.16}$$

► Пример 2.43. Подставив $a(x) = x^{2\beta}$ в (2.5.5.15) и (2.5.5.16) и переобозначив $\mp 2\beta g(u)$ на $g(u)$, приходим к уравнению

$$u_{tt} = (x^{2\beta} u_x)_x + x^{\beta-1} g(u), \qquad \beta \neq 0,$$

которое зависит от произвольной функции $g(u)$ и допускает точные решения в неявной форме

$$\int \frac{du}{g(u)} = \begin{cases} \pm \frac{1}{\beta} t - \frac{1}{\beta(1-\beta)} x^{1-\beta} + C, & \text{при } \beta \neq 1, \\ \pm t - \ln|x| + C, & \text{при } \beta = 1, \end{cases}$$

где $C = \mp C_2/(2\beta)$ — произвольная постоянная. ◄

► Пример 2.44. Подставив $a(x) = e^{2\beta x}$ в (2.5.5.15) и (2.5.5.16) и переобозначив $\mp 2\beta g(u)$ на $g(u)$, приходим к уравнению

$$u_{tt} = (e^{2\beta x} u_x)_x + e^{\beta x} g(u), \qquad \beta \neq 0,$$

которое зависит от произвольной функции $g(u)$ и допускает точные решения в неявной форме

$$\int \frac{du}{g(u)} = \pm \frac{1}{\beta} t + \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta x} + C.$$ ◄

Решение 3. Уравнение (2.5.5.7) удовлетворяется, если положить

$$f = A\frac{h'_u}{h^2}, \quad g = -\frac{B}{h}\left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad A(a\theta)'_x + k^2 c = 0, \quad b = \frac{a\theta^2}{B}, \qquad (2.5.5.17)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Используя соотношения (2.5.5.17) при $c(x) = 1$ и $B = -k^4/A^2$, получим нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона

$$u_{tt} = [a(x) f(u) u_x]_x - \frac{x^2}{a(x)} g(u), \qquad (2.5.5.18)$$

где $a(x)$ — произвольная функция. Функции $f(u)$ и $g(u)$ выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$ с помощью формул

$$f(u) = A\frac{h'_u}{h^2}, \quad g(u) = \frac{k^4}{Ah}\left(\frac{h'_u}{h^3}\right)'_u. \qquad (2.5.5.19)$$

Уравнение (2.5.5.18) при условии (2.5.5.19) допускает точное решение

$$\int h(u)\,du = kt - \frac{k^2}{A}\int \frac{x\,dx}{a(x)} + C. \qquad (2.5.5.20)$$

► Пример 2.45. Положив $h = u^{-n-1}$ и $A = -1/(n+1)$ в (2.5.5.18) — (2.5.5.20), получим уравнение типа Клейна — Гордона со степенной нелинейностью

$$u_{tt} = [a(x) u^n u_x]_x - \frac{x^2}{a(x)} u^{3n+1}, \qquad n \neq -1,\ -1/2, \qquad (2.5.5.21)$$

которое содержит произвольную функцию $a = a(x)$. Точные решения этого уравнения определяются по формуле (2.5.5.20), где

$$\int h(u)\,du = -\frac{1}{nu^n}, \qquad k = \pm[(n+1)^2(2n+1)]^{-1/4}.$$ ◄

Решение 4. Уравнение (2.5.5.7) также имеет точные решения, если выполняются соотношения

$$(a\theta)'_x = Ac, \quad a\theta^2 = Bc, \quad b = c, \quad k^2\frac{h'_u}{h^3} + A\frac{f}{h} + B\frac{1}{h}\left(\frac{f}{h}\right)'_u + g = 0, \tag{2.5.5.22}$$

где A и B — произвольные постоянные.

1°. Подставив $a(x) = b(x) = c(x) = 1$, $\theta(x) = \varkappa$, $A = 0$, $B = \varkappa^2$, $k = \lambda$ в (2.5.5.22), получим решение типа бегущей волны (2.5.1.2), которое здесь опускается.

2°. Полагая $c(x)=1$ и $A=B=1$ в первых трех уравнениях (2.5.5.22), имеем

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = 1, \quad \theta(x) = 1/x. \tag{2.5.5.23}$$

В результате приходим к уравнению

$$u_{tt} = [x^2 f(u)u_x]_x + g(u), \tag{2.5.5.24}$$

где

$$g(u) = -k^2\frac{h'_u(u)}{h^3(u)} - \frac{f(u)}{h(u)} - \frac{1}{h(u)}\frac{d}{du}\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right], \tag{2.5.5.25}$$

которое имеет точное решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = kt + \ln x. \tag{2.5.5.26}$$

Отметим, что уравнение (2.5.5.24)—(2.5.5.25) содержит две произвольных функции $f = f(u)$ и $h = h(u)$.

Замечание 2.36. *Инвариантное решение (2.5.5.26) уравнения (2.5.5.24) можно искать в обычном виде $u = U(z)$, где $z = kt + \ln x$ (в этом случае соотношение (2.5.5.25) не используется). Функция $U(z)$ удовлетворяет автономному ОДУ:*

$$k^2U''_{zz} = [f(U)U'_z]'_z + f(U)U'_z + g(U).$$

Случай $\boldsymbol{\xi(x) = 1}$. Решения с функциональным разделением переменных при $\boldsymbol{\omega(t) = kt^2}$. Подставив $\xi = 1$ и $\omega(t) = kt^2$ в (2.5.2.2), ищем точные решения в неявном виде

$$\int h(u)\,du = kt^2 + \eta(x). \tag{2.5.5.27}$$

Исключив t из соотношений (2.5.5.5) (при $\omega = kt^2$) и (2.5.5.27), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$(a\eta'_x)'_x\frac{f}{h} + a(\eta'_x)^2\frac{1}{h}\left(\frac{f}{h}\right)'_u + g - \frac{2k}{h} + \frac{4kh'_uH}{h^3} - 4k\eta\frac{h'_u}{h^3} = 0, \tag{2.5.5.28}$$

при записи которого для простоты полагалось, что $b(x) = c(x) = 1$.

Решение 5. Сначала рассмотрим вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(a\eta'_x)'_x$ обращаются в нуль. В этом случае уравнение (2.5.5.28) имеет точные решения при выполнении условий

$$\begin{gathered}(a\eta'_x)'_x=0,\quad a(\eta'_x)^2=C_1\eta,\\ C_1\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u-4k\frac{h'_u}{h^2}=0,\quad g=\frac{2k}{h}-\frac{4kh'_uH}{h^3},\end{gathered}\tag{2.5.5.29}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Интегрируя первые два уравнения (2.5.5.29), имеем

$$a=\frac{C_2^2}{C_1C_3}\exp\Big(-\frac{C_1}{C_2}x\Big),\qquad \eta=C_3\exp\Big(\frac{C_1}{C_2}x\Big),\tag{2.5.5.30}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные. Интегрируя далее третье уравнение в (2.5.5.29), получим представления функций f и g через произвольную функцию h:

$$f=C_4h-\frac{4k}{C_1},\qquad g=\frac{2k}{h}-\frac{4kh'_u}{h^3}\int h(u)\,du.\tag{2.5.5.31}$$

► Пример 2.46. Положив $C_1=C_3=1$, $C_2=-1$, $C_4=0$ и $k=-\frac{1}{4}$ в (2.5.5.30) и (2.5.5.31), имеем $a=e^x$, $\eta=e^{-x}$, $f=1$, $g=-\frac{1}{2}h^{-1}+h^{-3}h'_u\int h\,du$. В результате приходим к уравнению

$$u_{tt}=(e^xu_x)_x-\frac{1}{2h}+\frac{h'_u}{h^3}\int h\,du,$$

которое при произвольной функции $h=h(u)$ имеет точное решение в неявном виде

$$\int h\,du=e^{-x}-\frac{1}{4}t^2.$$

◄

Решение 6. Уравнение (2.5.5.28) удовлетворяется, если положить

$$\begin{gathered}(a\eta'_x)'_x=C_1,\quad a(\eta'_x)^2=C_2\eta,\\ C_2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u-4k\frac{h'_u}{h^2}=0,\quad g=\frac{2k}{h}-\frac{4kh'_uH}{h^3}-C_1\frac{f}{h},\end{gathered}\tag{2.5.5.32}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Общее решение системы из первых двух уравнений в (2.5.5.32) имеет вид

$$a=\frac{1}{C_2C_4}(C_1x+C_3)^{2-(C_2/C_1)},\qquad \eta=C_4(C_1x+C_3)^{C_2/C_1},\tag{2.5.5.33}$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные. Интегрируя далее третье уравнение в (2.5.5.32), находим функции f и g:

$$f=C_5h-\frac{4k}{C_2},\qquad g=2k\Big(1+\frac{2C_1}{C_2}\Big)\frac{1}{h}-\frac{4kh'_u}{h^3}\int h\,du-C_1C_5,\tag{2.5.5.34}$$

где $h=h(u)$ — произвольная функция.

► Пример 2.47. Положив $C_1=1$, $C_2=2-m$, $C_3=C_5=0$, $C_4=1/(2-m)$, $k=\frac{1}{4}(m-2)$ в (2.5.5.33) и (2.5.5.34), имеем $a=x^m$, $\eta=x^{2-m}/(2-m)$, $f=1$, $g=\frac{1}{2}mh^{-1}+(2-m)h^{-3}h'_u\int h\,du$. В результате получим уравнение

$$u_{tt}=(x^m u_x)_x+\frac{m-4}{2h}+(2-m)\frac{h'_u}{h^3}\int h\,du, \qquad m\neq 2,$$

которое при произвольной функции $h=h(u)$ допускает точное решение в неявной форме

$$\int h\,du=\frac{1}{2-m}x^{2-m}+\frac{1}{4}(m-2)t^2.$$

◄

Случай $\boldsymbol{\xi(x)=1}$. Решения с функциональным разделением переменных при $\boldsymbol{\omega(t)=k\ln t}$. Подставив $\xi=1$ и $\omega(t)=k\ln t$ в (2.5.2.2), ищем решения в виде

$$\int h(u)\,du=k\ln t+\eta(x). \tag{2.5.5.35}$$

Исключив t из соотношений (2.5.5.5) (при $\omega=k\ln t$) и (2.5.5.35), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}(a\eta'_x)'_x f+a(\eta'_x)^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u+bgh+kce^{2\eta/k}\Big(1+k\frac{h'_u}{h^2}\Big)e^{-2H/k}=0,\\ H=\int h(u)\,du.\end{gathered} \tag{2.5.5.36}$$

Решение 7. Сначала рассмотрим вырожденный случай, в котором дифференциальная форма $(f/h)'_u$ обращается в нуль. В этом случае уравнение (2.5.5.36) имеет точные решения при выполнении условий

$$\begin{gathered}h=f, \quad g=A+\frac{B}{f}\Big(1+k\frac{f'_u}{f^2}\Big)e^{-2F/k},\\ (a\eta'_x)'_x+Ab=0, \quad Bb+kce^{2\eta/k}=0,\end{gathered} \tag{2.5.5.37}$$

где A и B — произвольные постоянные, а $F=\int f(u)\,du$. Из соотношений (2.5.5.37) при $B=k$ следует, что уравнение

$$c(x)u_{tt}=[a(x)f(u)u_x]_x-c(x)e^{2\eta(x)/k}\Big[A+\frac{k}{f(u)}\Big(1+k\frac{f'_u(u)}{f^2(u)}\Big)e^{-2F(u)/k}\Big], \tag{2.5.5.38}$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а $\eta=\eta(x)$ — решение нелинейного ОДУ второго порядка

$$[a(x)\eta'_x]'_x-Ac(x)e^{2\eta/k}=0, \tag{2.5.5.39}$$

имеет решение с функциональным разделением переменных

$$\int f(u)\,du=k\ln t+\eta(x). \tag{2.5.5.40}$$

► Пример 2.48. При $a(x) = c(x) = 1$ и $A = -k$ уравнение (2.5.5.39) имеет решение $\eta = -k \ln \operatorname{ch} x$. Поэтому уравнение

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x + k \operatorname{ch}^{-2} x \Big[1 - \frac{1}{f(u)}\Big(1 + k\frac{f'_u(u)}{f^2(u)}\Big)e^{-2F(u)/k}\Big]$$

допускает точное решение $\int f(u)\,du = k \ln t - k \ln \operatorname{ch} x$. ◄

Решение 8. Уравнение (2.5.5.36) удовлетворяется, если положить

$$\begin{gathered}(a\eta'_x)'_x = Ace^{2\eta/k}, \quad a(\eta'_x)^2 = Bce^{2\eta/k}, \quad b = ce^{2\eta/k},\\ Af + B\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + gh + k\Big(1 + k\frac{h'_u}{h^2}\Big)e^{-2H/k} = 0,\end{gathered} \tag{2.5.5.41}$$

где A и B — произвольные постоянные и $H = \int h(u)\,du$.

Подставив $c(x) = 1$, $A = 2/k$, $B = 1$ в первые три уравнения (2.5.5.41), находим

$$a(x) = b(x) = e^{\lambda x}, \quad \eta(x) = x, \quad \lambda = \frac{2}{k}. \tag{2.5.5.42}$$

В результате получим уравнение

$$u_{tt} = [e^{\lambda x} f(u)u_x]_x + e^{\lambda x} g(u), \tag{2.5.5.43}$$

где

$$g(u) = -\frac{2}{\lambda h(u)}\Big(1 + \frac{2}{\lambda}\frac{h'_u}{h^2}\Big)\exp\Big[-\lambda\int h(u)\,du\Big] - \lambda\frac{f(u)}{h(u)} - \frac{1}{h(u)}\frac{d}{du}\Big[\frac{f(u)}{h(u)}\Big], \tag{2.5.5.44}$$

которое имеет точное решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = x + \frac{2}{\lambda}\ln t. \tag{2.5.5.45}$$

Отметим, что уравнение (2.5.5.43)—(2.5.5.44) содержит две произвольные функции $f = f(u)$ и $h = h(u)$.

Замечание 2.37. *Инвариантное решение (2.5.5.45) уравнения (2.5.5.43) можно искать в обычном виде $u = U(z)$, где $z = x + (2/\lambda)\ln t$ (в этом случае соотношение (2.5.5.44) не используется). Функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ:*

$$\frac{4}{\lambda^2}U''_{zz} - \frac{2}{\lambda}U'_z = [e^{\lambda z} f(U)U'_z]'_z + e^{\lambda z} g(U).$$

Решение 9. Положив $c(x) = 1$, $A = (k+2)/k$, $B = 1$ в первых трех уравнениях (2.5.5.41), имеем

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-2}, \quad \eta(x) = \ln x, \quad n = 2 + \frac{2}{k}. \tag{2.5.5.46}$$

В результате получим уравнение типа Клейна—Гордона

$$u_{tt} = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-2} g(u), \qquad n \neq 2, \tag{2.5.5.47}$$

где

$$g(u) = -\frac{2}{(n-2)h(u)}\left(1+\frac{2}{n-2}\frac{h'_u(u)}{h^2(u)}\right)\exp\left[-(n-2)\int h(u)\,du\right] - \\ -(n-1)\frac{f(u)}{h(u)} - \frac{1}{h(u)}\frac{d}{du}\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right], \qquad (2.5.5.48)$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int h(u)\,du = \ln x + \frac{2}{n-2}\ln t. \qquad (2.5.5.49)$$

Замечание 2.38. *Автомодельное решение (2.5.5.49) уравнения (2.5.5.47) можно искать в обычном виде $u = U(z)$, где $z = xt^{2/(n-2)}$ (в этом случае соотношение (2.5.5.48) не используется). Функция $U(z)$ описывается ОДУ:*

$$\frac{4}{(n-2)^2}z(zU'_z)'_z - \frac{2}{n-2}zU'_z = [z^n f(U)U'_z]'_z + z^{n-2}g(U).$$

Решение 10. Уравнению (2.5.5.36) можно удовлетворить, если положить

$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u = Af, \quad \left(1+k\frac{h'_u}{h^2}\right)e^{-2H/k} = Bf, \quad gh = f, \\ (a\eta'_x)'_x + Aa(\eta'_x)^2 + b + Bkce^{2\eta/k} = 0, \qquad (2.5.5.50)$$

где A и B — произвольные постоянные, а $H = \int h(u)\,du$.

При $A = -2/k = \lambda$ и $B = 1$ первые три уравнения (2.5.5.50) имеют решение

$$f(u) = g(u) = e^{\lambda u}, \quad h(u) = 1. \qquad (2.5.5.51)$$

В результате приходим к уравнению

$$c(x)u_{tt} = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}, \qquad (2.5.5.52)$$

которое допускает точное решение в явном виде

$$u = -\frac{2}{\lambda}\ln t + \eta(x), \qquad (2.5.5.53)$$

где функция $\eta = \eta(x)$ удовлетворяет ОДУ:

$$(a\eta'_x)'_x + \lambda a(\eta'_x)^2 + b - \frac{2}{\lambda}ce^{-\lambda\eta} = 0. \qquad (2.5.5.54)$$

Уравнения (2.5.5.52) и (2.5.5.54) содержат три произвольных функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$.

Решение 11. При $A = n+1$, $B = 1-k$, $k = -2/n$ первые три уравнения (2.5.5.50) имеют решения

$$f(u) = u^n, \quad g(u) = u^{n+1}, \quad h(u) = 1/u. \qquad (2.5.5.55)$$

В результате получим уравнение типа Клейна—Гордона

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^{n+1} \qquad (2.5.5.56)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — произвольные функции, которое допускает точное решение $\ln u = -(2/n)\ln t + \eta(x)$. Это решение можно записать в явном виде

$$u = t^{-2/n}\zeta(x), \qquad \zeta(x) = e^{\eta(x)}, \tag{2.5.5.57}$$

где функция ζ описывается ОДУ:

$$[a(x)\zeta^n \zeta'_x]'_x + b(x)\zeta^{n+1} - \frac{2(n+2)}{n^2}c(x)\zeta = 0. \tag{2.5.5.58}$$

Случай $h(u) = f(u)$. Решения типа обобщенной бегущей волны при $\omega(t) = t$. При $(f/h)'_u = 0$ без ограничения общности можно положить $h = f$. Подставив $h = f$ в (2.5.5.3) — (2.5.5.4), получим уравнение

$$\omega''_{tt} - \xi\frac{f'_u}{f^2}(\omega'_t)^2 = \frac{(a\xi'_x)'_x}{c\xi}f\omega + \frac{1}{c\xi}\bigl[(a\eta'_x)'_x f + bfg\bigr]. \tag{2.5.5.59}$$

Видно, что при $\omega(t) = t$ переменные в уравнении (2.5.5.59) разделяются. Рассматриваемая ситуация соответствует решениям типа обобщенной бегущей волны, заданным в неявном виде:

$$\int f(u)\,du = \xi(x)t + \eta(x), \tag{2.5.5.60}$$

где $f(u)$ — функция, входящая в уравнение (2.5.5.2), а $\xi(x)$ и $\eta(x)$ — искомые функции.

Исключив $\omega = t$ из (2.5.5.59) с помощью (2.5.5.60), после простых преобразований получим уравнение

$$\xi(a\eta'_x)'_x - \eta(a\xi'_x)'_x + b\xi g + c\xi^3 f^{-3} f'_u + (a\xi'_x)'_x F = 0, \qquad F = \int f(u)\,du, \tag{2.5.5.61}$$

которое является частным случаем уравнение вида (2.5.2.3) при $N = 4$.

Решение 12. Рассмотрим сначала вырожденный случай, когда два функциональных коэффициента в (2.5.5.61) одновременно обращаются в нуль, т. е.

$$(a\xi'_x)'_x = 0. \tag{2.5.5.62}$$

Интегрируя (2.5.5.62), находим соотношение между функциями $a = a(x)$ и $\xi = \xi(x)$:

$$\xi = C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \tag{2.5.5.63}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнение (2.5.5.61) в вырожденном случае (2.5.5.62) имеет решения при выполнении условий

$$g = k_1 + k_2 f^{-3} f'_u, \quad (a\eta'_x)'_x + k_1 b = 0, \quad k_2 b + c\xi^2 = 0, \tag{2.5.5.64}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Из соотношений (2.5.5.63) и (2.5.5.64) следует, что уравнение

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x - c(x)\xi^2(x)\Big[k + \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}\Big], \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \qquad (2.5.5.65)$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функция $\xi = \xi(x)$ определяется формулой (2.5.5.63), допускает точное решение вида (2.5.5.60), в котором функция $\eta(x)$ определяется по формуле

$$\eta(x) = k\int \frac{1}{a(x)}\left(\int c(x)\xi^2(x)\,dx\right)dx + C_3\int \frac{dx}{a(x)} + C_4; \qquad (2.5.5.66)$$

C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

► **Пример 2.49.** Положим $a(x) = c(x) = 1$ в уравнении (2.5.5.65) и $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ в формулах (2.5.5.63) и (2.5.5.66). Получим уравнение

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x - x^2\Big[k + \frac{f'_u(u)}{f^3(u)}\Big], \qquad (2.5.5.67)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и произвольную постоянную k и допускает решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)\,du = xt + \frac{1}{12}kx^4.$$

В частном случае $f(u) = e^u$, уравнение (2.5.5.67) принимает вид

$$u_{tt} = (e^u u_x)_x - x^2(k + e^{-2u}).$$

Его точное решение можно представить в явной форме $u = \ln(xt + \frac{1}{12}kx^4)$. ◄

Решение 13. В вырожденном случае (2.5.5.62) уравнение (2.5.5.61) имеет также другие точные решения, если выполняются условия

$$g = k_1, \quad f^{-3}f'_u = -k_2, \quad (a\eta'_x)'_x + k_1 b - k_2 c\xi^2 = 0, \qquad (2.5.5.68)$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Из соотношений (2.5.5.63) и (2.5.5.68) при $k_1 = 1$ и $k_2 = \frac{1}{2}$ следует, что уравнение

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + b(x), \qquad (2.5.5.69)$$

зависящее от трех произвольных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, допускает точное решение, которое можно представить в явном виде

$$u = \tfrac{1}{4}[\xi(x)t + \eta(x)]^2. \qquad (2.5.5.70)$$

Здесь функция $\xi = \xi(x)$ задается формулой (2.5.5.63), а функция $\eta(x)$ удовлетворяет ОДУ:

$$[a(x)\eta'_x]'_x = \tfrac{1}{2}c(x)\xi^2 - b(x). \qquad (2.5.5.71)$$

Поскольку правая часть уравнения (2.5.5.71) известна, функция η находится простым интегрированием.

Замечание 2.39. *Уравнение*

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + b(x)u^{1/2} + p(x), \tag{2.5.5.72}$$

которое содержит четыре произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)$ и является более общим, чем уравнение (2.5.5.69), также имеет точные решения вида (2.5.5.70). В случаях $p(x) = 0$ и $p(x)/b(x) = \text{const}$ уравнение (2.5.5.72) относится к рассматриваемому классу уравнений (2.5.5.2).

Решение 14. В невырожденном случае функционально-дифференциальному уравнению (2.5.5.61) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered} f^{-3}f'_u = k_1F, \quad g = k_2, \quad F = \int f(u)\,du; \\ (a\xi'_x)'_x + k_1c\xi^3 = 0, \quad \xi(a\eta'_x)'_x - \eta(a\xi'_x)'_x + k_2b\xi = 0, \end{gathered} \tag{2.5.5.73}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Первое уравнение в (2.5.5.73) при $k_1 = -\frac{2}{9}$ допускает точное решение $f(u) = u^{-2/3}$ ($F = 3u^{1/3}$). Полагая далее $k_2 = 1$, приходим к уравнению

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u^{-2/3}u_x]_x + b(x), \tag{2.5.5.74}$$

точное решение которого может быть представлено в явном виде

$$u = \tfrac{1}{27}[\xi(x)t + \eta(x)]^3, \tag{2.5.5.75}$$

где функции $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(x)$ удовлетворяют двум последним ОДУ (2.5.5.73) при $k_1 = -\frac{2}{9}$ и $k_2 = 1$.

Замечание 2.40. *Уравнение*

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u^{-2/3}u_x]_x + b(x)u^{1/3} + p(x), \tag{2.5.5.76}$$

которое содержит четыре произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)$ и является более общим, чем (2.5.5.74), имеет точные решения вида

$$u = [\varphi(x)t + \psi(x)]^3, \tag{2.5.5.77}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются ОДУ:

$$\begin{aligned} &3(a\varphi'_x)'_x + b\varphi - 6c\varphi^3 = 0, \\ &3(a\psi'_x)'_x + b\psi - 6c\varphi^2\psi + p = 0. \end{aligned}$$

В случаях $p(x) = 0$ и $p(x)/b(x) = \text{const}$ уравнение (2.5.5.76) относится к рассматриваемому классу уравнений (2.5.5.2).

Случай $h(u) = f(u)$. Решения с функциональным разделением переменных при $\omega(t) = e^{\lambda t}$.

Решение 15. Подставим $\omega(t) = e^{\lambda t}$ и $\eta = \eta_0 = \text{const}$ в (2.5.2.2) и (2.5.5.59) и исключим t. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение

$$-\lambda^2\frac{\bar F}{f} + \lambda^2\frac{f'_u}{f^3}\bar F^2 + \frac{(a\xi'_x)'_x}{c\xi}\bar F + \frac{b}{c}g = 0, \quad \bar F = \int f\,du - \eta_0, \tag{2.5.5.78}$$

которое является частным случаем уравнения вида (2.5.2.3) при $N = 3$.

Уравнение (2.5.5.78) тождественно удовлетворяется, если положить

$$(a\xi'_x)'_x = Ac\xi, \quad b = c, \quad g = \lambda^2 \frac{\bar{F}}{f} - \lambda^2 \frac{f'_u}{f^3}\bar{F}^2 - A\bar{F}. \tag{2.5.5.79}$$

где A — произвольная постоянная.

Подставив $b(x) = c(x) = 1$ и $\eta_0 = 0$ в (2.5.5.79), приходим к уравнению

$$u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + \lambda^2 \frac{F(u)}{f(u)} - \lambda^2 \frac{f'_u(u)}{f^3(u)} F^2(u) - AF(u), \qquad F = \int f(u)\,du, \tag{2.5.5.80}$$

которое имеет точное решение в неявном виде $\int f(u)\,du = e^{\lambda t}\xi(x)$, где функция $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка

$$(a\xi'_x)'_x = A\xi. \tag{2.5.5.81}$$

Замечание 2.41. *В уравнениях (2.5.5.80) и (2.5.5.81) константу A можно заменить на произвольную функцию $A(x)$.*

► Пример 2.50. Подставив $f(u) = u^k$ в (2.5.5.80), получим уравнение

$$u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x + \frac{\lambda^2}{(k+1)^2}u - \frac{A}{k+1}u^{k+1}, \tag{2.5.5.82}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, A, k, λ — произвольные постоянные ($k \neq -1$). Это УрЧП допускает точное решение, которое можно записать в явном виде

$$u = [(k+1)e^{\lambda t}\xi(x)]^{1/(k+1)},$$

где функция $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ (2.5.5.81). ◄

Замечание 2.42. *Рассмотрим более общее, чем (2.5.5.82), уравнение*

$$c(x)u_{tt} = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1} + mc(x)u, \tag{2.5.5.83}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — произвольные функции, $m \neq 0$ — произвольная постоянная.

При $m = \beta^2 > 0$ уравнение (2.5.5.83) допускает точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = [C_1 \exp(-\beta t) + C_2 \exp(\beta t)]\theta(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(x)$ описывается ОДУ:

$$[a(x)\theta^k \theta'_x]'_x + b(x)\theta^{k+1} = 0, \tag{2.5.5.84}$$

которое заменой $\zeta = \theta^{k+1}$ приводится к линейному уравнению

$$[a(x)\zeta'_x]'_x + (k+1)b(x)\zeta = 0.$$

При $m = -\beta^2 < 0$ уравнение (2.5.5.83) допускает точное решение

$$u = [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)]\theta(x),$$

где функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет ОДУ (2.5.5.84).

Замечание 2.43. *Уравнение с экспоненциальной нелинейностью*

$$c(x)u_{tt} = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + b(x)e^{\lambda u} + mc(x), \qquad (2.5.5.85)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — *произвольные функции, а* $m \neq 0$ — *произвольная постоянная, имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов*

$$u = \frac{1}{2}mt^2 + C_1 t + \theta(x).$$

Функция $\theta = \theta(x)$ *описывается обыкновенным дифференциальным уравнением*

$$[a(x)e^{\lambda\theta}\theta'_x]'_x + b(x)e^{\lambda\theta} = 0,$$

которое заменой $\zeta = e^{\lambda\theta}$ *приводится к линейному уравнению* $[a(x)\zeta'_x]'_x + \lambda b(x)\zeta = 0$.

Замечание 2.44. *Ряд других точных решений с функциональным разделением переменных уравнения (2.5.5.2) приведен в статье [274].*

2.5.6. Нелинейные уравнения с тремя и более независимыми переменными

Метод, описанный в разд. 2.5.2, допускает различные обобщения и позволяет строить точные решения нелинейных УрЧП с тремя или более независимыми переменными. В частности, для нестационарных уравнений с n пространственными переменными $x_1, \ldots, x_n$ решение с функциональным разделением переменных следует искать в неявной форме

$$\int h(u)\,du = \xi(\mathbf{x})\omega(t) + \eta(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n). \qquad (2.5.6.1)$$

Используя (2.5.6.1), находят частные производные, которые подставляют в рассматриваемое УрЧП. После исключения переменной t с помощью (2.5.6.1), приходят к функционально-дифференциальному уравнению (2.5.2.3), в котором функции $\Phi_j[x]$ надо заменить на $\Phi_j[\mathbf{x}]$. Затем, используя многомерный аналог принципа расщепления, получают точные решения.

Опуская подробности, проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах (приводим только нелинейные уравнения и их решения с функциональным разделением переменных).

Далее используются обозначения:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \qquad \nabla \cdot [b(\mathbf{x})f(u)\nabla u] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[b(\mathbf{x})f(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big].$$

Уравнение 1. Нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа с n пространственными переменными

$$u_t = \nabla \cdot [f(u)\nabla u] + \frac{k}{f(u)} + g(\mathbf{x}),$$

где $f(u)$ и $g(\mathbf{x})$ — произвольные функции, допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде [158, 287]

$$\int f(u)\,du = kt + \eta(\mathbf{x}).$$

Функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\eta + g(\mathbf{x}) = 0.$$

О точных решениях этого линейного уравнения см., например, [60, 281].

Уравнение 2. Нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа с n пространственными переменными

$$u_t = \nabla\cdot[f(u)\nabla u] + \frac{aF(u)+b}{f(u)} + g(\mathbf{x})[aF(u)+b], \qquad F(u) = \int f(u)\,du,$$

где $f(u)$ — произвольная функция, допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде [158, 287]

$$\int f(u)\,du = e^{at}\eta(\mathbf{x}) - \frac{b}{a}.$$

Функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta\eta + ag(\mathbf{x})\eta = 0.$$

О точных решениях этого линейного уравнения см., например, [60, 281].

Уравнение 3. Рассмотрим нелинейное уравнение с n пространственными переменными

$$u_t = L[f(u)] + \frac{g(t)}{f'_u(u)} + h(\mathbf{x}),$$

где L — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (или любого) порядка по пространственным координатам с независящими от t коэффициентами, который удовлетворяет условию $L[\mathrm{const}] = 0$.

Это уравнение допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде [287]:

$$f(u) = \int g(t)\,dt + \eta(\mathbf{x}),$$

где функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному УрЧП:

$$L[\eta] + h(\mathbf{x}) = 0.$$

Уравнение 4. Рассмотрим нелинейное уравнение с n пространственными переменными

$$u_t = L[f(u)] + \frac{af(u)+b}{f'_u(u)} + g(\mathbf{x})[af(u)+b].$$

где L — произвольный линейный дифференциальный оператор второго (или любого) порядка по пространственным координатам с независящими от t коэффициентами, который удовлетворяет условию $L[\mathrm{const}] = 0$.

Это уравнение допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявном виде [287]:

$$f(u) = e^{at}\eta(\mathbf{x}) - \frac{b}{a},$$

где функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ — описывается линейным УрЧП:

$$L[\eta] + ag(\mathbf{x})\eta = 0.$$

Уравнение 5. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа с n пространственными переменными

$$u_t = a(\mathbf{x})\nabla\cdot[b(\mathbf{x})f(u)\nabla u] + c(\mathbf{x}) + \frac{k(t)}{f(u)}, \qquad (2.5.6.2)$$

где $a(\mathbf{x})$, $b(\mathbf{x})$, $c(\mathbf{x})$, $k(t)$, $f(u)$ — произвольные функции.

Несложно показать, что уравнение (2.5.6.2) допускает точное решение в неявном виде

$$\int f(u)\,du = \int k(t)\,dt + \eta(\mathbf{x}).$$

Здесь функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному уравнению эллиптического типа

$$a(\mathbf{x})\nabla\cdot[b(\mathbf{x})\nabla\eta] + c(\mathbf{x}) = 0,$$

которое при $b(\mathbf{x}) \equiv 1$ является уравнением Пуассона $\Delta\eta = -c(\mathbf{x})/a(\mathbf{x})$ (о точных решениях этого уравнения см., например, [281]).

Уравнение 6. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с n пространственными переменными (пространственное обобщение одномерного уравнения (2.5.3.13))

$$u_t = \nabla\cdot[a(\mathbf{x})\nabla u] - a(\mathbf{x})|\nabla\eta|^2 g(u), \qquad (2.5.6.3)$$

где $a(\mathbf{x})$ и $g(u)$ — произвольные функции, функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ является решением линейного уравнения

$$\nabla\cdot[a(\mathbf{x})\nabla\eta] = k, \qquad (2.5.6.4)$$

а k — некоторая константа. Можно показать, что уравнение (2.5.6.3) допускает два точных решения с функциональным разделением переменных, которые можно представить в неявной форме:

$$\pm\int\left(2\int g(u)\,du + C_2\right)^{-1/2} du = kt + \eta(\mathbf{x}) + C_1, \qquad (2.5.6.5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

► Пример 2.51. Положив $a(\mathbf{x}) = 1$ в (2.5.6.3)—(2.5.6.5), находим радиально-симметричное частное решение уравнения (2.5.6.4) $\eta = \frac{k}{2n}|\mathbf{x}|^2$, где $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$. Этому решению при $k = n$ соответствует уравнение вида (2.5.6.3):

$$u_t = \Delta u - |\mathbf{x}|^2 g(u), \qquad (2.5.6.6)$$

которое допускает точные решения [275]:

$$\pm \int \left(2 \int g(u)\,du + C_2\right)^{-1/2} du = nt + \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 + C_1.$$

◄

Уравнение 7. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с n пространственными переменными (пространственное обобщение одномерного уравнения (2.5.3.21))

$$u_t = \nabla \cdot [a(\mathbf{x}) f(u) \nabla u] - b(\mathbf{x}) u, \qquad b(\mathbf{x}) = \nabla \cdot [a(\mathbf{x}) \nabla \eta], \qquad (2.5.6.7)$$

где $a(\mathbf{x})$ и $f(u)$ — произвольные функции, а функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ — решение нелинейного уравнения первого порядка

$$|\nabla \eta|^2 = 4k/a(\mathbf{x}).$$

Можно показать, что уравнение (2.5.6.7) допускает точное решение с функциональным разделением переменных, которое можно представить в неявной форме:

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = 4k^2 t + \eta(\mathbf{x}) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение 8. Нелинейное уравнение Клейна—Гордона с n пространственными переменными

$$u_{tt} = a(\mathbf{x}) \nabla \cdot [b(\mathbf{x}) f(u) \nabla u] + c(\mathbf{x}) - k^2 \frac{f'_u(u)}{f^3(u)},$$

которое содержит четыре произвольных функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$, допускает два точных решения в неявном виде

$$\int f(u)\,du = \pm kt + \eta(\mathbf{x}),$$

где функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному уравнению эллиптического типа

$$a(\mathbf{x}) \nabla \cdot [b(\mathbf{x}) \nabla \eta] + c(\mathbf{x}) = 0.$$

Замечание 2.45. *См. также уравнения старших порядков 5, 6, 8—10 в разд. 2.5.7, которые допускают многомерные обобщения.*

2.5.7. Нелинейные уравнения третьего и более высоких порядков

В работах [156, 163, 286, 287] приводятся некоторые явные решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза, а также ряда других уравнений старших порядков. Метод, описанный в разд. 2.5.2, можно успешно применять для построения точных решений в неявном виде нелинейных УрЧП третьего и более высоких порядков. Опуская подробности, проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах (приводим только нелинейные уравнения и их точные решения).

Уравнение 1. Рассмотрим нелинейное УрЧП третьего порядка

$$u_t = a(x)[b(x)f(u)u_x]_{xx} + c(x) + \frac{k}{f(u)}, \tag{2.5.7.1}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, $k \neq 0$ — произвольная постоянная.

Методом, описанным в разд. 2.5.2, можно построить точное решение уравнения (2.5.7.1) в неявном виде

$$\int f(u)\,du = kt + \int \zeta(x)\,dx + C_1, \tag{2.5.7.2}$$

где C_1 — произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка

$$a(x)[b(x)\zeta]''_{xx} + c(x) = 0. \tag{2.5.7.3}$$

Дважды интегрируя, получим общее решение уравнения (2.5.7.3):

$$\zeta = \frac{1}{b(x)}\biggl[C_2x + C_3 - \int\biggl(\int \frac{c(x)}{a(x)}\,dx\biggr)dx\biggr], \tag{2.5.7.4}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Таким образом, формулы (2.5.7.2) и (2.5.7.4) определяют точное решение с функциональным разделением переменных нелинейного уравнения третьего порядка (2.5.7.1).

Уравнение 2. Рассмотрим еще одно нелинейное УрЧП третьего порядка

$$u_t = [x^2a(x)f(u)u_x]_{xx} - a(x)[k + 2f(u)]u_x, \tag{2.5.7.5}$$

где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции. Нетрудно проверить, что это уравнение допускает следующее решение с функциональным разделением переменных в неявном виде:

$$\int f(u)\,du = kt - \int \frac{dx}{a(x)} + C_1.$$

Уравнение 3. Нелинейное УрЧП n-го порядка

$$u_t = [f(u)u_x]_x^{(n-1)} + \frac{a}{f(u)} + b$$

имеет точное решение в неявном виде [286]:

$$\int f(u)\,du = at - \frac{b}{n!}x^n + C_{n-!}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0,$$

где C_0, C_1, …, C_n — произвольные постоянные.

Уравнение 4. Нелинейное УрЧП n-го порядка

$$u_t = [f(u)u_x]_x^{(n-1)} + \frac{aF(u)+b}{f(u)} + g(\mathbf{x})[aF(u)+b], \quad \text{где} \;\; F(u) = \int f(u)\,du,$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных в неявной форме [287]:

$$\int f(u)\,du = e^{at}\eta(x) - \frac{b}{a},$$

где функция $\eta = \eta(\mathbf{x})$ удовлетворяет линейному ОДУ:

$$\eta_x^{(n)} + ag(x)\eta = 0.$$

Уравнение 5. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_t = L[\sqrt{u}\,] + f(x) + g(x)\sqrt{u},$$

где L — линейный дифференциальный оператор n-го порядка по переменной x с независящими от t коэффициентами, $u \geqslant 0$.

Это уравнение допускает решение с обобщенным разделением переменных*, которое можно представить в явном виде [163]:

$$u = [\varphi(x) + \psi(x)t]^2,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L[\varphi] - 2\varphi\psi + g\varphi + f = 0,$$
$$L[\psi] - 2\psi^2 + g\psi = 0.$$

Замечание 2.46. *В уравнениях 5 и 6 дифференциальный оператор L и функции f, g могут зависеть от нескольких пространственных координат $x = (x_1, \ldots, x_m)$.*

Уравнение 6. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_t = L[\sqrt{u}\,] + f(x) + g(x)\sqrt{u} + cu$$

где L — линейный дифференциальный оператор n-го порядка по переменной x с независящими от t коэффициентами, $w \geqslant 0$. При $c = 0$, см. предыдущее уравнение.

---

*Приведенные решения с обобщенным разделением переменных уравнений 5, 6, 8, 9, 10 можно трактовать и как решения с функциональным разделением переменных.

Это уравнение допускает решение с обобщенным разделением переменных, которое можно представить в явном виде [163]:

$$u = \left[\varphi(x) + \psi(x)\exp\left(\tfrac{1}{2}ct\right)\right]^2,$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} L[\varphi] + c\varphi^2 + g\varphi + f = 0, \\ L[\psi] + c\varphi\psi + g\psi = 0. \end{gathered}$$

Уравнение 7. Нелинейное уравнение

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x^{(n-1)} - a^2\frac{f'_u(u)}{f^3(u)} + b,$$

содержащее вторую производную по переменной t, допускает точные решения в неявной форме [286]:

$$\int f(u)\,du = \pm at - \frac{b}{n!}x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1x + C_0,$$

где $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ — произвольные постоянные.

Уравнение 8. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{tt} = L[\sqrt{u}\,] + a(x) + b(x)\sqrt{u},$$

где L — линейный дифференциальный оператор n-го порядка по переменной x с независящими от t коэффициентами, $u \geqslant 0$.

Это уравнение допускает решение с обобщенным разделением переменных, которое можно представить в явном виде

$$u = [f(x)t^2 + g(x)t + h(x)]^2,$$

где функции $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &L[f] + bf - 12f^2 = 0, \\ &L[g] + bg - 12fg = 0, \\ &L[h] + bh + a - 4fh - 2g^2 = 0. \end{aligned}$$

Замечание 2.47. *В уравнениях 8–10 дифференциальный оператор L и функции a, b могут зависеть от нескольких пространственных координат $x = (x_1, \dots, x_m)$.*

Уравнение 9. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{tt} = L[\sqrt{u}\,] + a(x) + b(x)\sqrt{u} + cu.$$

При $c = 0$ см. предыдущее уравнение.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных при $c>0$ [163]:

$$u=\left[f(x)\exp\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,t\right)+g(x)\exp\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{c}\,t\right)+h(x)\right]^2,$$

где функции $f=f(x)$, $g=g(x)$, $h=h(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&L[f]+\tfrac{3}{2}cfh+bf=0,\\&L[g]+\tfrac{3}{2}cgh+bg=0,\\&L[h]+ch^2+bh+a+2cfg=0.\end{aligned}$$

2°. Решение с обобщенным разделением переменных при $c<0$:

$$u=\left[f(x)\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{|c|}\,t\right)+g(x)\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{|c|}\,t\right)+h(x)\right]^2,$$

где функции $f=f(x)$, $g=g(x)$, $h=h(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&L[f]+\tfrac{3}{2}cfh+bf=0,\\&L[g]+\tfrac{3}{2}cgh+bg=0,\\&L[h]+ch^2+bh+a+\tfrac{1}{2}c(\varphi^2+\psi^2)=0.\end{aligned}$$

Уравнение 10. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{tt}=L[u^{1/3}]+a(x)+b(x)u^{1/3},$$

где L — линейный дифференциальный оператор n-го порядка по переменной x с независящими от t коэффициентами.

Это уравнение допускает решение с обобщенным разделением переменных, которое можно представить в явном виде [287]:

$$u=[f(x)t+g(x)]^3,$$

где функции $f=f(x)$ и $g=g(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&L[f]+bf-6f^3=0,\\&L[g]+bg+a-6f^2g=0.\end{aligned}$$

2.6. Функциональное разделение переменных общего вида. Явное представление решений

2.6.1. Общий вид решений с функциональным разделением переменных

В общем случае термин *решение с функциональным разделением переменных* в отношении нелинейных УрЧП с двумя независимыми переменными используется для точных решений, которые можно представить в виде суперпозиции двух функций [42, 278, 309]:

$$u=U(z),\qquad z=\varphi(x,t),\tag{2.6.1.1}$$

где искомые функции $U(z)$ и $\varphi(x,t)$ описываются соответственно переопределенными системами ОДУ и УрЧП. В простейших случаях, каждая из этих функций может описываться одним уравнением.

Представление решения в виде суперпозиции функций (2.6.1.1) является наиболее общим для нелинейных УрЧП, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций искомой величины u.

Замечание 2.48. *Если внутренняя функция $U = U(z)$ описывается одним ОДУ, то метод поиска решений с функциональным разделением переменных в виде (2.6.1.1) является частным случаем прямого метода поиска симметрий [128, 129]. Если функция $U = U(z)$ удовлетворяет переопределенной системе ОДУ, то метод поиска решений с функциональным разделением переменных в виде (2.6.1.1) выходит за рамки прямого метода поиска симметрий (подробности см. в главе 3).*

Далее будут рассмотрены несколько классов нелинейных уравнений диффузионного и волнового типов, которые зависят от произвольной функции $f(u)$ и допускают точные решения вида (2.6.1.1), когда функция $U = U(z)$ описывается одним ОДУ.

2.6.2. Нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа

Класс рассматриваемых нелинейных УрЧП. Следуя [275], рассмотрим реакционно-конвективно-диффузионные уравнения с нелинейным источником и переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u), \tag{2.6.2.1}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Некоторые из четырех функциональных коэффициентов $a = a(x) > 0$, $b = b(x)$, $c = c(x) > 0$, $p = p(x)$ можно считать свободными, а остальные можно выразить через них (это можно сделать по-разному, см. ниже). Без ограничения общности будем полагать, что $p > 0$ (при $p < 0$ функции p и f необходимо переопределить, переобозначив их на $-p$ и $-f$).

Редукция реакционно-конвективно-диффузионного уравнения к ОДУ. Будем искать точные решения уравнения (2.6.2.1) в виде суперпозиции функций (2.6.1.1). Подставив (2.6.1.1) в (2.6.2.1), получим

$$a(x)\varphi_x^2 U''_{zz} + \big\{[a(x)\varphi_x]_x + b(x)\varphi_x - c(x)\varphi_t\big\}U'_z + p(x)f(U) = 0. \tag{2.6.2.2}$$

В частном случае $U(z) = z$ уравнение (2.6.2.2) совпадает с исходным уравнением (2.6.2.1). Поэтому на данном этапе никакие решения не потеряны.

Пусть коэффициенты уравнения (2.6.2.1) удовлетворяют соотношениям

$$p(x) = a(x)s(\varphi)\varphi_x^2, \tag{2.6.2.3}$$

$$c(x)\varphi_t = [a(x)\varphi_x]_x + b(x)\varphi_x + a(x)k(\varphi)\varphi_x^2, \tag{2.6.2.4}$$

где $s(\varphi)$ и $k(\varphi)$ — некоторые функции ($s \not\equiv 0$). Тогда уравнение (2.6.2.2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U''_{zz} - k(z)U'_z + s(z)f(U) = 0. \tag{2.6.2.5}$$

Точные решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (2.6.2.5) для некоторых функций $k(z)$, $s(z)$, $f(U)$ можно найти в [285, 288].

В частном случае $k(z) \equiv 0$, который соответствует линейному уравнению (2.6.2.4), общее решение уравнения (2.6.2.5) при $s(z) = 1$ и произвольной функции $f(U)$ можно записать в неявном виде [285]:

$$\int \left[C_1 - 2\int f(U)\,dU\right]^{-1/2} dU = C_2 \pm z, \tag{2.6.2.6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнения (2.6.2.3)—(2.6.2.5) позволяют строить точные решения широкого класса нелинейных реакционно-конвективно-диффузионных уравнений вида (2.6.2.1).

Замечание 2.49. *В уравнении (2.6.2.1) без ограничения общности два из четырех функциональных коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)$ можно положить равными единице. В частности, если разделить обе части уравнения на c и перейти от t, x к новым независимым переменным t, $y = \int \sqrt{c/a}\,dx$, то получим уравнение в каноническом виде $u_t = u_{yy} + b_1(y)u_y + p_1(y)f(u)$. Нетрудно также найти преобразование t, $\bar{y} = \bar{y}(x)$, которое приводит уравнение (2.6.2.1) к другой канонической форме: $u_t = [a_2(\bar{y})u_{\bar{y}}]_{\bar{y}} + p_2(\bar{y})f(u)$. Однако представление уравнения в общем виде (2.6.2.1) более удобно, поскольку содержит любые его канонические и неканонические формы.*

Замечание 2.50. *В уравнениях (2.6.2.1)–(2.6.2.4) функции одной переменной $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)$ можно заменить соответственно на функции двух переменных $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$.*

Анализ и решения определяющей системы уравнений. Прямая процедура построения точных решений нелинейного уравнения вида (2.6.2.1) предполагает, что функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — заданные, а функции $u = u(x,t)$ и $p = p(x)$ — искомые. В этом случае при заданных тем или иным способом функциях $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ требуется сначала найти частные решения $p(x)$ и $\varphi = \varphi(x,t)$ уравнений (2.6.2.3) и (2.6.2.4) (последние уравнение можно линеаризовать, см. ниже). После этого решение уравнения (2.6.2.1) определяется по формуле (2.6.1.1), где функция $U(z)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.6.2.5).

В общем случае два уравнения (2.6.2.3) и (2.6.2.4) при заданных функциях $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $p = p(x)$, $k(\varphi)$, $s(\varphi)$ образуют переопределенную нелинейную систему уравнений для одной функции φ. Эту систему будем называть *определяющей системой уравнений*). Свойства уравнений (2.6.2.3) и (2.6.2.4) будем исследовать последовательно.

Нелинейное уравнение (2.6.2.3) приводится к двум простым уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными $\sqrt{s(\varphi)}\,\varphi_x = \pm\sqrt{p(x)/a(x)}$, общее решение которых записывается так:

$$\int \sqrt{s(\varphi)}\, d\varphi = \pm \int \sqrt{p(x)/a(x)}\, dx + \xi(t), \tag{2.6.2.7}$$

где $\xi(t)$ — произвольная функция. Поэтому в общем случае функция φ должна иметь вид

$$\varphi = G(y), \qquad y = \xi(t) + \theta(x). \tag{2.6.2.8}$$

Отметим, что решение (2.6.2.8) допускает и другое (эквивалентное) представление

$$\varphi = \bar{G}(\bar{y}), \qquad \bar{y} = \bar{\xi}(t)\bar{\theta}(x), \tag{2.6.2.9}$$

где $\bar{y} = e^y$, $\bar{\xi} = e^\xi$, $\bar{\theta} = e^\theta$.

Нелинейные преобразования

$$\varphi = F(\psi) \tag{2.6.2.10}$$

сохраняют вид уравнений (2.6.2.3) и (2.6.2.4), причем функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ изменяются следующим образом:

$$k(\varphi) \Longrightarrow k(F(\psi))F'_\psi(\psi) + \frac{F''_{\psi\psi}(\psi)}{F'_\psi(\psi)}, \qquad s(\varphi) \Longrightarrow s(F(\psi))[F'_\psi(\psi)]^2. \tag{2.6.2.11}$$

Вырожденный случай $k(\varphi) \equiv 0$ соответствует линейному УрЧП с переменными коэффициентами (2.6.2.4). При $k(\varphi) \not\equiv 0$ нелинейное уравнение (2.6.2.4) с помощью подстановки

$$\psi = C_1 \int K(\varphi)\, d\varphi + C_2, \qquad K(\varphi) = \exp\left[\int k(\varphi)\, d\varphi\right], \tag{2.6.2.12}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, преобразуется к линейному УрЧП:

$$c(x)\psi_t = [a(x)\psi_x]_x + b(x)\psi_x. \tag{2.6.2.13}$$

В частном случае $k(\varphi) = k = \text{const}$ можно использовать подстановку

$$\varphi = k^{-1} \ln|\psi|, \tag{2.6.2.14}$$

которая следует из (2.6.2.12).

Решения линейного уравнения с автономными коэффициентами (2.6.2.13) можно строить методом разделения переменных. В частности, это уравнение имеет решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных:

$$\psi = \lambda t + \eta(x), \qquad [a(x)\eta'_x]'_x + b(x)\eta'_x - \lambda c(x) = 0; \tag{2.6.2.15}$$

$$\psi = \exp(\lambda t)\zeta(x), \qquad [a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x - \lambda c(x)\zeta = 0, \tag{2.6.2.16}$$

где λ — произвольная постоянная. Уравнение для η в (2.6.2.15) легко интегрируется с помощью подстановки $w(x) = \eta'_x$, а решения линейного ОДУ для ζ в

(2.6.2.16) при различных функциях $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ указаны [285, 288]. Другие точные решения уравнения (2.6.2.13) для некоторых функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ можно найти в справочнике [281].

Поскольку преобразования вида (2.6.2.10) меняют только функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ в уравнениях (2.6.2.3) и (2.6.2.4), функцию F без ограничения общности можно выбрать так, чтобы упростить одно из этих уравнений. Ниже описаны три возможных способа упрощения этих уравнений.

1°. При $s(\varphi)=1$ и $k=k(\varphi)$ из формулы (2.6.2.7) находим

$$\varphi=\xi(t)+\theta(x), \tag{2.6.2.17}$$

что соответствует $G(y)=y$ в (2.6.2.8). В этом случае $p(x)=a(x)(\theta'_x)^2$.

2°. При $s(\varphi)=1/\varphi$ и $k=k(\varphi)$ формула (2.6.2.7) дает

$$\varphi=\bar{\xi}(t)\bar{\theta}(x), \tag{2.6.2.18}$$

что соответствует $\bar{G}(y)=y$ в (2.6.2.9).

3°. При $s=s(\varphi)$ и $k(\varphi)=0$ уравнение (2.6.2.4) является линейным УрЧП автономного вида, решения которого строятся методом разделения переменных.

В дальнейшем будем использовать простейшее представление решения из п. 1°. Подставив (2.6.2.17) в уравнение (2.6.2.4), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$c(x)\xi'_t=[a(x)\theta'_x]'_x+b(x)\theta'_x+a(x)(\theta'_x)^2k(\varphi), \qquad \varphi=\xi(t)+\theta(x). \tag{2.6.2.19}$$

Используем метод дифференцирования (см. разд. 2.4), чтобы найти допустимые функции $k(\varphi)$, для которых это уравнение может иметь решения. Сначала, разделив на c, представим уравнение (2.6.2.19) в виде

$$\xi'_t=Q(x)+R(x)k(\varphi), \qquad \varphi=\xi(t)+\theta(x), \tag{2.6.2.20}$$

где $Q(x)=[(a\theta'_x)'_x+b\theta'_x]/c$ и $R(x)=a(\theta'_x)^2/c$. Затем, дифференцируя обе части (2.6.2.20) по t, преобразуем полученное уравнение к виду $\xi''_{tt}/\xi'_t=R(x)k'_\varphi(\varphi)$. Прологарифмируем обе части этого уравнение и вновь продифференцируем по t. Разделив на ξ'_t, имеем $[\ln(\xi''_{tt}/\xi'_t)]'_t/\xi'_t=[\ln k'_\varphi(\varphi)]'_\varphi$. Продифференцировав далее по x, получим

$$[\ln k'_\varphi(\varphi)]''_{\varphi\varphi}=0. \tag{2.6.2.21}$$

Решения этого ОДУ записываются так:

$$k(\varphi)=k_1\varphi+k_2 \qquad \text{(вырожденное решение)}, \tag{2.6.2.22}$$

$$k(\varphi)=k_1e^{-k_2\varphi}+k_3 \qquad \text{(невырожденное решение)}, \tag{2.6.2.23}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Формулы (2.6.2.22) и (2.6.2.23) определяют все допустимые функции $k(\varphi)$, при которых функционально-дифференциальное уравнение (2.6.2.19) может иметь решения.

Формулы (2.6.2.17), (2.6.2.22), (2.6.2.23) будут использоваться в следующих разделах для построения точных решений нелинейных реакционно-конвективно-диффузионных уравнений с автономными коэффициентами (2.6.2.1).

Построение точных решений при $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$.

Прямой метод построения точных решений. В простейшем случае $k(\varphi) = k = \text{const}$, который соответствует значениям $k_1 = 0$ и $k_2 = k$ в (2.6.2.22), подстановка выражения (2.6.2.17) в уравнение (2.6.2.19) дает $\xi(t) = t$ (для удобства постоянный сомножитель выбран равным единице). Поэтому класс уравнений (2.6.2.1) в этом случае допускает точные решения с функциональным разделением переменных вида (2.6.1.1), где

$$\varphi(x,t) = t + \int g(x)\,dx. \tag{2.6.2.24}$$

Здесь функция $g(x) = \theta'_x(x)$ может задаваться исследователем или определяться в ходе последующего анализа (в зависимости от цели, см. ниже). Подставив (2.6.2.24) в уравнение (2.6.2.3) при $s(\varphi) = 1$ и уравнение (2.6.2.4) при $k(\varphi) = k$, получим

$$p(x) = a(x)g^2(x), \tag{2.6.2.25}$$

$$c(x) = [a(x)g(x)]'_x + b(x)g(x) + ka(x)g^2(x). \tag{2.6.2.26}$$

Соотношение (2.6.2.26) связывает первые три функциональных коэффициента уравнения (2.6.2.1) и функцию $g = g(x)$ в (2.6.2.24) (это соотношение является дифференциальным относительно функций a, g и алгебраическим относительно функций b, c), а соотношение (2.6.2.25) является алгебраическим и служит для определения функционального коэффициента $p(x)$.

Если три функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ считаются заданными, то соотношение (2.6.2.26) при $k \neq 0$ есть уравнение Риккати относительно $g = g(x)$. Перепишем это уравнение в стандартном виде:

$$a(x)g'_x + ka(x)g^2 + [b(x) + a'_x(x)]g - c(x) = 0. \tag{2.6.2.27}$$

Обширный список точных решений уравнения (2.6.2.27) с функциями $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ различного вида приводится в справочниках [285, 288]. Рассмотрим два случая.

Вырожденный случай. При $k = 0$ уравнение Риккати (2.6.2.27) вырождается в линейное уравнение, общее решение которого определяется формулами

$$g(x) = \frac{1}{a(x)}E(x)\left[\int \frac{c(x)}{E(x)}\,dx + C_1\right], \qquad E(x) = \exp\left[-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right], \tag{2.6.2.28}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

► Пример 2.52. В случае постоянных коэффициентов уравнения $a = c = 1$, $b = 0$ с помощью формул (2.6.2.28) при $C_1 = 0$ находим $g(x) = x$. Подставив эту функцию в (2.6.2.24) и (2.6.2.25), где $s(\varphi)=1$, получим $\varphi(x,t)=t+\frac{1}{2}x^2$, $p(x)=x^2$. Следовательно, нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = u_{xx} + x^2 f(u) \tag{2.6.2.29}$$

при произвольной функции $f(u)$ допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \tfrac{1}{2}x^2. \tag{2.6.2.30}$$

Здесь функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} + f(U) = 0 \tag{2.6.2.31}$$

(получено подстановкой значений $k=0$ и $s=1$ в (2.6.2.5)), общее решение которого можно представить в неявном виде (2.6.2.6). ◀

▶ Пример 2.53. Рассмотрим более сложную ситуацию, когда один из коэффициентов уравнения $a=a(x)$ произвольным образом зависит от пространственной переменной, а два других коэффициента постоянны: $b(x)=0$, $c(x)=1$. С помощью формул (2.6.2.28) при $C_1=0$ находим $g(x)=x/a(x)$. Подставив эту функцию в (2.6.2.24) и (2.6.2.25), где $s(\varphi)=1$, получим $\varphi(x,t)=$ $=t+\int\frac{x}{a(x)}\,dx$, $p(x)=x^2/a(x)$. Поэтому нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x + \frac{x^2}{a(x)}f(u), \tag{2.6.2.32}$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных [275]:

$$u = U(z), \qquad z = t + \int \frac{x}{a(x)}\,dx, \tag{2.6.2.33}$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым обыкновенным дифференциальным уравнением (2.6.2.31).

Подставив $a(x)=x^n$, $a(x)=e^{\lambda x}$, $a(x)=xe^{\lambda x}$ в (2.6.2.32), получим нелинейные уравнения

$$u_t = (x^n u_x)_x + x^{2-n}f(u), \tag{2.6.2.34}$$

$$u_t = (e^{\lambda x}u_x)_x + x^2e^{-\lambda x}f(u), \tag{2.6.2.35}$$

$$u_t = (xe^{\lambda x}u_x)_x + xe^{-\lambda x}f(u), \tag{2.6.2.36}$$

которые допускают точные решения при произвольной функции $f(u)$.

Отметим, что УрЧП с переменными коэффициентами $u_t=(xu_x)_x+xf(u)$, которое является частным случаем уравнения (2.6.2.34) при $n=1$, имеет неинвариантное решение типа бегущей волны $u=U(x+t)$. ◀

Замечание 2.51. *Уравнение (2.6.2.32) и его решение из других соображений было получено в разд. 2.5.3 (см. уравнение (2.5.3.13)).*

Невырожденный случай. При $k = \mathrm{const}$ $(k \neq 0)$ подстановка

$$g = \frac{1}{k}\frac{y'_x}{y} \tag{2.6.2.37}$$

преобразует уравнение (2.6.2.27) к линейному ОДУ второго порядка

$$a(x)y''_{xx} + [b(x) + a'_x(x)]y'_x - kc(x)y = 0. \tag{2.6.2.38}$$

В [285, 288] приводится обширный список точных решений этого уравнение с функциями $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ различного вида.

► Пример 2.54. В случае постоянных коэффициентов $a = c = 1$, $b = 0$ общее решение уравнения (2.6.2.38) имеет вид

$$y = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch}(mx) + C_2 \operatorname{sh}(mx) & \text{при } \ k = m^2 > 0, \\ C_1 \cos(mx) + C_2 \sin(mx) & \text{при } \ k = -m^2 < 0, \end{cases} \tag{2.6.2.39}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $k = 1$ в (2.6.2.39) и используя формулу (2.6.2.37), находим

$$g(x) = \operatorname{th} x.$$

Подставив эту функцию в (2.6.2.24) и (2.6.2.25), получим

$$\varphi(x,t) = t + \ln \operatorname{ch} x, \qquad p(x) = \operatorname{th}^2 x.$$

Следовательно, нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = u_{xx} + \operatorname{th}^2 x f(u) \tag{2.6.2.40}$$

при произвольной $f(u)$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \ln \operatorname{ch} x, \tag{2.6.2.41}$$

где функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} - U'_z + f(U) = 0. \tag{2.6.2.42}$$

Порядок уравнения (2.6.2.42) можно понизить на единицу с помощью подстановки $U'_z = \Phi(U)$, которая приводит к уравнению Абеля второго рода в канонической форме. В [285, 288] указаны точные решения уравнения (2.6.2.42) при некоторых зависимостях $f(U)$. ◄

В табл. 2.7 приведены нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа

$$u_t = u_{xx} + p(x)f(u),$$

где $f(u)$ — произвольная функция, которые допускают точные решения с функциональным разделением переменных $u = U(z)$, $z = \varphi(x,t)$ (функция φ определяется с точностью до аддитивной постоянной). В уравнениях № 1, 2, 4 — 7 функция $\varphi(x,t)$ является суммой функций разных аргументов (2.6.2.24). Решение типа бегущей волны (см. уравнение № 1) соответствует вырожденному решению уравнения (2.6.2.27) при $g = \alpha = \text{const}$. Решения некоторых уравнений этого типа с более сложными функциями $p(x)$ можно получить с помощью формулы (2.6.2.39) из примера 2.54. Решение уравнения № 3 является автомодельным (см. пример 2.56).

Таблица 2.7. Нелинейные уравнения $u_t = u_{xx} + p(x)f(u)$, допускающие точные решения вида $u = U(z)$, $z = \varphi(x,t)$ (по данным [275]).

№	Функция $p(x)$	Функция $\varphi(x,t)$	Уравнение для функции $U = U(z)$
1	1	$t + \alpha x$	$\alpha^2 U''_{zz} - U'_z + f(U) = 0$
2	x^2	$t + \frac{1}{2}x^2$	$U''_{zz} + f(U) = 0$
3	x^{-2}	$xt^{-1/2}$	$U''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + z^{-2}f(U) = 0$
4	$\operatorname{th}^2(\alpha x)$	$t + \alpha^{-2}\ln\operatorname{ch}(\alpha x)$	$U''_{zz} - \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$
5	$\operatorname{cth}^2(\alpha x)$	$t + \alpha^{-2}\ln\lvert\operatorname{sh}(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} - \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$
6	$\operatorname{tg}^2(\alpha x)$	$t - \alpha^{-2}\ln\lvert\cos(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} + \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$
7	$\operatorname{ctg}^2(\alpha x)$	$t - \alpha^{-2}\ln\lvert\sin(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} + \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$

Здесь $f(u)$ — произвольная функция, α — произвольная постоянная ($\alpha \neq 0$).

Другие способы построения точных решений. Рассмотрим теперь другие возможности построения точных решений уравнений вида (2.6.2.1) при $k(\varphi) = k$, $s(\varphi) = 1$ без интегрирования уравнения Риккати (2.6.2.27). Для этого будем считать функцию $g(x)$ и любые две из трех функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ заданными, а оставшуюся функцию будем находить, исходя из уравнения (2.6.2.27). В табл. 2.8 указаны возможные ситуации и приведены формулы для искомых функций. Окончательный вид нелинейного реакционно-конвективно-диффузионного уравнения определяется путем подстановки функции $p(x) = a(x)g^2(x)$ в уравнение (2.6.2.1).

Таблица 2.8. Различные способы задания функциональных коэффициентов уравнения (2.6.2.1) при $p(x) = a(x)g^2(x)$ и уравнения (2.6.3.1) при $p(x) = a(x)g(x)$.

№	Известные (заданные) функции	Искомые функции
1	$a = a(x)$, $b = b(x)$, $g = g(x)$	$c(x) = ag'_x + kag^2 + (b + a'_x)g$
2	$a = a(x)$, $c = c(x)$, $g = g(x)$	$b(x) = g^{-1}(c - ag'_x) - a'_x - kag$
3	$b = b(x)$, $c = c(x)$, $g = g(x)$	$a(x) = g^{-1}E\bigl[\int(c - bg)E^{-1}dx + C_1\bigr]$

Обозначения: k и C_1 — произвольные постоянные, $g^{-1} = 1/g$, $E = \exp\bigl(-k\int g\,dx\bigr)$.

► Пример 2.55. Для альтернативного представления уравнений и их точных решений воспользуемся третьим способом, указанным в табл. 2.8, при $b = 0$, $c = 1$. Возможны два случая.

1°. *Вырожденный случай при* $k = 0$. Используя строку № 3 табл. 2.8 находим функции $a(x) = xg^{-1}(x)$, $p(x) = x^2/a(x)$, что приводит к уравнению (2.6.2.32).

2°. *Невырожденный случай при* $k \neq 0$. Из строки № 3 табл. 2.8 при $k \neq 0$, $C_1 = 0$ имеем $a(x) = g^{-1}E\int E^{-1}dx$. Введем новую функцию $h = h(x)$, полагая $h = \int E^{-1}dx$. Дифференцируя это выражение и учитывая формулу $E = \exp\bigl(-k\int g\,dx\bigr)$, выразим функцию g через h. После простых преобразований в итоге получим $g = k^{-1}h''_{xx}/h'_x$, $a = kh/h''_{xx}$, $p = k^{-1}hh''_{xx}/(h'_x)^2$. Следовательно, нелинейное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x + p(x)f(u), \qquad a(x) = k\frac{h}{h''_{xx}}, \quad p(x) = \frac{1}{k}\frac{hh''_{xx}}{(h'_x)^2}, \tag{2.6.2.43}$$

где $f(u)$ и $h = h(x)$ — произвольные функции, $k \neq 0$ — произвольная постоянная, допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \frac{1}{k}\ln|h'_x|.$$

Здесь функция $U(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения $U''_{zz} - kU'_z + f(U) = 0$.

Например, положив $h = \operatorname{sh}(\alpha x)$, $k = \alpha^2$ в (2.6.2.43), получим уравнение № 4 из табл. 2.7.

Подставив $h = \ln(\alpha x)$, $k = -1$ в (2.6.2.43), приходим к уравнению

$$u_t = [x^2\ln(\alpha x)u_x]_x + \ln(\alpha x)f(u), \tag{2.6.2.44}$$

которое допускает точное решение вида $u = U(z)$, где $z = t + \ln x$. ◄

Прямое построение точных решений при $k(\varphi) \neq$ const.

1°. *Случай* $k(\varphi) = k_1\varphi$, $s(\varphi) = 1$. При $k(\varphi) = k_1\varphi$, что соответствует значению $k_2 = 0$ в (2.6.2.22), подстановка выражения (2.6.2.17) в уравнение (2.6.2.19) дает $\xi(t) = e^{\lambda t}$. В этом случае класс уравнений (2.6.2.1) допускает точные решения с функциональным разделением переменных вида (2.6.1.1), где

$$\varphi(x,t) = e^{\lambda t} + \theta(x). \tag{2.6.2.45}$$

Подставив выражение (2.6.2.45) в соотношение (2.6.2.3), где $s(\varphi) = 1$, и уравнение (2.6.2.19), где $k(\varphi) = k_1\varphi$, получим

$$c(x) = \frac{k_1}{\lambda}a(x)(\theta'_x)^2, \qquad p(x) = a(x)(\theta'_x)^2. \tag{2.6.2.46}$$

В данном случае функции $a(x)$ и $b(x)$ остаются произвольными, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет ОДУ с кубической нелинейностью

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta'_x + k_1a(x)\theta(\theta'_x)^2 = 0. \tag{2.6.2.47}$$

Подстановка $\eta = \int \exp\bigl(\frac{1}{2}k_1\theta^2\bigr)\,d\theta$ приводит уравнение (2.6.2.47) к линейному уравнению $[a(x)\eta'_x]'_x + b(x)\eta'_x = 0$, общее решение которого определяется формулой $\eta = C_1 \int \frac{1}{a}\exp\bigl(-\int \frac{b}{a}\,dx\bigr)\,dx + C_2$.

2°. *Случай* $k(\varphi) = k_1e^{-k_2\varphi} + k_3$, $s(\varphi) = 1$. При $k(\varphi) = k_1e^{-k_2\varphi} + k_3$, что соответствует использованию зависимости (2.6.2.23), подставив выражение (2.6.2.17) в уравнение (2.6.2.19), получим $\xi(t) = k_2^{-1}\ln t$. В этом случае класс уравнений (2.6.2.1) допускает точные решения с функциональным разделением переменных вида (2.6.1.1), где

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{k_2}\ln t + \theta(x). \tag{2.6.2.48}$$

Подставив выражение (2.6.2.48) в соотношение (2.6.2.3), где $s(\varphi) = 1$, и уравнение (2.6.2.19), где $k(\varphi) = k_1e^{-k_2\varphi} + k_3$, имеем

$$p(x) = a(x)(\theta'_x)^2, \quad c(x) = k_1k_2a(x)e^{-k_2\theta}(\theta'_x)^2. \tag{2.6.2.49}$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ остаются произвольными, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет ОДУ с квадратичной нелинейностью

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta'_x + k_3a(x)(\theta'_x)^2 = 0. \tag{2.6.2.50}$$

Это уравнение легко интегрируется, поскольку подстановка $\zeta(x) = \theta'_x$ преобразует его в уравнение Бернулли. В частности, при $k_3 = 0$ общее решение уравнения (2.6.2.50) имеет вид

$$\theta(x) = C_1\int \frac{1}{a}\exp\biggl(-\int\frac{b}{a}\,dx\biggr)\,dx + C_2.$$

► Пример 2.56. Пусть

$$a(x) = 1, \quad b(x) = 0, \quad k_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 1. \tag{2.6.2.51}$$

В этом случае уравнение (2.6.2.50) имеет решение $\theta = \ln x$. Подставив эту функцию в формулы (2.6.2.48) и (2.6.2.49), с учетом (2.6.2.51) получим

$$\varphi(x,t) = -\tfrac{1}{2}\ln t + \ln x, \quad p(x) = x^{-2}, \quad c(x) = 1. \tag{2.6.2.52}$$

Поэтому уравнение

$$u_t = u_{xx} + x^{-2}f(u) \tag{2.6.2.53}$$

допускает автомодельное решение

$$u = U(z), \quad z = -\tfrac{1}{2}\ln t + \ln x \equiv \ln(xt^{-1/2}), \tag{2.6.2.54}$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{zz} + (\tfrac{1}{2}e^{2z} - 1)U'_z + f(U) = 0. \tag{2.6.2.55}$$

Отметим, что в приложениях обычно используется альтернативное представление таких решений, которое основано на введении автомодельной переменной $\bar z = e^z = xt^{-1/2}$ и приведении уравнения (2.6.2.53) к уравнению $U''_{\bar z\bar z} + \frac{1}{2}\bar zU'_{\bar z} + \bar z^{-2}U = 0$ (см. уравнение № 3 в табл. 2.7). ◄

► Пример 2.57. Соотношения (2.6.2.49) и уравнение (2.6.2.50) удовлетворяются, если положить

$$a(x) = 1,\ \ b(x) = 0,\ \ c(x) = e^{-x},\ \ p(x) = 1,\ \ \theta(x) = x,\ \ k_1 = k_2 = 1,\ \ k_3 = 0.$$

Поэтому уравнение $e^{-x}u_t = u_{xx} + f(u)$ допускает точное решение $u = U(z)$, где $z = x + \ln t$. ◄

Полученные результаты для одного уравнения (2.6.2.1) допускает обобщение на системы уравнений [276]. Опуская подробности, проиллюстрируем сказанное на примере конкретной системы.

► Пример 2.58. Нелинейная система, состоящая из двух УрЧП реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [a(x)u_x]_x + [x^2/a(x)]f(u,v),$$
$$v_t = [a(x)u_x]_x + [x^2/a(x)]g(u,v),$$

которая содержит три произвольные функции $a(x)$, $f(u,v)$, $g(u,v)$, имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$u = U(z), \quad v = V(z), \quad z = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)},$$

где функции $U = U(z)$ и $V = V(z)$ описываются автономной нелинейной системой ОДУ:

$$U''_{zz} + f(U,V) = 0,$$
$$V''_{zz} + g(U,V) = 0. \quad ◄$$

Реакционно-конвективно-диффузионные уравнения с несколькими пространственными переменными. Результаты, полученные для уравнения (2.6.2.1), можно обобщить на случай многомерных реакционно-конвективно-диффузионных уравнений с нелинейным источником

$$cu_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_n}\Big(a_n \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) + \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + pf(u), \tag{2.6.2.56}$$

коэффициенты которых зависят от пространственных координат и времени: $a_n = a_n(\mathbf{x},t)$, $b_n = b_n(\mathbf{x},t)$, $c = c(\mathbf{x},t)$, $p = p(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_N)$, $n = 1,\dots,N$.

Будем искать точные решения уравнения (2.6.2.56) в виде суперпозиции функций

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(\mathbf{x},t). \tag{2.6.2.57}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты уравнения (2.6.2.56) и функция φ были связаны двумя соотношениями

$$p = s(\varphi) \sum_{n=1}^{N} a_n \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big)^2, \tag{2.6.2.58}$$

$$c\varphi_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_n}\Big(a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big) + \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + k(\varphi) \sum_{n=1}^{N} a_n \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big)^2, \tag{2.6.2.59}$$

где $s(\varphi)$ и $k(\varphi)$ — некоторые функции ($s \not\equiv 0$). В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $U(z)$:

$$U''_{zz} - k(z)U'_z + s(z)f(U) = 0. \tag{2.6.2.60}$$

Нелинейное преобразование $\varphi = F(\psi)$ сохраняет вид уравнений (2.6.2.58) и (2.6.2.59), а функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ изменяются по правилу (2.6.2.11). Преобразование (2.6.2.12) переводит нелинейное уравнение (2.6.2.59) в линейное:

$$c\psi_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_n}\Big(a_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\Big) + \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n}. \tag{2.6.2.61}$$

Для уравнения (2.6.2.56) с автономными коэффициентами $a_n = a_n(\mathbf{x})$, $b_n = b_n(\mathbf{x})$, $c = c(\mathbf{x})$, $p = p(\mathbf{x})$ решение уравнения (2.6.2.58) имеет вид $\varphi = G(y)$, где $y = \xi(t) + \theta(\mathbf{x})$. Полагая без ограничения общности $s(\varphi) = 1$, можно найти точные решения уравнений (2.6.2.58) и (2.6.2.59) в виде функций с аддитивным разделением переменных

$$\varphi = \xi(t) + \theta(\mathbf{x}). \tag{2.6.2.62}$$

Подставив (2.6.2.62) в уравнение (2.6.2.59), можно получить функционально-дифференциальное уравнение, которое допускает точные решения для коэффициентов $s(\varphi)$ вида (2.6.2.22) и (2.6.2.23).

► Пример 2.59. Легко проверить, что при $a_n = 1$, $b_n = 0$ ($n = 1, \ldots, N$), $c=1$, $k(\varphi)=0$, $s(\varphi)=1$ уравнениям (2.6.2.58) и (2.6.2.59) можно удовлетворить, если положить $p = |\mathbf{x}|^2$, $\varphi = Nt + \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2$, где $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2$. Поэтому N-мерное нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = \Delta u + |\mathbf{x}|^2 f(u)$$

(Δ — оператор Лапласа), зависящее от произвольной функции $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \qquad z = Nt + \tfrac{1}{2}|\mathbf{x}|^2.$$

Функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $U''_{zz} + f(U) = 0$, общее решение которого можно записать в неявной форме (2.6.2.6). ◄

Замечание 2.52. *Функциональные коэффициенты a_n в уравнении (2.6.2.56) могут иметь разные знаки. В частности, при $a_1 = -1$, $a_n > 0$ ($n = 2, \ldots, N$), $c = 0$ уравнение (2.6.2.56) является уравнением гиперболического типа.*

2.6.3. Нелинейные уравнения конвективно-диффузионного типа

Рассматриваемый класс уравнений. Будем рассматривать нелинейные конвективно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами вида

$$c(x)u_t = [a(x)u_x]_x + [b(x) + p(x)f(u)]u_x, \tag{2.6.3.1}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Некоторые из четырех функциональных коэффициентов $a = a(x) > 0$, $b = b(x)$, $c = c(x) > 0$, $p = p(x)$ можно считать свободными, а остальные можно выразить через них (это можно сделать несколькими способами, см. ниже).

Редукция нелинейного конвективно-диффузионного уравнений к ОДУ. Следуя [276], будем искать точные решения уравнения (2.6.3.1) в виде композиции функций (2.6.1.1). Подставив (2.6.1.1) в (2.6.3.1), получим

$$a(x)\varphi_x^2 U''_{zz} + \bigl\{[a(x)\varphi_x]_x + b(x)\varphi_x - c(x)\varphi_t\bigr\}U'_z + p(x)\varphi_x f(U)U'_z = 0. \tag{2.6.3.2}$$

В частном случае $U(z) = z$ уравнение (2.6.3.2) совпадает с исходным уравнением (2.6.3.1). Поэтому на данном этапе никакие решения не потеряны.

Пусть коэффициенты уравнения (2.6.3.1) удовлетворяют соотношениям

$$p(x) = a(x)s(\varphi)\varphi_x, \tag{2.6.3.3}$$

$$c(x)\varphi_t = [a(x)\varphi_x]_x + b(x)\varphi_x + a(x)k(\varphi)\varphi_x^2, \tag{2.6.3.4}$$

где $s(\varphi)$ и $k(\varphi)$ — некоторые функции ($s \not\equiv 0$). Тогда уравнение (2.6.3.2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U''_{zz} + [s(z)f(U) - k(z)]U'_z = 0. \tag{2.6.3.5}$$

В [285, 288] указаны точные решения нелинейного ОДУ (2.6.3.5) для некоторых функций $k(z)$, $s(z)$, $f(U)$.

В частном случае $k(z) = k = \text{const}$ и $s(z) = s = \text{const}$ общее решение уравнения (2.6.3.5) для произвольной функций $f(U)$ можно представить в неявном виде:

$$\int \frac{dU}{kU - sF(U) + C_1} = z + C_2, \tag{2.6.3.6}$$

где $F(U) = \int f(U)\,dU$, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнения (2.6.3.3)—(2.6.3.5) позволяют строить точные решения широкого класса нелинейных конвективно-диффузионных уравнений вида (2.6.3.1).

Анализ и решения определяющей системы уравнений. Прямая процедура построения точных решений нелинейного уравнения (2.6.3.1) заключается в том, что функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$ считаются заданными, а функции $u = u(x,t)$ и $p = p(x)$ ищутся. В этом случае при заданных тем или иным способом функциях $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ требуется найти частные решения $p(x)$ и $\varphi = \varphi(x,t)$ уравнений (2.6.3.3) и (2.6.3.4) (последнее уравнение можно линеаризовать, см. ниже). После этого решение уравнения (2.6.3.1) определяется по формуле (2.6.1.1), где функция $U(z)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (2.6.3.5).

В общем случае два уравнения (2.6.3.3) и (2.6.3.4) при заданных функциях $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $p = p(x)$, $k(\varphi)$, $s(\varphi)$ образуют переопределенную нелинейную систему уравнений относительно одной функция φ (эту систем будем называть определяющей системой уравнений). Далее будем последовательно исследовать свойства уравнений (2.6.3.3) и (2.6.3.4).

Общее решение уравнения (2.6.3.3) определяется формулой

$$\int s(\varphi)\,d\varphi = \int \frac{p(x)}{a(x)}\,dx + \xi(t), \tag{2.6.3.7}$$

где $\xi(t)$ — произвольная функция. Поэтому в общем случае функция φ имеет вид

$$\varphi = G(y), \qquad y = \xi(t) + \theta(x). \tag{2.6.3.8}$$

Отметим, что решение (2.6.3.8) допускает и другое (эквивалентное) представление:

$$\varphi = \bar{G}(\bar{y}), \qquad \bar{y} = \bar{\xi}(t)\bar{\theta}(x), \tag{2.6.3.9}$$

где $\bar{y} = e^y$, $\bar{\xi} = e^{\xi}$, $\bar{\theta} = e^{\theta}$.

Нелинейные преобразования

$$\varphi = F(\psi) \tag{2.6.3.10}$$

сохраняют вид уравнений (2.6.3.3) и (2.6.3.4), причем функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ изменяются по правилу:

$$k(\varphi) \Longrightarrow k(F(\psi))F'_\psi(\psi) + \frac{F''_{\psi\psi}(\psi)}{F'_\psi(\psi)}, \qquad s(\varphi) \Longrightarrow s(F(\psi))F'_\psi(\psi). \tag{2.6.3.11}$$

Для дальнейшего важно, что уравнение (2.6.3.4) совпадает с уравнением (2.6.2.4). Вырожденный случай $k(\varphi) \equiv 0$ соответствует линейному УрЧП с переменными коэффициентами (2.6.3.4). При $k(\varphi) \not\equiv 0$ нелинейное уравнение (2.6.3.4) подстановкой (2.6.2.12) можно преобразовать в линейное уравнение (2.6.2.13). В частном случае $k(\varphi) = k = \mathrm{const}$, можно воспользоваться подстановкой (2.6.2.14), которая следует из (2.6.2.12).

Решения линейного УрЧП с автономными коэффициентами (2.6.2.13) при $k(\varphi) = 0$ можно строить методом разделения переменных. В частности, это уравнение имеет решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (2.6.2.15) и (2.6.2.16).

Поскольку преобразования вида (2.6.3.10) изменяют только функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ в уравнениях (2.6.3.3) и (2.6.3.4), функцию F можно без ограничения общности выбрать так, чтобы упростить эти уравнения. Ниже указаны три возможных способа упрощения этих уравнений.

1°. При $s(\varphi) = 1$ и $k = k(\varphi)$ из формулы (2.6.3.7) находим

$$\varphi = \xi(t) + \theta(x), \tag{2.6.3.12}$$

что соответствует $G(y) = y$ в (2.6.3.8). В этом случае $p(x) = a(x)\theta'_x$.

2°. При $s(\varphi) = 1/\varphi$ и $k = k(\varphi)$ формула (2.6.3.7) приводит к зависимости

$$\varphi = \bar{\xi}(t)\bar{\theta}(x), \qquad (2.6.3.13)$$

которая соответствует $\bar{G}(y) = y$ в (2.6.3.9).

3°. При $s = s(\varphi)$ и $k(\varphi) = 0$ уравнение (2.6.3.4) является линейным УрЧП автономного вида, решения которого строятся методом разделением переменных.

В дальнейшем будем использовать простейшее представление решения из п. 1°. Подставив (2.6.3.12) в уравнение (2.6.3.4), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$c(x)\xi'_t = [a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta'_x + a(x)(\theta'_x)^2 k(\varphi), \qquad \varphi = \xi(t) + \theta(x), \qquad (2.6.3.14)$$

которое совпадает с уравнением (2.6.2.19). Рассуждая далее, как в разд. 2.6.2, для функции $k = k(\varphi)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение (2.6.2.21), которое имеет следующие решения:

$$k(\varphi) = k_1\varphi + k_2 \qquad \text{(вырожденное решение)}, \qquad (2.6.3.15)$$

$$k(\varphi) = k_1 e^{-k_2\varphi} + k_3 \qquad \text{(невырожденное решение)}, \qquad (2.6.3.16)$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Формулы (2.6.3.15) и (2.6.3.16) определяют все допустимые функции $k(\varphi)$, при которых функционально-дифференциальное уравнение (2.6.3.14) может иметь решение.

Формулы (2.6.3.12), (2.6.3.15), (2.6.3.16) будут использоваться далее для построения точных решений нелинейного конвективно-диффузионного уравнения с автономными коэффициентами (2.6.3.1).

Построение точных решений при $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$.

Прямой метод построения точных решений. В простейшем случае $k(\varphi) = k = \text{const}$, который соответствует значениям $k_1 = 0$ и $k_2 = k$ в (2.6.3.15), подстановка выражения (2.6.3.12) в уравнение (2.6.3.14) дает $\xi(t) = t$ (постоянный множитель выбирается равным единице). Поэтому класс уравнений (2.6.3.1) в данном случае допускает решения с функциональным разделением переменных вида (2.6.1.1), где

$$\varphi(x,t) = t + \int g(x)\,dx. \qquad (2.6.3.17)$$

Здесь функция $g(x) = \theta'_x(x)$ в зависимости от цели может задаваться исследователем или определяться в ходе дальнейшего анализа (см. ниже). Подставив (2.6.3.17) в уравнение (2.6.3.3) при $s(\varphi) = 1$ и уравнение (2.6.3.4) при $k(\varphi) = k$, получим

$$p(x) = a(x)g(x), \qquad (2.6.3.18)$$

$$c(x) = [a(x)g(x)]'_x + b(x)g(x) + ka(x)g^2(x). \qquad (2.6.3.19)$$

Соотношение (2.6.3.19) связывает первые три функциональных коэффициента уравнения (2.6.3.1) и функцию $g = g(x)$ в (2.6.3.17) (это соотношение является дифференциальным относительно функций a, g и алгебраическим относительно функций b, c); соотношение (2.6.3.18) является алгебраическим и служит для определения функционального коэффициента $p(x)$.

Если функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ считать заданными, а функцию $g = g(x)$ — искомой, то соотношение (2.6.3.19) при $k \neq 0$ является уравнением Риккати, которое совпадает с уравнением (2.6.2.27). В [285, 288] указано большое число точных решений этого уравнения (2.6.2.27) для различных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$. Рассмотрим два случая.

Вырожденный случай. При $k=0$ уравнение Риккати (2.6.2.27) вырождается в линейное уравнение, общее решение которого определяется формулами

$$g(x) = \frac{1}{a(x)}E(x)\left[\int \frac{c(x)}{E(x)}\,dx + C_1\right], \qquad E(x) = \exp\left[-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right], \quad (2.6.3.20)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

► Пример 2.60. В случае постоянных коэффициентов $a = c = 1$, $b = 0$ с помощью (2.6.3.20) при $C_1 = 0$ находим $g(x) = x$. Подставив эту функцию в (2.6.3.17) и (2.6.3.18), получим $\varphi(x,t) = t + \frac{1}{2}x^2$, $p(x) = x$. Отсюда следует, что нелинейное конвективно-диффузионное уравнение

$$u_t = u_{xx} + xf(u)u_x \quad (2.6.3.21)$$

при произвольной функции $f(u)$ допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \tfrac{1}{2}x^2. \quad (2.6.3.22)$$

Функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} + f(U)U'_z = 0, \quad (2.6.3.23)$$

которое получено подстановкой $k = 0$ и $s = 1$ в (2.6.3.5). Его общее решение можно представить в неявном виде (2.6.3.6). ◄

► Пример 2.61. Рассмотрим более сложную ситуацию, когда один из коэффициентов уравнения $a = a(x)$ произвольным образом зависит от пространственной переменной, а два другие коэффициента постоянны: $b(x)=0$, $c(x)=1$. С помощью формул (2.6.3.20) при $C_1=0$ находим $g(x)=x/a(x)$. Подставив эту функцию в (2.6.3.17) и (2.6.3.18) при $s(\varphi) = 1$, получим $\varphi(x,t) = t + \int \frac{x}{a(x)}\,dx$, $p(x) = x$. Поэтому нелинейное конвективно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x + xf(u)u_x, \quad (2.6.3.24)$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \int \frac{x}{a(x)}\,dx, \quad (2.6.3.25)$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым автономным ОДУ (2.6.3.23).

Подставив $a(x) = x^n$ и $a(x) = e^{\lambda x}$ в (2.6.3.24), приходим к нелинейным уравнениям

$$u_t = (x^n u_x)_x + xf(u)u_x, \tag{2.6.3.26}$$

$$u_t = (e^{\lambda x} u_x)_x + xf(u)u_x, \tag{2.6.3.27}$$

которые допускают точные решения при произвольной функции $f(u)$.

Интересно отметить, что нелинейное уравнение с переменными коэффициентами $u_t = (xu_x)_x + xf(u)u_x$, которое является частным случаем уравнения (2.6.3.26) при $n = 1$, имеет неинвариантное решение типа бегущей волны $u = U(x+t)$. ◀

Невырожденный случай. При $k = \text{const}$ ($k \neq 0$) подстановка

$$g = \frac{1}{k}\frac{y'_x}{y} \tag{2.6.3.28}$$

приводит уравнение (2.6.2.27) линейному ОДУ второго порядка

$$a(x)y''_{xx} + [b(x) + a'_x(x)]y'_x - kc(x)y = 0. \tag{2.6.3.29}$$

В [285, 288] описано много точных решений этого уравнения для различных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

▶ Пример 2.62. В случае постоянных коэффициентов $a = c = 1$, $b = 0$ общее решение уравнения (2.6.3.29) имеет вид

$$y = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch}(mx) + C_2 \operatorname{sh}(mx) & \text{при } k = m^2 > 0, \\ C_1 \cos(mx) + C_2 \sin(mx) & \text{при } k = -m^2 < 0, \end{cases} \tag{2.6.3.30}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $k = 1$ в (2.6.3.30) и используя формулу (2.6.3.28), имеем

$$g(x) = \operatorname{th} x.$$

Подставив это выражение в (2.6.3.17) и (2.6.3.18), получим

$$\varphi(x,t) = t + \ln \operatorname{ch} x, \qquad p(x) = \operatorname{th} x.$$

В результате приходим к нелинейному конвективно-диффузионному уравнению

$$u_t = u_{xx} + \operatorname{th} x f(u)u_x,$$

которое при произвольной зависимости $f(u)$ допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \ln \operatorname{ch} x.$$

Здесь функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} + [f(U) - 1]U'_z = 0,$$

общее решение которого дается формулой (2.6.3.6) при $k = s = 1$. ◀

В табл. 2.9 приведены нелинейные конвективно-диффузионные уравнения

$$u_t = u_{xx} + p(x)f(u)u_x,$$

где $f(u)$ — произвольная функция, которые допускают решения с функциональным разделением переменных вида $u = U(z)$, $z = \varphi(x,t)$ (функция φ определяется с точностью до аддитивной постоянной). В уравнениях №№ 1, 2, 4—7 функция $\varphi(x,t)$ является суммой функций разных аргументов (2.6.3.17). Решение типа бегущей волны (см. уравнение № 1) соответствует вырожденному решению уравнения (2.6.2.27) при $g = \alpha = \text{const}$. С помощью формул (2.6.3.30) из примера 2.62 можно получить решения некоторых уравнений этого типа с более сложными функциями $p(x)$. Решение уравнения № 3 является автомодельным (см. пример 2.64).

Таблица 2.9. Нелинейные уравнения $u_t = u_{xx} + p(x)f(u)u_x$, допускающие точные решения вида $u = U(z)$, $z = \varphi(x,t)$.

№	Функция $p(x)$	Функция $\varphi(x,t)$	Уравнение для $U = U(z)$
1	1	$t + \alpha x$	$\alpha^2 U''_{zz} + [\alpha f(U) - 1]U'_z = 0$
2	x	$t + \frac{1}{2}x^2$	$U''_{zz} + f(U)U'_z = 0$
3	x^{-1}	$xt^{-1/2}$	$U''_{zz} + [\frac{1}{2}z + z^{-1}f(U)]U'_z = 0$
4	$\operatorname{th}(\alpha x)$	$t + \alpha^{-2}\ln\operatorname{ch}(\alpha x)$	$U''_{zz} + [\alpha f(U) - \alpha^2]U'_z = 0$
5	$\operatorname{cth}(\alpha x)$	$t + \alpha^{-2}\ln\lvert\operatorname{sh}(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} + [\alpha f(U) - \alpha^2]U'_z = 0$
6	$\operatorname{tg}(\alpha x)$	$t - \alpha^{-2}\ln\lvert\cos(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} + [\alpha f(U) + \alpha^2]U'_z = 0$
7	$\operatorname{ctg}(\alpha x)$	$t - \alpha^{-2}\ln\lvert\sin(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} + [\alpha f(U) + \alpha^2]U'_z = 0$

Здесь $f(u)$ — произвольная функция, α — произвольная постоянная ($\alpha \neq 0$).

Другие способы построения точных решений. Рассмотрим другие возможности построения точных решений уравнений вида (2.6.3.1) при $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$ без интегрирования уравнения Риккати (2.6.2.27). Для этого считаем, что $g(x)$ и любые две из трех функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ заданы, а оставшаяся функция будет найдена из (2.6.2.27). В табл. 2.8 приведены возможные ситуации и указаны формулы для определения искомых функций. Окончательный вид нелинейного конвективно-диффузионное уравнения определяется подстановкой функции $p(x) = a(x)g(x)$ в (2.6.3.1).

► Пример 2.63. Воспользуемся третьим способом, указанным в табл. 2.8 при $b = 0$ и $c = 1$, для альтернативного представления уравнений и их точных решений. Возможны два случая.

1°. *Вырожденный случай при* $k = 0$. Используя строку № 3 табл. 2.8 находим функции $a(x) = xg^{-1}(x)$, $p(x) = x$, что приводит к уравнению (2.6.3.24).

2°. *Невырожденный случай при* $k \neq 0$. Из строки № 3 табл. 2.8 при $k \neq 0$ и $C_1 = 0$, имеем $a(x) = g^{-1}E\int E^{-1}dx$. Введем новую функцию $h = h(x)$, положив $h = \int E^{-1} dx$. Дифференцируя это выражение и учитывая формулу $E = \exp\bigl(-k \int g\,dx\bigr)$, выразим функцию g через h. После простых преобразований в итоге получим $g = k^{-1} h''_{xx}/h'_x$, $a = kh/h''_{xx}$, $p = h/h'_x$. Отсюда следует, что нелинейное конвективно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x + p(x)f(u)u_x, \quad a(x) = k\frac{h}{h''_{xx}}, \quad p(x) = \frac{h}{h'_x}, \tag{2.6.3.31}$$

где $f(u)$ и $h = h(x)$ — произвольные функции, $k \neq 0$ — произвольная постоянная, допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \frac{1}{k}\ln|h'_x|.$$

Функция $U(z)$ определяется из автономного ОДУ $U''_{zz} + [f(U) - k]U'_z = 0$, которое легко интегрируется.

Полагая, например, $h = \operatorname{sh}(\alpha x)$ и $k = \alpha^2$ в (2.6.3.31), а затем переобозначая $f(U)$ на $\alpha f(U)$, получим уравнение 4 из табл. 2.9. ◄

Прямое построение точных решений при $k(\varphi) \neq$ const.

1°. *Случай* $k(\varphi) = k_1\varphi$, $s(\varphi) = 1$. При $k(\varphi) = k_1\varphi$, что соответствует $k_2 = 0$ в (2.6.3.15), подставив выражение (2.6.3.12) в уравнение (2.6.3.14), имеем $\xi(t) = e^{\lambda t}$. Поэтому в данном случае класс уравнений (2.6.3.1) допускает решения с функциональным разделением переменных вида (2.6.1.1), где

$$\varphi(x,t) = e^{\lambda t} + \theta(x). \tag{2.6.3.32}$$

Подставив (2.6.3.32) в соотношение (2.6.3.3) при $s(\varphi) = 1$ и уравнение (2.6.3.14) при $k(\varphi) = k_1\varphi$, получим

$$c(x) = \frac{k_1}{\lambda}a(x)(\theta'_x)^2, \quad p(x) = a(x)\theta'_x. \tag{2.6.3.33}$$

В этом случае функции $a(x)$ и $b(x)$ остаются произвольными, а функция $\theta = \theta(x)$ определяется путем решения ОДУ:

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta'_x + k_1 a(x)\theta(\theta'_x)^2 = 0. \tag{2.6.3.34}$$

Подстановка $\eta = \int \exp\bigl(\frac{1}{2}k_1\theta^2\bigr)d\theta$ приводит уравнение (2.6.3.34) к линейному уравнению $[a(x)\eta'_x]'_x + b(x)\eta'_x = 0$, общее решение которого имеет вид

$$\eta = C_1 \int \frac{1}{a}\exp\biggl(-\int \frac{b}{a}\,dx\biggr)dx + C_2.$$

2°. *Случай* $k(\varphi) = k_1 e^{-k_2\varphi} + k_3$, $s(\varphi) = 1$. При $k(\varphi) = k_1 e^{-k_2\varphi} + k_3$, что соответствует использованию зависимости (2.6.3.16), подставив выражение (2.6.3.12) в уравнение (2.6.3.14), получим $\xi(t) = k_2^{-1}\ln t$. В этом случае класс уравнений (2.6.3.1) допускает решения с функциональным разделением переменных вида (2.6.1.1), где

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{k_2}\ln t + \theta(x). \tag{2.6.3.35}$$

Подставив (2.6.3.35) в соотношение (2.6.3.3) при $s(\varphi)=1$ и уравнение (2.6.3.14) при $k(\varphi)=k_1e^{-k_2\varphi}+k_3$, находим

$$c(x)=k_1k_2a(x)e^{-k_2\theta}(\theta'_x)^2,\qquad p(x)=a(x)\theta'_x. \tag{2.6.3.36}$$

Функции $a(x)$ и $b(x)$ остаются произвольными, а функция $\theta=\theta(x)$ определяется путем решения нелинейного ОДУ:

$$[a(x)\theta'_x]'_x+b(x)\theta'_x+k_3a(x)(\theta'_x)^2=0. \tag{2.6.3.37}$$

Это уравнение легко интегрируется, поскольку подстановка $\zeta(x)=\theta'_x$ приводит его к уравнению Бернулли. В частности, при $k_3=0$ общее решение уравнения (2.6.3.37) имеет вид

$$\theta(x)=C_1\int\frac{1}{a}\exp\biggl(-\int\frac{b}{a}\,dx\biggr)\,dx+C_2.$$

► Пример 2.64. При

$$a(x)=1,\quad b(x)=0,\quad k_1=-\tfrac{1}{2},\quad k_2=-2,\quad k_3=1 \tag{2.6.3.38}$$

уравнение (2.6.3.37) имеет решение $\theta=\ln x$. Подставив эту функцию в формулы (2.6.3.35) и (2.6.3.36) и учитывая (2.6.3.38), получим

$$\varphi(x,t)=-\tfrac{1}{2}\ln t+\ln x,\qquad p(x)=x^{-1},\qquad c(x)=1. \tag{2.6.3.39}$$

Поэтому уравнение

$$u_t=u_{xx}+x^{-1}f(u)u_x \tag{2.6.3.40}$$

допускает автомодельное решение

$$u=U(z),\qquad z=-\tfrac{1}{2}\ln t+\ln x\equiv\ln(xt^{-1/2}), \tag{2.6.3.41}$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{zz}+\bigl[\tfrac{1}{2}e^{2z}-1+f(U)\bigr]U'_z=0. \tag{2.6.3.42}$$

Отметим, что в приложениях часто используется альтернативное представление таких решений, которое основано на введении автомодельной переменной $\bar z=e^z=xt^{-1/2}$ и приведении УрЧП (2.6.3.40) к ОДУ $U''_{zz}+[\frac{1}{2}z+z^{-1}f(U)]U'_z=0$ (см. уравнение № 3 в табл. 2.9). ◄

► Пример 2.65. Соотношения (2.6.3.36) и уравнение (2.6.3.37) удовлетворяются, если положить

$$a(x)=1,\ \ b(x)=0,\ \ c(x)=e^{-x},\ \ p(x)=1,\ \ \theta(x)=x,\ \ k_1=k_2=1,\ \ k_3=0.$$

Поэтому уравнение $e^{-x}u_t=u_{xx}+f(u)u_x$ допускает точное решение вида $u=U(z)$, где $z=x+\ln t$. ◄

Более сложные одномерные уравнения диффузионного типа. Приведенное ниже утверждение позволяет строить точные решения более сложных нелинейных УрЧП второго порядка.

Утверждение 1. Пусть $\varphi = \varphi(x,t)$ — решение уравнения параболического типа с квадратичной нелинейностью

$$c(x,t)\varphi_t = [a(x,t)\varphi_x]_x + b(x,t)\varphi_x + ka(x,t)\varphi_x^2, \tag{2.6.3.43}$$

где k — произвольная постоянная. Тогда УрЧП с более сложной нелинейностью

$$c(x,t)u_t = [a(x,t)u_x]_x + b(x,t)u_x + a(x,t)\varphi_x^2 F(\varphi, u, u_x/\varphi_x), \tag{2.6.3.44}$$

где $F(\varphi,u,w)$ — произвольная функция трех аргументов, допускает решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x,t). \tag{2.6.3.45}$$

Здесь функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{zz} - kU'_z + F(z, U, U'_z) = 0. \tag{2.6.3.46}$$

Таким образом, точные решения уравнения (2.6.3.43) порождают соответствующие точные решения нелинейного уравнения (2.6.3.44). Отметим, что уравнение (2.6.3.43) инвариантно относительно преобразования сдвига: $\varphi \Rightarrow \varphi + \mathrm{const}$.

Утверждение 1 доказывается прямой проверкой путем подстановки функции (2.6.3.45) в уравнение (2.6.3.44) с учетом соотношения (2.6.3.43).

Замечание 2.53. *При $k = 0$ получаем линейное УрЧП (2.6.3.43). При $k \neq 0$ подстановка $\varphi = k^{-1}\ln|\psi|$ преобразует нелинейное уравнение (2.6.3.43) в линейное:*

$$c(x,t)\psi_t = [a(x,t)\psi_x]_x + b(x,t)\psi_x. \tag{2.6.3.47}$$

Следовательно, точные решения линейного уравнения (2.6.3.47) порождают соответствующие точные решения нелинейного уравнения (2.6.3.44).

В [281] приводится ряд точных решений уравнения (2.6.3.47) для некоторых функций $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$.

► Пример 2.66. Уравнение (2.6.3.43) тождественно удовлетворяется, если положить

$$a(x,t) = a(x), \quad b(x,t) = 0, \quad c(x,t) = 1, \quad k = 0, \quad \varphi(x,t) = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)}. \tag{2.6.3.48}$$

Подставив (2.6.3.48) и функцию $F(\varphi,u,w) = f(u)w^2 + g(u)w + h(u)$ в (2.6.3.44), получим нелинейное УрЧП:

$$u_t = [a(x)u_x]_x + a(x)f(u)u_x^2 + xg(u)u_x + \frac{x^2}{a(x)}h(u), \tag{2.6.3.49}$$

которое зависит от четырех произвольных функций $a(x)$, $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$. Из утверждения 1 следует, что уравнение (2.6.3.49) имеет точное решение

$$u = U(z), \qquad z = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)},$$

где функция $U = U(z)$ описывается автономным ОДУ:

$$U''_{zz} + f(U)(U'_z)^2 + g(U)U'_z + h(U) = 0. \qquad \blacktriangleleft$$

Утверждение 1 допускает обобщение на системы нелинейных уравнений [276]. Опуская подробности, проиллюстрируем сказанное на примере конкретной системы.

► Пример 2.67. Нелинейная система УрЧП

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + xf(u,v)v_x, \\ v_t &= v_{xx} + xg(u,v)u_x \end{aligned}$$

с двумя произвольными функциями $f(u,v)$, $g(u,v)$ имеет точное решение вида

$$u = U(z), \quad v = V(z), \quad z = t + \tfrac{1}{2}x^2,$$

где функции $U = U(z)$ и $V = V(z)$ описываются автономной системой ОДУ:

$$\begin{aligned} U''_{zz} + f(U,V)V'_z &= 0, \\ V''_{zz} + g(U,V)U'_z &= 0. \end{aligned} \qquad \blacktriangleleft$$

Уравнения диффузионного типа с несколькими пространственными переменными. Утверждение 1 допускает многомерное обобщение.

Утверждение 2. Пусть $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ — решение уравнения параболического типа с квадратичной нелинейностью

$$c(\mathbf{x}, t)\varphi_t = \Delta\varphi + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\varphi + k|\nabla\varphi|^2, \tag{2.6.3.50}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, Δ — оператор Лапласа, ∇ — оператор градиента, а k — произвольная постоянная. Тогда УрЧП с более сложной нелинейностью

$$c(\mathbf{x}, t)u_t = \Delta u + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u + |\nabla\varphi|^2 F(\varphi, u, |\nabla u|/|\nabla\varphi|), \tag{2.6.3.51}$$

где $F(\varphi, u, w)$ — произвольная функция трех аргументов, допускает решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(\mathbf{x}, t). \tag{2.6.3.52}$$

Здесь функция $U(z)$ описывается ОДУ (2.6.3.46).

Утверждение 2 доказывается прямой проверкой путем подстановки функции (2.6.3.52) в уравнение (2.6.3.51) с учетом соотношения (2.6.3.50).

Замечание 2.54. *При $k \neq 0$ подстановка $\varphi = k^{-1}\ln|\psi|$ преобразует нелинейное уравнение (2.6.3.50) в линейное уравнение $c(\mathbf{x}, t)\psi_t = \Delta\psi + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\psi$.*

2.6.4. Нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона и нелинейные телеграфные уравнения

Предварительные замечания. Класс рассматриваемых нелинейных УрЧП. Как уже отмечалось в разд. 2.5.5, нелинейные уравнения типа Клейна — Гордона играют важную роль в релятивистской квантовой механике, теории поля, нелинейной оптике, физике плазмы и физике элементарных частиц. Нелинейные уравнения телеграфного типа возникают, например, при исследовании нестационарных процессов в линиях передач, миграции биологических популяций и ветвящихся случайных блужданий [73, 144].

Будем рассматривать нелинейные телеграфные уравнения с переменными коэффициентами вида

$$c(x)u_{tt} + d(x)u_t = [a(x)u_x]_x + b(x)u_x + p(x)f(u), \tag{2.6.4.1}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Некоторые из пяти функциональных коэффициентов $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $d = d(x)$, $p = p(x)$ можно считать свободными, а остальные можно выразить через них (это можно сделать по-разному, см. ниже).

Нелинейное уравнение Клейна — Гордона является частным случаем уравнения (2.6.4.1) при $b(x) \equiv d(x) \equiv 0$.

При $c(x) \equiv 0$ уравнение (2.6.4.1) вырождается в нелинейное конвективно-диффузионное уравнение с объемной реакцией.

Редукция нелинейного уравнения телеграфного типа к ОДУ. Следуя [377], будем искать точные решения уравнения (2.6.4.1) в виде композиции функций (2.6.1.1). Подставив (2.6.1.1) в (2.6.4.1), приходим к уравнению

$$\begin{aligned}&\bigl[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2\bigr]U''_{zz} + \\ &\quad + \bigl\{[a(x)\varphi_x]_x - c(x)\varphi_{tt} + b(x)\varphi_x - d(x)\varphi_t\bigr\}U'_z + p(x)f(U) = 0.\end{aligned} \tag{2.6.4.2}$$

В частном случае $U(z) = z$ уравнение (2.6.4.2) совпадает с исходным уравнением (2.6.4.1), поэтому на данном этапе никакие решения не потеряны.

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$p(x) = s(\varphi)[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2], \tag{2.6.4.3}$$

$$c(x)\varphi_{tt} + d(x)\varphi_t = [a(x)\varphi_x]_x + b(x)\varphi_x + k(\varphi)[a(x)\varphi_x^2 - c(x)\varphi_t^2], \tag{2.6.4.4}$$

где $s(\varphi)$ и $k(\varphi)$ — некоторые функции ($s \not\equiv 0$). В результате уравнение (2.6.4.2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U''_{zz} - k(z)U'_z + s(z)f(U) = 0. \tag{2.6.4.5}$$

О точных решениях нелинейных ОДУ вида (2.6.4.5) с некоторыми функциями $k(z)$, $s(z)$, $f(U)$ см. [285].

В частном случае $k(z) \equiv 0$, когда уравнение (2.6.4.4) становится линейным, общее решение уравнения (2.6.4.5) при $s(z) = 1$ и произвольной $f(U)$ можно представить в неявном виде:

$$\int \Big[C_1 - 2\int f(U)\,dU\Big]^{-1/2} dU = C_2 \pm z, \tag{2.6.4.6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнения (2.6.4.3) — (2.6.4.5) позволяют находить точные решения нелинейных телеграфных уравнений вида (2.6.4.1).

Замечание 2.55. *В уравнениях (2.6.4.1) и (2.6.4.2) — (2.6.4.4) функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $p(x)$ можно заменить функциями двух аргументов: $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$, $p(x,t)$. При этом все рассуждения сохраняются.*

Прямая процедура поиска точных решений. В случае общего положения уравнения (2.6.4.3) и (2.6.4.4) с заданными функциями $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $d = d(x)$, $p = p(x)$, $k(\varphi)$, $s(\varphi)$ образуют переопределенную нелинейную систему уравнений для φ. Будем называть ее определяющей системой уравнений.

Нелинейные преобразования

$$\varphi = F(\psi) \tag{2.6.4.7}$$

сохраняют вид уравнений (2.6.4.3) и (2.6.4.4), причем функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ изменяются так:

$$k(\varphi) \Longrightarrow k(F(\psi))F'_\psi(\psi) + \frac{F''_{\psi\psi}(\psi)}{F'_\psi(\psi)}, \qquad s(\varphi) \Longrightarrow s(F(\psi))[F'_\psi(\psi)]^2. \tag{2.6.4.8}$$

Вырожденный случай $k(\varphi) \equiv 0$ соответствует линейному уравнению гиперболического типа с переменными коэффициентами (2.6.4.4). При $k(\varphi) \not\equiv 0$ подстановка

$$\psi = C_1\int K(\varphi)\,d\varphi + C_2, \qquad K(\varphi) = \exp\Big[\int k(\varphi)\,d\varphi\Big], \tag{2.6.4.9}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, линеаризует уравнение (2.6.4.4):

$$c(x)\psi_{tt} + d(x)\psi_t = [a(x)\psi_x]_x + b(x)\psi_x. \tag{2.6.4.10}$$

В частном случае $k(\varphi) = k = \text{const}$ можно использовать подстановку

$$\varphi = k^{-1}\ln|\psi|, \tag{2.6.4.11}$$

которая следует из (2.6.4.9).

Поскольку преобразования вида (2.6.4.7) изменяют только функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ в уравнениях (2.6.4.3) и (2.6.4.4), функцию F без ограничения общности можно выбрать так, чтобы упростить одно из этих уравнений.

При использовании прямой процедуры построения точных решений нелинейных уравнений вида (2.6.4.1) функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $f(u)$ считаются заданными, а функции $u = u(x)$ и $p = p(x)$ — искомыми. Тогда, если $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ заданы тем или иным способом, нужно сначала найти частные решения $p(x)$ и $\varphi = \varphi(x,t)$ уравнений (2.6.4.3) и (2.6.4.4) (напомним, что последнее уравнение можно линеаризовать). После этого по формуле (2.6.1.1) получаем соответствующее решение исходного УрЧП (2.6.4.1), в котором функция $U(z)$ определяется из ОДУ (2.6.4.5).

Решения линейных уравнений (2.6.4.4) при $k(\varphi) \equiv 0$ и (2.6.4.10) можно найти методом разделения переменных. В частности, уравнение (2.6.4.10) при $d(x) \equiv 0$ допускает точные решения

$$\psi = \alpha t^2 + \beta t + \zeta(x), \qquad [a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x - 2\alpha c(x) = 0; \quad (2.6.4.12)$$

$$\psi = (\alpha e^{-\lambda t} + \beta e^{\lambda t})\zeta(x), \qquad [a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x - \lambda^2 c(x)\zeta = 0; \quad (2.6.4.13)$$

$$\psi = [\alpha\cos(\lambda t) + \beta\sin(\lambda t)]\zeta(x), \quad [a(x)\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta'_x + \lambda^2 c(x)\zeta = 0, \quad (2.6.4.14)$$

где α, β, λ — произвольные постоянные. Уравнение (2.6.4.12) легко интегрируется с помощью подстановки $w(x) = \zeta'_x$. Решения линейных ОДУ в (2.6.4.13) и (2.6.4.14) для некоторых функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ можно найти в [285].

О других точных решениях линейных УрЧП вида (2.6.4.10) с различными функциональными коэффициентами см. в [281].

Далее, не претендуя на исчерпывающий анализ переопределенной системы (2.6.4.3), (2.6.4.4), покажем, как эта система позволяет строить точные решения уравнений вида (2.6.4.1) при надлежащем образом выбранных функциональных коэффициентах $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$.

Случай $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$. Решения типа обобщенной бегущей волны. Нелинейные телеграфные уравнения (2.6.4.1) допускают решения типа обобщенной бегущей волны (2.6.1.1), где

$$\varphi(x,t) = t + \int g(x)\,dx. \qquad (2.6.4.15)$$

Функция $g(x)$ может быть задана или может определяться в ходе последующего анализа в зависимости от цели (см. ниже). Подставив (2.6.4.15) в (2.6.4.3) и (2.6.4.4) и положив $s(\varphi) = 1$, $k(\varphi) = k = \mathrm{const}$, получим

$$p(x) = a(x)g^2(x) - c(x), \qquad (2.6.4.16)$$

$$d(x) = [a(x)g(x)]'_x + b(x)g(x) + k[a(x)g^2(x) - c(x)]. \qquad (2.6.4.17)$$

Уравнение (2.6.4.17) связывает первые четыре функциональных коэффициента уравнения (2.6.4.1) и функцию $g = g(x)$ из (2.6.4.15); оно является дифференциальным уравнением относительно a, g и алгебраическим соотношением относительно b, c, d. Формула (2.6.4.16) служит для определения функционального коэффициента $p(x)$.

Если функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ считать заданными, а функцию $g = g(x)$ — искомой, то соотношение (2.6.4.17) при $k \neq 0$ является уравнением

Риккати, которое можно представить в виде

$$a(x)g'_x + ka(x)g^2 + [b(x) + a'_x(x)]g - kc(x) - d(x) = 0. \qquad (2.6.4.18)$$

Обширный список точных решений этого уравнения для различных $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ имеется в [285, 288]. Рассмотрим два случая.

Вырожденный случай. При $k = 0$ уравнение Риккати (2.6.4.18) вырождается в линейное уравнение, общее решение которого определяется формулами

$$g(x) = \frac{E(x)}{a(x)}\left[\int \frac{d(x)}{E(x)}\,dx + m\right], \qquad E(x) = \exp\left[-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right], \qquad (2.6.4.19)$$

где m — произвольная постоянная.

► Пример 2.68. Пусть функциональный коэффициент $a = a(x)$ произвольным образом зависит от пространственной переменной, а остальные три коэффициента постоянны: $b(x) = d(x) = 0$ и $c(x) = 1$. По формуле (2.6.4.19) получим $g(x) = m/a(x)$. Подставив это выражение в (2.6.4.15) и (2.6.4.16), находим $\varphi(x) = t + m\int \frac{dx}{a(x)}$ и $p(x) = \frac{m^2}{a(x)} - 1$. Поэтому нелинейное уравнение типа Клейна — Гордона [377]:

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{m^2}{a(x)} - 1\right]f(u), \qquad (2.6.4.20)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + m\int \frac{dx}{a(x)}, \qquad (2.6.4.21)$$

где функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ:

$$U''_{zz} + f(U) = 0. \qquad (2.6.4.22)$$

Это уравнение получается подстановкой $k = 0$ и $s = 1$ в (2.6.4.5); его общее решение можно представить в неявном виде (2.6.4.6).

Например, полагая $a(x) = e^{\lambda x}$ в (2.6.4.20), получим нелинейное уравнение

$$u_{tt} = (e^{\lambda x}u_x)_x + (m^2 e^{-\lambda x} - 1)f(u), \qquad (2.6.4.23)$$

которое при произвольной $f(u)$ допускает решение типа обобщенной бегущей волны. ◄

► Пример 2.69. Рассмотрим случай $a = a(x)$, $b(x) = 0$, $c(x) = d(x) = 1$. По формуле (2.6.4.19) при $m = 0$ находим $g(x) = x/a(x)$. Подставив это выражение в (2.6.4.15) и (2.6.4.16), получим $\varphi(x,t) = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)}$ и $p(x) = \frac{x^2}{a(x)} - 1$. Поэтому нелинейное телеграфное уравнение [377]:

$$u_{tt} + u_t = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{x^2}{a(x)} - 1\right]f(u), \qquad (2.6.4.24)$$

содержащее две произвольных функции $a(x)$ и $f(u)$, допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \int \frac{x\,dx}{a(x)}, \qquad (2.6.4.25)$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет разрешимому ОДУ (2.6.4.22). ◄

► Пример 2.70. Положим теперь $a = a(x)$, $b = -a_x(x)$, $c(x) = 1$, $d(x) = 0$ и воспользуемся формулами (2.6.4.19). В результате имеем $g(x) = m$. Подставив это выражение в (2.6.4.15) и (2.6.4.16), получим $\varphi(x) = t + mx$ и $p(x) = m^2 a(x) - 1$. Отсюда следует, что уравнение типа Клейна—Гордона

$$u_{tt} = a(x)u_{xx} + [m^2 a(x) - 1]f(u), \tag{2.6.4.26}$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение

$$u = U(z), \quad z = t + mx, \tag{2.6.4.27}$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым автономным ОДУ (2.6.4.22). ◄

Замечание 2.56. *Решение (2.6.4.27) уравнения (2.6.4.26) является неинвариантным решением типа бегущей волны, которое нельзя получить классическим методом группового анализа. Функцию $a(x)$ в уравнение (2.6.4.26) можно заменить на $a(x,t)$.*

Невырожденный случай. При $k = \mathrm{const}$ ($k \neq 0$) замена

$$g = \frac{1}{k}\frac{y'_x}{y} \tag{2.6.4.28}$$

преобразует нелинейное уравнение (2.6.4.18) в линейное ОДУ второго порядка

$$a(x)y''_{xx} + [b(x) + a'_x(x)]y'_x - k[kc(x) + d(x)]y = 0. \tag{2.6.4.29}$$

В [285] приведен обширный список точных решений этого уравнение для различных функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$.

► Пример 2.71. В случае $a = c = 1$, $b = d = 0$ общее решение уравнения (2.6.4.29) имеет вид

$$y = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx), \tag{2.6.4.30}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $k = 1$ в (2.6.4.30), с помощью формулы (2.6.4.28) получим

$$g(x) = \operatorname{th} x.$$

Подставив это выражение в (2.6.4.15) и (2.6.4.16), имеем

$$\varphi(x) = t + \ln \operatorname{ch} x, \quad p(x) = -1/\operatorname{ch}^2 x.$$

Поэтому нелинейное уравнение типа Клейна—Гордона [377]:

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} f(u) \tag{2.6.4.31}$$

при произвольной $f(u)$ допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \ln \operatorname{ch} x, \tag{2.6.4.32}$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет автономному ОДУ:

$$U''_{zz} - U'_z + f(U) = 0. \tag{2.6.4.33}$$

Порядок уравнения (2.6.4.33) можно понизить на единицу подстановкой $U'_z = \Phi(U)$, которая приводит к уравнению Абеля второго рода. В [285, 288] описаны функции $f(U)$, для которых общее решение уравнения (2.6.4.33) может быть представлено в замкнутой форме. ◄

Другие способы построения точных решений. Обсудим теперь некоторые другие возможности построения точных решений уравнений вида (2.6.4.1) при $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$ без интегрирования уравнения Риккати (2.6.4.18). Для функцию $g(x)$ и любые три из четырех функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ будем считать заданными, а оставшуюся функцию будем находить с помощью (2.6.4.18). В табл. 2.10 перечислены возможные ситуации и приведены формулы, выражающие искомые функции через заданные. В телеграфном уравнении (2.6.4.1) следует положить $p(x) = a(x)g^2(x) - c(x)$.

Таблица 2.10. Различные способы задания функциональных коэффициентов в (2.6.4.1) при $p(x)=a(x)g^2(x)-c(x)$.

№	Заданные свободные функции	Функция, выраженная через свободные
1	$a=a(x)$, $b=b(x)$, $d=d(x)$, $g=g(x)$	$c(x)=k^{-1}[ag'_x+kag^2+(b+a'_x)g-d]$
2	$a=a(x)$, $c=c(x)$, $d=d(x)$, $g=g(x)$	$b(x)=g^{-1}(kc+d-ag'_x)-a'_x-kag$
3	$a=a(x)$, $b=b(x)$, $c=c(x)$, $g=g(x)$	$d(x)=ag'_x+kag^2+(b+a'_x)g-kc$
4	$b=b(x)$, $c=c(x)$, $d=d(x)$, $g=g(x)$	$a(x)=g^{-1}E\bigl[\int(kc+d-bg)E^{-1}dx+C_1\bigr]$

Здесь k и C_1 — произвольные постоянные, $g^{-1}=1/g$, $E=\exp\bigl(-k\int g\,dx\bigr)$.

► Пример 2.72. Для получения точных решений рассматриваемого уравнения будем использовать четвертый способ задания функциональных коэффициентов (см. табл. 2.10) при $b = d = 0$ и $c = 1$. Возможны два случая.

1°. *Вырожденный случай при* $k = 0$. Используя строку № 4 табл. 2.10 находим функции $a(x) = C_1g^{-1}(x)$ и $p(x) = C_1g(x) - 1$. С точностью до переобозначений приходим к уравнению (2.6.4.20) и его решению (2.6.4.21).

2°. *Невырожденный случай при* $k \neq 0$. Из строки № 4 табл. 2.10 при $k \neq 0$ и $C_1 = 0$ имеем $a(x) = kg^{-1}E\int E^{-1}\,dx$. Введем функцию $h(x) = \int E^{-1}\,dx$ и найдем ее производную, а затем принимая во внимание, что $E = \exp\bigl(-k\int g\,dx\bigr)$, выразим g через h. После простых преобразований получим $g=k^{-1}h''_{xx}/h'_x$, $a=k^2h/h''_{xx}$, $p=h(h'_x)^{-2}h''_{xx}-1$. Отсюда следует, что уравнение

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + p(x)f(u), \qquad a(x) = k^2\frac{h}{h''_{xx}}, \quad p(x) = \frac{hh''_{xx}}{(h'_x)^2} - 1, \quad (2.6.4.34)$$

где $f(u)$ и $h = h(x)$ — произвольные функции и $k \neq 0$ — произвольная постоянная, допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \frac{1}{k}\ln|h'_x|.$$

Функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ: $U''_{zz} - kU'_z + f(U) = 0$.

Полагая, например, $h = \operatorname{sh} x$ и $k = 1$ в (2.6.4.34), получим уравнение (2.6.4.31) и точное решение вида (2.6.4.32). ◄

Случай $d(x) = 0, k(\varphi) = k_0/\varphi, s(\varphi) = s_0/\varphi$. Решения с обобщенным разделением переменных. При $d(x) = 0$, $k(\varphi) = k_0/\varphi$, $s(\varphi) = s_0/\varphi$ переопределенная система (2.6.4.3)—(2.6.4.4) допускает решения вида

$$\varphi(x,t) = \theta(x) - (t+t_0)^2, \tag{2.6.4.35}$$

где t_0 — произвольная постоянная. Функция $\theta = \theta(x)$ описывается простым ОДУ первого порядка

$$a(x)(\theta'_x)^2 = 4c(x)\theta. \tag{2.6.4.36}$$

Уравнения (2.6.4.3) и (2.6.4.4) принимают вид

$$p(x) = 4s_0 c(x), \tag{2.6.4.37}$$

$$[a(x)\theta'_x]'_x + b(x)\theta'_x + (4k_0+2)c(x) = 0. \tag{2.6.4.38}$$

Рассмотрим более подробно частный случай $b(x) = 0$. Будем считать, что функция $c = c(x)$ задана. Тогда $p(x)$ определяется по формуле (2.6.4.37), а $a = a(x)$ и $\xi = \xi(x)$ находятся из уравнений (2.6.4.36) и (2.6.4.38). Опуская промежуточные выкладки, получим:

при $k_1 = 4k_0 + 2 \neq 0$:

$$a(x) = \frac{1}{4C_1 c(x)} I^{\frac{4}{k_1}+2}, \quad \theta = C_1 I^{-\frac{4}{k_1}}, \quad I = C_2 - k_1 \int c(x)\,dx; \tag{2.6.4.39}$$

при $k_0 = -\frac{1}{2}$:

$$a(x) = \frac{C_1^2}{4C_2 c(x) E(x)}, \quad \theta = C_2 E(x), \quad E(x) = \exp\left[\frac{4}{C_1}\int c(x)\,dx\right], \tag{2.6.4.40}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

► Пример 2.73. При $b(x)=0$, $c(x)=p(x)=1$, $s_0=\frac{1}{4}$, $k_0=-\frac{1}{2}$ соотношение (2.6.4.37) удовлетворяется тождественно, а формулы (2.6.4.40) принимают вид

$$a(x) = \frac{C_1^2}{4C_2}\exp\Bigl(-\frac{4}{C_1}x\Bigr), \quad \theta(x) = C_2 \exp\Bigl(\frac{4}{C_1}x\Bigr). \tag{2.6.4.41}$$

Положив $C_1 = -4/\lambda$ и $C_2 = 4/\lambda^2$ в (2.6.4.41), приходим к нелинейному уравнению типа Клейна—Гордона

$$u_{tt} = (e^{\lambda x} u_x)_x + f(u). \tag{2.6.4.42}$$

Это уравнение при произвольной функции $f(u)$ допускает решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \qquad z = 4\lambda^{-2} e^{-\lambda x} - t^2, \tag{2.6.4.43}$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет неавтономному ОДУ:

$$4zU''_{zz} + 2U'_z + f(U) = 0.$$ ◄

Замечание 2.57. *Решение (2.6.4.43) уравнения (2.6.4.42) было получено в [47].*

► Пример 2.74. Положим теперь $a(x) = c(x) = p(x) = 1$ и $s_0 = \frac{1}{4}$. В этом случае уравнение (2.6.4.37) удовлетворяется тождественно, а решения уравнений (2.6.4.36) и (2.6.4.38) определяются формулами

$$b(x) = -\frac{2k_0}{x + C_1}, \qquad \theta(x) = (x + C_1)^2,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Значениям $C_1 = 0$ и $k_0 = -\frac{1}{2}(n-1)$ соответствует n-мерное нелинейное уравнение Клейна—Гордона с радиальной симметрией [47]:

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{n-1}{x} u_x + f(u).$$

где x — радиальная координата. Это УрЧП имеет точное решение вида $u = U(z)$, где $z = x^2 - (t + t_0)^2$. ◄

Случай $d(x) = 0$. Решения определяющей системы в виде $\varphi = \xi(x)t$. Будем искать совместные решения определяющей системы (2.6.4.3)—(2.6.4.4) в виде произведения

$$\varphi = \xi(x)t. \tag{2.6.4.44}$$

Простой анализ показывает, что решение (2.6.4.44) удовлетворяет обоим уравнениям (2.6.4.3) и (2.6.4.4) тогда и только тогда, когда справедливы следующие соотношения:

$$p = s_0 c\xi^2, \quad k(\varphi) = \frac{k_0\varphi}{A^2\varphi^2 - 1}, \quad s(\varphi) = \frac{s_0}{A^2\varphi^2 - 1}, \tag{2.6.4.45}$$

где A, k_0, s_0 — некоторые константы. Функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $\xi = \xi(x)$ связаны двумя дифференциально-алгебраическими соотношениями

$$a(\xi'_x)^2 = A^2 c\xi^4, \quad (a\xi'_x)'_x + b\xi'_x + k_0 c\xi^3 = 0. \tag{2.6.4.46}$$

Любые две из четырех функций в (2.6.4.46) можно считать заданными (произвольным образом), а остальные две — искомыми.

Рассмотрим частный случай $b(x) = 0$ и $c(x) = 1$. Исключив a из соотношений (2.6.4.46), приходим к следующему ОДУ для функции ξ:

$$\xi\xi''_{xx} = (k_0 A^{-2} + 4)(\xi'_x)^2. \tag{2.6.4.47}$$

Уравнение (2.6.4.47) является автономным и обобщено однородным. Его общее решение имеет вид

$$\xi = \begin{cases} C_1(x + C_2)^{-\frac{A^2}{k_0 + 3A^2}} & \text{при } k_0 \neq -3A^2, \\ C_1 e^{\lambda x} & \text{при } k_0 = -3A^2, \end{cases} \tag{2.6.4.48}$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Функция a выражается через ξ по формуле $a = A^2\xi^4(\xi'_x)^{-2}$, которая следует из первого уравнения (2.6.4.46).

► Пример 2.75. Полагая $A = C_1 = s_0 = 1$, $k_0 = -3$, $\lambda = 1/2$, $b(x) = 0$, $c(x) = 1$ в (2.6.4.45) и (2.6.4.48), имеем $\xi(x) = e^{x/2}$ и $a(x) = p(x) = e^x$. Поэтому нелинейное уравнение типа Клейна—Гордона

$$u_{tt} = (e^x u_x)_x + e^x f(u)$$

с произвольной функцией $f(u)$ допускает точное инвариантное решение вида $u = U(z)$, где $z = e^{x/2}t$. ◄

2.6.5. Нелинейные уравнения диффузионного и волнового типов в анизотропной среде

Уравнения и решения, описанные в примере 2.21, допускают различные обобщения. Опуская подробности, приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении [18, 290, 310, 311] (см. также [287]).

Нелинейные уравнения стационарной теплопроводности и диффузии в анизотропной среде.

1°. Трехмерное уравнение стационарной теплопроводности с нелинейным источником и степенной анизотропией

$$(ax^k u_x)_x + (by^m u_y)_y + (cz^n u_z)_z = f(u) \qquad (2.6.5.1)$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(\zeta), \qquad \zeta^2 = A\left[\frac{x^{2-k}}{a(2-k)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{z^{2-n}}{c(2-n)^2}\right], \qquad (2.6.5.2)$$

где A — свободный параметр, а функция $U(\zeta)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{\zeta\zeta} + \frac{D}{\zeta}U'_{\zeta} = \frac{4}{A}f(U), \qquad D = 2\left(\frac{1}{2-k} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-n}\right) - 1. \qquad (2.6.5.3)$$

При $D = 0$ и произвольной кинетической функции $f(U)$ общее решение ОДУ (2.6.5.3) можно представить в неявной форме; общее решение этого уравнения можно получить также при $D = 1$ и $f(U) = \sigma e^{\beta U}$, где α и β — произвольные постоянные (см., например, [19, 285, 288]).

2°. Трехмерное уравнение стационарной теплопроводности с нелинейным источником и экспоненциальной анизотропией

$$(ae^{\beta x}u_x)_x + (be^{\mu y}u_y)_y + (ce^{\lambda z}u_z)_z = f(u) \qquad (2.6.5.4)$$

имеет точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(\zeta), \qquad \zeta^2 = A\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2} + \frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right), \qquad (2.6.5.5)$$

где A — свободный параметр, а функция $U(\zeta)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\zeta}U'_{\zeta} = \frac{4}{A}f(U). \qquad (2.6.5.6)$$

3°. Трехмерное уравнение стационарной теплопроводности с нелинейным источником и анизотропией смешанного типа

$$(ax^k u_x)_x + (by^m u_y)_y + (ce^{\lambda z} u_z)_z = f(u) \qquad (2.6.5.7)$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(\zeta), \qquad \zeta^2 = A\left[\frac{x^{2-k}}{a(2-k)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} + \frac{e^{-\lambda z}}{c\lambda^2}\right], \qquad (2.6.5.8)$$

где A — свободный параметр, а функция $U(\zeta)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{\zeta\zeta} + \frac{D}{\zeta}U'_\zeta = \frac{4}{A}f(U), \qquad D = 2\left(\frac{1}{2-k} + \frac{1}{2-m}\right) - 1. \qquad (2.6.5.9)$$

4°. *Обобщение пп.* $1^\circ - 3^\circ$. Нелинейное уравнение с q независимыми переменными

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i x_i^{k_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=p+1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_i e^{\beta_i x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(u) \qquad (2.6.5.10)$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(\zeta), \qquad \zeta^2 = A\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^{2-k_i}}{a_i(2-k_i)^2} + \sum_{i=p+1}^{q} \frac{e^{-\beta_i x_i}}{b_i \beta_i^2}\right), \qquad (2.6.5.11)$$

где A — свободный параметр, а функция $U(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U''_{\zeta\zeta} + \frac{D}{\zeta}U'_\zeta = \frac{4}{A}f(U), \qquad D = \sum_{i=1}^{p} \frac{2}{2-k_i} - 1. \qquad (2.6.5.12)$$

Нелинейные уравнения волнового типа в анизотропной среде.

1°. Приведенные выше результаты остаются справедливыми, когда коэффициенты a, b, c, входящие в уравнения (2.6.5.1), (2.6.5.4), (2.6.5.7) и их решения (2.6.5.2), (2.6.5.5), (2.6.5.8), будут разного знака. При $abc < 0$ уравнения (2.6.5.1), (2.6.5.4), (2.6.5.7) будут гиперболического типа; в этом случае знак свободного параметра A выбирается исходя из условия $\zeta^2 > 0$ в решениях (2.6.5.2), (2.6.5.5), (2.6.5.8). Аналогичным образом, коэффициенты a_i, b_i в уравнении (2.6.5.10) могут иметь разные знаки.

► Пример 2.76. Для иллюстрации сказанного положим $c = -1$, $n = 0$, $z = t$ в (2.6.5.1). В результате приходим к нелинейному уравнению типа Клейна — Гордона в анизотропной среде с двумя пространственными переменными

$$u_{tt} = (ax^k u_x)_x + (by^m u_y)_y - f(u), \qquad (2.6.5.13)$$

которое допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(\zeta), \qquad \zeta^2 = A\left[\frac{x^{2-k}}{a(2-k)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{t^2}{4}\right], \tag{2.6.5.14}$$

где A — свободный параметр, а функция $U(\zeta)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{\zeta\zeta} + \frac{D}{\zeta}U'_{\zeta} = \frac{4}{A}f(U), \qquad D = \frac{2}{2-k} + \frac{2}{2-m}. \tag{2.6.5.15}$$

В решении (2.6.5.14) и уравнении (2.6.5.15) можно положить $A = \operatorname{sign}\Omega$, где $\Omega = \Omega(t,x,y) \equiv \frac{x^{2-k}}{a(2-k)^2} + \frac{y^{2-m}}{b(2-m)^2} - \frac{t^2}{4}$. Таким образом, в пространственно-временных областях $\Omega(t,x,y) > 0$ и $\Omega(t,x,y) < 0$ параметр A должен иметь разный знак. ◄

2°. До сих пор рассматривались нелинейные УрЧП с анизотропией, зависящей от пространственных переменных. Опишем теперь некоторые точные решения нелинейных волновых уравнений в неоднородной среде, анизотропные свойства которой произвольным образом зависят от искомой функции u.

Нелинейное уравнение волнового типа

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x + [g(u)u_y]_y + [h(u)u_z]_z,$$

зависящее от трех произвольных функций $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, имеет два точных решения, которые можно представить в неявной форме [287]:

$$x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + z\varphi_3(u) = \psi(u) + t,$$
$$x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + z\varphi_3(u) = \psi(u) - t,$$

где $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\psi(u)$ — произвольные функции, а функция $\varphi_3(u)$ определяется из условия типа нормировки

$$f(u)\varphi_1^2(u) + g(u)\varphi_2^2(u) + h(u)\varphi_3^2(u) = 1.$$

3°. *Обобщение п.* 2°. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]$$

допускает два точных решения, которые можно представить в неявном виде

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i(u) = \psi(u) \pm t, \tag{2.6.5.16}$$

где функции $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$, $\psi(u)$ связаны одним условием типа нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(u)\varphi_i^2(u) = 1$$

(т. е. n функций в (2.6.5.16) можно выбрать произвольно).

Замечание 2.58. *Другие точные решения нелинейных уравнений диффузионного и волнового типов для анизотропной среды можно найти в [287].*

2.7. Функциональное разделение переменных общего вида. Неявное представление решений

2.7.1. Описание метода. Обобщенный принцип расщепления

Нелинейные преобразования специального типа. Обобщенный принцип расщепления. Для конкретности будем рассматривать нелинейные УрЧП математической физики с двумя независимыми переменными

$$F(x,t,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\dots)=0, \tag{2.7.1.1}$$

где $u=u(x,t)$ — неизвестная функция.

Для построения точных решений уравнения (2.7.1.1) введем сначала новую зависимую переменную ϑ, которая связана с исходной неизвестной функцией u с помощью нелинейного преобразования специального типа [45, 278, 309]:

$$\vartheta=\int\zeta(u)\,du. \tag{2.7.1.2}$$

Функции $\vartheta=\vartheta(x,t)$ и $\zeta=\zeta(u)$ будут искаться в ходе дальнейшего анализа. После того, как эти функции определены, интегральное соотношение (2.7.1.2) будет задавать точное решение рассматриваемого уравнения в неявном виде (в редких случаях решение можно представить в явном виде).

Замечание 2.59. *Использование на первом этапе нелинейного преобразования (2.7.1.2) является существенным обобщением подхода, основанного на представлении решения в неявном виде (2.5.2.2). Действительно, положив*

$$\vartheta=\xi(x)\omega(t)+\eta(x),\qquad \zeta(u)=\int h(u),$$

в (2.7.1.2), приходим соотношению (2.5.2.2).

Дифференцируя (2.7.1.2) по независимым переменным, находим частные производные

$$u_x=\frac{\vartheta_x}{\zeta},\quad u_t=\frac{\vartheta_t}{\zeta},\quad u_{xx}=\frac{\vartheta_{xx}}{\zeta}-\frac{\vartheta_x^2\zeta'_u}{\zeta^3},\quad u_{xt}=\frac{\vartheta_{xt}}{\zeta}-\frac{\vartheta_x\vartheta_t\zeta'_u}{\zeta^3},\quad \dots \tag{2.7.1.3}$$

Будем предполагать, что после подстановки выражений (2.7.1.3) в (2.7.1.1) полученное уравнение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{N}\Phi_n\Psi_n=0, \tag{2.7.1.4}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_n&=\Phi_n(x,t,\vartheta_x,\vartheta_t,\vartheta_{xx},\dots),\\ \Psi_n&=\Psi_n(u,\zeta,\zeta'_u,\zeta''_{uu},\dots).\end{aligned} \tag{2.7.1.5}$$

Для построения точных решений уравнения (2.7.1.4) — (2.7.1.5) воспользуемся обобщенным принципом расщепления (или методом расщепления), описанным ниже.

Обобщенный принцип расщепления [278, 309]. Решения рассматриваемого уравнения ищем в виде различных линейных комбинаций элементов двух множеств $\{\Phi_j\}$ и $\{\Psi_j\}$, входящих в (2.7.1.4):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} \alpha_{ni}\Phi_n = 0, \qquad i = 1, \ldots, l; \\ &\sum_{n=1}^{N} \beta_{nj}\Psi_n = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2.7.1.6}$$

где $1 \leqslant l \leqslant N-1$ и $1 \leqslant m \leqslant N-1$. Константы α_{ni} и β_{nj} в (2.7.1.6) выбираются так, чтобы билинейное уравнение (2.7.1.4) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать, как показано ниже). Важно отметить, что соотношения (2.7.1.6) носят чисто алгебраический характер и не зависят от конкретного вида дифференциальных форм (2.7.1.5).

После того, как соотношения (2.7.1.6) получены, подставив в них дифференциальные формы (2.7.1.5), приходим к системам дифференциальных уравнений (часто переопределенным) для функций $\vartheta = \vartheta(x,t)$ и $\zeta = \zeta(u)$, которые входят в преобразование (2.7.1.2).

Замечание 2.60. *Необходимо рассмотреть также вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений вида (2.7.1.6) одна или несколько дифференциальных форм Ψ_n или Φ_n обращаются в нуль.*

Замечание 2.61. *Билинейные функционально-дифференциальные уравнения, похожие внешне на (2.7.1.4)—(2.7.1.5), возникают при поиске точных решений нелинейных уравнений математической физики с помощью методов обобщенного и функционального разделением переменных с заданной структурой решения (см. разд. 1.5.1 и 2.5.2). Однако в данном случае существует принципиальное отличие: дифференциальные формы Φ_n и Ψ_n в (2.7.1.5) в силу преобразования (2.7.1.2) зависят от одних и тех же независимых племенных x и t, а в методах, описанных ранее, дифференциальные формы зависят от разных независимых переменных. Это обстоятельство существенно расширяет возможности поиска точных решений путем перехода к эквивалентным уравнениям (подробнее см. разд. 2.7.2).*

Замечание 2.62. *Вместо преобразования (2.7.1.2), можно использовать преобразование $\vartheta = Z(u)$, которое приводит к несколько более сложным уравнениям. Описанный выше метод построения решений с функциональным разделением переменных, основанный на преобразовании (2.7.1.2), более удобен и часто приводит к дифференциальным уравнениям более низкого порядка, чем при поиске точных решений в явном виде (2.6.1.1).*

Замечание 2.63. *Данный подход, который основан на преобразовании (2.7.1.2) с $\vartheta = \vartheta(x)$, также можно использовать для построения точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [49].*

Некоторые формулы, позволяющие тождественно удовлетворить равенству (2.7.1.4).

1°. При любом N равенству (2.7.1.4) можно удовлетворить, если все Φ_i, кроме одной, пропорциональны выделенному элементу Φ_j $(j \neq i)$. В результате имеем

$$
\begin{aligned}
&\Phi_i = -A_i\Phi_j, \qquad i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, N;\\
&\Psi_j = A_1\Psi_1 + \cdots + A_{j-1}\Psi_j + A_{j+1}\Psi_{j+1} + \cdots + A_N\Psi_N,
\end{aligned}
\tag{2.7.1.7}
$$

где A_i — произвольные постоянные. В формуле (2.7.1.7) символы можно менять местами: $\Phi_n \rightleftarrows \Psi_n$.

2°. При четных N равенство (2.7.1.4) выполняется, если каждая из $N/2$ парных сумм $\Phi_i\Psi_i + \Phi_j\Psi_j$ обращается в нуль. В этом случае имеем соотношения

$$
\Phi_i - A_{ij}\Phi_j = 0, \qquad A_{ij}\Psi_i + \Psi_j = 0 \quad (i \neq j),
\tag{2.7.1.8}
$$

где A_{ij} — произвольные постоянные, а индексы i и j в совокупности пробегают все значения от 1 до N.

3. При $N \geqslant 3$ равенство (2.7.1.4) также выполняется тождественно, если положить

$$
\begin{aligned}
\Phi_m - A_m\Phi_{N-1} - B_m\Phi_N &= 0, \quad m = 1,\, 2,\, \ldots,\, N-2;\\
\Psi_{N-1} + A_1\Psi_1 + \cdots + A_{N-2}\Psi_{N-2} &= 0,\\
\Psi_N + B_1\Psi_1 + \cdots + B_{N-2}\Psi_{N-2} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.7.1.9}
$$

где A_i и B_i — произвольные постоянные. В формулах (2.7.1.9) можно переставлять символы $\Phi_n \rightleftarrows \Psi_n$, а также делать одновременные парные перестановки $\Phi_i \rightleftarrows \Phi_j$ и $\Psi_i \rightleftarrows \Psi_j$.

Для построения более сложных линейных комбинаций вида (2.7.1.6), которые обращают билинейное соотношение (2.7.1.4) в тождество при любых N, можно использовать формулы для коэффициентов α_{ni} и β_{nj} из разд. 1.5.2 (см. формулы (1.5.2.9), в которых надо сделать соответствующие переобозначения).

2.7.2. Использование эквивалентных уравнений. Упрощение уравнений

Обобщения, основанные на использовании эквивалентных уравнений. Ряд других точных решений уравнения (2.7.1.1) можно получить, если вместо (2.7.1.4)—(2.7.1.5) рассматривать *эквивалентные дифференциальные уравнения* [42, 278], которые сводятся к (2.7.1.4)—(2.7.1.5) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (2.7.1.2). Ниже указаны два класса таких уравнений, которые будут использоваться ниже в разд. 2.7.3.

1°. Можно использовать уравнения

$$
\sum_{n=1}^{N} \widetilde{\Phi}_n\widetilde{\Psi}_n = 0, \qquad \widetilde{\Phi}_n = \Phi_n\eta_n(\vartheta), \qquad \widetilde{\Psi}_n = \frac{\Psi_n}{\eta_n(Z)}, \qquad Z = \int \zeta(u)\, du,
\tag{2.7.2.1}
$$

которые сохраняют билинейную структуру и в силу (2.7.1.2) (т. е. $\vartheta = Z$) эквивалентны уравнению (2.7.1.4) при произвольной функции $\eta_n(\vartheta)$. Уравнения (2.7.2.1) рассматриваются вместе с (2.7.1.5).

2°. Можно использовать уравнения другого вида

$$G(x,t,u,\vartheta) - G(x,t,u,Z) + \sum_{n=1}^{N} \Phi_n \Psi_n = 0, \tag{2.7.2.2}$$

которые для любой $G(x,t,u,\vartheta)$ эквивалентны уравнению (2.7.1.4). Функция G также может явно зависеть от ϑ, ζ (и их производных) и функциональных коэффициентов исходного УрЧП (что подразумевает неявную зависимость G от исходных переменных x, t, u). Уравнения (2.7.2.2) рассматриваются вместе с (2.7.1.5).

В случае общего положения применение обобщенного принципа расщепления к уравнению (2.7.1.4) и эквивалентным ему уравнениям вида (2.7.2.1) и (2.7.2.2) в итоге приводит к различным точным решениям исходного уравнения (2.7.1.1).

Возможны дальнейшие обобщения. В частности, сумму $\sum_{n=1}^{N} \Phi_n \Psi_n$ в уравнении (2.7.2.2) можно заменить на $\sum_{n=1}^{N} \widetilde{\Phi}_n \widetilde{\Psi}_n$, где величины с тильдой определены в (2.7.2.1). Функции $G(x,t,u,\vartheta)$ и $G(x,t,u,Z)$ можно умножать на $\eta_{N+1}(\vartheta)/\eta_{N+1}(Z)$ и $\eta_{N+2}(\vartheta)/\eta_{N+2}(Z)$ соответственно.

Использование преобразования (2.7.1.2) для упрощения уравнений. Преобразование (2.7.1.2) можно использовать также для упрощения нелинейных УрЧП. Для иллюстрации сказанного рассмотрим уравнение

$$u_t = au_{xx} + f(u)u_x^2 + b(x)g(u)u_x + c(x)h(u), \tag{2.7.2.3}$$

где a — константа.

Преобразование (2.7.1.2) приводит уравнение (2.7.2.3) к виду

$$\vartheta_t = a\vartheta_{xx} + \vartheta_x^2 \frac{1}{\zeta}\left[f(u) - a\frac{\zeta'_u}{\zeta}\right] + b(x)g(u)\vartheta_x + c(x)h(u)\zeta. \tag{2.7.2.4}$$

Для упрощения (2.7.2.4) положим

$$f(u) - a\frac{\zeta'_u}{\zeta} = 0, \quad g(u) = 1, \quad h(u)\zeta = 1.$$

Отсюда находим

$$\zeta = \exp\left[\frac{1}{a}\int f(u)\,du\right], \quad h(u) = \exp\left[-\frac{1}{a}\int f(u)\,du\right].$$

В результате получим нелинейное уравнение

$$u_t = au_{xx} + f(u)u_x^2 + b(x)u_x + c(x)\exp\left[-\frac{1}{a}\int f(u)\,du\right], \tag{2.7.2.5}$$

где $b(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, которое с помощью преобразования

$$\vartheta = \int \exp\left[\frac{1}{a}\int f(u)\,du\right] du \tag{2.7.2.6}$$

приводится к линейному УрЧП:

$$\vartheta_t = a\vartheta_{xx} + b(x)\vartheta_x + c(x). \tag{2.7.2.7}$$

Некоторые точные решения этого уравнение указаны в [281].

Замечание 2.64. *В уравнениях (2.7.2.5) и (2.7.2.7) функциональные коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ можно заменить на $a(x,t)$ и $b(x,t)$.*

► Пример 2.77. В частном случае $a = 1$ и $f(u) = 1$ уравнение (2.7.2.5) принимает вид

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 + b(x)u_x + c(x)e^{-u},$$

а преобразование (2.7.2.6) можно записать в явной форме: $u = \ln\vartheta$. В результате получим уравнение (2.7.2.7) при $a = 1$. ◄

2.7.3. Нелинейные реакционно-конвективно-диффузионные уравнения

Рассматриваемый класс уравнений. Приведение к билинейному виду. Рассмотрим широкий класс нелинейных уравнений диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x + c(x)h(u), \tag{2.7.3.1}$$

которые содержат реакционные и конвективные члены.

Отметим, что точные решения более простых уравнений, относящихся к классу (2.7.3.1), можно найти во многих работах (см., например, [11, 42, 48, 99, 101, 102, 114, 118, 119, 121, 141, 150, 158, 163–165, 168, 179, 182, 200, 201, 203, 205, 211, 217, 250, 257, 269, 272, 274, 287, 313, 321, 346, 347, 349, 357]).

Замечание 2.65. *Реакционно-конвективно-диффузионное уравнение (2.7.3.1) при $a(x) = 1$, $b(x) = c(x) = -1$ иногда называется уравнением Ричардса и используется для моделирования фильтрации воды в ненасыщенных почвах, где u — функция водонасыщения, $f = f(u)$ — коэффициент влагопереноса (фильтрации), $K = \int g(u)\,du$ — гидравлическая проводимость, $h = h(u)$ — скорость поглощения воды корнями растений [102, 251].*

Используя метод, описанный в разд. 2.7.1, далее будем строить точные решения уравнений достаточно общего вида (2.7.3.1), в которых по меньшей мере два функциональных коэффициента $a(x)$ и $f(u)$ задаются произвольно (а остальные через них выражаются). Ниже для краткости аргументы функций, входящих в преобразование (2.7.1.2) и уравнение (2.7.3.1), часто будут опускаться.

Сделав преобразование (2.7.1.2), подставим производные (2.7.1.3) в (2.7.3.1). После перегруппировки членов получим

$$-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2\Big(\frac{f}{\zeta}\Big)'_u + b\vartheta_x g + ch\zeta = 0. \tag{2.7.3.2}$$

При $\zeta = 1$ уравнение (2.7.3.2) совпадает с исходным уравнением (2.7.3.1), где $u = \vartheta$. Поэтому на данном этапе никакие решения не теряются.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{array}{lllll} \Phi_1 = -\vartheta_t, & \Phi_2 = (a\vartheta_x)_x, & \Phi_3 = a\vartheta_x^2, & \Phi_4 = b\vartheta_x, & \Phi_5 = c; \\ \Psi_1 = 1, & \Psi_2 = f, & \Psi_3 = (f/\zeta)'_u, & \Psi_4 = g, & \Psi_5 = h\zeta. \end{array} \qquad (2.7.3.3)$$

В результате уравнение (2.7.3.2) можно представить в билинейной форме (2.7.1.4) при $N = 5$:

$$\sum_{n=1}^{5} \Phi_n \Psi_n = 0. \qquad (2.7.3.4)$$

Следуя [278], перейдем к построению точных решений нелинейных уравнений вида (2.7.3.1), используя соотношения (2.7.3.3) — (2.7.3.4) и формулы (2.7.1.7) — (2.7.1.9) и применяя подход, описанный в разд. 2.7.1.

Поиск точных решений, исходя из уравнения (2.7.3.2).

Решение 1. Уравнению (2.7.3.4) можно тождественно удовлетворить, используя линейные соотношения

$$\begin{array}{lll} \Phi_1 = -\Phi_5, & \Phi_2 = 0, & k\Phi_3 = -\Phi_4; \\ \Psi_1 = \Psi_5, & \Psi_3 = k\Psi_4, & \end{array} \qquad (2.7.3.5)$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.5), приходим к уравнениям

$$\begin{array}{lll} \vartheta_t = c, & (a\vartheta_x)_x = 0, & ka\vartheta_x^2 = -b\vartheta_x; \\ h\zeta = 1, & (f/\zeta)'_u = kg. & \end{array} \qquad (2.7.3.6)$$

Решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (2.7.3.6), определяется формулами

$$\vartheta(x,t) = c_0 t - \frac{b_0}{k} \int \frac{dx}{a(x)} + C_1, \quad b(x) = b_0, \quad c(x) = c_0, \qquad (2.7.3.7)$$

где $a(x)$ — произвольная функция, b_0, c_0, C_1 — произвольные постоянные. Решение системы, состоящей из последних двух уравнений в (2.7.3.6), можно записать в виде

$$h = \frac{kG(u) + C_2}{f}, \quad \zeta = \frac{f}{kG(u) + C_2}, \quad G(u) = \int g(u)\, du, \qquad (2.7.3.8)$$

где $f(u)$ и $g(u)$ — произвольные функции. Из формул (2.7.3.7) и (2.7.3.8) при $b_0 = c_0 = 1$ получим уравнение

$$u_t = [a(x) f(u) u_x]_x + g(u) u_x + \frac{kG(u) + C_2}{f(u)}, \qquad (2.7.3.9)$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\int \frac{f(u)\, du}{kG(u) + C_2} = t - \frac{1}{k} \int \frac{dx}{a(x)} + C_1. \qquad (2.7.3.10)$$

Отметим, что уравнение (2.7.3.9) содержит три произвольные функции $a(x)$, $f(u)$, $g(u)$ и две произвольные постоянные C_2, k.

Решение 2. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned}&\Phi_1=-\Phi_4, \quad \Phi_2=0, \quad k\Phi_3=-\Phi_5;\\&\Psi_1=\Psi_4, \quad \Psi_3=k\Psi_5,\end{aligned} \tag{2.7.3.11}$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.11), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&\vartheta_t=b\vartheta_x, \quad (a\vartheta_x)_x=0, \quad ka\vartheta_x^2=-c;\\&g=1, \quad (f/\zeta)'_u=kh\zeta.\end{aligned} \tag{2.7.3.12}$$

Решения первых трех уравнений (2.7.3.12) имеют вид

$$\vartheta(x,t)=\lambda t+C_1\int\frac{dx}{a(x)}+C_2, \quad b(x)=\frac{\lambda}{C_1}a(x), \quad c(x)=-\frac{kC_1^2}{a(x)}, \tag{2.7.3.13}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Последние два уравнения в (2.7.3.12) дают функции

$$g(u)=1, \quad \zeta(u)=\pm f(u)\biggl(2k\int f(u)h(u)\,du+C_3\biggr)^{-1/2}, \tag{2.7.3.14}$$

где $f=f(u)$ и $h=h(u)$ — произвольные функции, C_3 — произвольная постоянная.

Положив $C_1=1$ в (2.7.3.13) и (2.7.3.14), получим уравнение

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+\lambda a(x)u_x-\frac{k}{a(x)}h(u), \tag{2.7.3.15}$$

где $a(x)$, $f(u)$, $h(u)$ — произвольные функции, k и λ — произвольные постоянные. Это уравнение допускает два точных решения:

$$\pm\int f(u)\biggl(2k\int f(u)h(u)\,du+C_3\biggr)^{-1/2}du=\lambda t+\int\frac{dx}{a(x)}+C_2, \tag{2.7.3.16}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Решение 3. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, положив

$$\begin{aligned}&\Phi_1=-k_1\Phi_5, \quad \Phi_2=-k_2\Phi_5, \quad \Phi_4=-k_3\Phi_5;\\&\Psi_3=0, \quad \Psi_5=k_1\Psi_1+k_2\Psi_2+k_3\Psi_4,\end{aligned} \tag{2.7.3.17}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.17), имеем

$$\begin{aligned}&\vartheta_t=k_1c, \quad (a\vartheta_x)_x=-k_2c, \quad b\vartheta_x=-k_3c;\\&(f/\zeta)'_u=0, \quad h\zeta=k_1+k_2f+k_3g.\end{aligned} \tag{2.7.3.18}$$

Решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (2.7.3.18), можно представить в виде

$$\begin{aligned}&\vartheta(x,t)=c_0k_1t-c_0k_2\int\frac{x\,dx}{a(x)}-C_1\int\frac{dx}{a(x)}+C_2,\\&b(x)=\frac{c_0k_3a(x)}{c_0k_2x+C_1}, \quad c(x)=c_0,\end{aligned} \tag{2.7.3.19}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а c_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Из последних двух уравнений (2.7.3.18) получим

$$h = \frac{k_1}{f} + k_2 + k_3\frac{g}{f}, \quad \zeta = f, \tag{2.7.3.20}$$

где $f = f(u)$ и $g = g(u)$ — произвольные функции.

При $c_0 = k_3 = 1$ формулы (2.7.3.19) и (2.7.3.20) приводят к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{a(x)}{k_2x + C_1}g(u)u_x + \frac{k_1 + k_2f(u) + g(u)}{f(u)},$$

которое имеет решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)\,du = k_1t - k_2\int\frac{x\,dx}{a(x)} - C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2.$$

Решение 4. Уравнение (2.7.3.4) удовлетворяется, если положить

$$\begin{aligned}&\Phi_1 = -\Phi_5, \quad \Phi_2 = -k\Phi_4;\\ &\Psi_1 = \Psi_5, \quad k\Psi_2 = \Psi_4, \quad \Psi_3 = 0,\end{aligned} \tag{2.7.3.21}$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.21), получим

$$\begin{aligned}&\vartheta_t = c, \quad (a\vartheta_x)_x = -kb\vartheta_x;\\ &h\zeta = 1, \quad kf = g, \quad (f/\zeta)'_u = 0.\end{aligned} \tag{2.7.3.22}$$

Общее решение переопределенной системы, состоящей из первых двух уравнений (2.7.3.22), имеет вид

$$\begin{aligned}\vartheta(x,t) &= c(x)t + s(x),\\ c(x) &= C_1\int\exp\Bigl(-k\int\frac{b}{a}\,dx\Bigr)\frac{dx}{a} + C_2,\\ s(x) &= C_3\int\exp\Bigl(-k\int\frac{b}{a}\,dx\Bigr)\frac{dx}{a} + C_4,\end{aligned} \tag{2.7.3.23}$$

где $a = a(x)$ и $b = b(x)$ — произвольные функции, а C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Решение системы, состоящей последних трех уравнений (2.7.3.22), определяется формулами

$$g = kf, \quad h = \frac{1}{f}, \quad \zeta = f. \tag{2.7.3.24}$$

Используя соотношения (2.7.3.23) и (2.7.3.24), получим уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + kb(x)f(u)u_x + \frac{c(x)}{f(u)}, \tag{2.7.3.25}$$

которое допускает точное решение в неявной форме

$$\int f(u)\,du = c(x)t + s(x). \tag{2.7.3.26}$$

Здесь $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функции $c(x)$ и $s(x)$ определены в (2.7.3.23).

► Пример 2.78. Подставив $C_2 = \lambda$, $C_1 = 0$, $k = 1$ в (2.7.3.23), (2.7.3.25), (2.7.3.26), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x + \frac{\lambda}{f(u)},$$

которое имеет решение

$$\int f(u)\,du = \lambda t + C_3 \int \exp\biggl(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\biggr)\frac{dx}{a(x)} + C_4.$$ ◄

Решение 5. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4 = 0, \quad \Phi_3 = -k\Phi_5; \\ \Psi_2 = \Psi_1, \quad \Psi_4 = \Psi_1, \quad k\Psi_3 = \Psi_5, \end{gathered} \tag{2.7.3.27}$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.27), имеем

$$\begin{aligned} &-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x + b\vartheta_x = 0, \quad a\vartheta_x^2 = -kc; \\ &f = g = 1, \quad k(f/\zeta)'_u = h\zeta. \end{aligned} \tag{2.7.3.28}$$

Первые два уравнения (2.7.3.28) допускают решение

$$\vartheta(x,t) = \lambda t + \int r(x)\,dx + C_1, \quad b = \frac{\lambda}{r} - \frac{(ar)'_x}{r}, \quad c = -\frac{ar^2}{k},$$

где $a = a(x)$ и $r = r(x)$ — произвольные функции, а λ и C_1 — произвольные постоянные. Из последнего уравнения (2.7.3.28) получим $k\zeta^{-3}\zeta'_u = -h$, что дает два решения

$$\zeta = \pm\biggl(\frac{2}{k}\int h\,du + C_2\biggr)^{-1/2},$$

где $h = h(u)$ — произвольная функция и C_2 — произвольная постоянная.

Решение 6. Уравнение (2.7.3.4) удовлетворяется, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \lambda\Phi_5, \quad \Phi_2 = k_1\Phi_5, \quad \Phi_4 = k_2\Phi_3; \\ &\lambda\Psi_1 + k_1\Psi_2 + \Psi_5 = 0, \quad \Psi_3 = -k_2\Psi_4, \end{aligned} \tag{2.7.3.29}$$

где k_1, k_2, λ — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.29), получим

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = -\lambda c, \quad (a\vartheta_x)_x = k_1 c, \quad b\vartheta_x = k_2 a\vartheta_x^2; \\ &\lambda + k_1 f + h\zeta = 0, \quad (f/\zeta)'_u = -k_2 g. \end{aligned} \tag{2.7.3.30}$$

Решения первых трех уравнений (2.7.3.30) имеют вид

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,t) = -\lambda t + k_1\int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \\ &b(x) = k_2(k_1 x + C_1), \quad c(x) = 1, \end{aligned} \tag{2.7.3.31}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решения последних двух уравнений (2.7.3.30) определяются формулами

$$h = \frac{k_1 f + \lambda}{f}\biggl(k_2\int g\,du + C_3\biggr), \quad \zeta = -f\biggl(k_2\int g\,du + C_3\biggr)^{-1}, \tag{2.7.3.32}$$

где $f = f(u)$ и $g = g(u)$ — произвольные функции, а C_3 — произвольная постоянная.

Положив $k_1 = k$ и $k_2 = 1$ в (2.7.3.31) и (2.7.3.32), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + (kx + C_1)g(u)u_x + \frac{kf(u)+\lambda}{f(u)}G(u), \qquad G(u) = \int g(u)\,du + C_3,$$

где $a(x)$, $f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции, а C_1, C_3, k, λ — произвольные постоянные. Это уравнение допускает точное решение в неявном виде

$$\int \frac{f(u)}{G(u)}\,du = \lambda t - k\int \frac{x\,dx}{a(x)} - C_1\int \frac{dx}{a(x)} - C_2. \tag{2.7.3.33}$$

Решение 7. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, положив

$$\begin{aligned} &\Phi_2 = k_1\Phi_5, \quad \Phi_3 = -k_2^2\Phi_1, \quad \Phi_4 = -k_3\Phi_1;\\ &\Psi_5 = -k_1\Psi_2, \quad \Psi_1 - k_2^2\Psi_3 - k_3\Psi_4 = 0, \end{aligned} \tag{2.7.3.34}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.34), имеем

$$\begin{aligned} &(a\vartheta_x)_x = k_1 c, \quad a\vartheta_x^2 = k_2^2\vartheta_t, \quad b\vartheta_x = k_3\vartheta_t;\\ &h\zeta = -k_1 f, \quad 1 - k_2^2(f/\zeta)'_u - k_3 g = 0. \end{aligned} \tag{2.7.3.35}$$

Решения первых трех уравнений (2.7.3.35) можно представить в виде

$$\vartheta(x,t) = \lambda t + k_2\sqrt{\lambda}\int \frac{dx}{\sqrt{a}} + C_1, \quad b(x) = \frac{k_3}{k_2}\sqrt{\lambda a}, \quad c(x) = \frac{k_2\sqrt{\lambda}}{2k_1}\frac{a'_x}{\sqrt{a}}, \tag{2.7.3.36}$$

где $a = a(x)$ — произвольная функция, а C_1 и λ — произвольные постоянные. Решения последних двух уравнений (2.7.3.35) определяются формулами

$$g = \frac{1}{k_3}\Big(1 + \frac{k_2^2}{k_1}h'_u\Big), \quad \zeta = -k_1\frac{f}{h}, \tag{2.7.3.37}$$

где $f = f(u)$ и $h = h(u)$ — произвольные функции.

Положив $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 = 1/\sqrt{\lambda}$, $C_2 = -C$ в (2.7.3.36) и (2.7.3.37), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \sqrt{a(x)}\,[\lambda + h'_u(u)]u_x + \frac{1}{2}\frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}h(u), \tag{2.7.3.38}$$

которое содержит три произвольные функции $a(x)$, $f(u)$, $h(u)$ и имеет точное решение

$$\int \frac{f(u)}{h(u)}\,du = -\lambda t - \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C. \tag{2.7.3.39}$$

Решение 8. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -k_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = -k_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = -\Phi_5;\\ &\Psi_4 = k_1\Psi_1 + k_2\Psi_2, \quad \Psi_3 = \Psi_5, \end{aligned} \tag{2.7.3.40}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.40), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&\vartheta_t = k_1 b\vartheta_x, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_2 b\vartheta_x, \quad a\vartheta_x^2 = -c;\\ &g = k_1 + k_2 f, \quad (f/\zeta)'_u = h\zeta.\end{aligned} \tag{2.7.3.41}$$

Интегрируя первые три уравнения (2.7.3.41), получим

$$\begin{aligned}&\vartheta(x,t) = \lambda t - \frac{k_2\lambda}{k_1}\int \frac{x+C_1}{a(x)}\,dx + C_2,\\ &b(x) = -\frac{a(x)}{k_2(x+C_1)}, \quad c(x) = -\frac{k_2^2\lambda^2(x+C_1)^2}{k_1^2 a(x)},\end{aligned} \tag{2.7.3.42}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Последние два уравнения (2.7.3.41) имеют решения

$$g(u) = k_1 + k_2 f(u), \quad \zeta(u) = \pm f(u)\biggl(2\int f(u)h(u)\,du + C_3\biggr)^{-1/2}, \tag{2.7.3.43}$$

где $f = f(u)$ и $h = h(u)$ — произвольные функции, а C_3 — произвольная постоянная.

Подставив $C_1 = s$, $k_1 = -1$, $k_2 = k$, $\lambda = k$ в (2.7.3.42) и (2.7.3.43), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{a(x)}{x+s}[k + f(u)]u_x - \frac{(x+s)^2}{a(x)}h(u), \tag{2.7.3.44}$$

где $a(x)$, $f(u)$, $h(u)$ — произвольные функции, а k и s — произвольные постоянные. Это уравнение допускает точные решения

$$\pm\int f(u)\biggl(2\int f(u)h(u)\,du + C_3\biggr)^{-1/2} du = kt - \int \frac{x+s}{a(x)}\,dx + C_2,$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

► **Пример 2.79.** В частном случае $k = -1$, $f(u) = 1$, $s = 0$ уравнение (2.7.3.44) упрощается:

$$u_t = [a(x)u_x]_x - \frac{x^2}{a(x)}h(u).$$

С точностью до переобозначения функции h это уравнение совпадает с (2.5.3.13). ◄

► **Пример 2.80.** Положив $h(u) = 0$, $C_3 = 0$, $s = 0$ в (2.7.3.44) и переобозначив $a(x)$ на $xa(x)$, получим уравнение

$$u_t = [xa(x)f(u)u_x]_x - a(x)[k + f(u)]u_x,$$

которое допускает решения

$$\pm\int f(u)\,du = kt - \int \frac{dx}{a(x)} + C_2.$$ ◄

Решение 9. Уравнение (2.7.3.4) удовлетворяется, если имеют место соотношения

$$\begin{aligned}&\Phi_1+\Phi_3+k_1\Phi_4+\Phi_5=0, \quad \Phi_2+k_2\Phi_4=0;\\ &\Psi_3=\Psi_1, \quad \Psi_4=k_1\Psi_1+k_2\Psi_2, \quad \Psi_5=\Psi_1,\end{aligned} \tag{2.7.3.45}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.45), получим уравнения

$$\begin{aligned}&-\vartheta_t+a\vartheta_x^2+k_1b\vartheta_x+c=0, \quad (a\vartheta_x)_x+k_2b\vartheta_x=0;\\ &(f/\zeta)'_u=1, \quad g=k_1+k_2f, \quad h\zeta=1.\end{aligned} \tag{2.7.3.46}$$

В частном случае $k_1 = k_2 = 0$ решение системы (2.7.3.46) приводит к уравнению

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+\left[\lambda-\frac{\beta^2}{a(x)}\right]\frac{u}{f(u)}, \tag{2.7.3.47}$$

где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, а β и λ — произвольные постоянные. Это уравнение допускает два точных решения

$$\int\frac{f(u)}{u}\,du=\lambda t\pm\beta\int\frac{dx}{a(x)}+C_1. \tag{2.7.3.48}$$

Решение 10. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, положив

$$\begin{aligned}&\Phi_1=-k_1\Phi_5, \quad \Phi_2=-k_2\Phi_3, \quad \Phi_4=-k_3\Phi_5;\\ &\Psi_5=k_1\Psi_1+k_3\Psi_4, \quad \Psi_3=k_2\Psi_2,\end{aligned} \tag{2.7.3.49}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.49), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&\vartheta_t=k_1c, \quad (a\vartheta_x)_x=-k_2a\vartheta_x^2, \quad b\vartheta_x=-k_3c;\\ &h\zeta=k_1+k_3g, \quad (f/\zeta)'_u=k_2f.\end{aligned} \tag{2.7.3.50}$$

Решения первых трех уравнений (2.7.3.50) имеют вид

$$\begin{aligned}&\vartheta(x,t)=k_1t+\frac{1}{k_2}\ln\left(k_2\int\frac{dx}{a(x)}+C_1\right)+C_2,\\ &b(x)=-k_3a(x)\left(k_2\int\frac{dx}{a(x)}+C_1\right), \quad c(x)=1,\end{aligned} \tag{2.7.3.51}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решения последних двух уравнений (2.7.3.50) определяются формулами

$$\begin{aligned}&h(u)=\frac{k_1+k_3g(u)}{f(u)}\left[k_2\int f(u)\,du+C_3\right],\\ &\zeta(u)=f(u)\left[k_2\int f(u)\,du+C_3\right]^{-1},\end{aligned} \tag{2.7.3.52}$$

где $f(u)$ и $g(u)$ — произвольные функции, а C_3 — произвольная постоянная.

В частности, положив $a(x)=x^n$, $C_1=C_2=0$, $C_3=m$, $k_1=k$, $k_2=1-n$, $k_3=1$ в (2.7.3.51) и (2.7.3.52), получим уравнение

$$u_t=[x^nf(u)u_x]_x-xg(u)u_x+\frac{k+g(u)}{f(u)}\biggl[(1-n)\int f(u)\,du+m\biggr].$$

Решение 11. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, используя соотношения

$$\begin{aligned}&\Phi_3=\Phi_1,\quad \Phi_4=k_1\Phi_1+k_2\Phi_2,\quad \Phi_5=\Phi_1;\\&\Psi_1+\Psi_3+k_1\Psi_4+\Psi_5=0,\quad \Psi_2+k_2\Psi_4=0,\end{aligned}\tag{2.7.3.53}$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.53), имеем

$$\begin{aligned}&a\vartheta_x^2=-\vartheta_t,\quad b\vartheta_x=-k_1\vartheta_t+k_2(a\vartheta_x)_x,\quad c=-\vartheta_t;\\&1+(f/\zeta)'_u+k_1g+h\zeta=0,\quad f+k_2g=0.\end{aligned}\tag{2.7.3.54}$$

Первые три уравнения (2.7.3.54) допускают два решения:

$$\vartheta(x,t)=-t\pm\int\frac{dx}{\sqrt{a}}+C_1,\quad b(x)=\pm k_1\sqrt{a}+\frac{1}{2}k_2a'_x,\quad c(x)=1,\tag{2.7.3.55}$$

где $a=a(x)$ — произвольная функция, а C_1 — произвольная постоянная (в обеих формулах верхние и нижние знаки берутся одновременно).

Из последнего уравнения (2.7.3.54) имеем $g=-f/k_2$. Тогда предпоследнее уравнение, которое служит для определения функции ζ, преобразуется в уравнение Абеля второго рода

$$\xi\xi'_u+\Bigl(1-\frac{k_1}{k_2}f\Bigr)\xi+fh=0,\qquad \zeta=f/\xi.\tag{2.7.3.56}$$

Положив $k_1=\pm k$ и $k_2=1$ в (2.7.3.55) и (2.7.3.56), получим уравнение

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x-\bigl[k\sqrt{a(x)}+\tfrac{1}{2}a'_x(x)\bigr]f(u)u_x+h(u),$$

которое имеет два точных решения типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int\frac{f(u)}{\xi(u)}\,du=-t\pm\int\frac{dx}{\sqrt{a(x)}}+C_1,\tag{2.7.3.57}$$

где функция $\xi=\xi(u)$ удовлетворяет уравнению Абеля

$$\xi\xi'_u+[1\mp kf(u)]\xi+f(u)h(u)=0.$$

Много точных решений уравнения Абеля для различных функций $f(u)$ и $h(u)$ описаны в [285, 288].

Замечание 2.66. *В уравнении (2.7.3.2) иногда полезно делать преобразования искомой функции $\vartheta=\vartheta(x,t)$.*

Проиллюстрируем это замечание на конкретных примерах.

Решение 12. Положим $a = b = c = 1$ в (2.7.3.2), а затем сделаем подстановку

$$\vartheta = \bar{\vartheta} + \alpha x + \beta t, \tag{2.7.3.58}$$

где α и β — свободные параметры. В результате получим

$$-\bar{\vartheta}_t + \bar{\vartheta}_{xx} f + (\bar{\vartheta}_x + \alpha)^2 \Big(\frac{f}{\zeta}\Big)'_u + \bar{\vartheta}_x g - \beta + \alpha g + h\zeta = 0. \tag{2.7.3.59}$$

Ниже приводятся три решения уравнения (2.7.3.59), которые приводят к различным решениям исходного УрЧП (2.7.3.1).

1°. Частное решение уравнения (2.7.3.59) ищем в виде

$$\bar{\vartheta} = C_1 e^{\lambda t + \gamma x} + C_2, \quad \zeta = f, \tag{2.7.3.60}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставив (2.7.3.60) в (2.7.3.59), имеем

$$C_1(-\lambda + \gamma^2 f + \gamma g) e^{\lambda t + \gamma x} - \beta + \alpha g + h\zeta = 0.$$

Этому соотношению можно удовлетворить, если положить

$$-\lambda + \gamma^2 f + \gamma g = 0, \qquad -\beta + \alpha g + h\zeta = 0.$$

Отсюда, учитывая второе равенство в (2.7.3.60), получим

$$g = \frac{\lambda}{\gamma} - \gamma f, \quad h = \alpha\gamma + \Big(\beta - \frac{\alpha\lambda}{\gamma}\Big)\frac{1}{f}, \quad \zeta = f.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \Big[\frac{\lambda}{\gamma} - \gamma f(u)\Big]u_x + \alpha\gamma + \Big(\beta - \frac{\alpha\lambda}{\gamma}\Big)\frac{1}{f(u)}, \tag{2.7.3.61}$$

которое зависит от произвольной функции $f = f(u)$ и допускает точное решение в неявном виде

$$\int f(u)\,du = \alpha x + \beta t + C_1 e^{\lambda t + \gamma x} + C_2. \tag{2.7.3.62}$$

Положив $\lambda/\gamma = \sigma$, $\beta - (\alpha\lambda/\gamma) = \mu$, $\alpha\gamma = \varepsilon$ в (2.7.3.61) и (2.7.3.62), получим более компактное уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + [\sigma - \gamma f(u)]u_x + \varepsilon + \frac{\mu}{f(u)},$$

которое имеет точное решение

$$\int f(u)\,du = \frac{\varepsilon}{\gamma}x + \Big(\mu + \frac{\varepsilon\sigma}{\gamma}\Big)t + C_1 e^{\gamma\sigma t + \gamma x} + C_2.$$

2°. При $g \equiv 0$ и произвольной $f = f(u)$ уравнение (2.7.3.59) допускает стационарное частное решение

$$\bar{\vartheta} = -kx^2 + C, \quad h = \frac{\beta}{f} + 2k, \quad \zeta = f \quad (C,\, k\text{ — произвольные постоянные}),$$

которое приводит к УрЧП:

$$u_t = [f(u)u_x]_x + 2k + \frac{\beta}{f(u)}. \tag{2.7.3.63}$$

Отметим, что уравнение (2.7.3.63) является частным случаем уравнения (2.5.3.9) и имеет решение $\int f(u)\,du = -kx^2 + \alpha x + \beta t + C$.

3°. При $g \equiv 0$ и $\alpha = 0$ уравнение (2.7.3.59) допускает другое стационарное частное решение

$$\bar{\vartheta} = \ln(C_1 x + C_2), \quad h = \beta \frac{F}{f}, \quad \zeta = \frac{f}{F}, \quad F = \int f(u)\,du,$$

которое соответствует частному случаю уравнения (2.5.3.87).

Решение 13. В уравнении (2.7.3.2) положим $\zeta = f$, а затем сделаем преобразование

$$\vartheta = \bar{\vartheta} + \beta t + k \int \frac{dx}{a(x)}, \qquad (2.7.3.64)$$

где β и k — свободные параметры. В результате получим

$$-\bar{\vartheta}_t + (a\bar{\vartheta}_x)_x f + b\bar{\vartheta}_x g - \beta + k\frac{b}{a}g + cfh = 0. \qquad (2.7.3.65)$$

Ищем стационарное решение $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(x)$ уравнения (2.7.3.65). В этом случае, используя принцип расщепления, можно положить

$$\begin{aligned} &g = -\mu f + \lambda, \quad h = \gamma + (\sigma/f), \\ &(a\bar{\vartheta}'_x)'_x - \mu b\bar{\vartheta}'_x + c\gamma - k\mu(b/a) = 0, \\ &b\lambda\bar{\vartheta}'_x g + \sigma - \beta + k\lambda(b/a) = 0, \end{aligned} \qquad (2.7.3.66)$$

где μ, λ, γ, σ — произвольные постоянные. Система уравнений (2.7.3.66) допускает решение

$$\begin{aligned} &\lambda = 0, \quad \gamma = k\mu, \quad \sigma = \beta, \quad g(u) = -\mu f(u), \quad h(u) = k\mu + \frac{\beta}{f(u)}, \\ &\bar{\vartheta}(x) = C_1 \int \frac{e^{\mu x}}{a(x)}\,dx + C_2, \quad b(x) = a(x), \quad c(x) = 1, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, μ — произвольные постоянные. Учитывая связь (2.7.3.64), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \mu a(x)f(u)u_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)},$$

которое имеет точное решение

$$\int f(u)\,du = \beta t + \frac{\sigma}{\mu}\int \frac{dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{e^{\mu x}}{a(x)}\,dx + C_2.$$

Решение 14. Ищем частное решение уравнения (2.7.3.65) в виде произведения функций разных аргументов

$$\bar{\vartheta} = e^{\lambda t}\xi(x). \qquad (2.7.3.67)$$

В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &-\lambda\xi + (a\xi'_x)'_x f + b\xi'_x g = 0, \\ &-\beta + k\frac{b}{a}g + cfh = 0. \end{aligned} \qquad (2.7.3.68)$$

При $g = \text{const}$, получим $f = \text{const}$ и $h = \text{const}$, что соответствует линейному уравнению. Поэтому далее предполагаем, что $g \neq \text{const}$.

Первое уравнение в (2.7.3.68) удовлетворяется, если положить

$$(a\xi'_x)'_x - Ab\xi'_x = 0, \quad Bb\xi'_x - \lambda\xi = 0, \quad g = B - Af, \tag{2.7.3.69}$$

где A и B — произвольные постоянные ($A \neq 0$). Первые два уравнения (2.7.3.69) содержат три функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $\xi = \xi(x)$, одну из которых можно задать произвольным образом.

Считая функцию $\xi = \xi(x)$ в (2.7.3.69) заданной, находим

$$a = \frac{1}{\xi'_x}\left(\frac{A\lambda}{B}\int \xi\,dx + C_1\right), \quad b = \frac{\lambda\xi}{B\xi'_x}. \tag{2.7.3.70}$$

Считая функцию $b(x)$ заданной, решения первых двух уравнений (2.7.3.69) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a(x) &= b(x)\exp\left(-\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right)\left[A\int\exp\left(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right)dx + C_1\right],\\ \xi(x) &= C_2\exp\left(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right), \end{aligned} \tag{2.7.3.71}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные ($C_2 \neq 0$).

В частности, положив в (2.7.3.71) $B = 1$ и $b(x) = 1$, имеем

$$a(x) = \frac{A}{\lambda} + C_1e^{-\lambda x}, \quad \xi(x) = C_2e^{\lambda x},$$

а при $B = 1$ и $b(x) = x$ получим

$$a(x) = \frac{A}{\lambda+1}x^2 + C_1x^{1-\lambda}, \quad \xi(x) = C_2x^{\lambda}.$$

Последнему уравнению в (2.7.3.68) можно удовлетворить в двух случаях, которые рассматриваются ниже.

1°. При $\beta = 0$ решение последнего уравнения в (2.7.3.68) определяется формулами

$$c(x) = k\frac{b(x)}{a(x)}, \quad h(u) = A - \frac{B}{f(u)},$$

при выводе которых использовалось последнее соотношение в (2.7.3.69). В итоге получим, что уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)[B - Af(u)]u_x + k\frac{b(x)}{a(x)}\left[A - \frac{B}{f(u)}\right],$$

где $b(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, а $a = a(x)$ выражается через $b = b(x)$ по первой формуле из (2.7.3.71), допускает решение

$$\int f(u)\,du = k\int\frac{dx}{a(x)} + C_2e^{\lambda t}\exp\left(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\right).$$

2°. При $k=0$ решение последнего уравнения (2.7.3.68) имеет вид

$$c(x)=1, \quad h(u)=\frac{\beta}{f(u)}.$$

В результате приходим к уравнению

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+b(x)[B-Af(u)]u_x+\frac{\beta}{f(u)},$$

где $b(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, а $a=a(x)$ выражается через $b=b(x)$ по первой формуле из (2.7.3.71). Это уравнение допускает решение

$$\int f(u)\,du=\beta t+C_2e^{\lambda t}\exp\biggl(\frac{\lambda}{B}\int\frac{dx}{b(x)}\biggr).$$

Решение 15. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, если положить Φ_i $(i=1,\,2,\,3,\,4)$ пропорциональными Φ_5. Имеем

$$\begin{aligned}&\Phi_1=k_1\Phi_5, \quad \Phi_2=k_2\Phi_5, \quad \Phi_3=k_3\Phi_5, \quad \Phi_4=k_4\Phi_5,\\ &k_1\Psi_1+k_2\Psi_2+k_3\Psi_3+k_4\Psi_4+\Psi_5=0.\end{aligned} \tag{2.7.3.72}$$

Подставив (2.7.3.3) в (2.7.3.72), получим

$$\begin{aligned}&\vartheta_t=-k_1c, \quad (a\vartheta_x)_x=k_2c, \quad a\vartheta_x^2=k_3c, \quad b\vartheta_x=k_4c;\\ &k_1+k_2f+k_3(f/\zeta)'_u+k_4g+h\zeta=0.\end{aligned} \tag{2.7.3.73}$$

Рассмотрим два случая.

1°. Простейшее решение первых четырех уравнений (2.7.3.73) записывается так:

$$a(x)=b(x)=c(x)=1, \quad \theta(x,t)=-k_1t+k_4x+C_1, \quad k_2=0, \quad k_3=k_4^2$$

и приводит к решению типа бегущей волны уравнения (2.7.3.1) (это решение здесь не обсуждается).

2°. Первые четыре уравнения (2.7.3.73) также допускают другое решение

$$\begin{aligned}&a(x)=x^2, \quad b(x)=x, \quad c(x)=1,\\ &\vartheta(x,t)=-k_1t+k_2\ln x+C_1, \quad k_3=k_2^2, \quad k_4=k_2.\end{aligned} \tag{2.7.3.74}$$

Полагая $k=k_1$ и $k_2=1$ в (2.7.3.74) и используя последнее уравнение в (2.7.3.73), приходим к уравнению реакционно-диффузионного типа

$$u_t=[x^2f(u)u_x]_x+xg(u)u_x+h(u), \tag{2.7.3.75}$$

где

$$h(u)=-\frac{\xi(u)}{f(u)}\bigl[k+f(u)+g(u)+\xi'_u(u)\bigr], \quad \xi(u)=\frac{f(u)}{\zeta(u)}, \tag{2.7.3.76}$$

а $f=f(u)$, $g=g(u)$, $\xi=\xi(u)$ — произвольные функции. Это уравнение допускает точное инвариантное решение

$$\int\frac{f(u)}{\xi(u)}\,du=-kt+\ln x+C_1. \tag{2.7.3.77}$$

Замечание 2.67. *Инвариантное решение (2.7.3.77) уравнения (2.7.3.75) можно искать в явном виде* $u = U(z)$, $z = -kt + \ln x$ *(в этом случае соотношение (2.7.3.76) не используется). Функция* $U(z)$ *описывается ОДУ:*

$$[f(U)U'_z]'_z + [f(U) + g(U) + k]U'_z + h(U) = 0.$$

Решение 16. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = k_1\Phi_4 + k_2\Phi_5, \quad \Phi_2 = -k_3\Phi_3;\\ &\Psi_3 = k_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -k_1\Psi_1, \quad \Psi_5 = -k_2\Psi_1, \end{aligned} \tag{2.7.3.78}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = -k_1 b\vartheta_x - k_2 c, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_3 a\vartheta_x^2;\\ &(f/\zeta)'_u = k_3 f, \quad g = -k_1, \quad h\zeta = -k_2. \end{aligned} \tag{2.7.3.79}$$

Решения первых двух уравнений (2.7.3.79) имеют вид

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,t) = \lambda t + \frac{1}{k_3}\ln\biggl(k_3\int\frac{dx}{a(x)} + C_1\biggr) + C_2,\\ &b(x) = -\frac{k_2 c(x) + \lambda}{k_1}a(x)\biggl(k_3\int\frac{dx}{a(x)} + C_1\biggr), \end{aligned} \tag{2.7.3.80}$$

где $c(x)$ и $c(x)$ — произвольные функции, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из последних трех уравнений (2.7.3.79) находим

$$h(u) = -\frac{k_2}{f(u)}\biggl(k_3\int f(u)\,du + C_3\biggr), \quad \zeta(u) = f(u)\biggl(k_3\int f(u)\,du + C_3\biggr)^{-1}. \tag{2.7.3.81}$$

Подставив $C_1 = C_3 = 0$ и $k_3 = 1$ в (2.7.3.80) и (2.7.3.81), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + a(x)[c(x) + \lambda]\biggl(\int\frac{dx}{a(x)}\biggr)u_x - \frac{c(x)}{f(u)}\int f(u), \tag{2.7.3.82}$$

которое имеет решение

$$\int f(u)\,du = C_4 e^{\lambda t}\int\frac{dx}{a(x)}, \tag{2.7.3.83}$$

где C_4 — произвольная постоянная. При выводе формулы (2.7.3.83) использовалось равенство

$$\int f\biggl(\int f(u)\,du + C_3\biggr)^{-1} du = \ln\biggl(\int f(u)\,du + C_3\biggr) + \text{const}.$$

Отметим, что диффузионный член $[a(x)f(u)u_x]_x$ уравнения (2.7.3.82) обращаются в нуль на решении (2.7.3.83) (хотя $u_{xx} \not\equiv 0$).

Поиск точных решений с помощью эквивалентных уравнений. Используя соображения, изложенные в разд. 2.7.2, получим теперь несколько других точных решений уравнения (2.7.1.1). Для этого вместо (2.7.1.4) — (2.7.1.5), будем рассматривать эквивалентные дифференциальные уравнения, которые сводятся к (2.7.1.4) — (2.7.1.5) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (2.7.1.2).

Решение 17. Вернемся к классу реакционно-диффузионных уравнений вида (2.7.3.1). Сделав подстановку (2.7.1.2), вместо уравнения (2.7.3.2) рассмотрим более сложное уравнение

$$-e^{\lambda\vartheta}e^{-\lambda Z}\vartheta_t+(a\vartheta_x)_x f+a\vartheta_x^2\Big(\frac{f}{\zeta}\Big)'_u+b\vartheta_x g+ch\zeta=0, \tag{2.7.3.84}$$

где $Z=\int\zeta\,du$ и λ — произвольная постоянная. Уравнения (2.7.3.2) и (2.7.3.84) эквивалентны, поскольку в силу преобразования (2.7.1.2) справедливо соотношение $\vartheta=Z$.

Уравнение (2.7.3.84) можно представить в билинейной форме (2.7.3.4), где

$$\begin{aligned}
&\Phi_1=-e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t, &&\Phi_2=(a\vartheta_x)_x, &&\Phi_3=a\vartheta_x^2, &&\Phi_4=b\vartheta_x, &&\Phi_5=c;\\
&\Psi_1=e^{-\lambda Z}, &&\Psi_2=f, &&\Psi_3=(f/\zeta)'_u, &&\Psi_4=g, &&\Psi_5=h\zeta.
\end{aligned} \tag{2.7.3.85}$$

Как и ранее, уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить с помощью соотношений (2.7.3.5). Подставив (2.7.3.85) в (2.7.3.5), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t=c, \quad (a\vartheta_x)_x=0, \quad ka\vartheta_x^2=-b\vartheta_x;\\
&h\zeta=e^{-\lambda Z}, \quad (f/\zeta)'_u=kg,
\end{aligned} \tag{2.7.3.86}$$

которые при $\lambda=0$ совпадают с (2.7.3.6). Решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (2.7.3.86), имеет вид

$$\begin{aligned}
&\vartheta(x,t)=\frac{1}{\lambda}\ln(t+C_2)-\frac{b_0}{k}\int\frac{dx}{a(x)}+C_1,\\
&b(x)=b_0, \quad c(x)=\frac{1}{\lambda}\exp\Big(-\frac{b_0\lambda}{k}\int\frac{dx}{a(x)}+C_1\lambda\Big),
\end{aligned} \tag{2.7.3.87}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а b_0, C_1, C_2, k, λ — произвольные постоянные. Решение системы, состоящей из последних двух уравнений (2.7.3.86), определяется формулами

$$\zeta(u)=\frac{f(u)}{kG(u)+C_2}, \quad h(u)=\frac{1}{\zeta(u)}\exp\Big(-\lambda\int\zeta(u)\,du\Big), \quad G(u)=\int g(u)\,du, \tag{2.7.3.88}$$

где $f(u)$ и $g(u)$ — произвольные функции.

Решение 18. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, используя соотношения (2.7.3.17). Подставив (2.7.3.85) в (2.7.3.17), получим

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t=k_1c, \quad (a\vartheta_x)_x=-k_2c, \quad b\vartheta_x=-k_3c;\\
&(f/\zeta)'_u=0, \quad h\zeta=k_1e^{-\lambda Z}+k_2f+k_3g.
\end{aligned} \tag{2.7.3.89}$$

Решение переопределенной системы, состоящей из первых трех уравнений (2.7.3.89), имеет вид

$$\vartheta(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln[k_1(\lambda t + C_1)c(x)],$$
$$a(x) = \frac{c(x)}{c'_x(x)}\left(C_2 - k_2\lambda\int c(x)\,dx\right), \quad b(x) = -\frac{k_3\lambda c^2(x)}{c'_x(x)},$$

где $c(x)$ — произвольная функция (отличная от константы), а C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Решения последних двух уравнений (2.7.3.89) выражаются по формулам

$$h(u) = \frac{1}{f(u)}\left[k_1\exp\left(-\lambda\int f(u)\,du\right) + k_2 f(u) + k_3 g(u)\right], \quad \zeta(u) = f(u),$$

где $f = f(u)$ и $g = g(u)$ — произвольные функции.

Решение 19. Как и ранее, уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить с помощью соотношений (2.7.3.21). Подставив (2.7.3.85) в (2.7.3.21), получим

$$\begin{aligned} &e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t = c, \quad (a\vartheta_x)_x = -kb\vartheta_x;\\ &h\zeta = e^{-\lambda Z}, \quad kf = g, \quad (f/\zeta)'_u = 0. \end{aligned} \tag{2.7.3.90}$$

Решение переопределенной системы, состоящей из первых двух уравнений (2.7.3.90), записывается так:

$$\vartheta(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(t + C_1) + C_2\int\exp\left(-k\int\frac{b}{a}\,dx\right)\frac{dx}{a} + C_3,$$
$$c(x) = \frac{1}{\lambda}\exp\left[C_2\lambda\int\exp\left(-k\int\frac{b}{a}\,dx\right)\frac{dx}{a} + C_3\lambda\right],$$

где $a = a(x)$ и $b = b(x)$ — произвольные функции, а C_1, C_2, C_3, k, λ — произвольные постоянные. Система из трех последних уравнений (2.7.3.90) имеет решение

$$g = kf, \quad h = \frac{1}{mf}\exp\left(-m\lambda\int f\,du\right), \quad \zeta = mf,$$

где $m \neq 0$ — произвольная постоянная.

Решение 20. Подставив (2.7.3.85) в (2.7.3.72), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t = -k_1 c, \quad (a\vartheta_x)_x = k_2 c, \quad a\vartheta_x^2 = k_3 c, \quad b\vartheta_x = k_4 c;\\ &k_1 e^{-\lambda Z} + k_2 f + k_3(f/\zeta)'_u + k_4 g + h\zeta = 0. \end{aligned} \tag{2.7.3.91}$$

Первые четыре уравнения системы (2.7.3.91) допускают точное решение при функциональных коэффициентах экспоненциального вида:

$$a(x) = b(x) = c(x) = e^{\lambda x}, \quad \vartheta(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln t + x,$$
$$k_1 = -\frac{1}{\lambda}, \quad k_2 = \lambda, \quad k_3 = k_4 = 1.$$

С помощью последнего уравнения (2.7.3.91) получим нелинейное УрЧП:

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u) u_x]_x + e^{\lambda x} g(u) u_x + e^{\lambda x} h(u), \tag{2.7.3.92}$$

где

$$h(u) = -\frac{1}{\zeta}\Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda Z} + \lambda f + \Big(\frac{f}{\zeta}\Big)'_u + g\Big], \quad Z = \int \zeta\,du, \tag{2.7.3.93}$$

а $f = f(u)$, $g = g(u)$, $\zeta = \zeta(u)$ — произвольные функции. Уравнение (2.7.3.92) имеет точное инвариантное решение

$$\int \zeta(u)\,du = \frac{1}{\lambda}\ln t + x. \tag{2.7.3.94}$$

Замечание 2.68. *Инвариантное решение (2.7.3.94) уравнения (2.7.3.92) можно искать в явном виде* $u = U(z)$, $z = \frac{1}{\lambda}\ln t + x$ *(в этом случае соотношение (2.7.3.93) не используется). Функция* $U(z)$ *описывается ОДУ:*

$$\frac{1}{\lambda}U'_z = [e^{\lambda z} f(U) U'_z]'_z + e^{\lambda z} g(U) U'_z + e^{\lambda z} h(U).$$

Решение 21. Первые четыре уравнения системы (2.7.3.91) допускают точное решение также при функциональных коэффициентах степенного вида:

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-1}, \quad c(x) = x^{n-2}, \quad \vartheta(x,t) = \frac{1}{n-2}\ln t + \ln x,$$
$$\lambda = n-2, \quad k_1 = -\frac{1}{n-2}, \quad k_2 = n-1, \quad k_3 = k_4 = 1.$$

Используя последнее уравнение (2.7.3.91), приходим к нелинейному УрЧП:

$$u_t = [x^n f(u) u_x]_x + x^{n-1} g(u) u_x + x^{n-2} h(u), \tag{2.7.3.95}$$

где

$$h(u) = -\frac{1}{\zeta}\Big[-\frac{1}{n-2}e^{-(n-2)Z} + (n-1)f + \Big(\frac{f}{\zeta}\Big)'_u + g\Big], \quad Z = \int \zeta\,du, \tag{2.7.3.96}$$

а $f = f(u)$, $g = g(u)$, $\zeta = \zeta(u)$ — произвольные функции. Уравнение (2.7.3.95) имеет автомодельное решение

$$\int \zeta(u)\,du = \frac{1}{n-2}\ln t + \ln x. \tag{2.7.3.97}$$

Замечание 2.69. *Автомодельное решение (2.7.3.97) уравнения (2.7.3.95) можно искать в стандартном виде* $u = U(z)$, $z = xt^{1/(n-2)}$ *(в этом случае соотношение (2.7.3.96) не используется). Функция* $U(z)$ *описывается ОДУ:*

$$\frac{1}{n-2}zU'_z = [z^n f(U) U'_z]'_z + z^{n-1} g(U) U'_z + z^{n-2} g(U).$$

Решение 22. Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить, если положить Ψ_i $(i = 1,\ 3,\ 4,\ 5)$ пропорциональными Ψ_2. В результате имеем

$$\begin{aligned}&\Psi_1 = k_1\Psi_2, \quad \Psi_3 = k_2\Psi_2, \quad \Psi_4 = k_3\Psi_2, \quad \Psi_5 = k_4\Psi_2,\\ &k_1\Phi_1 + \Phi_2 + k_2\Phi_3 + k_3\Phi_4 + k_4\Phi_5 = 0.\end{aligned} \tag{2.7.3.98}$$

Подставив (2.7.3.85) в (2.7.3.98), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&e^{-\lambda Z} = k_1 f, \quad (f/\zeta)'_u = k_2 f, \quad g = k_3 f, \quad h\zeta = k_4 f,\\ &-k_1 e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x + k_2 a\vartheta_x^2 + k_3 b\vartheta_x + k_4 c = 0.\end{aligned} \tag{2.7.3.99}$$

Первые четыре уравнения системы (2.7.3.99) допускают точное решение при функциональных коэффициентах экспоненциального вида:

$$\begin{aligned}&f(u) = g(u) = h(u) = e^{-\lambda u}, \quad \zeta = 1, \quad Z = u;\\ &k_1 = k_3 = k_4 = 1, \quad k_2 = -\lambda.\end{aligned}$$

В этом случае получим нелинейное уравнение диффузионного типа

$$u_t = [a(x)e^{\beta u}u_x]_x + b(x)e^{\beta u}u_x + c(x)e^{\beta u}, \qquad \lambda = -\beta, \tag{2.7.3.100}$$

которое имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = -\frac{1}{\beta}\ln t + \eta(x), \tag{2.7.3.101}$$

где функция $\eta = \eta(x)$ описывается ОДУ:

$$-\frac{1}{\beta} = [a(x)e^{\beta\eta}\eta'_x]'_x + b(x)e^{\beta\eta}\eta'_x + c(x)e^{\beta\eta}. \tag{2.7.3.102}$$

Уравнения (2.7.3.100) и (2.7.3.102) содержат три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

Отметим, что уравнение (2.7.3.102) подстановкой $\xi = e^{\beta\eta}$ приводится к линейному ОДУ второго порядка

$$[a(x)\xi'_x]'_x + b(x)\xi'_x + \beta c(x)\xi + 1 = 0.$$

Решение 23. Первые четыре уравнения системы (2.7.3.99) допускают точное решение также при функциональных коэффициентах степенного вида:

$$\begin{aligned}&f(u) = u^n, \quad g(u) = u^n, \quad h(u) = u^{n+1}, \quad \zeta(u) = 1/u, \quad Z = \ln u,\\ &\lambda = -n, \quad k_1 = k_3 = k_4 = 1, \quad k_2 = n + 1.\end{aligned}$$

В этом случае решение последнего уравнения в (2.7.3.99) определяется формулой $\vartheta = -(1/n)\ln t + \eta(x)$, где функция $\eta = \eta(x)$ удовлетворяет ОДУ:

$$\frac{1}{n}e^{-n\eta} + (a\eta'_x)'_x + (n+1)a(\eta'_x)^2 + b\eta'_x + c = 0.$$

В результате приходим к нелинейному УрЧП:

$$u_t = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^n u_x + c(x)u^{n+1},$$

точное решение которого можно представить в виде произведения функций разных аргументов $u=t^{-1/n}\xi(x)$, где функция $\xi(x)=e^{\eta}$ описывается ОДУ:

$$[a(x)\xi^n\xi'_x]'_x+b(x)\xi^n\xi'_x+c(x)\xi^{n+1}+\frac{1}{n}\xi=0.$$

Решение 24. Вернемся в классу реакционно-диффузионных уравнений вида (2.7.3.1). Сделав подстановку (2.7.1.2), вместо (2.7.3.2) рассмотрим более сложное уравнение

$$-\vartheta_t+(a\vartheta_x)_x f+a\vartheta_x^2\left(\frac{f}{\zeta}\right)'_u+b\vartheta_x g+ch\zeta\frac{\vartheta}{Z}=0, \tag{2.7.3.103}$$

где $Z=\int\zeta\,du$. Уравнения (2.7.3.2) и (2.7.3.103) эквивалентны, поскольку ввиду преобразования (2.7.1.2) справедливо соотношение $\vartheta=Z$.

Уравнение (2.7.3.103) можно представить в билинейной форме (2.7.3.4), где

$$\begin{aligned}&\Phi_1=-\vartheta_t, &&\Phi_2=(a\vartheta_x)_x, &&\Phi_3=a\vartheta_x^2, &&\Phi_4=b\vartheta_x, &&\Phi_5=c\vartheta;\\ &\Psi_1=1, &&\Psi_2=f, &&\Psi_3=(f/\zeta)'_u, &&\Psi_4=g, &&\Psi_5=h\zeta/Z.\end{aligned} \tag{2.7.3.104}$$

Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить с помощью равенств (2.7.3.17). Подставив (2.7.3.104) в (2.7.3.17), получим

$$\begin{aligned}&\vartheta_t=k_1c\vartheta, \quad (a\vartheta_x)_x=-k_2c\vartheta, \quad b\vartheta_x=-k_3c\vartheta;\\ &(f/\zeta)'_u=0, \quad h\zeta/Z=k_1+k_2f+k_3g,\end{aligned} \tag{2.7.3.105}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Пусть $a=a(x)$, $f=f(u)$, $g=g(u)$ — произвольные функции. Тогда решения уравнений (2.7.3.105) имеют вид

$$\begin{aligned}&b(x)=-\frac{k_3\lambda}{k_1}\frac{\omega}{\omega'_x}, \quad c(x)=\frac{\lambda}{k_1}=\text{const}, \quad \vartheta(x,t)=e^{\lambda t}\omega(x),\\ &h=\frac{1}{f}(k_1+k_2f+k_3g)F, \quad \zeta=f, \quad F=\int f\,du,\end{aligned} \tag{2.7.3.106}$$

где λ — произвольная постоянная, а функция $\omega=\omega(x)$ является решением линейного ОДУ второго порядка $(a\omega'_x)'_x=-(k_2\lambda/k_1)\omega$. В частном случае $a(x)=\text{const}$ и $k_3=0$ формулы (2.7.3.106) приводят к нелинейному реакционно-диффузионному уравнению и его решению, которое приведены в [287].

Решение 25. Рассмотрим частный случай

$$a=b=c=1, \quad \zeta=f. \tag{2.7.3.107}$$

Ищем решение уравнения (2.7.3.103) при условиях (2.7.3.107) в виде

$$\vartheta=(\gamma x+\delta)e^{\alpha x+\beta t}. \tag{2.7.3.108}$$

Подставив (2.7.3.108) в (2.7.3.103) и учитывая (2.7.3.107), получим

$$\begin{aligned}&\gamma x e^{\alpha x+\beta t}\bigl[-\beta+\alpha^2f+\alpha g+(f/F)h\bigr]+\\ &\quad+e^{\alpha x+\beta t}\bigl[-\beta\delta+(\alpha^2\delta+2\alpha\gamma)f+(\alpha\delta+\gamma)g+\delta(f/F)h\bigr]=0,\end{aligned} \tag{2.7.3.109}$$

где $F = \int f\,du$. Приравнивая выражения в квадратных скобках в (2.7.3.109) нулю, приходим к уравнениям

$$-\beta + \alpha^2 f + \alpha g + (f/F)h = 0,$$
$$-\beta\delta + (\alpha^2\delta + 2\alpha\gamma)f + (\alpha\delta + \gamma)g + \delta(f/F)h = 0.$$

Решив эти уравнения относительно g и h, имеем

$$g = -2\alpha f, \qquad h = \Big(\alpha^2 + \frac{\beta}{f}\Big)F.$$

В результате приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x - 2\alpha f(u)u_x + \Big[\alpha^2 + \frac{\beta}{f(u)}\Big]\int f(u)\,du,$$

которое допускает точное решение

$$\int f(u)\,du = (\gamma x + \delta)e^{\alpha x + \beta t},$$

где γ и δ — произвольные постоянные.

Решение 26. Ищем точное решение уравнения (2.7.3.103) при условиях (2.7.3.107) в виде

$$\vartheta = Ae^{\alpha x + \beta t} + Be^{\gamma x + \delta t}.$$

Опуская промежуточные выкладки, получим уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \Big[\frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha} - (\alpha + \gamma)f(u)\Big]u_x + \\ + \Big[\alpha\gamma + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma - \alpha}\frac{1}{f(u)}\Big]\int f(u)\,du, \qquad (2.7.3.110)$$

которое имеет решение

$$\int f(u)\,du = Ae^{\alpha x + \beta t} + Be^{\gamma x + \delta t},$$

где A и B — произвольные постоянные.

► Пример 2.81. В частном случае $\gamma = -\alpha$, $\delta = \beta$ уравнение (2.7.3.110) упрощается и принимает вид

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \Big[-\alpha^2 + \frac{\beta}{f(u)}\Big]\int f(u)\,du,$$

а его решение выражается формулой

$$\int f(u)\,du = e^{\beta t}(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}).$$

◄

Решение 27. Предполагая, что выполняются условия (2.7.3.107), ищем решение уравнения (2.7.3.103) в виде

$$\vartheta = Ae^{\alpha t}\sin(\beta x + \sigma t + \delta),$$

где A и δ — произвольные постоянные. После перегруппировки слагаемых получим уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \gamma u_x + \left[\beta^2 + \frac{\alpha}{f(u)}\right]\int f(u)\,du,$$

где $\gamma = \sigma/\beta$, которое допускает точное решение

$$\int f(u)\,du = Ae^{\alpha t}\sin(\beta x + \beta\gamma t + \delta).$$

Замечание 2.70. *В случае (2.7.3.107) уравнение (2.7.3.103) имеет также более сложное решение вида*

$$\vartheta = Ae^{\mu x + \alpha t}\sin(\beta x + \sigma t + \delta),$$

которое здесь не обсуждается.

Решение 28. Вместо (2.7.3.103) можно рассматривать более сложное уравнение

$$-\frac{\vartheta^n}{Z^n}\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2\Big(\frac{f}{\zeta}\Big)'_u + b\vartheta_x g + ch\zeta\frac{\vartheta}{Z} = 0, \tag{2.7.3.111}$$

где $Z = \int\zeta\,du$, а n — произвольная постоянная. Уравнения (2.7.3.2) и (2.7.3.111) эквивалентны, так как в силу преобразования (2.7.1.2) справедливо соотношение $\vartheta = Z$.

Уравнение (2.7.3.111) можно представить в билинейной форме (2.7.3.4), где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\vartheta^n\vartheta_t, && \Phi_2 = (a\vartheta_x)_x, && \Phi_3 = a\vartheta_x^2, && \Phi_4 = b\vartheta_x, && \Phi_5 = c\vartheta;\\ &\Psi_1 = Z^{-n}, && \Psi_2 = f, && \Psi_3 = (f/\zeta)'_u, && \Psi_4 = g, && \Psi_5 = h\zeta/Z. \end{aligned} \tag{2.7.3.112}$$

Уравнению (2.7.3.4) можно удовлетворить с помощью равенств (2.7.3.17). Подставив (2.7.3.112) в (2.7.3.17), получим

$$\begin{aligned} &\vartheta^n\vartheta_t = k_1c\vartheta, \quad (a\vartheta_x)_x = -k_2c\vartheta, \quad b\vartheta_x = -k_3c\vartheta;\\ &(f/\zeta)'_u = 0, \quad h\zeta/Z = k_1Z^{-n} + k_2f + k_3g, \end{aligned} \tag{2.7.3.113}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Пусть $a = a(x)$, $f = f(u)$, $g = g(u)$ — произвольные функции. Тогда решения уравнений (2.7.3.113) имеют вид

$$\begin{aligned} &b(x) = -\frac{k_3}{k_1n}\frac{\omega^{n+1}}{\omega'_x}, \quad c(x) = \frac{\omega^n}{k_1n}, \quad \vartheta(x,t) = t^{1/n}\omega(x),\\ &h = \frac{1}{f}(k_1F^{-n} + k_2f + k_3g)F, \quad \zeta = f, \quad F = \int f\,du, \end{aligned} \tag{2.7.3.114}$$

где функция $\omega = \omega(x)$ — решение нелинейного ОДУ второго порядка типа Эмдена — Фаулера:

$$(a\omega'_x)'_x = -\frac{k_2}{k_1n}\omega^{n+1}. \tag{2.7.3.115}$$

Пусть $k_3 = k_1 n$ и $k = k_2/(k_1 n)$. Тогда из соотношений (2.7.3.114) следует, что нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{\omega^{n+1}}{\omega'_x} g(u)u_x + \omega^n \frac{F(u)}{f(u)}\Big[kf(u) + g(u) + \frac{1}{n}F^{-n}(u)\Big], \tag{2.7.3.116}$$

где $f(u)$, $g(u)$, $a(x)$ — произвольные функции, k и n — произвольные постоянные, а $F(u) = \int f(u)\,du$, допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int f(u)\,du = \omega(x)t^{1/n}. \tag{2.7.3.117}$$

Функция $\omega = \omega(x)$ в (2.7.3.116) и (2.7.3.117) описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[a(x)\omega'_x]'_x + k\omega^{n+1} = 0. \tag{2.7.3.118}$$

Отметим, что при $n = -1$ общее решение уравнения (2.7.3.118) определяется формулой

$$\omega = -k\int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

► Пример 2.82. Положив $a(x) = 1$ и $k = 0$ в (2.7.3.116) – (2.7.3.118), получим уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x - x^{n+1}g(u)u_x + x^n \frac{1}{f(u)}\Big[g(u)F(u) + \frac{1}{n}F^{1-n}(u)\Big], \tag{2.7.3.119}$$

имеющее неинвариантное автомодельное решение (2.7.3.117), которое обращает в нуль диффузионный член $[f(u)u_x]_x$. ◄

Решение 29. Рассмотрим теперь уравнение

$$-\vartheta_t + \lambda\vartheta - \lambda Z + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2\Big(\frac{f}{\zeta}\Big)'_u + b\vartheta_x g + ch\zeta = 0, \tag{2.7.3.120}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, которое в силу (2.7.1.2) ($\vartheta = Z$) эквивалентно уравнению (2.7.3.2).

Уравнение (2.7.3.120) инвариантно относительно преобразования

$$\vartheta = \bar{\vartheta} + C_1 e^{\lambda t}, \tag{2.7.3.121}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Легко убедиться, что при постоянных a, b, c, которые без ограничения общности можно положить равными единице, уравнение (2.7.3.120) имеет частное решение

$$\bar{\vartheta} = C_2 e^{\beta t - \mu x}, \quad g = \mu f + \frac{\lambda - \beta}{\mu}, \quad h = \frac{\lambda}{f}\int f\,du, \quad \zeta = f, \tag{2.7.3.122}$$

где $f = f(u)$ — произвольная функция, а C_2, β, μ — произвольные постоянные. Учитывая (2.7.3.121), получим уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \Big[\mu f(u) + \frac{\lambda - \beta}{\mu}\Big]u_x + \frac{\lambda}{f(u)}\int f(u)\,du, \qquad (2.7.3.123)$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int f(u)\,du = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\beta t - \mu x}.$$

Полагая $\beta = \lambda - \sigma\mu$, можно представить уравнение (2.7.3.123) в более компактной форме

$$u_t = [f(u)u_x]_x + [\mu f(u) + \sigma]u_x + \frac{\lambda}{f(u)}\int f(u)\,du.$$

В этом случае его решение имеет вид $\int f(u)\,du = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{(\lambda - \sigma\mu)t - \mu x}$.

Решение 30. Ищем стационарное частное решение $\vartheta = \vartheta(x)$ уравнения (2.7.3.120). В этом случае имеем

$$\begin{aligned} &a\vartheta_x^2 = k_1\vartheta, \quad (a\vartheta_x)_x = k_2, \quad b\vartheta_x = k_3, \quad c = 1;\\ &\lambda + k_1(f/\zeta)'_u = 0, \quad -\lambda Z + k_2 f + k_3 g + h\zeta = 0, \end{aligned} \qquad (2.7.3.124)$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Решения первых трех уравнений (2.7.3.124) при $k_1k_2 \neq 0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} &a(x) = \frac{1}{C_2k_1}(k_2x + C_3)^{2-(k_1/k_2)}, \quad b(x) = \frac{k_3}{C_2k_1}(k_2x + C_3)^{1-(k_1/k_2)},\\ &\vartheta(x) = C_2(k_2x + C_3)^{k_1/k_2}, \end{aligned} \qquad (2.7.3.125)$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные. Решение системы, состоящей из последних двух уравнений (2.7.3.124), записывается следующим образом:

$$\zeta = -\frac{k_1}{\lambda}\frac{f}{u + C_4}, \quad h = \frac{\lambda(u + C_4)}{k_1 f}\left(k_2 f + k_3 g + k_1\int\frac{f\,du}{u + C_4}\right), \qquad (2.7.3.126)$$

где $f = f(u)$ и $g = g(u)$ — произвольные функции, а C_4 — произвольная постоянная.

Подставив $C_2 = 1/k$, $C_3 = C_4 = 0$, $k_1 = k$, $k_2 = k_3 = 1$, $\lambda = k\sigma$ в (2.7.3.125) и (2.7.3.126), приходим к уравнению

$$u_t = [x^{2-k}f(u)u_x]_x + x^{1-k}g(u)u_x + \frac{\sigma u}{f(u)}\left[f(u) + g(u) + k\int\frac{f(u)}{u}\,du\right]. \qquad (2.7.3.127)$$

При $k \neq 0$ уравнение (2.7.3.127) допускает точное решение

$$\int\frac{f(u)}{u}\,du = Ce^{k\sigma t} - \frac{\sigma}{k}x^k, \qquad C = -C_1\sigma, \qquad (2.7.3.128)$$

при построении которого учитывалась инвариантность уравнения (2.7.3.120) относительно преобразования (2.7.3.121).

Решение 31. Сначала заметим, что уравнение (2.7.3.120) эквивалентно уравнению (2.7.3.2) для любой функции $\lambda = \lambda(x,t,u)$. Положив далее $\lambda = p(x)f(u)$ и $\zeta = f(u)$ в (2.7.3.120), а затем разделив на $f = f(u)$, получим

$$-\vartheta_t \frac{1}{f} + (a\vartheta_x)_x + p\vartheta + b\vartheta_x \frac{g}{f} + ch - pF = 0, \tag{2.7.3.129}$$

где $F = \int f(u)\,du$.

Считая функцию f произвольно заданной, ищем функции g и h в виде

$$g = f\Big(k_1 + k_2 \frac{1}{f} + k_3 F\Big), \qquad h = m_1 + m_2 \frac{1}{f} + m_3 F, \tag{2.7.3.130}$$

где k_i и m_i — некоторые константы ($i = 1, 2, 3$). Подставив выражения (2.7.3.130) в (2.7.3.129), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} (a\vartheta_x)_x + p\vartheta + k_1 b\vartheta_x + m_1 c &= 0, \\ -\vartheta_t + k_2 b\vartheta_x + m_2 c &= 0, \\ -p + k_3 b\vartheta_x + m_3 c &= 0. \end{aligned} \tag{2.7.3.131}$$

Уравнения (2.7.3.131) допускают точное решение

$$k_2 = k_3 = 0, \quad \vartheta = m_2 c(x)t + \eta(x), \quad p = m_3 c(x), \tag{2.7.3.132}$$

где три функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$ связаны одним уравнением

$$(ac'_x)'_x + k_1 bc'_x + m_3 c^2 = 0, \tag{2.7.3.133}$$

а функция η описываются линейным ОДУ:

$$(a\eta'_x)'_x + k_1 b\eta'_x + m_3 c\eta + m_1 c = 0. \tag{2.7.3.134}$$

Отметим, что при заданных функциях a и c уравнение (2.7.3.133) является алгебраическим относительно b, при заданных b и c оно является линейным ОДУ первого порядка относительно a (которое легко интегрируется), а при заданных a и b оно является ОДУ второго порядка с квадратичной нелинейностью относительно c.

В итоге получим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x + c(x)\bigg[m_1 + \frac{m_2}{f(u)} + m_3 \int f(u)\,du\bigg], \tag{2.7.3.135}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Любые две из трех функций $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$ могут быть заданы произвольно, оставшаяся функция удовлетворяет уравнению (2.7.3.133) при $k_1 = 1$. Уравнение (2.7.3.135) имеет точное решение, которое можно представить в неявном виде

$$\int f(u)\,du = m_2 c(x)t + \eta(x),$$

где функция $\eta(x)$ определяется ОДУ (2.7.3.134) при $k_1 = 1$.

Замечание 2.71. *Более общее, чем (2.7.3.135) нелинейное УрЧП:*

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x + m(x) + \frac{c(x)}{f(u)} + n(x)\int f(u)\,du,$$

в котором $f = f(u)$ и $m = m(x)$ — произвольные функции, а четыре функции $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $n = n(x)$ связаны одним уравнением (алгебраическим относительно b, n и дифференциальным относительно a, c)

$$(ac'_x)'_x + bc'_x + cn = 0,$$

допускает точное решение

$$\int f(u)\,du = c(x)t + \eta(x),$$

где функция $\eta(x)$ описывается ОДУ:

$$(a\eta'_x)'_x + b\eta'_x + n\eta + m = 0.$$

Решение 32. Решения уравнения (2.7.3.129) можно искать в виде

$$g = f\Big(k_1 f^{-1} + k_2\Big), \qquad h = k_3 f^{-1} + k_4, \qquad F = k_5 f^{-1} + k_6, \tag{2.7.3.136}$$

где k_n — некоторые константы; последнее соотношение в (2.7.3.136) служит для определения функции f. Положив $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_5 = 2$, $k_6 = 0$ в (2.7.3.136), получим $f = g = u^{-1/2}$, $h = k_3 u^{1/2} + k_4$, $F = 2u^{1/2}$. Соответствующее нелинейное уравнение диффузионного типа

$$u_t = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + b(x)u^{-1/2}u_x + c(x)(k_3 u^{1/2} + k_4), \tag{2.7.3.137}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — произвольные функции, а k_3 и k_4 — произвольные постоянные, имеет точное решение в неявной форме $F = \xi(x)t + \eta(x)$, которое можно представить в явном виде

$$u = \tfrac{1}{4}[\xi(x)t + \eta(x)]^2. \tag{2.7.3.138}$$

Здесь функции $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(x)$ определяются путем решения системы ОДУ:

$$\begin{aligned} (a\xi'_x)'_x + b\xi'_x + \tfrac{1}{2}k_3 c\xi - \tfrac{1}{2}\xi^2 &= 0, \\ (a\eta'_x)'_x + b\eta'_x + \tfrac{1}{2}k_3 c\eta - \tfrac{1}{2}\xi\eta + k_4 c &= 0. \end{aligned} \tag{2.7.3.139}$$

При $c(x) = 1$ первому уравнению (2.7.3.139) можно удовлетворить, положив $\xi(x) = k_3$.

Замечание 2.72. *Более общее, чем (2.7.3.137), уравнение*

$$u_t = [a(x)u^{-1/2}u_x]_x + b(x)u^{-1/2}u_x + c(x)u^{1/2} + d(x) \tag{2.7.3.140}$$

также допускает точное решение вида (2.7.3.138). В случае $d(x)/c(x) = \text{const}$ уравнение (2.7.3.140) принадлежит к рассматриваемому классу УрЧП (2.7.3.1).

Решение 33. Рассмотрим теперь уравнение

$$-\vartheta_t + \vartheta_{xx} f + \vartheta_x^2 \left(\frac{f}{\zeta}\right)_u' - k\left(\frac{f}{\zeta}\right)_u' \vartheta + k\left(\frac{f}{\zeta}\right)_u' Z + h\zeta = 0. \qquad (2.7.3.141)$$

которое в силу (2.7.1.2) эквивалентно уравнению (2.7.3.2) при $a = c = 1$ и $b = 0$.

Точное решение уравнения (2.7.3.141) ищем в виде

$$\vartheta = Ax^2 + Bx + Ce^{-\lambda t},$$

где A, B, C, λ константы, подлежащие определению. Опуская промежуточные выкладки, приходим к уравнению

$$u_t = [f(u)u_x]_x - \frac{1}{2}\lambda u - \gamma^2 \frac{u}{f(u)} - \lambda \frac{u}{f(u)} \int \frac{f(u)}{u}\, du, \qquad (2.7.3.142)$$

которое имеет два точных решения

$$\int \frac{f(u)}{u}\, du = \frac{1}{4}\lambda x^2 \pm \gamma x + \beta e^{-\lambda t}, \qquad (2.7.3.143)$$

где β, γ, λ — произвольные постоянные.

Замечание 2.73. *Используемый метод позволяет получать также другие точные решения уравнения (2.7.3.1), которое здесь не обсуждаются (напомним, что в этом разделе рассматривались только нелинейные УрЧП достаточно общего вида, зависящие от произвольных функций).*

2.7.4. Обобщенные уравнения пористой среды с нелинейным источником

Рассматриваемый класс уравнений. Приведение к билинейной форме. Рассмотрим класс обобщенных уравнений пористой среды с переменными коэффициентами вида [309]:

$$u_t = [a(x)f(u)u_x^m]_x + b(x)g(u). \qquad (2.7.4.1)$$

При $m = 1$ это уравнение совпадает с более простым уравнением (2.5.3.1), которое рассматривалось в разд. 2.5.3. Некоторые решения при $m \neq 1$ приводятся в работах [150, 202, 204, 287].

Далее будем считать, что $a(x) \not\equiv 0$, $f(u) \not\equiv 0$, $b(x) \not\equiv 0$, $g(u) \not\equiv 0$.

Применяя подход, описанный в разд. 2.7.1, получим несколько точных решений уравнений вида (2.7.4.1), где два функциональных коэффициента $a(x)$ и $f(u)$ задаются произвольным образом, а остальные через них выражаются. Как и ранее, для краткости аргументы функций, фигурирующих в преобразовании (2.7.1.2) и уравнении (2.7.4.1), часто будут опускаться.

Сделав замену (2.7.1.2), подставим производные (2.7.1.3) в (2.7.4.1) и перегруппируем слагаемые. В результате получим

$$-\vartheta_t + (a\vartheta_x^m)_x f\zeta^{1-m} + a\vartheta_x^{1+m}(f\zeta^{-m})_u' + bg\zeta = 0. \qquad (2.7.4.2)$$

Уравнение (2.7.4.2) можно представить в билинейной форме (2.7.1.4) при $N = 4$:

$$\sum_{n=1}^{4} \Phi_n \Psi_n = 0, \tag{2.7.4.3}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\vartheta_t, \quad \Phi_2 = (a\vartheta_x^m)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^{1+m}, \quad \Phi_4 = b; \\ &\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = f\zeta^{1-m}, \quad \Psi_3 = (f\zeta^{-m})'_u, \quad \Psi_4 = g\zeta. \end{aligned} \tag{2.7.4.4}$$

Поиск точных решений, исходя из уравнения (2.7.4.2).

Решение 1. Уравнению (2.7.4.3) можно тождественно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\Phi_1 = -A\Phi_4, \quad \Phi_2 = B\Phi_4; \quad \Psi_3 = 0; \quad \Psi_4 = A\Psi_1 - B\Psi_2, \tag{2.7.4.5}$$

где A и B — произвольные постоянные. Подставив (2.7.4.4) в (2.7.4.5), приходим к уравнениям

$$\vartheta_t = Ab, \quad (a\vartheta_x^m)_x = Bb; \quad (f\zeta^{-m})'_u = 0, \quad g\zeta = A - Bf\zeta^{1-m}. \tag{2.7.4.6}$$

Решение системы, состоящей из первых двух уравнений в (2.7.4.6) при $m \neq 0, 1$, определятся формулами

$$b(x) = \frac{k}{A}, \quad \vartheta(x,t) = kt + \int \left(\frac{k}{A}\frac{Bx + C_1}{a(x)}\right)^{1/m} dx + C_2, \tag{2.7.4.7}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а C_1, C_2, k — произвольные постоянные. Решения двух других уравнений (2.7.4.6) можно записать в виде

$$g = Af^{-1/m} - B, \quad \zeta = f^{1/m}, \tag{2.7.4.8}$$

где $f = f(u)$ — произвольная функция. Положив $A = k$ в (2.7.4.7) и (2.7.4.8), имеем уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x^m]_x + \frac{k}{f^{1/m}(u)} - B,$$

которое допускает точное решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int f^{1/m}(u)\,du = kt + \int \left(\frac{Bx + C_1}{a(x)}\right)^{1/m} dx + C_2.$$

Решение 2. Уравнение (2.7.4.3) удовлетворяется, если положить

$$\Phi_1 = -A\Phi_2, \quad \Phi_3 = -\Phi_4; \quad \Psi_2 = A\Psi_1, \quad \Psi_3 = \Psi_4, \tag{2.7.4.9}$$

где A — произвольная постоянная. Подставив (2.7.4.4) в (2.7.4.9), имеем

$$\vartheta_t = A(a\vartheta_x^m)_x, \quad a\vartheta_x^{1+m} = -b; \quad f\zeta^{1-m} = A, \quad (f\zeta^{-m})'_u = g\zeta. \tag{2.7.4.10}$$

Решение системы, состоящей из первых двух уравнений в (2.7.4.10) ищем в виде $\vartheta = kt + r(x)$. В результате получим

$$b(x) = -a(x)\Big(\frac{kx + C_1}{Aa(x)}\Big)^{\frac{m+1}{m}}, \quad \vartheta(x,t) = kt + \int \Big(\frac{kx + C_1}{Aa(x)}\Big)^{\frac{1}{m}} dx + C_2, \quad (2.7.4.11)$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а C_1, C_2, k — произвольные постоянные. Решения последних двух уравнений (2.7.4.10) записываются так:

$$g = \frac{1}{1-m}\Big(\frac{f}{A}\Big)^{\frac{1+m}{1-m}} f'_u, \quad \zeta = \Big(\frac{f}{A}\Big)^{\frac{1}{m-1}} \quad (m \neq 1). \qquad (2.7.4.12)$$

Положив $C_1 = 0$, $A = k = 1$, $m \neq 1$ в (2.7.4.11) и (2.7.4.12), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x^m]_x + \frac{1}{m-1}\Big(\frac{x^{m+1}}{a(x)}\Big)^{\frac{1}{m}} f^{\frac{1+m}{1-m}}(u) f'_u(u),$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int f^{\frac{1}{m-1}}(u)\,du = t + \int \Big(\frac{x}{a(x)}\Big)^{\frac{1}{m}} dx + C_2.$$

Решение 3. Уравнению (2.7.4.3) можно удовлетворить, если положить

$$\Phi_3 = -\Phi_1, \quad \Phi_2 = -\Phi_4; \quad \Psi_3 = \Psi_1, \quad \Psi_2 = \Psi_4. \qquad (2.7.4.13)$$

Подставив (2.7.4.4) в (2.7.4.13), получим

$$a\vartheta_x^{1+m} = \vartheta_t, \quad (a\vartheta_x^m)_x = -b; \quad (f\zeta^{-m})'_u = 1, \quad g\zeta = f\zeta^{1-m}. \qquad (2.7.4.14)$$

Решение системы, состоящей из первых двух уравнений в (2.7.4.14) при $m \neq -1$, определяется формулами

$$b(x) = -\frac{\lambda^m}{m+1}[a(x)]^{-\frac{m}{m+1}} a'_x(x),$$
$$\vartheta(x,t) = \lambda^{m+1}t + \lambda\int [a(x)]^{-\frac{1}{m+1}} dx + C_1,$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а C_1 и λ — произвольные постоянные. Решения двух других уравнения (2.7.4.14) можно записать в виде

$$g = u, \quad \zeta = (f/u)^{1/m},$$

где $f = f(u)$ — произвольная функция. В итоге получим УрЧП:

$$u_t = [a(x)f(u)u_x^m]_x - k[a(x)]^{-\frac{m}{m+1}} a'_x(x)u,$$

которое имеет точное решение

$$\int \Big[\frac{f(u)}{u}\Big]^{\frac{1}{m}} du = \lambda^{m+1}t + \lambda\int [a(x)]^{-\frac{1}{m+1}} dx + C_1, \quad \lambda = [k(m+1)]^{\frac{1}{m}}.$$

Решение 4. Уравнению (2.7.4.3) можно удовлетворить, используя соотношения

$$\Phi_1 + k\Phi_3 + \Phi_4 = 0, \quad \Phi_2 = 0; \quad \Psi_3 = k\Psi_1, \quad \Psi_4 = \Psi_1, \tag{2.7.4.15}$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (2.7.4.4) в (2.7.4.15), имеем

$$-\vartheta_t + ka\vartheta_x^{1+m} + b = 0, \quad (a\vartheta_x^m)_x = 0; \quad (f\zeta^{-m})'_u = k, \quad g\zeta = 1. \tag{2.7.4.16}$$

Интегрируя первые два уравнения (2.7.4.16), находим функции

$$b(x) = C_1 - kC_2^{m+1}[a(x)]^{-1/m}, \quad \vartheta(x,t) = C_1 t + C_2 \int [a(x)]^{-1/m} dx + C_3, \tag{2.7.4.17}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Решения последних двух уравнений (2.7.4.16) определяются формулами

$$g(u) = k^{1/m}\left[\frac{u}{f(u)}\right]^{1/m}, \quad \zeta(u) = k^{-1/m}\left[\frac{f(u)}{u}\right]^{1/m}. \tag{2.7.4.18}$$

Положив $k = 1$, $C_1 = \beta$, $C_2^{m+1} = \gamma$ в (2.7.4.17) и (2.7.4.18), приходим к уравнению

$$u_t = [a(x)f(u)u_x^m]_x + \bigl(\beta - \gamma[a(x)]^{-1/m}\bigr)\left[\frac{u}{f(u)}\right]^{1/m},$$

которое допускает точное решение

$$\int \left[\frac{f(u)}{u}\right]^{\frac{1}{m}} du = \beta t + \gamma^{\frac{1}{m+1}} \int [a(x)]^{-\frac{1}{m}} dx + C_3.$$

Решение 5. Уравнению (2.7.4.3) можно удовлетворить, если положить

$$\Phi_1 = -\Phi_4, \quad \Phi_2 = -k\Phi_3; \quad \Psi_1 = \Psi_4, \quad k\Psi_2 = \Psi_3. \tag{2.7.4.19}$$

В этом случае с учетом (2.7.4.4) получим уравнения

$$\vartheta_t = b, \quad (a\vartheta_x^m)_x = -ka\vartheta_x^{1+m}; \quad g\zeta = 1, \quad (f\zeta^{-m})'_u = kf\zeta^{1-m}. \tag{2.7.4.20}$$

Из первых двух уравнений имеем

$$b(x) = \beta = \text{const}, \quad \vartheta(x,t) = \beta t + \frac{m}{k}\ln\biggl(\frac{k}{m}\int [a(x)]^{-1/m}\, dx + C_1\biggr) + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из двух последних уравнений в (2.7.4.20) находим

$$g(u) = f^{-1/m}\biggl(\frac{k}{m}\int f^{1/m} du + C_3\biggr), \quad \zeta(u) = f^{1/m}\biggl(\frac{k}{m}\int f^{1/m} du + C_3\biggr)^{-1},$$

где $f = f(u)$. Полагая далее $k = m$ и $C_3 = \gamma$, получим уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x^m]_x + \beta[f(u)]^{-1/m}\biggl(\int [f(u)]^{1/m} du + \gamma\biggr), \tag{2.7.4.21}$$

которое имеет точное решение

$$\int [f(u)]^{1/m} du + \gamma = A_2 e^{\beta t}\biggl(\int [a(x)]^{-1/m}\, dx + A_1\biggr), \tag{2.7.4.22}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

При записи решения в виде (2.7.4.22) использовано соотношение

$$\int \zeta(u)\, du = \frac{m}{k} \ln\Bigl(\frac{k}{m} \int f^{1/m} du + C_3\Bigr) + \text{const}.$$

Отметим, что диффузионный член $[a(x)f(u)u_x^m]_x$ уравнения (2.7.4.21) обращается в нуль на решении (2.7.4.22).

Решение 6. Уравнению (2.7.4.3) можно удовлетворить, положив Φ_1, Φ_2, Φ_3 пропорциональными Φ_4:

$$\Phi_1 = k_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = k_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = k_3\Phi_4; \quad \Psi_4 = -k_1\Psi_1 - k_2\Psi_2 - k_3\Psi_3. \tag{2.7.4.23}$$

Подставив выражения (2.7.4.4) в (2.7.4.23), получим

$$\begin{aligned} &\vartheta_t = -k_1 b, \quad (a\vartheta_x^m)_x = k_2 b, \quad a\vartheta_x^{1+m} = k_3 b;\\ &g\zeta = -k_1 - k_2 f\zeta^{1-m} - k_3 (f\zeta^{-m})'_u. \end{aligned} \tag{2.7.4.24}$$

Рассмотрим два случая.

1°. Простейшее решение первых четырех уравнений (2.7.4.24) имеет вид

$$a(x) = b(x) = 1, \quad \theta(x,t) = -k_1 t + \lambda x + C_1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = \lambda^{1+m}.$$

Оно приводит к решению исходного реакционно-диффузионного уравнения (2.7.4.1) в виде бегущей волны (это решение здесь не обсуждается).

2°. Первые четыре уравнения (2.7.4.24) также допускают другое решение

$$\begin{aligned} &a(x) = x^{m+1}, \quad b(x) = 1,\\ &\vartheta(x,t) = -k_1 t + \lambda \ln x + C_1, \quad k_2 = \lambda^m, \quad k_3 = \lambda^{1+m}. \end{aligned} \tag{2.7.4.25}$$

Полагая $k = k_1$ и $\lambda = 1$ в (2.7.4.25) и используя последнее уравнение в (2.7.4.24), приходим к уравнению реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [x^{m+1} f(u) u_x^m]_x + g(u), \tag{2.7.4.26}$$

где

$$g(u) = -\frac{1}{h(u)}\bigl\{k + f(u)\zeta^{1-m}(u) + [f(u)\zeta^{-m}(u)]'_u\bigr\} \tag{2.7.4.27}$$

а $f = f(u)$ и $\zeta = \zeta(u)$ — произвольные функции, которое допускает точное инвариантное решение

$$\int \zeta(u)\, du = -kt + \ln x + C_1. \tag{2.7.4.28}$$

Замечание 2.74. *Инвариантное решение (2.7.4.28) уравнения (2.7.4.26) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = -kt + \ln x$ (в этом случае соотношение (2.7.4.27) не используется). Функция $U(z)$ описывается ОДУ:*

$$[f(U)(U'_z)^m]'_z + f(U)(U'_z)^m + kU'_z + g(U) = 0.$$

Поиск точных решений с помощью эквивалентных уравнений. Некоторые другие точные решения уравнения (2.7.4.1) можно получить, если вместо (2.7.4.3)—(2.7.4.4) использовать эквивалентные дифференциальные уравнения, которые сводятся к (2.7.4.3)—(2.7.4.4) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (2.7.1.2).

Решение 7. Вернемся к классу реакционно-диффузионных уравнений (2.7.4.1). Сделав замену (2.7.1.2), вместо (2.7.4.2) рассмотрим более сложное уравнение

$$-e^{\lambda\vartheta}e^{-\lambda Z}\vartheta_t + (a\vartheta_x^m)_x f\zeta^{1-m} + a\vartheta_x^{1+m}(f\zeta^{-m})'_u + bg\zeta = 0, \tag{2.7.4.29}$$

где $Z = \int \zeta\, du$, а λ — произвольная постоянная. Уравнения (2.7.4.2) и (2.7.4.29) эквивалентны, поскольку $\vartheta = Z$ в силу преобразования (2.7.1.2).

Уравнение (2.7.4.29) можно представить в билинейной форме (2.7.4.3), где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t, \quad \Phi_2 = (a\vartheta_x^m)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^{1+m}, \qquad \Phi_4 = b;\\ &\Psi_1 = e^{-\lambda Z}, \qquad \Psi_2 = f\zeta^{1-m}, \quad \Psi_3 = (f\zeta^{-m})'_u, \quad \Psi_4 = g\zeta. \end{aligned} \tag{2.7.4.30}$$

Как и ранее, уравнению (2.7.4.3) можно удовлетворить, используя соотношения (2.7.4.5). Подставив выражения (2.7.4.30) в (2.7.4.5), получим

$$e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t = Ab, \quad (a\vartheta_x^m)_x = Bb; \quad (f\zeta^{-m})'_u = 0, \quad g\zeta = Ae^{-\lambda Z} - Bf\zeta^{1-m}. \tag{2.7.4.31}$$

Эти уравнения совпадают с (2.7.4.6) при $\lambda = 0$. Система (2.7.4.31) имеет решение

$$\begin{aligned} &b(x) = \frac{C_1}{A}\exp[\lambda r(x)], \quad \vartheta(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1\lambda t + C_2) + r(x),\\ &g = Af^{-1/m}\exp\Bigl(-\lambda\int f^{1/m}du\Bigr) - B, \quad \zeta = f^{1/m}, \end{aligned} \tag{2.7.4.32}$$

где $f = f(u)$ — произвольная функция, а функция $r = r(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[a(r'_x)^m]'_x = \frac{BC_1}{A}e^{\lambda r}. \tag{2.7.4.33}$$

Формулы (2.7.4.32) и уравнение (2.7.4.33) определяют функциональные коэффициенты уравнения (2.7.4.1) и его решение вида (2.7.1.2). Следует отметить, что при $a(x) = a_0x^k$ уравнение (2.7.4.33) допускает точное решение

$$r(x) = \sigma\ln x + \mu, \quad \sigma = \frac{k-m-1}{\lambda}, \quad \mu = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{Aa_0\sigma^m(k-m)}{BC_1}.$$

Решение 8. Подставив (2.7.4.30) в (2.7.4.23), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t=-k_1b,\quad (a\vartheta_x^m)_x=k_2b,\quad a\vartheta_x^{1+m}=k_3b;\\&g\zeta=-k_1e^{-\lambda Z}-k_2f\zeta^{1-m}-k_3(f\zeta^{-m})'_u.\end{aligned}\tag{2.7.4.34}$$

Первые три уравнения допускают точное решение при функциональных коэффициентах экспоненциального вида

$$\begin{aligned}&a(x)=b(x)=e^{\lambda x},\quad \vartheta(x,t)=\frac{1}{\lambda}\ln t+x,\\&k_1=-\frac{1}{\lambda},\quad k_2=\lambda,\quad k_3=1.\end{aligned}\tag{2.7.4.35}$$

Используя последнее уравнение (2.7.4.34), получим нелинейное УрЧП:

$$u_t=[e^{\lambda x}f(u)u_x^m]_x+e^{\lambda x}g(u),\tag{2.7.4.36}$$

где

$$g(u)=-\frac{1}{\zeta}\Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda Z}+k_2f\zeta^{1-m}-k_3(f\zeta^{-m})'_u\Big],\qquad Z=\int\zeta\,du,\tag{2.7.4.37}$$

а $f=f(u)$ и $\zeta=\zeta(u)$ — произвольные функции, которое допускает инвариантное решение в неявной форме

$$\int\zeta(u)\,du=\frac{1}{\lambda}\ln t+x.\tag{2.7.4.38}$$

Замечание 2.75. *Инвариантное решение (2.7.4.38) уравнения (2.7.4.36) можно искать в явном виде $u=U(z)$, где $z=\frac{1}{\lambda}\ln t+x$ (в этом случае соотношение (2.7.4.37)) не используется). Функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ:*

$$\frac{1}{\lambda}U'_z=[e^{\lambda z}f(U)(U'_z)^m]'_z+e^{\lambda z}g(U).$$

Решение 9. Первые три уравнения системы (2.7.4.34) также допускают решение при степенны́х функциональных коэффициентах

$$\begin{aligned}&a(x)=x^{m+n-1},\quad b(x)=x^{n-2},\quad \vartheta(x,t)=\frac{1}{n-2}\ln t+\ln x,\\&\lambda=n-2,\quad k_1=-\frac{1}{n-2},\quad k_2=n-1,\quad k_3=1.\end{aligned}\tag{2.7.4.39}$$

Используя последнее уравнение (2.7.4.34) приходим к нелинейному УрЧП:

$$u_t=[x^{m+n-1}f(u)u_x^m]_x+x^{n-2}g(u),\tag{2.7.4.40}$$

где

$$g(u)=-\frac{1}{\zeta}\Big[-\frac{1}{n-2}e^{-(n-2)Z}+(n-1)f\zeta^{1-m}+(f\zeta^{-m})'_u\Big],\qquad Z=\int\zeta\,du,\tag{2.7.4.41}$$

а $f=f(u)$ и $\zeta=\zeta(u)$ — произвольные функции, которое допускает инвариантное решение

$$\int\zeta(u)\,du=\frac{1}{n-2}\ln t+\ln x.\tag{2.7.4.42}$$

Замечание 2.76. *Инвариантное решение (2.7.4.42) уравнения (2.7.4.40) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = xt^{\frac{1}{n-2}}$ (в этом случае соотношение (2.7.4.41)) не используется). Функция $U(z)$ описывается ОДУ:*

$$\frac{1}{n-2} zU'_z = [z^{m+n-1} f(U)(U'_z)^m]'_z + z^{n-2} g(U).$$

Решение 10. Рассмотрим теперь уравнение

$$-(Z/\vartheta)\vartheta_t + (Z/\vartheta)^m (a\vartheta_x^m)_x f\zeta^{1-m} + a\vartheta_x^{1+m} (f\zeta^{-m})'_u + bg\zeta = 0, \qquad (2.7.4.43)$$

где $Z = \int \zeta(u)\,du$, которое эквивалентно уравнению (2.7.4.2) в силу преобразования (2.7.1.2). Уравнение (2.7.4.43) можно представить в билинейной форме (2.7.4.3), где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\vartheta_t/\vartheta, \quad \Phi_2 = \vartheta^{-m}(a\vartheta_x^m)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^{1+m}, \quad \Phi_4 = b;\\ &\Psi_1 = Z, \qquad \Psi_2 = f\zeta^{1-m} Z^m, \qquad \Psi_3 = (f\zeta^{-m})'_u, \quad \Psi_4 = g\zeta. \end{aligned} \qquad (2.7.4.44)$$

Учтем, что уравнению (2.7.4.3) можно удовлетворить с помощью соотношений (2.7.4.5). Подставив выражения (2.7.4.44) в (2.7.4.5), приходим к системе уравнений

$$\vartheta_t/\vartheta = Ab, \quad \vartheta^{-m}(a\vartheta_x^m)_x = Bb; \quad (f\zeta^{-m})'_u = 0, \quad g\zeta = AZ - Bf\zeta^{1-m} Z^m,$$

которая допускает решение

$$b(x) = \lambda, \quad \vartheta(x,t) = Ce^{A\lambda t} r(x); \quad g = Af^{-1/m} Z - BZ^m, \quad \zeta = f^{1/m}, \qquad (2.7.4.45)$$

где $f = f(u)$ — произвольная функция, C и λ — произвольные постоянные, $Z = \int \zeta\,du$, а функция $r = r(x)$ описывается ОДУ:

$$[a(r'_x)^m]'_x = B\lambda r^m. \qquad (2.7.4.46)$$

Используя (2.7.4.45) получим нелинейное уравнение

$$u_t = [a(x) f(u) u_x^m]_x + A\lambda f^{-1/m}(u) \int f^{1/m}(u)\,du - B\lambda \biggl(\int f^{1/m}(u)\,du\biggr)^m,$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int f^{1/m}(u)\,du = Ce^{A\lambda t} r(x),$$

где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, а функция $r(x)$ удовлетворяет ОДУ (2.7.4.46).

3. Прямой метод построения редукций. Слабые симметрии

3.1. Прямой метод построения редукций

3.1.1. Упрощенная схема. Обобщенное уравнение Бюргерса — Кортевега — де Фриза

Прежде чем перейти к описанию *прямого метода построения редукций*[*] (называемого также *прямым методом Кларксона — Крускала*) в общем случае, рассмотрим сначала упрощенную схему.

Основная идея упрощенной схемы заключается в следующем: точные решения уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t ищутся в виде

$$u = f(t)w(z) + g(x,t), \qquad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{3.1.1.1}$$

Функции $f(t)$, $g(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются в процессе решения; они выбираются таким образом, чтобы в итоге искомая функция $w(z)$ удовлетворяла *одному обыкновенному дифференциальному уравнению* [128, 287].

Ниже рассматриваются конкретные примеры построения точных решений вида (3.1.1.1) нелинейных уравнений математической физики.

► Пример 3.1. Рассмотрим обобщенное уравнение Бюргерса—Кортевега—де Фриза n-го порядка [287]:

$$u_t = au_x^{(n)} + buu_x. \tag{3.1.1.2}$$

Будем искать его точное решение в виде (3.1.1.1). Подстановка (3.1.1.1) в уравнение (3.1.1.2) дает

$$\begin{aligned} af\varphi^n w_z^{(n)} + bf^2\varphi ww'_z + f(bg\varphi - \varphi'_t x - \psi'_t)w'_z +{}& \\ + (bfg_x - f'_t)w + ag_x^{(n)} + bgg_x - g_t = 0.& \end{aligned} \tag{3.1.1.3}$$

Приравнивая функциональные коэффициенты при $w_z^{(n)}$ и ww'_z в (3.1.1.3), получим

$$f = \varphi^{n-1}. \tag{3.1.1.4}$$

Далее, приравнивая нулю коэффициент при w'_z, имеем

$$g = \frac{1}{b\varphi}(\varphi'_t x + \psi'_t). \tag{3.1.1.5}$$

[*] В книге иногда будет использоваться также краткое название — *прямой метод редукций*.

Подставив выражения (3.1.1.4) и (3.1.1.5) в (3.1.1.3), приходим к соотношению

$$\varphi^{2n-1}(aw_z^{(n)}+bww_z')+(2-n)\varphi^{n-2}\varphi_t'w+\frac{1}{b\varphi^2}\big[(2\varphi_t^2-\varphi\varphi_{tt})x+2\varphi_t\psi_t-\varphi\psi_{tt}\big]=0.$$

Разделив на φ^{2n-1} и исключив x с помощью формулы $x=(z-\psi)/\varphi$, которая следует из второго соотношения (3.1.1.1), получим

$$\begin{aligned}aw_z^{(n)}+bww_z'+(2-n)\varphi^{-n-1}\varphi_t'w+\frac{1}{b}\varphi^{-2n-2}[2(\varphi_t')^2-\varphi\varphi_{tt}'']z+{}\\+\frac{1}{b}\varphi^{-2n-2}[\varphi\psi\varphi_{tt}''-\varphi^2\psi_{tt}''+2\varphi\varphi_t'\psi_t'-2\psi(\varphi_t')^2]=0.\end{aligned}\qquad(3.1.1.6)$$

Потребуем, чтобы функциональный коэффициент при w и последнее слагаемое были константами:

$$\varphi^{-n-1}\varphi_t'=-A,\qquad \varphi^{-2n-2}[\varphi\psi\varphi_{tt}''-\varphi^2\psi_{tt}''+2\varphi\varphi_t'\psi_t'-2\psi(\varphi_t')^2]=B,$$

где A и B — произвольные постоянные. В результате приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для φ и ψ:

$$\begin{aligned}\varphi_t'&=-A\varphi^{n+1},\\ \psi_{tt}''+2A\varphi^n\psi_t'+A^2(1-n)\varphi^{2n}\psi&=-B\varphi^{2n}.\end{aligned}\qquad(3.1.1.7)$$

Используя (3.1.1.6) и (3.1.1.7), получим уравнение для функции $w(z)$:

$$aw_z^{(n)}+bww_z'+A(n-2)w+\frac{A^2}{b}(1-n)z+\frac{B}{b}=0.\qquad(3.1.1.8)$$

При $A\neq 0$ общее решение уравнений (3.1.1.7) имеет вид

$$\begin{aligned}&\varphi(t)=(Ant+C_1)^{-\frac{1}{n}},\\ &\psi(t)=C_2(Ant+C_1)^{\frac{n-1}{n}}+C_3(Ant+C_1)^{-\frac{1}{n}}+\frac{B}{A^2(n-1)},\end{aligned}\qquad(3.1.1.9)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Формулы (3.1.1.1), (3.1.1.4), (3.1.1.5), (3.1.1.9) вместе с уравнением (3.1.1.8) описывают точное решение обобщенного уравнения Бюргерса — Кортевега — де Фриза (3.1.1.2). ◀

▶ Пример 3.2. Следуя [128], рассмотрим уравнение Буссинеска

$$u_{tt}+(uu_x)_x+au_{xxxx}=0.\qquad(3.1.1.10)$$

Как и в примере 3.1, решение ищем в виде (3.1.1.1), где функции $f(t)$, $g(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ будут определяться в процессе решения. Подставив (3.1.1.1) в (3.1.1.10), имеем

$$\begin{aligned}af\varphi^4w_{zzzz}''''+f^2\varphi^2ww_{zz}''+f(z_t^2+g\varphi^2)w_{zz}''+{}\\+f^2\varphi^2(w_z')^2+(fz_{tt}+2fg_x\varphi+2f_tz_t)w_z'+{}\\+(fg_{xx}+f_{tt})w+g_{tt}+gg_{xx}+g_x^2+ag_{xxxx}=0.\end{aligned}\qquad(3.1.1.11)$$

Приравнивая функциональные множители при w_{zzzz}'''' и ww_{zz}'', получим

$$f=\varphi^2.\qquad(3.1.1.12)$$

Приравнивая функциональный множитель при w''_{zz} нулю, с учетом (3.1.1.12) имеем
$$g = -\frac{1}{\varphi^2}(\varphi'_t x + \psi'_t)^2. \tag{3.1.1.13}$$

Подставив выражения (3.1.1.12) и (3.1.1.13) в (3.1.1.11), приходим к равенству
$$\begin{aligned}\varphi^6[aw''''_{zzzz} + ww''_{zz} + (w'_z)^2] + \varphi^2(x\varphi''_{tt} + \psi''_{tt})w'_z + 2\varphi\varphi''_{tt}w -{}\\ - \left[\varphi^{-2}(\varphi'_t x + \psi'_t)^2\right]_{tt} + 6\varphi^{-4}\varphi_t^2(\varphi'_t x + \psi'_t)^2 = 0.\end{aligned}$$

Выполним двукратное дифференцирование выражения, стоящего в квадратных скобках второй строки, а затем поделим все члены на φ^6. Исключив x с помощью равенства $x = (z - \psi)/\varphi$, получим
$$aw''''_{zzzz} + ww''_{zz} + (w'_z)^2 + \varphi^{-5}(\varphi''_{tt}z + \varphi\psi''_{tt} - \psi\varphi''_{tt})w'_z + 2\varphi^{-5}\varphi''_{tt}w + \cdots = 0. \tag{3.1.1.14}$$
Потребуем, чтобы функциональный коэффициент при w'_z был функцией одной переменной z, т. е.
$$\varphi^{-5}(\varphi''_{tt}z + \varphi\psi''_{tt} - \psi\varphi''_{tt}) = \varphi^{-5}\varphi''_{tt}z + \varphi^{-5}(\varphi\psi''_{tt} - \psi\varphi''_{tt}) \equiv Az + B,$$
где A и B — произвольные постоянные. Приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций φ и ψ:
$$\begin{aligned}\varphi''_{tt} &= A\varphi^5,\\ \psi''_{tt} &= (A\psi + B)\varphi^4.\end{aligned} \tag{3.1.1.15}$$
Используя (3.1.1.15), исключим в (3.1.1.14) вторые и третьи производные функций φ и ψ. В итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(z)$:
$$aw''''_{zzzz} + ww''_{zz} + (w'_z)^2 + (Az + B)w'_z + 2Aw - 2(Az + B)^2 = 0. \tag{3.1.1.16}$$

Формулы (3.1.1.1), (3.1.1.12), (3.1.1.13) вместе с уравнениями (3.1.1.15) и (3.1.1.16) описывают точное решение уравнения Буссинеска (3.1.1.10). ◄

► Пример 3.3. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка со смешанной производной
$$u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2 = \nu u_{xxx} + q(t)u_x + p(t), \tag{3.1.1.17}$$
которое описывает широкий класс точных решений трехмерных уравнений Навье — Стокса [4], где ν — кинематическая вязкость жидкости. Функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$, которые входят в уравнение (3.1.1.17), можно выбрать произвольно. Вывод уравнения (3.1.1.17) приведен далее в разд. 4.4.3 (см. пример 4.27).

Ищем точные решения в виде [4, 5]:
$$u = f(t)w(z) + g(t)x + h(t), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t), \tag{3.1.1.18}$$
где функции $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Подставив (3.1.1.18) в (3.1.1.17), имеем
$$[a(t)w + b(t)z + c(t)]w''_{zz} - a(t)(w'_z)^2 = \nu w'''_{zzz} + \widetilde{q}(t)w'_z + \widetilde{p}(t), \tag{3.1.1.19}$$

где

$$\begin{aligned} &a = \frac{f}{\varphi}, \quad b = \frac{1}{\varphi^3}(g\varphi + \varphi_t'), \quad c = \frac{1}{\varphi^3}(h\varphi^2 - g\varphi\psi + \varphi\psi_t' - \psi\varphi_t'), \\ &\widetilde{q} = \frac{1}{f\varphi^3}[fq\varphi + 2fg\varphi - (f\varphi)_t'], \quad \widetilde{p} = \frac{1}{f\varphi^3}(p + gq + g^2 - g_t'). \end{aligned} \tag{3.1.1.20}$$

Полагая теперь

$$a = \nu C_1, \quad b = \nu C_2, \quad c = \nu C_3, \quad \widetilde{q} = \nu C_4, \quad \widetilde{p} = \nu C_5, \tag{3.1.1.21}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, получим из (3.1.1.19) обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(z)$:

$$(\widetilde{C}_1 w + C_2 z + C_3)w_{zz}'' - C_1(w_z')^2 = w_{zzz}''' + C_4 w_z' + C_5.$$

В этом случае соотношения (3.1.1.20) при условиях (3.1.1.21) образуют смешанную систему алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений для функциональных параметров решения (3.1.1.18) и функциональных коэффициентов $p = p(t)$ и $q = q(t)$ уравнения (3.1.1.17). Две функции $f = f(t)$ и $\psi = \psi(t)$, входящие в эту систему, можно считать произвольными, а другие величины $\varphi = \varphi(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$, $p = p(t)$, $q = q(t)$ выражаются через $f(t)$ и $\psi(t)$ без квадратур. ◄

Замечание 3.1. *В разд. 3.2.3 — 3.2.5 приведены примеры использования упрощенной схемы прямого метода построения редукций для поиска точных решений нелинейных УрЧП третьего порядка с тремя независимыми переменными, которые встречаются в гидродинамике.*

3.1.2. Специальный вид редукций. Уравнение Буссинеска

Процедура поиска точных решений нелинейных УрЧП прямым методом редукций специального вида состоит из нескольких последовательных этапов [128], которые описаны ниже.

1°. Точные решения уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t ищутся в виде [128]:

$$u(x,t) = f(x,t)w(z) + g(x,t), \qquad z = z(x,t). \tag{3.1.2.1}$$

Здесь функции $f(x,t)$, $g(x,t)$, $z(x,t)$ должны определяться в процессе решения таким образом, чтобы в итоге для функции $w(z)$ было получено *одно обыкновенное дифференциальное уравнение*.

Важно отметить, что связь между функциями u и w в формулах (3.1.1.1) и (3.1.2.1) линейна.

2°. Подставив выражение (3.1.2.1) в рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных с квадратичной или степенно́й нелинейностью, получим

$$\Phi_1(x,t)\Psi_1[w] + \Phi_2(x,t)\Psi_2[w] + \cdots + \Phi_m(x,t)\Psi_m[w] = 0. \tag{3.1.2.2}$$

Здесь $\Psi_k[w]$ — дифференциальные формы, представляющие собой произведения неотрицательных целых степеней функции w и ее производных w'_z, w''_{zz} и т. д., а $\Phi_k(x,t)$ зависят от функций $f(x,t)$, $g(x,t)$, $z(x,t)$ и их частных производных по x и t. Пусть дифференциальная форма $\Psi_1[w]$ содержит старшую производную по z. Тогда функция $\Phi_1(x,t)$ используется как нормирующий множитель. Это означает, что должны выполняться соотношения:

$$\Phi_k(x,t) = \Gamma_k(z)\,\Phi_1(x,t), \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{3.1.2.3}$$

где $\Gamma_k(z)$ — функции, подлежащие определению; $\Gamma_1(z) \equiv 1$.

3°. На практике для упрощения выкладок при определении функций f, g, z, u, Γ_k можно воспользоваться следующими свойствами [128]:

a) если $f = f(x,t)$ имеет вид $f = f_0(x,t)\Omega(z)$, то можно считать $\Omega \equiv 1$ [это соответствует замене $w(z) \Rightarrow w(z)/\Omega(z)$];

b) если $g = g(x,t)$ имеет вид $g = g_0(x,t) + f(x,t)\Omega(z)$, то можно положить $\Omega \equiv 0$ [это соответствует замене $w(z) \Rightarrow w(z) - \Omega(z)$];

c) если $z = z(x,t)$ задается неявно алгебраическим уравнением вида $\Omega(z) = h(x,y)$, где $\Omega(z)$ — любая обратимая функция, то можно взять $\Omega(z) = z$ [это соответствует замене $z \Rightarrow \Omega^{-1}(z)$].

4°. После определения функций $\Gamma_k(z)$, подставив выражения (3.1.2.3) в (3.1.2.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(z)$:

$$\Psi_1[w] + \Gamma_2(z)\Psi_2[w] + \cdots + \Gamma_m(z)\Psi_m[w] = 0. \tag{3.1.2.4}$$

Проиллюстрируем характерные особенности применения прямого метода редукций на конкретном примере.

► Пример 3.4. Будем искать решение уравнения Буссинеска (3.1.1.10) в виде (3.1.2.1). Имеем

$$afz_x^4 w''''_{zzzz} + a(6fz_x^2 z_{xx} + 4f_x z_x^3)w'''_{zzz} + f^2 z_x^2 w w''_{zz} + \cdots = 0. \tag{3.1.2.5}$$

Здесь выписаны только три первых члена и опущены аргументы у функций f и z. Функциональные коэффициенты при w''''_{zzzz} и ww''_{zz} должны удовлетворять условию [см. (3.1.2.3)]:

$$f^2 z_x^2 = afz_x^4\,\Gamma_3(z),$$

где $\Gamma_3(z)$ — функция, подлежащая определению. Тогда, воспользовавшись свойством *a*) из п. 3°, выбираем

$$f = z_x^2, \qquad \Gamma_3(z) = 1/a. \tag{3.1.2.6}$$

Аналогично функциональные коэффициенты при w''''_{zzzz} и w'''_{zz} должны удовлетворять условию

$$6fz_x^2 z_{xx} + 4f_x z_x^3 = fz_x^4\,\Gamma_2(z), \tag{3.1.2.7}$$

где $\Gamma_2(z)$ — новая функция, подлежащая определению. Тогда с учетом (3.1.2.6) имеем

$$14\,z_{xx}/z_x = \Gamma_2(z) z_x.$$

Интегрируя по x, получим

$$\ln z_x = I(z) + \ln \tilde{\varphi}(t), \qquad I(z) = \frac{1}{14} \int \Gamma_2(z)\, dz,$$

где $\widetilde{\varphi}(t)$ — произвольная функция. Повторное интегрирование приводит к выражению

$$\int e^{-I(z)}\, dz = \widetilde{\varphi}(t)x + \widetilde{\psi}(t),$$

где $\widetilde{\psi}(t)$ — произвольная функция. Слева стоит функция z, а следовательно, воспользовавшись свойством c) из п. 3°, имеем

$$z = x\varphi(t) + \psi(t), \tag{3.1.2.8}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ подлежат определению.

Из формул (3.1.2.6)—(3.1.2.8) следует, что

$$f = \varphi^2(t), \qquad \Gamma_2(z) = 0. \tag{3.1.2.9}$$

Подставив выражения (3.1.2.8) и (3.1.2.9) в (3.1.2.1), получим решение в виде (3.1.1.1), где функция f задается формулой (3.1.1.12). Отсюда следует, что использование общего подхода, основанного на представлении решения в виде (3.1.2.1), в конечном итоге приводит к точно такому же результату, что и использование более простой формулы (3.1.1.1). ◀

Замечание 3.2. *Аналогичным образом можно показать, что построение точного решения обобщенного уравнения Бюргерса — Кортевега — де Фриза n-го порядка (3.1.1.2) на основе формул (3.1.1.1) и (3.1.2.1) приводит к одинаковым результатам.*

► Пример 3.5. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение с двумя пространственными переменными, анизотропное по одному из направлений:

$$u_{tt} = au_{xx} + [(bu + c)u_y]_y. \tag{3.1.2.10}$$

Отметим, что в частном случае $a = 1$, $b < 0$, $c > 0$ уравнение (3.1.2.10) описывает пространственные околозвуковые течения идеального политропного газа [34].

Точное решение уравнения (3.1.2.10) ищем в виде

$$u = w(z) + f(x,t), \qquad z = y + g(x,t). \tag{3.1.2.11}$$

Подставив (3.1.2.11) в уравнение (3.1.2.10), имеем

$$[(bw + ag_x^2 - g_t^2 + bf + c)w_z']_z' + (ag_{xx} - g_{tt})w_z' + af_{xx} - f_{tt} = 0.$$

Пусть функции f и g удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$af_{xx} - f_{tt} = C_1, \tag{3.1.2.12}$$

$$ag_{xx} - g_{tt} = C_2, \tag{3.1.2.13}$$

$$ag_x^2 - g_t^2 + bf = C_3, \tag{3.1.2.14}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Тогда функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[(bw + c + C_3)w'_z]'_z + C_2 w'_z + C_1 = 0. \tag{3.1.2.15}$$

Общие решения УрЧП (3.1.2.12) и (3.1.2.13) имеют вид

$$f = \varphi_1(\xi) + \psi_1(\eta) - \tfrac{1}{2}C_1 t^2,$$
$$g = \varphi_2(\xi) + \psi_2(\eta) - \tfrac{1}{2}C_2 t^2,$$
$$\xi = x + t\sqrt{a}, \quad \eta = x - t\sqrt{a}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (3.1.2.14), а затем исключим t с помощью формулы $t = \dfrac{\xi - \eta}{2\sqrt{a}}$. После несложных преобразований получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами

$$\begin{aligned} &b\varphi_1(\xi) + C_2\xi\varphi'_2(\xi) - k\xi^2 - C_3 + b\psi_1(\eta) + C_2\eta\psi'_2(\eta) - k\eta^2 + \\ &\quad + \psi'_2(\eta)[4a\varphi'_2(\xi) - C_2\xi] + \eta[2k\xi - C_2\varphi'_2(\xi)] = 0, \end{aligned} \tag{3.1.2.16}$$

где

$$k = \frac{1}{8a}(bC_1 + 2C_2^2).$$

Уравнение (3.1.2.16) можно решить методом расщепления (см. разд. 1.5), положив

$$\begin{aligned} b\varphi_1(\xi) + C_2\xi\varphi'_2(\xi) - k\xi^2 - C_3 &= A_1, \\ 4a\varphi'_2(\xi) - C_2\xi &= A_2, \\ 2k\xi - C_2\varphi'_2(\xi) &= A_3, \end{aligned} \tag{3.1.2.17}$$

где A_1, A_2, A_3 — некоторые постоянные. Совместное решение переопределенной системы (3.1.2.17) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= -\frac{C_2^2}{8ab}\xi^2 - \frac{BC_2}{b}\xi + \frac{A_1 + C_3}{b}, \\ \varphi_2(\xi) &= \frac{C_2}{8a}\xi^2 + B\xi \end{aligned} \tag{3.1.2.18}$$

и соответствует следующим значениям постоянных:

$$\begin{aligned} &A_1 - \text{любая}, \quad A_2 = 4aB, \quad A_3 = -BC_2, \quad B - \text{любая}, \\ &C_1 = -\frac{C_2^2}{b}, \quad C_2, C_3 - \text{любые}, \quad k = \frac{C_2^2}{8a}. \end{aligned} \tag{3.1.2.19}$$

Из равенств (3.1.2.16) и (3.1.2.17) получим уравнение, связывающее две функции ψ_1 и ψ_2:

$$A_1 + b\psi_1(\eta) + C_2\eta\psi'_2(\eta) - k\eta^2 + A_2\psi'_2(\eta) + A_3\eta = 0.$$

Учитывая (3.1.2.19), отсюда имеем

$$\psi_1(\eta) = -\frac{1}{b}(C_2\eta + 4aB)\psi'_2(\eta) + \frac{1}{b}\Big(\frac{C_2^2}{8a}\eta^2 + BC_2\eta - A_1\Big),$$
$$\psi_2(\eta) - \text{произвольная функция.}$$

В итоге находим функции, определяющие решение (3.1.2.11):

$$f(x,t) = -\frac{C_2^2}{2\sqrt{a}\,b}xt + \frac{C_2^2}{2b}t^2 - \frac{2\sqrt{a}\,BC_2}{b}t + \frac{C_3}{b} - \frac{1}{b}(C_2\eta + 4aB)\psi'_2(\eta),$$
$$g(x,t) = \frac{C_2}{8a}\big(x^2 + 2\sqrt{a}\,xt - 3at^2\big) + B(x + \sqrt{a}\,t) + \psi_2(\eta),$$

где $\eta = x - t\sqrt{a}$. ◄

Замечание 3.3. *Полагая $f(x,t) = 1$ и $g(x,t) = 0$ в (3.1.2.1), приходим к представлению решения в виде (2.6.1.1), где функция w переобозначена на U. Поэтому описанные в разд. 2.6.2—2.6.4 точные решения с функциональным разделением переменных нелинейных УрЧП диффузионного и волнового типов, которые сводятся к одиночным ОДУ для функции U, могут быть получены прямым методом редукций.*

3.1.3. Общий вид редукций. Уравнение Гарри Дима

Основная идея общей схемы использования прямого метода редукций, заключается в следующем: точные решения уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t ищутся в виде [128]:

$$u(x,t) = F\big(x,t,w(z)\big), \qquad z = z(x,t). \tag{3.1.3.1}$$

Функции $F(x,t,w)$ и $z(x,t)$ должны выбираться так, чтобы для функции $w(z)$ в конечном итоге получить *одно обыкновенное дифференциальное уравнение*. В отличие от представления решений в виде (3.1.1.1) или (3.1.2.1), связь между функциями w и u в (3.1.3.1) может быть нелинейной.

Проиллюстрируем характерные особенности применения прямого метода редукций для поиска точных решений в виде (3.1.3.1).

► Пример 3.6. Рассмотрим опять уравнение Буссинеска (3.1.1.10). Подставив (3.1.3.1) в (3.1.1.10), имеем

$$aF_w z_x^4 w''''_{zzzz} + 4aF_{ww} z_x^4 w'_z w'''_{zzz} + a(4F_{xw} z_x^3 + 6F_w z_x^2 z_{xx}) w'''_{zzz} + \dots = 0. \tag{3.1.3.2}$$

Здесь выписаны только три главных члена и опущены аргументы у функций F и z. Для того чтобы (3.1.3.2) приводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению для $w = w(z)$, отношения функциональных коэффициентов при $w'_z w'''_{zzz}$, w'''_{zzz}, … к функциональному коэффициенту при старшей производной w''''_{zzzz} должны быть функциями z и w, т. е.

$$\frac{4aF_{ww} z_x^4}{aF_w z_x^4} = \Gamma_2(z,w), \qquad \frac{a(4F_{xw} z_x^3 + 6F_w z_x^2 z_{xx})}{aF_w z_x^4} = \Gamma_3(z,w), \qquad \dots$$

Из первого равенства имеем

$$4F_{ww}/F_w = \Gamma_2(z,w).$$

Интегрируя дважды по w, получим

$$F(x,t,w) = f(x,t)\Theta(z,w) + g(x,t), \tag{3.1.3.3}$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ — произвольные функции двух аргументов, а

$$\Theta = \int \exp\Big(\frac{1}{4}\int \Gamma_2\,dw\Big)dw.$$

Полагая в (3.1.3.3) $\Theta(z,w(z)) = U(z)$ и используя представление (3.1.3.1), приходим к решению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (3.1.2.1). Поэтому поиск точных решений уравнения Буссинеска (3.1.1.10) с помощью общего представления (3.1.3.1) приводит к более простому специальному виду решения (3.1.2.1). ◄

► Пример 3.7. Рассмотрим уравнение Гарри Дима
$$u_t + 2(u^{-1/2})_{xxx} = 0. \tag{3.1.3.4}$$

Ищем точные решения в виде (3.1.3.1). Подставив это выражение в уравнение (3.1.3.4), получим
$$-F^{-3/2}F_w z_x^3 w'''_{zzz} + \left(-3F^{-3/2}F_{ww} + \tfrac{9}{2}F^{-5/2}F_w^2\right)z_x^3 w'_z w''_{zz} + \cdots = 0.$$
Отношение функциональных коэффициентов при $w'_z w''_{zz}$ и w'''_{zzz} должно быть функцией z и w, т. е.
$$3\frac{F_{ww}}{F_w} - \frac{9}{2}\frac{F_w}{F} = \Gamma(z, w).$$
Двукратное интегрирование дает
$$F^{-1/2}(x, t, w) = f(x, t)\Theta(z, w) + g(x, t), \tag{3.1.3.5}$$
где $f(x, t)$ и $g(x, t)$ — произвольные функции двух аргументов, а
$$\Theta = -\int \exp\left(\frac{1}{3}\int \Gamma\, dw\right) dw.$$
Из формул (3.1.3.1), (3.1.3.5) следует, что можно искать точные решения уравнения Гарри Дима (3.1.3.4) в виде
$$u^{-1/2}(x, t) = f(x, t)U(z) + g(x, t), \qquad z = z(x, t). \qquad ◄$$

Замечание 3.4. *В работах [80, 129, 187, 188, 257, 257, 287] можно найти результаты применения прямого метода редукций для построения точных решений различных нелинейных уравнений с частными производными.*

3.2. Прямой метод поиска слабых симметрий

3.2.1. Общее описание метода. Уравнение стационарного пограничного слоя

Предварительные замечания. При использовании различных модификаций прямого метода редукций, основанных на формулах (3.1.1.1), (3.1.2.1), (3.1.3.1), функция $w = w(z)$ находится в привилегированном положении, поскольку остальные функции надо выбирать так, чтобы для $w(z)$ было получено *одно обыкновенное дифференциальное уравнение*. Требование того, чтобы функция w удовлетворяла одному ОДУ, накладывает серьезные ограничения на возможности метода и не позволяет эффективно его использовать для поиска многих точных решений, которые можно найти другими методами (в частности, нельзя получить подавляющее большинство решений с обобщенным и функциональным разделением переменных, рассмотренных ранее в главе 2). Эффективность прямого метода построения редукций существенно увеличится, если его использовать в сочетании с идеями методов обобщенного и функционального разделения переменных, когда все определяющие функции считаются равноправными, а функция $w(z)$ может описываться *переопределенной системой нескольких ОДУ*.

Прямой метод поиска слабых симметрий. Для построения точных решений нелинейных УрЧП используем выражение (3.1.2.1). Подставив его в рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных, приходим к соотношению (3.1.2.2). Помимо рассмотренного в разд. 3.2.1 алгоритма построения точных решений, будем также допускать, что функция $w(z)$ может удовлетворять переопределенной системе нескольких ОДУ (а функции $f = f(x,t)$ и $g = g(x,t)$ могут описываться переопределенными системами УрЧП). Учитывая, что уравнение (3.1.2.2) с точностью до очевидных переобозначений совпадает с (2.7.1.4)), для построения точных решений полученного уравнения билинейного вида (3.1.2.2) будем использовать обобщенный принцип расщепления, который сформулирован в разд. 2.7.1 и 2.7.2. Указанную комбинацию прямого метода редукций и метода функционального разделения переменных будем называть *прямым методом поиска слабых симметрий*.

Важно отметить существенное качественное различие в итоговом представлении результатов применения прямого метода редукций и прямого метода поиска слабых симметрий. Решения, полученные с использованием прямого метода редукций, обычно выражаются в терминах решений нелинейных ОДУ, в то время как решения, построенные с помощью прямого метода поиска слабых симметрий, часто допускают представление в замкнутой форме (выражаются в квадратурах).

▶ Пример 3.8. Рассмотрим уравнение протяженного осесимметричного стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a(y u_{yy})_y + \mathcal{F}(x), \tag{3.2.1.1}$$

где u — функция тока, x — координата, отсчитываемая вдоль оси симметрии; $y = \frac{1}{4}r^2$, r — радиальная координата; $\mathcal{F}(x)$ — функция давления. Продольная и поперечная компоненты скорости жидкости v_1 и v_2 выражаются через функцию тока по формулам $v_1 = 2r^{-1}u_r$ и $v_2 = -2r^{-1}u_x$.

Решение уравнения (3.2.1.1) ищем в виде (множитель a берется для удобства)

$$u(x,y) = af(x)w(z) + ag(x), \qquad z = \varphi(x)y + \psi(x). \tag{3.2.1.2}$$

Подставим это выражение в исходное уравнение (3.2.1.1) и исключим y с помощью равенства $\varphi(x)y = z - \psi(x)$. После деления на $a^2\varphi^2 f$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя аргументами вида (1.2.2.1)—(1.2.2.2) из разд. 1.2.2, где $k = 6$:

$$(zw''_{zz})'_z - \psi w'''_{zzz} + f'_x w w''_{zz} + g'_x w''_{zz} - \frac{(f\varphi)'_x}{\varphi}(w'_z)^2 + \frac{\mathcal{F}}{a^2 f\varphi^2} = 0. \tag{3.2.1.3}$$

Следуя [104], используем упрощенную схему построения точных решений. Будем считать, что функциональные коэффициенты при ww''_{zz}, w''_{zz}, $(w'_z)^2$, 1 являются линейными комбинациями коэффициентов 1 и ψ, стоящих соответственно при старших членах $(zw''_{zz})'_z$ и w'''_{zzz}. Имеем

$$\begin{aligned} f'_x &= A_1 + B_1\psi, \\ g'_x &= A_2 + B_2\psi, \\ -(f\varphi)'_x/\varphi &= A_3 + B_3\psi, \\ \mathcal{F}/(a^2 f\varphi^2) &= A_4 + B_4\psi, \end{aligned} \tag{3.2.1.4}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные. Подставим выражения (3.2.1.4) в уравнение (3.2.1.3) и соберем члены, пропорциональные ψ (считаем, что $\psi \neq \mathrm{const}$). Приравнивая функциональный множитель при ψ нулю, для функции $w = w(z)$ получим переопределенную систему, состоящую из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(zw''_{zz})'_z + A_1 ww''_{zz} + A_2 w''_{zz} + A_3(w'_z)^2 + A_4 = 0, \tag{3.2.1.5}$$

$$-w'''_{zzz} + B_1 ww''_{zz} + B_2 w''_{zz} + B_3(w'_z)^2 + B_4 = 0. \tag{3.2.1.6}$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Положим

$$A_1 = A_3 = A_4 = 0, \quad A_2 = -n. \tag{3.2.1.7}$$

В этом случае решение уравнения (3.2.1.5) имеет вид

$$w(z) = \frac{C_1}{n(n+1)} z^{n+1} + C_2 z + C_3, \tag{3.2.1.8}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования. Решение (3.2.1.8) уравнения (3.2.1.5) является одновременно и решением уравнения (3.2.1.6) только при выполнении условий

$$n = -2, \quad B_1 = B_3, \quad C_1 = -\frac{4}{B_1}, \quad C_2^2 = -\frac{B_4}{B_1}, \quad C_3 = -\frac{B_2}{B_1}. \tag{3.2.1.9}$$

Подставим коэффициенты (3.2.1.7), (3.2.1.9) в систему (3.2.1.4). Интегрируя, получим

$$g(x) = 2x - C_3 f, \quad \varphi = \frac{C_4}{f^2}, \quad \psi = -\frac{C_1}{4} f'_x, \quad \mathcal{F} = -(aC_2C_4)^2 \frac{f'_x}{f^3}, \tag{3.2.1.10}$$

где $f = f(x)$ — произвольная функция.

Формулы (3.2.1.2), (3.2.1.8), (3.2.1.10) дают точное решение уравнения осесимметричного пограничного слоя (3.2.1.1).

Случай 2. При

$$A_2 = B_1 = B_3 = B_4 = 0, \quad B_2 = -\lambda, \quad A_3 = -A_1, \quad A_4 = \lambda^2/A_1 \tag{3.2.1.11}$$

совместное решение системы (3.2.1.5), (3.2.1.6) имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{A_1}(C_1 e^{-\lambda z} + \lambda z - 3). \tag{3.2.1.12}$$

Решение системы (3.2.1.4) с коэффициентами (3.2.1.11) описывается формулами

$$f = A_1 x + C_2, \quad \varphi = C_3, \quad \psi = -\frac{1}{\lambda} g'_x, \quad \mathcal{F} = \frac{(aC_3\lambda)^2}{A_1}(A_1 x + C_2), \tag{3.2.1.13}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $g=g(x)$ — произвольная функция.

Формулы (3.2.1.2), (3.2.1.12), (3.2.1.13) дают точное решение уравнения пограничного слоя (3.2.1.1).

Случай 3. Система (3.2.1.5) — (3.2.1.6) допускает также решения вида

$$w(z) = C_1 z^2 + C_2 z + C_3,$$

где константы C_1, C_2, C_3 связаны с A_n и B_n. Соответствующее решение легче получить непосредственно из исходного уравнения (3.2.1.1) подстановкой в него $u = \varphi_2(x)y^2 + \varphi_1(x)y + \varphi_0(x)$, что соответствует методу обобщенного разделения переменных. В результате приходим к решению [287]:

$$u(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) - \frac{1}{2C_1}\int \mathcal{F}(x)\,dx - x + C_3,$$

где $\mathcal{F}(x)$ и $\varphi(x)$ — произвольные функции, а C_1 и C_3 — произвольные постоянные. ◄

3.2.2. Уравнение Бюргерса — Хаксли (уравнение диффузионного типа с кубической нелинейностью)

Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью

$$u_t + \sigma u u_x = a u_{xx} + b_3 u^3 + b_2 u^2 + b_1 u + b_0. \tag{3.2.2.1}$$

При $\sigma = 1$ и $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ оно является уравнением Бюргерса, которое описывает распространение волн в нелинейных диссипативных системах [363]. При $\sigma = b_0 = 0$ оно совпадает с уравнением Хаксли, которое моделирует распространение бегущего импульса по нервному волокну [358]. При $b_0 = 0$, уравнение (3.2.2.1) является ненормированным уравнением Бюргерса — Хаксли, которое описывает пристенное движение жидкости в жидких кристаллах, а также динамику популяций с учетом размножения, смертности, питания и ее диффузионного перемещения [24].

Будем искать решение уравнения (3.2.2.1) в виде

$$u(x,t) = f(x,t)w(z) + \lambda, \quad z = z(x,t), \tag{3.2.2.2}$$

где функции $f = f(x,t)$, $z = z(x,t)$, $w = w(z)$, а также константа λ подлежат определению. Подставив (3.2.2.2) в (3.2.2.1), получим уравнение, которое удобно представить в билинейном виде

$$\sum_{n=1}^{7} \Phi_n[x,t]\Psi_n[z] = 0. \tag{3.2.2.3}$$

Здесь выражения $\Phi_n = \Phi_n[x,t]$ зависят от коэффициентов уравнения (3.2.2.1) и функций (и их производных), входящих в решение (3.2.2.2), и определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0,\\
&\Phi_2 = 3b_3\lambda^2 f + 2b_2\lambda f + b_1 f + af_{xx} - \sigma\lambda f_x - f_t,\\
&\Phi_3 = 3b_3\lambda f^2 + b_2 f^2 - \sigma f f_x, \quad \Phi_4 = b_3 f^3,\\
&\Phi_5 = afz_{xx} + 2af_x z_x - \sigma\lambda f z_x - fz_t, \quad \Phi_6 = -\sigma f^2 z_x, \quad \Phi_7 = afz_x^2,
\end{aligned} \tag{3.2.2.4}$$

а функции $\Psi_n = \Psi_n[z]$ записываются так:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = w, \quad \Psi_3 = w^2, \quad \Psi_4 = w^3,\\
&\Psi_5 = w'_z, \quad \Psi_6 = ww'_z, \quad \Psi_7 = w''_{zz}.
\end{aligned} \tag{3.2.2.5}$$

Далее используем прямой метод поиска слабых симметрий. Нетрудно убедиться, что при

$$w(z) = 1/z, \tag{3.2.2.6}$$

имеют место три линейных соотношения между функциями (3.2.2.5):

$$\Psi_7 = 2\Psi_4, \quad \Psi_6 = -\Psi_4, \quad \Psi_5 = -\Psi_3. \tag{3.2.2.7}$$

Подставив (3.2.2.7) в (3.2.2.3), получим

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + (\Phi_3 - \Phi_5)\Psi_3 + (\Phi_4 - \Phi_6 + 2\Phi_7)\Psi_4 = 0. \tag{3.2.2.8}$$

Приравнивая нулю функциональный коэффициент при Ψ_4 в (3.2.2.8), после сокращения на f приходим к уравнению $b_3 f^2 + \sigma f z_x + 2az_x^2 = 0$, решение которого имеет вид

$$f = \beta z_x, \tag{3.2.2.9}$$

где β — корень квадратного уравнения

$$b_3\beta^2 + \sigma\beta + 2a = 0. \tag{3.2.2.10}$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 в (3.2.2.8) и учитывая (3.2.2.4) и (3.2.2.9), после простых арифметических преобразований и перегруппировки слагаемых, получим

$$\begin{aligned}
z_t - (3a + \beta\sigma)z_{xx} + (\sigma\lambda + b_2\beta + 3b_3\beta\lambda)z_x &= 0 \quad (\text{коэффициент при } \Psi_3),\\
z_{xt} - az_{xxx} + \sigma\lambda z_{xx} - (b_1 + 2\lambda b_2 + 3b_3\lambda^2)z_x &= 0 \quad (\text{коэффициент при} \Psi_2),\\
b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 &= 0 \quad (\text{коэффициент при } \Psi_1).
\end{aligned} \tag{3.2.2.11}$$

Здесь первые два линейных уравнения в частных производных образуют переопределенную систему для функции $z = z(x,t)$, а последнее (кубическое) уравнение служит для определения константы λ.

С помощью (3.2.2.2), (3.2.2.6), (3.2.2.9) можно представить решение уравнения (3.2.2.1) в виде

$$u(x,t) = \frac{\beta}{z} z_x + \lambda. \tag{3.2.2.12}$$

Пусть β — корень квадратного уравнения (3.2.2.10), а λ — корень последнего (кубического) уравнения в (3.2.2.11). В зависимости от значения константы b_3, следует рассмотреть два случая.

1°. *Случай* $b_3 \neq 0$. Из первых двух уравнений в (3.2.2.11) имеем

$$\begin{aligned} z_t + p_1 z_{xx} + p_2 z_x &= 0, \\ z_{xxx} + q_1 z_{xx} + q_2 z_x &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.2.13}$$

где

$$\begin{aligned} &p_1 = -\beta\sigma - 3a, \quad p_2 = \lambda\sigma + \beta b_2 + 3\beta\lambda b_3, \\ &q_1 = -\frac{\beta b_2 + 3\beta\lambda b_3}{\beta\sigma + 2a}, \quad q_2 = -\frac{3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1}{\beta\sigma + 2a}. \end{aligned} \tag{3.2.2.14}$$

Ниже приводятся решения переопределенной системы линейных уравнений (3.2.2.13)—(3.2.2.14), которые вместе с формулой (3.2.2.12) и квадратным уравнением (3.2.2.10) позволяют находить точные решения исходного УрЧП (3.2.2.1).

Возможны четыре основные ситуации.

1.1. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 \neq 4q_2$ ($q_1^2 > 4q_2$) имеем

$$\begin{gathered} z(x,t) = C_1 \exp(k_1 x + s_1 t) + C_2 \exp(k_2 x + s_2 t) + C_3, \\ k_n = -\tfrac{1}{2} q_1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{q_1^2 - 4q_2}, \quad s_n = -k_n^2 p_1 - k_n p_2, \end{gathered}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $n = 1,\, 2$. При $q_1^2 < 4q_2$ в данном решении надо выделить действительную и мнимую части, что приводит к решению, зависящему от экспоненциальных и тригонометрических функций [24].

1.2. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 = 4q_2$:

$$\begin{gathered} z(x,t) = C_1 \exp(kx + s_1 t) + C_2(kx + s_2 t)\exp(kx + s_1 t) + C_3, \\ k = -\tfrac{1}{2} q_1, \quad s_1 = -\tfrac{1}{4} p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2} p_2 q_1, \quad s_2 = -\tfrac{1}{2} p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2} p_2 q_1. \end{gathered}$$

1.3. При $q_2 = 0$ и $q_1 \neq 0$:

$$z(x,t) = C_1(x - p_2 t) + C_2 \exp[-q_1 x + q_1(p_2 - p_1 q_1)t] + C_3.$$

1.4. При $q_2 = q_1 = 0$:

$$z(x,t) = C_1(x - p_2 t)^2 + C_2(x - p_2 t) - 2C_1 p_1 t + C_3.$$

2°. *Случай* $b_3 = 0$, $b_2 \neq 0$. Решения определяются формулами (3.2.2.12), где

$$\begin{gathered} z(x,t) = C_1 + C_2 \exp\Big[Ax + A\Big(\frac{b_1\sigma}{2b_2} + \frac{2ab_2}{\sigma}\Big)t\Big], \\ \beta = -\frac{2a}{\sigma}, \quad A = \frac{\sigma(b_1 + 2b_2\lambda)}{2ab_2}, \end{gathered}$$

а $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$.

Замечание 3.5. *Описанные выше решения уравнения (3.2.2.1) при $b_0 = 0$ были получены в [148, 149, 217] с помощью метода Вайса — Табора — Карневейля [364], основанного на усеченных разложениях Пенлеве (см. также [24, 121]).*

3.2.3. Уравнения нестационарного плоского и осесимметричного пограничного слоя

Уравнения плоского пограничного слоя. Уравнения гидродинамического пограничного слоя описывают течения вязких жидкостей в тонких слоях вблизи твердых, жидких и газообразных поверхностей различной формы при больших числах Рейнольдса [26, 27, 64, 279].

Система уравнений плоского нестационарного ламинарного пограничного слоя для ньютоновской несжимаемой жидкости (классическая модель жидкости) записывается в следующем виде [27, 64]:

$$U_t + UU_x + VU_y = \nu U_{yy} + F(t,x), \tag{3.2.3.1}$$
$$U_x + V_y = 0, \tag{3.2.3.2}$$

где t — время, x и y — продольная и поперечная координаты (значение $y = 0$ соответствуют поверхности тела), U и V — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, $F(t,x) = -p_x/\rho$ — заданная функция (пропорциональная продольному градиенту давления), p — давление, ρ — массовая плотность, ν — кинематическая вязкость жидкости.

С помощью функции тока W, определяемой формулами

$$U = W_y, \quad V = -W_x, \tag{3.2.3.3}$$

система (3.2.3.1) — (3.2.3.2) сводится к одному УрЧП третьего порядка [27, 64]:

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} = \nu W_{yyy} + F(t,x). \tag{3.2.3.4}$$

Точные решения и преобразования системы УрЧП (3.2.3.1) — (3.2.3.2) и уравнения (3.2.3.4), а также различные задачи пограничного слоя, рассматривались во многих работах (см., например, [1, 9, 10, 21, 26, 27, 32, 33, 35, 36, 46, 64, 104–106, 232, 233, 279, 287, 329, 367, 368]). Об инвариантных и неинвариантных точных решениях этих уравнений в стационарном случае (при $W_t = 0$) см. [1, 9, 21, 26, 27, 33, 35, 64, 104, 106, 279, 287, 329]. О некоторых точных решениях и преобразованиях уравнений нестационарного плоского пограничного слоя (3.2.3.4) см. [10, 32, 36, 46, 105, 232, 233, 287, 291, 292, 368].

Замечание 3.6. *В работах [104, 287, 329] приводятся некоторые точные решения уравнения осесимметричного пограничного слоя на поверхности протяженного тела вращения; в этих работах рассматривалось уравнение, которое можно формально получить из (3.2.3.4) заменой W_{yyy} на $(yW_{yy})_y$ (см. также разд. 3.2.4).*

Уравнения осесимметричного пограничного слоя. Система уравнений осесимметричного нестационарного ламинарного пограничного слоя имеет вид [26, 64]:

$$U_t + UU_x + VU_y = \nu U_{yy} + F(t,x), \tag{3.2.3.5}$$
$$(rU)_x + (rV)_y = 0, \quad r = r(x), \tag{3.2.3.6}$$

где x и y — продольная и поперечная координаты (соответствующие единичные векторы $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ направлены по касательной и по нормали к поверхности тела вращения), U и V — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, $F(t,x) = -p_x/\rho$ — заданная функция, $r = r(x)$ — безразмерный радиус поперечного сечения, перпендикулярный оси вращения и определяющий форму тела. Остальные обозначения — такие же, как и для уравнения (3.2.3.4). Выбор единицы длины в определении $r = r(x)$ не влияет на вид уравнения.

Введение функции тока W по формулам

$$U = W_y, \quad V = -W_x - \frac{r'_x}{r}W, \qquad r = r(x), \tag{3.2.3.7}$$

приводит систему (3.2.3.5) — (3.2.3.6) к одному уравнению третьего порядка [26, 64]:

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} - \frac{r'_x}{r} W W_{yy} = \nu W_{yyy} + F(t,x). \tag{3.2.3.8}$$

При $r(x) = \text{const}$ уравнение (3.2.3.8) совпадает с (3.2.3.4). Случай $r(x) \neq \text{const}$ является более сложным. В [2] были описаны конкретные функции $r(x)$, для которых уравнение нестационарного пограничного слоя с тремя независимыми переменными (3.2.3.8) можно привести одному ОДУ или одному УрЧП с двумя независимыми переменными; анализ был основан на модификации прямого метода построения редукций [128].

Далее будем рассматривать общий случай уравнения (3.2.3.8) для произвольной зависимости $r = r(x)$. Допустимые формы функции давления $F(t,x)$ будут, как обычно, определяться в процессе анализа.

Преобразование к уравнению плоского пограничного слоя с переменной вязкостью. Путем введения новых переменных

$$z = r(x)y, \quad w = r(x)W, \tag{3.2.3.9}$$

преобразуем уравнение (3.2.3.8) к более удобному для анализа виду [304]:

$$w_{tz} + w_z w_{xz} - w_x w_{zz} = \nu r^2(x) w_{zzz} + F(t,x). \tag{3.2.3.10}$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение нестационарного плоского пограничного слоя с переменной вязкостью

$$\nu_{\text{e}} = \nu r^2(x),$$

зависящей от продольной координаты x. Функция давления $F(t,x)$ остается неизменной.

В частном случае $r(x) \equiv 1$, уравнение (3.2.3.10) совпадает с уравнением плоского пограничного слоя (3.2.3.4).

В конце разд. 3.2.3 дается физическая интерпретация уравнения пограничного слоя с переменной вязкостью $\nu_{\text{e}} = \nu_{\text{e}}(x)$, не связанная с системой УрЧП (3.2.3.5) — (3.2.3.6).

Общий вид решения. Определяющие уравнения. Редукция к ОДУ. Точные решения уравнения (3.2.3.10) ищем в виде [304]:

$$w = fu(\xi) + gz + h, \qquad \xi = \varphi z + \psi, \tag{3.2.3.11}$$

где шесть функций $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$, $u = u(\xi)$ подлежат определению в процессе исследования.

Подставив (3.2.3.11) в (3.2.3.10), получим уравнение, которое удобно представить в билинейной форме

$$\sum_{n=1}^{7} \Phi_n[x,t]\Psi_n[\xi] = 0. \tag{3.2.3.12}$$

Функции $\Phi_n = \Phi_n[x,t]$ зависят от функциональных коэффициентов (и их производных), входящих уравнение (3.2.3.10) и решение (3.2.3.11), и определяются формулами

$$\begin{gathered}\Phi_1 = g_t + gg_x - F, \quad \Phi_2 = (f\varphi)_t + (fg\varphi)_x, \quad \Phi_3 = f\varphi(f\varphi)_x,\\ \Phi_4 = f(\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2),\\ \Phi_5 = f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi), \quad \Phi_6 = -ff_x\varphi^2, \quad \Phi_7 = -\nu r^2 f\varphi^3,\end{gathered} \tag{3.2.3.13}$$

а функции $\Psi_n = \Psi_n[\xi]$ имеют вид

$$\begin{gathered}\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = u'_\xi, \quad \Psi_3 = (u'_\xi)^2, \quad \Psi_4 = u''_{\xi\xi},\\ \Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_6 = uu''_{\xi\xi}, \quad \Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}.\end{gathered} \tag{3.2.3.14}$$

Уравнение (3.2.3.12) — (3.2.3.14) сводится одному ОДУ для $u = u(\xi)$, если все Φ_n ($n \leqslant 6$) положить пропорциональными Φ_7, т. е.

$$\Phi_n = -a_n\Phi_7 \quad (n = 1, \ldots, 6), \tag{3.2.3.15}$$

где a_1, …, a_6 — свободные параметры. Подставив (3.2.3.13) в (3.2.3.15), приходим к нелинейной системе УрЧП для определения функций $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$:

$$g_t + gg_x - F = a_1\nu r^2 f\varphi^3, \tag{3.2.3.16}$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x = a_2\nu r^2 f\varphi^3, \tag{3.2.3.17}$$

$$(f\varphi)_x = a_3\nu r^2\varphi^2, \tag{3.2.3.18}$$

$$\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \varphi_t\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = a_4\nu r^2\varphi^3, \tag{3.2.3.19}$$

$$\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi = a_5\nu r^2\varphi^3, \tag{3.2.3.20}$$

$$f_x = -a_6\nu r^2\varphi. \tag{3.2.3.21}$$

В результате уравнение (3.2.3.12) редуцируется к нелинейному ОДУ для функции $u = u(\xi)$:

$$a_1 + a_2u'_\xi + a_3(u'_\xi)^2 + a_4u''_{\xi\xi} + a_5\xi u''_{\xi\xi} + a_6uu''_{\xi\xi} = u'''_{\xi\xi\xi}. \tag{3.2.3.22}$$

Любой совместное решение определяющей системы УрЧП первого порядка (3.2.3.16) — (3.2.3.21) вместе с соответствующим решением ОДУ третьего порядка (3.2.3.22) порождает точное решение вида (3.2.3.11) уравнения (3.2.3.10).

Анализ и решения определяющей системы (3.2.3.16) — (3.2.3.21) для осесимметричного пограничного слоя с произвольной $r(x)$. Систему уравнений (3.2.3.16) — (3.2.3.21) удается расщепить на несколько более простых подсистем, которые можно рассматривать независимо друг от друга.

Подсистема, состоящая из уравнений (3.2.3.18) и (3.2.3.21), позволяет выразить f и φ через $r = r(x)$. При заданных f и φ подсистема, состоящая из уравнений (3.2.3.17) и (3.2.3.20), служит для определения g и r, откуда следует, что в случае общего положения функция $r = r(x)$ не может считаться произвольной. После того, как g и r найдены, функция давления вычисляется по формуле

$$F = g_t + gg_x - a_1\nu r^2 f\varphi^3, \tag{3.2.3.23}$$

которая является следствием уравнения (3.2.3.16). Функцию ψ в уравнении (3.2.3.19) можно считать произвольно заданной. Интегрируя по x, находим функцию h:

$$h = \int \frac{1}{\varphi^2}\bigl(\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \varphi_t\psi - g\varphi_x\psi - a_4\nu r^2\varphi^3\bigr)\,dx + p(t), \tag{3.2.3.24}$$

где $p(t)$ — произвольная функция.

Далее функцию $r = r(x)$ будем считать произвольной.

Анализ начнем с подсистемы, состоящей из уравнений (3.2.3.17) и (3.2.3.20). Выделим производную g_x и перепишем эти уравнения в виде

$$g_x + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi}g = a_2\nu r^2\varphi^2 - \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi}, \tag{3.2.3.25}$$

$$g_x - \frac{\varphi_x}{\varphi}g = -a_5\nu r^2\varphi^2 + \frac{\varphi_t}{\varphi}. \tag{3.2.3.26}$$

Найдем условия, при которых уравнения (3.2.3.25) и (3.2.3.26) совпадают. В этом случае $r = r(x)$ можно считать произвольной функцией. Тогда g определяется из (3.2.3.26), а следовательно, выражается через φ и r.

Приравнивая функциональные коэффициенты при g и правые части уравнений (3.2.3.25) и (3.2.3.26), имеем

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi} = 0, \quad \frac{\varphi_t}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi} = (a_2 + a_5)\nu r^2\varphi^2. \tag{3.2.3.27}$$

Интегрируя первое уравнение в (3.2.3.27), получим

$$f = \lambda(t)\varphi^{-2} \tag{3.2.3.28}$$

где $\lambda(t)$ — произвольная функция. Подстановка выражения (3.2.3.28) во второе уравнение (3.2.3.27) дает

$$[\ln\lambda(t)]'_t = (a_2 + a_5)\nu r^2(x)\varphi^2. \tag{3.2.3.29}$$

Уравнение (3.2.3.29) удовлетворяется в следующих двух случаях:

$$(a)\quad a_5=-a_2,\quad \lambda(t)=\lambda_0,\quad \varphi=\varphi(t,x)\text{ — любая функция;}\qquad(3.2.3.30)$$

$$(b)\quad \varphi=\frac{\sigma(t)}{r(x)},\quad \lambda(t)=\lambda_0\exp\left[(a_2+a_5)\,\nu\int\sigma^2(t)\,dt\right],\qquad(3.2.3.31)$$

где λ_0 — произвольная постоянная, а $\sigma(t)$ — произвольная функция.

Случай (a). Без ограничения общности можно положить $\lambda_0=1$. Учитывая (3.2.3.28), получим $f=\varphi^{-2}$. Уравнения (3.2.3.18) и (3.2.3.21) принимают вид

$$\varphi'_x=-a_3\nu r^2\varphi^4,\qquad \varphi'_x=\tfrac{1}{2}a_6\nu r^2\varphi^4.\qquad(3.2.3.32)$$

Эти уравнения совместны, если $a_6=-2a_3$. Интегрируя первое уравнение в (3.2.3.32), а затем (3.2.3.26), находим точное решение уравнения (3.2.3.10) вида (3.2.3.11), в котором следует положить

$$\begin{aligned}
f&=\left[3a_3\nu\int r^2(x)\,dx+b(t)\right]^{2/3},\\
\varphi&=\left[3a_3\nu\int r^2(x)\,dx+b(t)\right]^{-1/3},\\
g&=c(t)\varphi+\varphi\int\left(\frac{\varphi_t}{\varphi^2}+a_2\nu r^2\varphi\right)dx,
\end{aligned}\qquad(3.2.3.33)$$

где $b=b(t)$ и $c=c(t)$ — произвольные функции, h определяется формулой (3.2.3.24), $\psi=\psi(t,x)$ — произвольная функция, а $u=u(\xi)$ — функция, удовлетворяющая одному ОДУ (3.2.3.22) при $a_5=-a_2$ и $a_6=-2a_3$ [304]. Функция давления задается формулой (3.2.3.23). Следует отметить, что при $a_3\neq0$ функцию g можно представить в виде

$$g=c(t)\varphi-\frac{1}{3}b'_t(t)\varphi\int\varphi^2dx+\frac{a_2}{2a_3}\varphi^{-1}.$$

Случай (b). Из формул (3.2.3.28) и (3.2.3.31), а также уравнений (3.2.3.18) и (3.2.3.21), следует, что должны выполняться условия $a_6=-2a_3$ и $r(x)=\alpha x+\beta$, т. е. функция $r(x)$ не является произвольной. Этот случай здесь не рассматривается.

Решения определяющей системы (3.2.3.16) — (3.2.3.21) для плоского пограничного пограничный слоя при $r(x)\equiv1$. Следуя [304], рассмотрим теперь случай уравнения плоского пограничного слоя (3.2.3.10) при $r(x)=1$ и опишем некоторые из его точных решений вида (3.2.3.11). Во всех рассматриваемых ниже случаях будут приведены только выражения для функций $\varphi=\varphi(t,x)$, $f=f(t,x)$, $g=g(t,x)$. Функция $\psi=\psi(t,x)$ является произвольной, функции $h=h(t,x)$ и $F=F(t,x)$ определяются формулами (3.2.3.24) и (3.2.3.23) при $r(x)=1$, а функция $u=u(\xi)$ удовлетворяет ОДУ (3.2.3.22).

1°. *Случай* $a_5 = -a_2$, $a_6 = -2a_3$, $a_3 \neq 0$. Точное решение вида (3.2.3.11) получим, положив $r(x) = 1$ в (3.2.3.33), (3.2.3.23), (3.2.3.24). В результате имеем

$$\begin{aligned} &\varphi = \bigl[3a_3\nu x + b(t)\bigr]^{-1/3}, \\ &f = \bigl[3a_3\nu x + b(t)\bigr]^{2/3}, \\ &g = c(t)\varphi - \frac{1}{3a_3\nu}b'_t(t) + \frac{a_2}{2a_3}\varphi^{-1}, \end{aligned} \qquad (3.2.3.34)$$

где $b = b(t)$ и $c = c(t)$ — произвольные функции.

2°. *Случай* $a_5 = -a_2$ *и* $a_3 = a_6 = 0$. Формулы (3.2.3.33) при $a_3 = 0$ приводят к точному решению (3.2.3.11), в котором следует положить

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi(t) \text{ — произвольная функция}, \\ &f = \varphi^{-2}, \\ &g = \Bigl(\frac{\varphi_t}{\varphi} + a_2\nu\varphi^2\Bigr)x + c(t)\varphi, \end{aligned} \qquad (3.2.3.35)$$

где $c = c(t)$ — произвольная функция, а остальные функции описаны выше.

3°. *Случай* $a_3 = a_6 = 0$. Точное решение вида (3.2.3.11) определяется формулами

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi(t) \text{ — произвольная функция}, \\ &f = \frac{k}{\varphi^2}\exp\biggl[(a_2 + a_5)\,\nu\int\varphi^2\,dt\biggr], \\ &g = \Bigl(\frac{\varphi_t}{\varphi} - a_5\nu\varphi^2\Bigr)x + c(t)\varphi, \end{aligned} \qquad (3.2.3.36)$$

где $c(t)$ — произвольная функция, а k — произвольная постоянная. Три функции (3.2.3.36) удовлетворяют четырем уравнениям (3.2.3.17), (3.2.3.18), (3.2.3.20), (3.2.3.21) при $r = 1$, $a_3 = a_6 = 0$ и принимают вид (3.2.3.35) при $a_5 = -a_2$ и $k = 1$.

О понижении порядка и точных решениях нелинейного ОДУ (3.2.3.22) см. [304].

Использование метода поиска слабых симметрий для построения точных решений. Уравнение пограничного слоя (3.2.3.10) с произвольной $r(x)$ имеет гораздо больше точных решений вида (3.2.3.11), чем получено ранее путем прямой редукции к одному ОДУ (3.2.3.22) при $a_5 = -a_2$ и $a_6 = -2a_3$. Следуя [304], опишем процедуру построения других точных решений вида (3.2.3.11).

Определяющая система (3.2.3.16) — (3.2.3.21) получена в предположении, что первые шесть функций Ψ_i в (3.2.3.14) линейно независимы.

Если некоторые из функций Ψ_i линейно зависимы, то следует выбрать линейно независимую подсистему $\{\Psi_j\}$, а остальные функции выразить через элементы этой подсистемы. В этом случае соотношение (3.2.3.12) надо переписать в виде линейной комбинации функций Ψ_j, а затем функциональные множители при Ψ_j приравнять нулю. Полученная в результате указанных действий модифицированная определяющая система будет не только отличаться от системы (3.2.3.16)—(3.2.3.21), но также будет включать меньше уравнений. Чем меньше линейно независимых функций содержится в (3.2.3.14), тем меньше уравнений будет входить в определяющую систему и тем большее число произвольных функций может входить в ее решение.

Решения вида (3.2.3.11), отличные от описываемых уравнениями (3.2.3.16)—(3.2.3.22), возникают, если среди функций Ψ_i имеются две или больше линейно независимые подсистемы, одна из которых содержит Ψ_7. В качестве функций $u = u(\xi)$, которые определяют Ψ_i в (3.2.3.14), следует использовать частные решения ОДУ (3.2.3.22) при подходящих значениях параметров a_i.

В табл. 3.1 включены двенадцать функций $u = u(\xi)$, которые приводят к двум или трем линейным соотношениям между функциями (3.2.3.14) (по данным [277, 304]). Функция в первой строке дает $\Psi_7 = 0$, что соответствует вырожденному решению. Остальные строки содержат функции, которые порождают невырожденные решения уравнения (3.2.3.10).

Таблица 3.1. Порождающие функции u и соответствующие линейные соотношения для Ψ_n. Обозначения: $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = u'_\xi$, $\Psi_3 = (u'_\xi)^2$, $\Psi_4 = u''_{\xi\xi}$, $\Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}$, $\Psi_6 = uu''_{\xi\xi}$, $\Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}$.

№	Порождающие функции u	Линейные соотношения для Ψ_n
1	$u=\xi^2$	$\Psi_4=2\Psi_1,\ \Psi_5=\frac{2}{3}\Psi_2,\ \Psi_6=\frac{1}{2}\Psi_3$
2	$u=\xi^3$	$\Psi_5=2\Psi_2,\ \Psi_6=\frac{2}{3}\Psi_3,\ \Psi_7=6\Psi_1$
3	$u=\xi^{-1}$	$\Psi_5=-2\Psi_2,\ \Psi_6=2\Psi_3,\ \Psi_7=-6\Psi_3$
4	$u=\exp\xi$	$\Psi_2=\Psi_4=\Psi_7,\ \Psi_6=\Psi_3$
5	$u=\operatorname{ch}\xi$	$\Psi_6=\Psi_1+\Psi_3,\ \Psi_7=\Psi_2$
6	$u=\operatorname{sh}\xi$	$\Psi_6=\Psi_3-\Psi_1,\ \Psi_7=\Psi_2$
7	$u=\cos\xi$	$\Psi_6=\Psi_3-\Psi_1,\ \Psi_7=-\Psi_2$
8	$u=\sin\xi$	$\Psi_6=\Psi_3-\Psi_1,\ \Psi_7=-\Psi_2$
9	$u=\operatorname{th}\xi$	$\Psi_6=-2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=-2\Psi_2-3\Psi_6$
10	$u=\operatorname{cth}\xi$	$\Psi_6=-2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=-2\Psi_2-3\Psi_6$
11	$u=\operatorname{tg}\xi$	$\Psi_6=-2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=2\Psi_2+3\Psi_6$
12	$u=\operatorname{ctg}\xi$	$\Psi_6=2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=2\Psi_2-3\Psi_6$

Примеры построения точных решений. Ниже приведены примеры построения точных решений нелинейного УрЧП третьего порядка (3.2.3.10) путем использования некоторых порождающих функций, указанных в табл. 3.1.

▶ Пример 3.9. Возьмем функцию $u = \xi^3$ из второй строки табл. 3.1 и построим точное решение. Учитывая формулы (3.2.3.14) и линейные соотношения между Ψ_i (см. табл. 3.1), перепишем уравнение (3.2.3.12)—(3.2.3.14) в виде

$$\begin{aligned}&\big[g_t+gg_x-F-6\nu r^2f\varphi^3\big]\Psi_1+\\&\quad+\big[(f\varphi)_t+(fg\varphi)_x+2f(\varphi_t+g\varphi_x-g_x\varphi)\big]\Psi_2+\\&\quad+\big[f\varphi(f\varphi)_x-\tfrac{2}{3}ff_x\varphi^2\big]\Psi_3+\\&\quad+f(\varphi\psi_t+g\varphi\psi_x+g_x\varphi\psi-\psi\varphi_t-g\varphi_x\psi-h_x\varphi^2)\Psi_4=0.\end{aligned}$$

Приравнивая функциональные коэффициенты при всех Ψ_i нулю, приходим к системе УрЧП:

$$g_t+gg_x-F-6\nu r^2f\varphi^3=0, \tag{3.2.3.37}$$

$$(f\varphi)_t+(fg\varphi)_x+2f(\varphi_t+g\varphi_x-g_x\varphi)=0, \tag{3.2.3.38}$$

$$f\varphi_x+\tfrac{1}{3}f_x\varphi=0, \tag{3.2.3.39}$$

$$\varphi\psi_t+g\varphi\psi_x+g_x\varphi\psi-\psi\varphi_t-g\varphi_x\psi-h_x\varphi^2=0. \tag{3.2.3.40}$$

Здесь уравнение (3.2.3.39) преобразовано к более удобному виду, а в последних двух уравнениях произведено деление на ненулевые сомножители $f\varphi$ и f.

В системе (3.2.3.37) — (3.2.3.40) на два уравнения меньше, чем в системе (3.2.3.16) — (3.2.3.21). Кроме того, полученные уравнения не нуждаются в исследовании на совместность. Уравнения (3.2.3.37) — (3.2.3.39) позволяют найти f, g, F при произвольной $r(x)$. Функции $\varphi=\varphi(t,x)$ и $\psi=\psi(t,x)$ остаются произвольными, а функция h, как следует из (3.2.3.40), определяется формулой (3.2.3.24), где $a_4=0$.

Общее решение уравнения (3.2.3.39) имеет вид

$$f=a(t)\varphi^{-3}, \tag{3.2.3.41}$$

где $a(t)$ — произвольная функция. Подставив это выражение в (3.2.3.38), после интегрирования получим

$$g=\frac{1}{a(t)}\big[a'_t(t)x+b(t)\big], \tag{3.2.3.42}$$

где $b(t)$ — произвольная функция. Подставив (3.2.3.41) и (3.2.3.42) в (3.2.3.37), находим функцию давления F:

$$F(t,x)=-6\nu a(t)r^2(x)+\frac{1}{a(t)}[a''_{tt}(t)x+b'_t(t)].$$

При $\psi=h=0$ подстановка (3.2.3.41) и (3.2.3.42) в (3.2.3.11) дает точное решение

$$u=a(t)z^3+\frac{1}{a(t)}[a'_t(t)x+b(t)]z,$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции. Интересно, что произвольная функция φ, входящая в (3.2.3.41), в окончательный результат не входит, так как она сокращается после подстановки в (3.2.3.11). ◄

► Пример 3.10. Возьмем теперь $u=\exp\xi$ из строки № 4 табл. 3.1. Используя формулы (3.2.3.14) и линейные соотношения между Ψ_i (см. табл. 3.1), перепишем уравнение (3.2.3.12)—(3.2.3.14) в виде

$$(g_t+gg_x-F)\Psi_1+\big[(f\varphi)_t+(fg\varphi)_x-f\varphi^2h_x-\nu r^2f\varphi^3\big]\Psi_2+ \\ +f\varphi\big[(f\varphi)_x-f_x\varphi\big]\Psi_3+f(\varphi_t+g\varphi_x-g_x\varphi)\Psi_5=0,$$

где для простоты мы положили $\psi=0$. Приравняв нулю функциональные коэффициенты при Ψ_i, получим

$$\begin{gathered} g_t+gg_x-F=0,\\ (f\varphi)_t+(fg\varphi)_x-f\varphi^2h_x-\nu r^2f\varphi^3=0,\\ \varphi_x=0,\quad \varphi_t+g\varphi_x-g_x\varphi=0. \end{gathered} \tag{3.2.3.43}$$

Из первого, третьего и четвертого уравнений следует, что

$$\varphi=\varphi(t),\quad g=\frac{1}{\varphi}\big[\varphi'_tx+b(t)\big],\quad F=\frac{1}{\varphi}\big[\varphi''_{tt}x+b'_t(t)\big], \tag{3.2.3.44}$$

где $\varphi=\varphi(t)$ и $b=b(t)$ — произвольные функции. Второе уравнение в (3.2.3.43) дает

$$h=\frac{2\varphi'_t}{\varphi^2}x+\frac{1}{\varphi}\int\Big(\frac{f_t}{f}+g\frac{f_x}{f}-\nu r^2\varphi^2\Big)\,dx+c(t), \tag{3.2.3.45}$$

где $c(t)$ — произвольная функция.

Формулы (3.2.3.11), (3.2.3.44), (3.2.3.45) при произвольной $f=f(t,x)$ и $\psi=0$ определяют точное решение уравнения (3.2.3.10) для произвольной функции $r(x)$, т. е. для любой формы обтекаемой поверхности. ◀

Замечание 3.7. *Важно подчеркнуть, что прямой метод поиска слабых симметрий, описанный в разд. 3.2.1, позволяет найти значительно больше точных решений уравнения (3.2.3.10), чем прямой метод поиска редукций, рассмотренный в разд. 3.1.*

Физическая интерпретация уравнения плоского пограничного слоя с переменной вязкостью. Рассмотрим уравнение плоского пограничного слоя с переменной вязкостью $\nu=\nu(x)$:

$$W_{ty}+W_yW_{xy}-W_xW_{yy}=\nu(x)W_{yyy}+F(t,x), \tag{3.2.3.46}$$

где x и y — продольная и поперечная координаты, а W — функция тока, через которую выражаются компоненты скорости U и V по формулам (3.2.3.3). Такие уравнения возникают при исследовании связанных термогидродинамических задач, когда выполняются следующие условия:

(a) кинематическая вязкость существенно зависит от температуры в интересующем диапазоне температур: $\nu=\tilde\nu(T)$;

(b) поверхность, контактирующая с потоком, нагрета неравномерно: $T|_{y=0}=T_0(x)$;

(c) число Прандтля Pr мало, что справедливо для жидких металлов и расплавов, поскольку для них $5\cdot10^{-3}\leqslant\mathsf{Pr}\leqslant5\cdot10^{-2}$ [29, 279, 307];

(d) в интересующем диапазоне температур, относительным изменением плотности жидкости можно пренебречь по сравнению с относительным изменением вязкости; это имеет место для жидких металлов и расплавов [29, 307] (в частности, для натрия кинематическая вязкость меняется на 52% в температурном диапазоне от 100 до 200 °C, а плотность меняется всего на 2.8%).

Условие (c) подразумевает, что гидродинамический пограничный слой гораздо тоньше теплового. Это означает, что температуру в гидродинамическом погранслое можно принять приближенно равной главному члену разложения температуры вблизи обтекаемой поверхности согласно условию (b): $T \approx T_0(x)$. Из вышесказанного и условия (a) следует, что вязкость зависит только от продольной координаты: $\nu = \tilde{\nu}(T_0(x))$.

С точностью до обозначений уравнение (3.2.3.10) совпадает с (3.2.3.46).

Задача типа Блазиуса для неравномерно нагретой плоской пластины. Рассмотрим стационарное продольное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью неоднородно нагретой плоской пластины, считая, что выполнены условия (a) — (d). Соответствующая гидродинамическая задача описывается уравнением пограничного слоя (3.2.3.46), в котором следует положить $W = W(x,y)$, $W_t = 0$, $F(t,x) = 0$, $\nu(x) = \tilde{\nu}(T_0(x))$, и граничными условиями

$$W_x = W_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad W_y \to U_\infty \quad \text{при} \quad y \to \infty, \tag{3.2.3.47}$$

где U_∞ — невозмущенная скорость жидкость вдали от пластины, а значение $y = 0$ соответствует поверхности пластины. В частном случае $\nu = \mathrm{const}$ задача (3.2.3.46) — (3.2.3.47) переходит в задачу Блазиуса [27, 64].

При произвольной зависимости $\nu = \nu(x)$, задача (3.2.3.46) — (3.2.3.47) имеет решение

$$W = \sqrt{U_\infty X}\, u(\xi), \quad \xi = y\sqrt{\frac{U_\infty}{X}}, \quad X = \int_0^x \nu(s)\, ds, \tag{3.2.3.48}$$

где функция $u = u(\xi)$ удовлетворяет следующим уравнению и граничным условиям:

$$\begin{gathered} u'''_{\xi\xi\xi} + \tfrac{1}{2} u u''_{\xi\xi} = 0; \\ u = u'_\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \qquad u'_\xi \to 1 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty. \end{gathered} \tag{3.2.3.49}$$

В [26, 27, 64] приводятся численные и приближенные аналитические решения задачи (3.2.3.49). С учетом приведенных выше результатов, можно оценить локальное напряжение сдвига (сопротивление) на поверхности пластины:

$$\tau(x) = (\mu U_y)_{y=0} = \rho U_\infty^{3/2} u''(0) \nu(x) X^{-1/2}, \quad X = \int_0^x \nu(s)\, ds, \tag{3.2.3.50}$$

где $u''(0) \approx 0.332$. Соответствующий коэффициент сопротивления равен

$$c_\mathrm{f} = \frac{\tau(x)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathsf{Re}_x}}, \quad \mathsf{Re}_x = \frac{U_\infty L(x)}{\nu(x)}, \quad L(x) = \frac{1}{\nu(x)} \int_0^x \nu(s)\, ds, \tag{3.2.3.51}$$

где Re_x — локальное число Рейнольдса, а $L(x)$ — эффективное расстояние от переднего края пластины.

В частном случае постоянной вязкости ($\nu = \mathrm{const}$) формулы (3.2.3.50) и (3.2.3.51) совпадают формулами, приведенными в [26, 27, 64].

► Пример 3.11. Измерения температурных зависимостей кинематической вязкости $\nu = \tilde{\nu}(T)$ показывают [14], что многие жидкие металлы и расплавы характеризуются гистерезисом вязкости в широком диапазоне температур, т. е. при нагреве и охлаждении зависимости $\tilde{\nu}(T)$ различны. Кривая нагрева обычно имеет довольно сложную форму, а кривая охлаждения хорошо описывается формулой типа закона Аррениуса $\nu = \alpha e^{\beta/T}$, где α и β — константы, характеризующие физические свойства жидкости, а T — термодинамическая температура. При температурах выше некоторого порогового значения, характерного для конкретной жидкости, кривые нагрева и охлаждения практически совпадают с точностью до погрешности измерения вязкости [14].

Вместо закона Аррениуса ниже будем использовать простое приближение $\nu = \nu_0 e^{\gamma(T_0 - T)}$, которое хорошо работает в широком диапазоне температур.

Для оценки влияния зависимости вязкости жидкости от температуры на величины локального напряжения сдвига и коэффициента сопротивления сравним следующие два сценария: (a) температура пластины поддерживается постоянной $T_0 = 200\,^\circ\mathrm{C}$ и (b) температура пластины понижается линейным образом от $T_0 = 200\,^\circ\mathrm{C}$ при $x = 0$ до $T_l = 100\,^\circ\mathrm{C}$ при некотором значении $x = l$. Пренебрегая изменением плотности жидкости, оценим отношение $c_{\mathrm{f2}}(l)/c_{\mathrm{f1}}(l) \approx \tau_2(l)/\tau_1(l)$, где индексы 1 и 2 относятся к случаям (a) и (b) соответственно.

Из формул (3.2.3.50) и (3.2.3.51) следует

$$\frac{c_{\mathrm{f2}}(l)}{c_{\mathrm{f1}}(l)} = \frac{\tau_2(l)}{\tau_1(l)} = \frac{\nu(l)}{\nu_0}\sqrt{\frac{\nu_0 l}{X(l)}}; \quad \nu(x) = \nu_0 e^{\gamma(T_0 - T(x))}, \quad X(l) = \int_0^l \nu(x)\,dx.$$

Поскольку температура линейно зависит от координаты, имеем

$$T = T_0 - \frac{T_0 - T_l}{l}x \quad \Longrightarrow \quad dx = -\frac{l}{T_0 - T_l}\,dT. \tag{3.2.3.52}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} X(l) &= \int_{T_0}^{T_l} \nu_0 e^{\gamma(T_0 - T)} \frac{l}{T_l - T_0}\,dT = \frac{\nu_0 l}{\gamma(T_0 - T_l)}\bigl(e^{\gamma(T_0 - T_l)} - 1\bigr) \\ &= \frac{\nu_0 l}{\ln(\nu_l/\nu_0)}\Bigl(\frac{\nu_l}{\nu_0} - 1\Bigr), \qquad \nu_l = \nu(l). \end{aligned}$$

В результате получим [304]:

$$\frac{c_{\mathrm{f2}}(l)}{c_{\mathrm{f1}}(l)} = \frac{\nu_l}{\nu_0}\sqrt{\ln\frac{\nu_l}{\nu_0}\Bigg/\Bigl(\frac{\nu_l}{\nu_0} - 1\Bigr)}. \tag{3.2.3.53}$$

В табл. 3.2 приводятся отношения коэффициентов сопротивления (предпоследний столбец), вычисленные по формуле (3.2.3.53), для трех жидких металлов и одного расплава при соблюдении вышеуказанных предположений. Обсуждение полученных результатов дано в конце примера 3.12. ◄

► Пример 3.12. Предполагая теперь, что вязкость степенным образом зависит от температуры $\nu = \nu_0(T_0/T)^k$ (детальное обоснование этой формулы дано в [307]), сравним два сценария, описанные в примере 3.11.

Таблица 3.2. Увеличение коэффициента сопротивления вследствие зависимости вязкости от температуры. Индекс «e» соответствует экспоненциальному приближению $\nu = \nu_0 e^{\gamma(T_0 - T)}$, а индекс «p» соответствует степенному приближению $\nu = \nu_0 (T_0/T)^k$.

Жидкий металл/расплав	ν_0, 10^8 м^2/с	k	$c^{\rm e}_{\rm f2}(l)/c^{\rm e}_{\rm f1}(l)$	$c^{\rm p}_{\rm f2}(l)/c^{\rm p}_{\rm f1}(l)$
Hg	7.9	0.260	1.13	1.15
Na	50.5	0.615	1.37	1.39
K	41.2	0.527	1.22	1.32
25% Na+75% K	43.7	0.540	1.25	1.33

Пренебрегая изменением плотности, из формул (3.2.3.50) и (3.2.3.51) находим

$$\frac{c_{\rm f2}(l)}{c_{\rm f1}(l)} \approx \frac{\tau_2(l)}{\tau_1(l)} = \frac{\nu_l}{\nu_0}\sqrt{\frac{\nu_0 l}{X(l)}}; \quad \nu = \nu_0\Big(\frac{T_0}{T}\Big)^k, \quad X(l) = \int_0^l \nu(T(x))\,dx.$$

Поскольку, согласно предположению, температура линейно зависит от координаты, имеем (3.2.3.52), и следовательно

$$X(l) = \int_{T_0}^{T_l} \nu_0 (T_0/T)^k \frac{-l}{T_0 - T_l}\,dT = \frac{\nu_0 l}{1-k}\,\frac{T_0 - T_0^k T_l^{1-k}}{T_0 - T_l}, \quad 0 < k < 1.$$

В итоге получим [307]:

$$\frac{c_{\rm f2}(l)}{c_{\rm f1}(l)} = \Big(\frac{T_0}{T_l}\Big)^k \sqrt{(1-k)\frac{(T_0/T_l) - 1}{(T_0/T_l) - (T_0/T_l)^k}} = 2^k \sqrt{\frac{1-k}{2-2^k}}. \qquad (3.2.3.54)$$

В табл. 3.2 приведены отношения коэффициентов сопротивления (последний столбец), вычисленные по формуле (3.2.3.54) для трех жидких металлов и одного расплава при соблюдении вышеуказанных предположений. Видно, что вследствие зависимости вязкости от температуры коэффициент сопротивления существенно увеличивается. При принятых допущениях увеличение составляет 15%, 39%, 32%, 33% для Hg, Na, K, 25% Na + 75% K соответственно. Эти цифры несколько выше соответствующих значений (четвертый столбец), полученных при использовании экспоненциального приближения зависимости кинематической вязкости от температуры.

Отметим, что формулы (3.2.3.53) и (3.2.3.54) справедливы для ламинарного режима течения, в котором $\mathsf{Re}_l = U_\infty X(l)/\nu_l^2 \lesssim 10^5$ [27, 64]. ◀

3.2.4. Уравнения осесимметричного пограничного слоя на протяженном теле вращения

Преобразование системы уравнений пограничного слоя к одному УрЧП. Система уравнений пограничного слоя, описывающая осесимметричное нестационарное ламинарное обтекание ньютоновской несжимаемой жидкостью протяженного тела вращения, имеет вид [64, 133]:

$$U_t + UU_x + VU_r = \nu\big(U_{rr} + r^{-1}U_r\big) + F(t,x), \tag{3.2.4.1}$$

$$U_x + V_r + r^{-1}V = 0, \tag{3.2.4.2}$$

где t — время, U и V — соответственно осевая и радиальная компоненты скорости жидкости, x и r — осевая и радиальная координаты, $F(t,x) = -p_x/\rho$ — заданная функция (пропорциональная осевому градиенту давления), p — давление, ρ — массовая плотность, ν — кинематическая вязкость. При $F \equiv 0$ система (3.2.4.1) — (3.2.4.2) описывает осесимметричное струйное течение при больших числах Рейнольдса.

В [64] получено автомодельное решение стационарной системы уравнений (3.2.4.1) — (3.2.4.2) при $F(t,x) \equiv 0$ для задачи о струйном течении.

Введя модифицированную функцию тока w по формулам

$$U = 2r^{-1}w_r, \quad V = -2r^{-1}(w_x - \nu), \quad z = \tfrac{1}{4}r^2, \tag{3.2.4.3}$$

сведем систему (3.2.4.1) — (3.2.4.2) к одному нелинейному уравнению третьего порядка

$$w_{tz} + w_z w_{xz} - w_x w_{zz} = \nu z w_{zzz} + F(t,x). \tag{3.2.4.4}$$

Замечание 3.8. *Формулы (3.2.4.3) немного отличается от формул, использованных в [104, 287, 329], и приводят к более простому уравнению (3.2.4.4). В работах [104, 287, 329] представлен ряд преобразований, а также некоторые точные решения уравнения, полученного из (3.2.4.4) заменой $w = \bar{w} + \nu x$.*

Отметим, что уравнения (3.2.4.4) и (3.2.3.10) отличаются функциональными множителями при старшей производной.

Далее, следуя [306], построим точные решения нестационарный нелинейного УрЧП третьего порядка(3.2.4.4), в котором, как обычно, допустимые функции градиента давления $F(t,x)$ будут определяться в ходе исследования.

Общий вид решения. Определяющие уравнения. Редукция к ОДУ. Как и в разд. 3.2.3, будем искать точные решения уравнения (3.2.4.4) в виде

$$w = fu(\xi) + gz + h, \qquad \xi = \varphi z + \psi, \tag{3.2.4.5}$$

где функции $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$, $u = u(\xi)$ подлежат определению в процессе анализа.

Подставив (3.2.4.5) в (3.2.4.4), получим уравнение, которое удобно представить в билинейной форме

$$\sum_{n=1}^{8} \Phi_n[x,t]\Psi_n[\xi] = 0. \tag{3.2.4.6}$$

Функции $\Phi_n = \Phi_n[x,t]$ зависят от функциональных коэффициентов (и их производных), входящих уравнение (3.2.4.4) и решение (3.2.4.5), и определяются формулами

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1 = g_t + gg_x - F, \quad \Phi_2 = (f\varphi)_t + (fg\varphi)_x, \quad \Phi_3 = f\varphi(f\varphi)_x,\\
&\Phi_4 = f(\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2),\\
&\Phi_5 = f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi), \quad \Phi_6 = -ff_x\varphi^2,\\
&\Phi_7 = \nu f\varphi^2\psi, \quad \Phi_8 = -\nu f\varphi^2,
\end{aligned} \tag{3.2.4.7}
$$

а функции $\Psi_n = \Psi_n[\xi]$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = u'_\xi, \quad \Psi_3 = (u'_\xi)^2, \quad \Psi_4 = u''_{\xi\xi},\\
&\Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_6 = uu''_{\xi\xi}, \quad \Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}, \quad \Psi_8 = \xi u'''_{\xi\xi\xi}.
\end{aligned} \tag{3.2.4.8}
$$

Уравнение (3.2.4.6) – (3.2.4.8) сводится к одному ОДУ для $u = u(\xi)$, если все Φ_n $(n \leqslant 7)$ положить пропорциональными Φ_8, т. е.

$$
\Phi_n = -a_n\Phi_8 \quad (n = 1, \ldots, 7), \tag{3.2.4.9}
$$

где $a_1, \ldots, a_7$ — свободные параметры. Подставив функции (3.2.4.7) в (3.2.4.9), приходим к нелинейной системе УрЧП для $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$:

$$
g_t + gg_x - F = a_1\nu f\varphi^2, \tag{3.2.4.10}
$$

$$
(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x = a_2\nu f\varphi^2, \tag{3.2.4.11}
$$

$$
(f\varphi)_x = a_3\nu\varphi, \tag{3.2.4.12}
$$

$$
\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \varphi_t\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = a_4\nu\varphi^2, \tag{3.2.4.13}
$$

$$
\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi = a_5\nu\varphi^2, \tag{3.2.4.14}
$$

$$
f_x = -a_6\nu, \tag{3.2.4.15}
$$

$$
\psi = a_7. \tag{3.2.4.16}
$$

В результате уравнение (3.2.4.6) редуцируется к нелинейному ОДУ для функции $u = u(\xi)$:

$$
a_1 + a_2u'_\xi + a_3(u'_\xi)^2 + a_4u''_{\xi\xi} + a_5\xi u''_{\xi\xi} + a_6uu''_{\xi\xi} + a_7u'''_{\xi\xi\xi} = \xi u'''_{\xi\xi\xi}. \tag{3.2.4.17}
$$

Любое совместное решение определяющей системы УрЧП первого порядка (3.2.4.10) – (3.2.4.15) и соотношение (3.2.4.16) вместе с соответствующим решением ОДУ третьего порядка (3.2.4.17) порождают точное решение уравнения (3.2.4.4) вида (3.2.4.5).

Замечание 3.9. *В статье [104] рассматривались точные решения вида (3.2.4.5) при $g \equiv 0$ для уравнений стационарного протяженного осесимметричного пограничного слоя (см. также пример 3.8).*

Анализ и решения определяющей системы (3.2.4.10) – (3.2.4.16). Система (3.2.4.10) – (3.2.4.16) состоит из одного независимого уравнения и нескольких подсистем, которые можно анализировать последовательно.

Из уравнения (3.2.4.16) имеем $\psi = a_7 = \text{const}$. Подсистема, состоящая из уравнений (3.2.4.12) и (3.2.4.15), позволяет найти f и φ. Переопределенная подсистема, состоящая из УрЧП (3.2.4.11) и (3.2.4.14) требует проведения анализа на совместность и дает возможность определить функцию g. После этого функцию давления можно вычислить по формуле

$$F = g_t + g g_x - a_1 \nu f \varphi^2, \tag{3.2.4.18}$$

которая является следствием уравнения (3.2.4.10). Интегрируя (3.2.4.13), находим функцию h:

$$h = -a_4 \nu x + a_7 \int \frac{1}{\varphi^2} \big(g_x \varphi - \varphi_t - g \varphi_x \big)\, dx + h_0(t), \tag{3.2.4.19}$$

где $h_0(t)$ — произвольная функция.

Проанализируем переопределенную систему УрЧП (3.2.4.11), (3.2.4.14). Выделив производную g_x, перепишем уравнения в виде

$$g_x + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi} g = a_2 \nu \varphi - \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi}, \tag{3.2.4.20}$$

$$g_x - \frac{\varphi_x}{\varphi} g = -a_5 \nu \varphi + \frac{\varphi_t}{\varphi}. \tag{3.2.4.21}$$

Найдем условия, при выполнении которых УрЧП (3.2.4.20) и (3.2.4.21) совпадают, после чего из (3.2.4.21) можно будет определить функцию g.

Приравняв функциональные множители при g и правые части уравнений (3.2.4.20) и (3.2.4.21), получим

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi} = 0, \quad \frac{\varphi_t}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi} = (a_2 + a_5)\nu\varphi. \tag{3.2.4.22}$$

Интегрируя первое уравнение, имеем

$$f = \lambda(t) \varphi^{-2}, \tag{3.2.4.23}$$

где $\lambda(t)$ — произвольная функция. Подстановка этого выражения во второе уравнение в (3.2.4.22) дает

$$[\ln \lambda(t)]'_t = (a_2 + a_5)\nu\varphi. \tag{3.2.4.24}$$

Уравнение (3.2.4.24) удовлетворяется в следующих двух случаях:

$$(a) \;\; a_5 = -a_2, \quad \lambda(t) = \lambda_0, \quad \varphi = \varphi(t,x) \text{ — произвольная функция}, \tag{3.2.4.25}$$

$$(b) \;\; \lambda(t) = \lambda_0 \exp\left[(a_2 + a_5)\, \nu \int \varphi(t)\, dt \right], \quad \varphi = \varphi(t) \text{ — произвольная функция}, \tag{3.2.4.26}$$

где λ_0 — произвольная постоянная.

Случай (а). В первом случае без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Учитывая (3.2.4.23), имеем $f = \varphi^{-2}$. Далее, из (3.2.4.12) и (3.2.4.15) следует

$$\varphi'_x = -a_3\nu\varphi^3, \quad \varphi'_x = \tfrac{1}{2}a_6\nu\varphi^3. \tag{3.2.4.27}$$

Эти два уравнения совместны, если $a_6 = -2a_3$. Интегрируя первое уравнение, а также уравнение (3.2.4.21), получим точное решение уравнения (3.2.4.4) вида (3.2.4.5), в котором искомые функции имеют вид

$$\begin{aligned} f &= 2a_3\nu x + b(t),\\ \varphi &= \bigl[2a_3\nu x + b(t)\bigr]^{-1/2},\\ g &= \bigl[a_2\nu x + c(t)\bigr]\varphi - \frac{1}{2a_3\nu}b'_t(t), \end{aligned} \tag{3.2.4.28}$$

где $b = b(t)$ и $c = c(t)$ — произвольные функции. Функция h находится по формуле (3.2.4.19), $\psi = a_7$, а функция $u = u(\xi)$ удовлетворяет ОДУ (3.2.4.17), где $a_5 = -a_2$ и $a_6 = -2a_3$. Функция давления определяется по формуле (3.2.4.18).

Случай (b). Во втором случае из формул (3.2.4.23) и (3.2.4.26), а также уравнений (3.2.4.12) и (3.2.4.15), следует, что должны выполняться условия $a_3 = a_6 = 0$. При этом уравнение (3.2.4.17) становится линейным. Интегрируя (3.2.4.21), приходим к точному решению уравнения (3.2.4.4) вида (3.2.4.5), в котором следует положить

$$\begin{aligned} &f = \lambda(t)\varphi^{-2}, \quad \lambda(t) = \lambda_0 \exp\biggl[(a_2 + a_5)\,\nu\int\varphi(t)\,dt\biggr],\\ &\varphi = \varphi(t) \text{ — произвольная функция},\\ &g = \Bigl(\frac{\varphi'_t}{\varphi} - a_5\nu\varphi\Bigr)x + c(t), \end{aligned} \tag{3.2.4.29}$$

где $c = c(t)$ — произвольная функция. Функция h находится из (3.2.4.19), $\psi = a_7$, а $u = u(\xi)$ удовлетворяет ОДУ (3.2.4.17), где $a_3 = a_6 = 0$. Функция давления определяется по формуле (3.2.4.18).

О точных решениях нелинейного ОДУ (3.2.4.17) см. [308].

Использование прямого метода поиска слабых симметрий для построения точных решений. Уравнение пограничного слоя (3.2.4.4) допускает значительно больше точных решений вида (3.2.4.5), чем те, которые были получены ранее путем редукции к одному ОДУ. Следуя [306], опишем процедуру построения других точных решений вида (3.2.4.5).

Определяющая система (3.2.4.10) — (3.2.4.16) была получена в предположении, что первые семь функций Ψ_i из (3.2.4.8) линейно независимы.

Если некоторые из Ψ_i линейно зависимы, следует выбрать линейно независимую подсистему $\{\Psi_j\}$ и выразить остальные функции через ее элементы.

Затем уравнение (3.2.4.6) надо переписать в виде линейной комбинации функций Ψ_j и приравнять нулю их функциональные множители. В этом случае приходим к модифицированной определяющей системе, которая содержит меньше уравнений, чем система (3.2.4.10)—(3.2.4.16).

В качестве функций $u = u(\xi)$, определяющих величины Ψ_i в (3.2.4.8), следует брать частные решения ОДУ (3.2.4.17) при некоторых конкретных значениях коэффициентов a_i. Решения вида (3.2.4.5), отличные от описываемых уравнениями (3.2.4.10)—(3.2.4.17), появляются, если в среди функций (3.2.4.8) имеются две или более линейно зависимые подсистемы. Случай $\Psi_8 = 0$ соответствует вырожденному решению.

В табл. 3.3 приведены функции $u = u(\xi)$, которые порождают три или четыре линейных соотношения между функциями (3.2.4.8). В каждой строке имеется линейно зависимая подсистема, содержащая Ψ_8. Во второй и третьей строках выделены степенные функции специального вида, для которых возникает дополнительная линейно зависимая подсистема по сравнению с общим случаем $u = \xi^k$ при $k \neq -1, 0, 3$.

Таблица 3.3. Порождающие функции u, для которых имеют место линейные соотношения между функциями Ψ_n. Обозначения: $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = u'_\xi$, $\Psi_3 = (u'_\xi)^2$, $\Psi_4 = u''_{\xi\xi}$, $\Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}$, $\Psi_6 = uu''_{\xi\xi}$, $\Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}$, $\Psi_8 = \xi u'''_{\xi\xi\xi}$.

№	Порождающая функция u	Линейные соотношения для Ψ_n
1	$u=\xi^k,\ k\neq 0$	$\Psi_5=(k-1)\Psi_2,\ \Psi_6=\frac{k-1}{k}\Psi_3,\ \Psi_8=(k-2)\Psi_4$
2	$u=\xi^3$	$\Psi_5=2\Psi_2,\ \Psi_6=\frac{2}{3}\Psi_3,\ \Psi_7=6\Psi_1,\ \Psi_8=\Psi_4$
3	$u=\xi^{-1}$	$\Psi_5=-2\Psi_2,\ \Psi_6=2\Psi_3,\ \Psi_7=-6\Psi_3,\ \Psi_8=-3\Psi_4$
4	$u=\exp\xi$	$\Psi_2=\Psi_4=\Psi_7,\ \Psi_6=\Psi_3,\ \Psi_8=\Psi_5$
5	$u=\ln\xi$	$\Psi_3=-\Psi_4=\frac{1}{2}\Psi_8,\ \Psi_5=-\Psi_2$

Примеры построения точных решений. Ниже построены точные решения нелинейного УрЧП третьего порядка (3.2.4.4) путем использования порождающих функций, указанных в табл. 3.3.

Решение 1. Возьмем $u = \xi^k$ из первой строки в табл. 3.3 и построим соответствующее точное решение. Учитывая формулы (3.2.4.8) и используя линейные комбинации функций Ψ_i из первой строки этой таблицы, перепишем уравнение (3.2.4.6)—(3.2.4.8) в виде

$$\begin{aligned}
&(g_t + gg_x - F)\Psi_1 + \\
&\quad + [(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (k-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi)]\Psi_2 + \\
&\quad + f\varphi[(f\varphi)_x - \tfrac{k-1}{k} f_x\varphi]\Psi_3 + \\
&\quad + f[\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 - \nu(k-2)\varphi^2]\Psi_4 + \\
&\quad + \nu f\varphi^2\psi\Psi_7 = 0.
\end{aligned} \qquad (3.2.4.30)$$

Приравнивая нулю функциональные множители при Ψ_i, получим определяющую систему

$$g_t + gg_x - F = 0, \qquad (3.2.4.31)$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (k-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0, \qquad (3.2.4.32)$$

$$kf\varphi_x + f_x\varphi = 0, \qquad (3.2.4.33)$$

$$\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 - \nu(k-2)\varphi^2 = 0, \qquad (3.2.4.34)$$

$$\psi = 0. \qquad (3.2.4.35)$$

В последних трех уравнениях произведено деление на ненулевые множители. В уравнении (3.2.4.33) слагаемые были перегруппированы.

Система (3.2.4.31) — (3.2.4.35) имеет на два уравнения меньше, чем система (3.2.4.10) — (3.2.4.16) и не требует анализа на совместность. Общее решение системы (3.2.4.31) — (3.2.4.35) можно представить в виде

$$\begin{gathered} f = a(t)\varphi^{-k}, \quad g = \frac{1}{k-2}\frac{a'_t(t)}{a(t)}x + b(t), \quad h = \nu(2-k)x + c(t), \\ \varphi = \varphi(t,x) \text{ — произвольная функция}, \quad \psi = 0, \quad F = g_t + gg_x, \end{gathered} \qquad (3.2.4.36)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — произвольные функции.

Подставив (3.2.4.36) в (3.2.4.5), приходим к точному решению

$$w = a(t)z^k + \left[\frac{1}{k-2}\frac{a'_t(t)}{a(t)}x + b(t)\right]z + \nu(2-k)x + c(t). \qquad (3.2.4.37)$$

Заметим, что произвольная функция φ, входящая в первую формулу решения (3.2.4.36), сокращается и не входит в итоговый результат. Функция давления, соответствующая решению (3.2.4.37), выражается формулой

$$F = \left[\frac{1}{k-2}\frac{a''_t}{a} + \frac{3-k}{(k-2)^2}\left(\frac{a'_t}{a}\right)^2\right]x + b'_t + \frac{ba'_t}{(k-2)a}, \quad a = a(t), \quad b = b(t). \qquad (3.2.4.38)$$

Решение 2. Возьмем $u = \xi^3$ из второй строки в табл. 3.3. В этом случае следует положить $k = 3$ в (3.2.4.30) и учесть дополнительную связь $\Psi_7 = 6\Psi_1$, что приводит к определяющей системе

$$g_t + gg_x + 6\nu f\varphi^2\psi - F = 0, \qquad (3.2.4.39)$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + 2f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0, \qquad (3.2.4.40)$$

$$3f\varphi_x + f_x\varphi = 0, \qquad (3.2.4.41)$$

$$\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 - \nu\varphi^2 = 0. \qquad (3.2.4.42)$$

Без ограничения общности можно положить $\varphi = 1$, что эквивалентно перенормировке ψ. Решив систему (3.2.4.39) — (3.2.4.42), в итоге получим следующее точное решение уравнения (3.2.4.4):

$$\begin{gathered} w = a(t)(z+\psi)^3 + gz - \nu x + \int(\psi_t + g\psi_x + g_x\psi)\,dx + c(t), \\ g = \frac{a'_t(t)}{a(t)}x + b(t), \end{gathered} \qquad (3.2.4.43)$$

где $\psi = \psi(t,x)$, $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — произвольные функции. Соответствующая функция давления определяется формулой

$$F = \frac{a''_{tt}}{a}x + b'_t + \frac{a'_t b}{a} + 6\nu a\psi. \tag{3.2.4.44}$$

Видно, что $F = F(t,x)$ можно взять произвольной, а ψ можно выразить через F.

Решение 3. Если взять $u = \xi^{-1}$ (строка 3 табл. 3.3), то в (3.2.4.30) надо положить $k = -1$. Учитывая дополнительную связь $\Psi_7 = -6\Psi_3$, приходим к определяющей системе УрЧП (здесь не приводится), решение которой можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&f = f(t,x) \text{ — произвольная функция},\\
&g = a(t)f^{-1/3} - \frac{1}{3}f^{-1/3}\int f^{-2/3}f_t\,dx,\\
&h = \frac{1}{6\nu}(f + gf_x) + 3\nu x + b(t),\\
&\varphi = 1, \quad \psi = \frac{1}{6\nu}f_x,\\
&F = g_t + gg_x,
\end{aligned} \tag{3.2.4.45}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции. В данном случае функцию f можно считать произвольной и положить $\varphi = 1$ (что эквивалентно перенормировке f).

Формулы (3.2.4.5) и (3.2.4.45) дают точное решение уравнения (3.2.4.4).

Решение 4. Возьмем $u = \exp\xi$ и учтем линейные соотношения для Ψ_i (см. строку 4 табл. 3.3). В результате получим определяющую систему УрЧП, решение которой дается формулами

$$\begin{aligned}
&f = f(t,x) \text{ — произвольная функция},\\
&g = \Big(\frac{\varphi'_t}{\varphi} - \nu\varphi\Big)x + a(t),\\
&h = \frac{1}{\varphi^2}\int \frac{(f\varphi)_t + \varphi(fg)_x}{f}\,dx + b(t),\\
&\varphi = \varphi(t) \text{ — произвольная функция}, \quad \psi = 0,\\
&F = g_t + gg_x,
\end{aligned} \tag{3.2.4.46}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции. Здесь считается, что функция f произвольна, а $\psi = 0$ (что эквивалентно перенормировке f).

Решение 5. Возьмем $u = \ln\xi$ (строка 5 табл. 3.3). Опуская промежуточные выкладки, выпишем точное решение уравнения (3.2.4.4):

$$w = f(t)\ln z + \Big[a(t) - \frac{f'_t(t)}{2f(t)}x\Big]z + 2\nu x + b(t), \tag{3.2.4.47}$$

где $f = f(t)$, $a = a(t)$, $b = b(t)$ — произвольные функции. Соответствующая функция давления имеет вид

$$F = a'_t - \frac{1}{2}a\frac{f'_t}{f} + \Big[\frac{3}{4}\Big(\frac{f'_t}{f}\Big)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''_{tt}}{f}\Big]x.$$

Важно отметить, что второе, третье и четвертое решения содержат произвольную функцию двух аргументов. Более того, все пять полученных решений представлены в замкнутой форме.

Замечание 3.10. *Прямой метод поиска слабых симметрий, описанный в разд. 3.2.1, позволяет найти значительно больше точных решений нелинейного уравнения (3.2.4.4), чем прямой метод редукций, изложенный в разд. 3.1.*

Один класс точных решений с обобщенным разделением переменных.

1°. *Определяющая система уравнений.* Пусть функция давления F линейна по x:

$$F(t,x) = f_1(t)x + f_0(t), \qquad (3.2.4.48)$$

где $f_1(t)$ и $f_0(t)$ — произвольные функции. Тогда уравнение (3.2.4.4) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w = \Phi(t,z)x + \Psi(t,z), \qquad (3.2.4.49)$$

где функции $\Phi = \Phi(t,z)$ и $\Psi = \Psi(t,z)$ удовлетворяют системе УрЧП:

$$\Phi_{tz} + \Phi_z^2 - \Phi\Phi_{zz} = \nu z\Phi_{zzz} + f_1(t), \qquad (3.2.4.50)$$

$$\Psi_{tz} + \Phi_z\Psi_z - \Phi\Psi_{zz} = \nu z\Psi_{zzz} + f_0(t). \qquad (3.2.4.51)$$

Уравнение (3.2.4.50) содержит одну искомую функцию Φ и не зависит от уравнения (3.2.4.51). Уравнение третьего порядка (3.2.4.51) с помощью замены $\psi = \Psi_z$ сводится к параболическому уравнению второго порядка, линейному относительно ψ.

2°. *Формула для построения точных решений уравнения (3.2.4.51).* Справедливо следующее утверждение.

Пусть $\Phi = \Phi(t,z)$ — решение уравнения (3.2.4.50). Тогда уравнение (3.2.4.51) также допускает точные решения вида

$$\Psi = A(t)\Phi - A'_t(t)z + B(t), \qquad (3.2.4.52)$$

где $B(t)$ — произвольная функция, а $A = A(t)$ — решение линейного уравнения второго порядка

$$A''_{tt} - f_1(t)A + f_0(t) = 0. \qquad (3.2.4.53)$$

Формула (3.2.4.52) позволяет строить точные решения уравнения (3.2.4.51) по известному решению уравнения (3.2.4.50).

3°. *Редукция к линейному УрЧП второго порядка.* Уравнение (3.2.4.50) допускает вырожденные решения вида

$$\Phi = a(t)z + b(t), \qquad (3.2.4.54)$$

где $b(t)$ — произвольная функция, а функция $a = a(t)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка $a'_t + a^2 = f_1(t)$, которое является уравнением Риккати [288]. С учетом (3.2.4.54) уравнение (3.2.4.51) принимает вид

$$\psi_t + a(t)\psi - [a(t)z + b(t)]\psi_z = \nu z\psi_{zz} + f_0(t), \qquad \psi = \Psi_z. \qquad (3.2.4.55)$$

Если $b(t) = 0$, то преобразование

$$\begin{gathered}\psi = \exp\Bigl[-\int a(t)\,dt\Bigr]\Bigl[\Omega(\tau,\zeta) + \int f_0(t)\sigma(t)\,dt\Bigr],\\ \tau = \nu\int \sigma(t)\,dt, \quad \zeta = z\sigma(t), \quad \sigma(t) = \exp\Bigl[\int a(t)\,dt\Bigr]\end{gathered} \tag{3.2.4.56}$$

приводит (3.2.4.55) к более простому уравнению

$$\Omega_\tau = \zeta\Omega_{\zeta\zeta}. \tag{3.2.4.57}$$

В справочнике [285] (см. стр. 95) описано много точных решений уравнения (3.2.4.57). В частности, уравнение (3.2.4.57) имеет решения

$$\begin{aligned}&\Omega = 2C_1\tau\zeta + C_1\zeta^2 + C_2,\\ &\Omega = C_1\exp\Bigl(-\frac{\zeta}{\tau + C_2}\Bigr) + C_3,\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

4°. *Решения, содержащие экспоненциальную функцию.* Уравнение (3.2.4.50) допускает невырожденное решение, содержащие экспоненциальную функцию:

$$\varPhi = a(t)e^{\lambda(t)z} + b(t)z + c(t), \tag{3.2.4.58}$$

где функциональные коэффициенты $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$, $\lambda = \lambda(t)$ удовлетворяют трем уравнениям

$$\begin{aligned}&\lambda'_t - b\lambda - \nu\lambda^2 = 0,\\ &a'_t + 3ab + \nu a\lambda - ac\lambda = 0,\\ &b'_t + b^2 = f_1(t).\end{aligned} \tag{3.2.4.59}$$

Здесь второе уравнение было преобразовано с помощью первого уравнения. Функции a и λ в (3.2.4.59) можно считать произвольными. Тогда из первых двух уравнений без интегрирования можно найти функции b и c. Последнее уравнение определяет функцию f_1.

Пусть функция $\varPhi$ определяется уравнениями (3.2.4.58) и (3.2.4.59), а следовательно, является решением уравнения (3.2.4.50). Тогда уравнение (3.2.4.51) имеет точное решение

$$\varPsi = \alpha(t)e^{\lambda(t)z} + \beta(t)z + \gamma(t), \tag{3.2.4.60}$$

где $\gamma(t)$ — произвольная функция, а $\alpha = \alpha(t)$ и $\beta = \beta(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}&\alpha'_t + 2b\alpha + a\beta + \nu\alpha\lambda - c\alpha\lambda = 0,\\ &\beta'_t + b\beta = f_0(t).\end{aligned} \tag{3.2.4.61}$$

Считая функцию α произвольной, можно легко найти β из первого уравнения без интегрирования. Второе уравнение определяет f_0.

Функции (3.2.4.58) и (3.2.4.60), коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям (3.2.4.59) и (3.2.4.61), дают точное решение системы (3.2.4.50) — (3.2.4.51). Эти формулы и уравнения определяют точные решения вида (3.2.4.49) уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя (3.2.4.4).

3.2.5. Уравнения плоского и осесимметричного пограничного слоя для неньютоновских жидкостей

Уравнения плоского пограничного слоя для неньютоновских жидкостей. Помимо классической модели ньютоновской жидкости (уравнения пограничного слоя для этой модели приведены в разд. 3.2.3 и 3.2.4), в приложениях довольно часто используются более сложные реологические модели неньютоновских жидкостей (см., например, [65, 66, 72, 95, 180, 279]).

Система уравнений нестационарного плоского ламинарного пограничного слоя для степенóй ньютоновской жидкости имеет вид [65, 72, 279]:

$$U_t + UU_x + VU_y = \kappa U_y^{n-1} U_{yy} + F(t, x), \tag{3.2.5.1}$$

$$U_x + V_y = 0 \tag{3.2.5.2}$$

где t — время, x и y — продольная и поперечная координаты (значение $y = 0$ соответствуют поверхности тела), U и V — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, $F(t, x) = -p_x/\rho$ — заданная функция (пропорциональная продольному градиенту давления), p — давление, ρ — массовая плотность, κ — эффективная вязкость, $n > 0$ — реологический параметр жидкости ($n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости). Жидкость предполагается несжимаемой и $U_y \geqslant 0$.

Введение функции тока W по формулам (3.2.3.3) приводит систему УрЧП (3.2.5.1) — (3.2.5.2) к одному нелинейному УрЧП третьего порядка

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} = \kappa W_{yy}^{n-1} W_{yyy} + F(t, x). \tag{3.2.5.3}$$

В [16, 17, 35, 46, 65, 265, 279, 329] указаны точные решения и преобразования стационарных и нестационарных уравнений (3.2.5.1) — (3.2.5.2) и (3.2.5.3) для степенных жидкостей ($n \neq 1$).

Уравнения осесимметричного пограничного слоя для неньютоновских жидкостей. Система уравнений осесимметричного нестационарного ламинарного пограничного слоя для степеннóй неньютоновской жидкости имеет вид

$$U_t + UU_x + VU_y = \kappa U_y^{n-1} U_{yy} + F(t, x), \tag{3.2.5.4}$$

$$(rU)_x + (rV)_y = 0, \qquad r = r(x), \tag{3.2.5.5}$$

где x и y — продольная и поперечная координаты (соответствующие единичные векторы $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ направлены по касательной и по нормали к поверхности тела вращения), U и V — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, $F(t, x) = -p_x/\rho$ — заданная функция, а $r = r(x)$ — безразмерный радиус поперечного сечения, перпендикулярного оси вращения и определяющего форму тела. Остальные обозначения такие же, как и в уравнении (3.2.5.3).

Введение функции тока W по формулам (3.2.3.7) преобразует систему (3.2.5.4) — (3.2.5.5) к одному нелинейному УрЧП третьего порядка

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} - \frac{r'_x}{r} W W_{yy} = \kappa W_{yy}^{n-1} W_{yyy} + F(t, x). \tag{3.2.5.6}$$

Уравнение (3.2.5.6) совпадает с (3.2.5.3) при $r(x) = 1$. Наличие в левой части уравнения (3.2.5.6) функции $r(x) \neq \text{const}$ значительно усложняет его анализ (особенно, если $r(x)$ — произвольная функция).

Далее будем рассматривать общий случай уравнения (3.2.5.6), когда $r(x)$ — произвольная функция. Допустимые функции давления $F(t,x)$, а также значения реологического параметра n, подлежат определению в ходе анализа.

Преобразование к уравнению плоского пограничного слоя с переменной вязкостью. Введя новые переменные

$$z = r(x)y, \quad w = r(x)W, \tag{3.2.5.7}$$

преобразуем уравнение (3.2.5.6) к виду [308]:

$$w_{tz} + w_z w_{xz} - w_x w_{zz} = \kappa r^{n+1}(x) w_{zz}^{n-1} w_{zzz} + F(t,x). \tag{3.2.5.8}$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение нестационарного плоского пограничного слоя с переменной вязкостью

$$\kappa_{\text{e}} = \kappa r^{n+1}(x),$$

зависящей от продольной координаты x. Функция давления $F(t,x)$ не меняется.

В частном случае $r(x) \equiv 1$ уравнение (3.2.5.8) совпадает с уравнением плоского пограничного слоя (3.2.5.3).

Замечание 3.11. *В [40] уравнение третьего порядка (3.2.5.8) было сначала приведено к уравнению второго порядка с помощью преобразования типа Крокко, в котором $\mu = w_z$ и $u = w_{zz}$ использовались в качестве новых переменных вместо z и w, а затем для полученного уравнения были найдены несколько точных решений.*

Формулы, позволяющие обобщать точные решения. Уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя степенных жидкостей имеют замечательные свойства, которые сформулированы ниже в виде двух утверждений [40, 308].

Утверждение 1. Пусть $w(t,x,z)$ — решение уравнения (3.2.5.8). Тогда функция

$$w_1 = w(t,x,\zeta) + \frac{\partial}{\partial t}\int \phi(t,x)\,dx + p(t), \quad \zeta = z + \phi(t,x), \tag{3.2.5.9}$$

где $\phi(t,x)$ и $p(t)$ — произвольные функции, также является решением этого уравнения.

Утверждение 2. Пусть $W(t,x,y)$ — решение уравнение нестационарного осесимметричного пограничного слоя (3.2.5.6). Тогда функция

$$W_1 = W(t,x,\eta) + \frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int r(x)\phi(t,x)\,dx + p(t)\right], \quad \eta = y + \phi(t,x), \tag{3.2.5.10}$$

где $\phi(t,x)$ и $p(t)$ — произвольные функции, также является решением этого уравнения.

Утверждения 1 и 2 доказываются прямой проверкой. Они справедливы для любых функций $r(x)$ и $F(t,x)$, входящих в уравнения (3.2.5.6) и (3.2.5.8), и позволяют обобщать точные решения путем включения в них дополнительных произвольных функций (в [40] сформулированные утверждения были использованы для построения точных решений рассматриваемых нелинейных УрЧП).

Общий вид решения. Определяющие уравнения. Редукция к ОДУ. Как и в разд. 3.2.3 и 3.2.4, ищем точные решения уравнения (3.2.5.8) в виде

$$w = fu(\xi) + gz + h, \qquad \xi = \varphi z + \psi, \tag{3.2.5.11}$$

где функции $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$, $u = u(\xi)$ подлежат определению в ходе анализа. Для конкретности далее предполагается, что $f > 0$ и $g > 0$.

Подставив (3.2.5.11) в (3.2.5.8), получим уравнение, которое удобно представить в билинейной форме

$$\sum_{n=1}^{7} \Phi_n[x,t]\Psi_n[\xi] = 0. \tag{3.2.5.12}$$

Функции $\Phi_n = \Phi_n[x,t]$ зависят функциональных коэффициентов (и их производных), входящих в уравнение (3.2.5.8) и решение (3.2.5.11), и определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = g_t + gg_x - F, \quad \Phi_2 = (f\varphi)_t + (fg\varphi)_x, \quad \Phi_3 = f\varphi(f\varphi)_x,\\
&\Phi_4 = f(\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2),\\
&\Phi_5 = f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi), \quad \Phi_6 = -ff_x\varphi^2, \quad \Phi_7 = -\kappa r^{n+1}f^n\varphi^{2n+1},
\end{aligned} \tag{3.2.5.13}$$

а функции $\Psi_n = \Psi_n[\xi]$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = u'_\xi, \quad \Psi_3 = (u'_\xi)^2, \quad \Psi_4 = u''_{\xi\xi},\\
&\Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_6 = uu''_{\xi\xi}, \quad \Psi_7 = (u''_{\xi\xi})^{n-1}u'''_{\xi\xi\xi}.
\end{aligned} \tag{3.2.5.14}$$

Уравнение (3.2.5.12) — (3.2.5.14) сводится к одному ОДУ для функции $u = u(\xi)$, если все Φ_n ($n \leqslant 6$) положить пропорциональными Φ_7, т. е.

$$\Phi_n = -a_n\Phi_7 \quad (n = 1, \dots, 6), \tag{3.2.5.15}$$

где $a_1, \dots, a_6$ — свободные параметры. Подставив выражения (3.2.5.13) в равенства (3.2.5.15), приходим к нелинейной системе УрЧП для функций $f = f(t,x)$,

$g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$:

$$g_t + gg_x - F = a_1\kappa r^{n+1} f^n \varphi^{2n+1}, \qquad (3.2.5.16)$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x = a_2\kappa r^{n+1} f^n \varphi^{2n+1}, \qquad (3.2.5.17)$$

$$(f\varphi)_x = a_3\kappa r^{n+1} f^{n-1} \varphi^{2n}, \qquad (3.2.5.18)$$

$$\varphi\psi_t - \varphi_t\psi + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = a_4\kappa r^{n+1} f^{n-1} \varphi^{2n+1}, \qquad (3.2.5.19)$$

$$\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi = a_5\kappa r^{n+1} f^{n-1} \varphi^{2n+1}, \qquad (3.2.5.20)$$

$$f_x = -a_6\kappa r^{n+1} f^{n-1} \varphi^{2n-1}. \qquad (3.2.5.21)$$

В результате уравнение (3.2.5.12) редуцируется к нелинейному ОДУ для функции $u = u(\xi)$:

$$a_1 + a_2 u'_\xi + a_3(u'_\xi)^2 + a_4 u''_{\xi\xi} + a_5\xi u''_{\xi\xi} + a_6 u u''_{\xi\xi} = (u''_{\xi\xi})^{n-1} u'''_{\xi\xi\xi}. \qquad (3.2.5.22)$$

Любое совместное решение определяющей системы УрЧП первого порядка (3.2.5.16) – (3.2.5.21) вместе с соответствующим решением ОДУ третьего порядка (3.2.5.22) порождают точное решение уравнения (3.2.5.8) вида (3.2.5.11).

О понижении порядка и некоторых частных решениях нелинейного ОДУ (3.2.5.22) см. [308].

Анализ и решения определяющей системы (3.2.5.16) – (3.2.5.21). Система (3.2.5.16) – (3.2.5.21) распадается на несколько более простых подсистем, которые можно анализировать последовательно.

Подсистема, состоящая из уравнений (3.2.5.18) и (3.2.5.21), позволяет выразить f и φ через $r = r(x)$. При известных f и φ подсистема, состоящая из уравнений (3.2.5.17) и (3.2.5.20), служит для определения g и r, откуда следует, что в общем случае $r = r(x)$ не может быть произвольной функцией. При известных g и r функция давления находится по формуле

$$F = g_t + gg_x - a_1\kappa r^{n+1} f^n \varphi^{2n+1}, \qquad (3.2.5.23)$$

которая выводится из (3.2.5.16). В уравнении (3.2.5.19) функцию ψ можно считать произвольной. Интегрируя по x, получим следующее выражение для функции h:

$$h = \int \frac{1}{\varphi^2}\bigl(\varphi\psi_t - \varphi_t\psi + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - a_4\kappa r^{n+1} f^{n-1}\varphi^{2n+1}\bigr)\,dx + p(t), \qquad (3.2.5.24)$$

где $p(t)$ — произвольная функция.

Далее будем считать, что $r = r(x)$ — произвольная функция.

Начнем с анализа подсистемы, состоящей из двух уравнений (3.2.5.17) и (3.2.5.20). Выделив производную g_x, перепишем уравнения в виде

$$g_x + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi} g = a_2\kappa r^{n+1} f^{n-1} \varphi^{2n} - \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi}, \qquad (3.2.5.25)$$

$$g_x - \frac{\varphi_x}{\varphi} g = -a_5\kappa r^{n+1} f^{n-1} \varphi^{2n} + \frac{\varphi_t}{\varphi}. \qquad (3.2.5.26)$$

Найдем условия, при выполнении которых уравнения (3.2.5.25) и (3.2.5.26) совпадают. В этом случае $r = r(x)$ можно считать произвольной, а g определяется из уравнения (3.2.5.26), и следовательно, выражается через φ и r.

Приравнивая функциональные коэффициенты при g, а также правые части уравнений (3.2.5.25) и (3.2.5.26), получим

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi} = 0, \quad \frac{\varphi_t}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi} = (a_2 + a_5)\kappa r^{n+1} f^{n-1} \varphi^{2n}. \tag{3.2.5.27}$$

Интегрируя первое уравнение в (3.2.5.27), имеем

$$f = \lambda(t)\varphi^{-2}, \tag{3.2.5.28}$$

где $\lambda(t)$ — произвольная функция. Подстановка этого выражения во второе уравнение (3.2.5.27) дает

$$[\ln \lambda(t)]'_t = (a_2 + a_5)\kappa r^{n+1}(x)\lambda^{n-1}\varphi^2. \tag{3.2.5.29}$$

Уравнению (3.2.5.29) можно удовлетворить в следующих двух случаях:

$$(a) \quad a_5 = -a_2, \quad \lambda(t) = \lambda_0, \quad \varphi = \varphi(t,x) \text{ — произвольная}; \tag{3.2.5.30}$$

$$(b) \quad \varphi = \frac{\sigma(t)}{r^{(n+1)/2}(x)}, \quad \lambda(t) = \left[(a_2 + a_5)(1-n)\,\kappa \int \sigma^2(t)\,dt + C_0\right]^{\frac{1}{1-n}}, \tag{3.2.5.31}$$

где C_0 — произвольная постоянная, а $\sigma(t)$ — произвольная функция.

Случай (a). Без ограничения общности можно рассмотреть случай $\lambda_0 = 1$. С учетом (3.2.5.28) имеем $f = \varphi^{-2}$. Тогда уравнения (3.2.5.18) и (3.2.5.21) принимают вид

$$\varphi'_x = -a_3\kappa r^{n+1}\varphi^4, \quad \varphi'_x = \tfrac{1}{2}a_6\kappa r^{n+1}\varphi^4. \tag{3.2.5.32}$$

Эти два уравнения совместны, если $a_6 = -2a_3$. Интегрируя первое уравнение (3.2.5.32), а затем (3.2.5.26), получим точное решение уравнения (3.2.5.8) вида (3.2.5.11), в котором следует положить

$$\begin{gathered} f = \left[3a_3\kappa \int r^{n+1}(x)\,dx + b(t)\right]^{2/3}, \\ \varphi = \left[3a_3\kappa \int r^{n+1}(x)\,dx + b(t)\right]^{-1/3}, \\ g = c(t)\varphi + \varphi \int \left[\frac{\varphi_t}{\varphi^2} + a_2\kappa r^{n+1}(x)\varphi\right] dx, \end{gathered} \tag{3.2.5.33}$$

где $b = b(t)$ и $c = c(t)$ — произвольные функции, h определяется формулой (3.2.5.24), $\psi = \psi(t,x)$ — произвольная функция, а $u = u(\xi)$ — функция, удовлетворяющая ОДУ (3.2.5.22), где $a_5 = -a_2$ и $a_6 = -2a_3$. Функция давления F

находится по формуле (3.2.5.23). Следует отметить, что при $a_3 \neq 0$ функцию g можно выразить в виде

$$g = c(t)\varphi - \frac{1}{3}b_t'(t)\varphi \int \varphi^2\,dx + \frac{a_2}{2a_3}\varphi^{-1}.$$

Случай (b). Из формул (3.2.5.28) и (3.2.5.31), а также уравнений (3.2.5.18) и (3.2.5.21), следует, что должны выполняться условия $a_6 = -2a_3$ и $r(x) = (\alpha x + \beta)^{2/(n+1)}$, где α и β — некоторые константы. Это означает, что $r(x)$ не является произвольной функцией. Этот частный случай здесь не рассматривается.

Решения определяющей системы (3.2.5.16)—(3.2.5.21) для плоского пограничного слоя при $r(x) \equiv 1$. Рассмотрим теперь частный случай уравнения плоского пограничного слоя (3.2.5.8) при $r(x) = 1$ и опишем его некоторые точные решения вида (3.2.5.11). В двух случаях, рассматриваемых ниже, будут приводиться только выражения для функций $\varphi = \varphi(t,x)$, $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$. Функция $\psi = \psi(t,x)$ — произвольная, а функции $h = h(t,x)$ и $F = F(t,x)$ определяются формулами (3.2.5.24) и (3.2.5.23), где $r(x) = 1$, а $u = u(\xi)$ удовлетворяет ОДУ (3.2.5.22).

1°. *Случай* $a_5 = -a_2$, $a_6 = -2a_3 \neq 0$. Точные решения вида (3.2.5.11) получаются из (3.2.5.33), (3.2.5.23), (3.2.5.24), если положить в них $r(x) = 1$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= \bigl[3a_3\kappa x + b(t)\bigr]^{-1/3}, \\ f &= \bigl[3a_3\kappa x + b(t)\bigr]^{2/3}, \\ g &= c(t)\varphi - \frac{1}{3a_3\kappa}b_t'(t) + \frac{a_2}{2a_3}\varphi^{-1}, \end{aligned} \tag{3.2.5.34}$$

где $b = b(t)$ и $c = c(t)$ — произвольные функции.

2°. *Случай* $a_3 = a_6 = 0$. Точные решения вида (3.2.5.11) определяются формулами

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi(t) \text{ — произвольная функция}, \\ &f = \varphi^{-2}\biggl[(a_2 + a_5)(1-n)\,\kappa \int \varphi^2(t)\,dt + C_0\biggr]^{\frac{1}{1-n}}, \\ &g = \Bigl(\frac{\varphi_t}{\varphi} - a_5\kappa f^{n-1}\varphi^{2n}\Bigr)x + c(t), \end{aligned} \tag{3.2.5.35}$$

где $c(t)$ — произвольная функция, C_0 — произвольная постоянная, а $n \neq 1$. Три функции (3.2.5.35) удовлетворяют четырем уравнениям (3.2.5.17), (3.2.5.18), (3.2.5.20), (3.2.5.21) при $r = 1$ и $a_3 = a_6 = 0$.

Использование прямого метода поиска слабых симметрий для построения точных решений. Уравнение пограничного слоя (3.2.5.8) для произвольной функции $r(x)$ имеет больше точных решений вида (3.2.5.11), чем получено ранее путем редукции к одному ОДУ (3.2.5.22) при $a_5 = -a_2$ и $a_6 = -2a_3$.

Следуя [308], опишем процедуру построения других точных решений вида (3.2.5.11).

Определяющая система (3.2.5.16)—(3.2.5.21) была получена в предположении, что первые шесть функций Ψ_i из (3.2.5.14) линейно независимы.

Если некоторые из функций Ψ_i линейно зависимы, то следует выбрать линейно независимую подсистему $\{\Psi_j\}$, через элементы которой надо выразить остальные функции. Затем соотношение (3.2.5.11) необходимо переписать в виде линейной комбинации функций Ψ_j и приравнять нулю функциональные множители при Ψ_j. Полученная в результате указанной процедуры модифицированная определяющая система УрЧП не только будет отличаться от системы (3.2.5.16) — (3.2.5.21), но также будет содержать меньше уравнений. Чем больше линейных соотношений будет между функциями Ψ_i из (3.2.5.14), тем меньше уравнений будет входить в определяющую систему и тем больше произвольных функций возникнут в ее решении.

В качестве функций $u = u(\xi)$, определяющих Ψ_i в (3.2.5.14), следует брать частные решения ОДУ (3.2.5.22) при некоторых значениях параметров a_i. Решения вида (3.2.5.11), отличные от решений, описываемых уравнениями (3.2.5.16) — (3.2.5.22), возникают, когда имеются две или более линейно независимых подсистем функций в (3.2.5.14).

В табл. 3.1 были приведены функции $u = u(\xi)$, порождающие два или три линейных соотношения между функциями (3.2.5.14) для ньютоновской жидкости (при $n = 1$).

Построение точных решений для $u = \varepsilon\xi^m$ при $n \neq 1$. Для степенны́х неньютоновских жидкостей подстановка в формулы (3.2.5.14) степенно́й функции $u = \varepsilon\xi^m$, где $\xi > 0$ и $\varepsilon = \operatorname{sign}[m(m-1)]$, дает

$$\begin{gathered}\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = \varepsilon m\xi^{m-1}, \quad \Psi_3 = m^2\xi^{2m-2}, \quad \Psi_4 = \varepsilon m(m-1)\xi^{m-2}, \\ \Psi_5 = \varepsilon m(m-1)\xi^{m-1}, \quad \Psi_6 = m(m-1)\xi^{2m-2}, \\ \Psi_7 = (m-2)[\varepsilon m(m-1)]^n\xi^{mn-2n-1}.\end{gathered} \tag{3.2.5.36}$$

Замечание 3.12. *Коэффициент $\varepsilon = \pm 1$ введен для того, чтобы обеспечить неотрицательность выражения $\varepsilon m(m-1) = |m(m-1)|$. Это позволяет избежать отрицательного подкоренного выражения в Ψ_7, которое может появиться при дробных значениях n (например, если $0 < n < \frac{1}{2}$, то из строк 3 и 4 табл. 3.4 следует, что $m(m-1) < 0$).*

Из (3.2.5.36) следует, что при любых n, имеются два линейных соотношения

$$\Psi_5 = (m-1)\Psi_2, \quad m\Psi_6 = (m-1)\Psi_3. \tag{3.2.5.37}$$

В общем случае имеются вырожденные решения, соответствующие $m = 1$ и $m = 2$ и приводящие к тому, что $\Psi_7 = 0$; эти решения рассматриваться не будут.

Невырожденные решения характеризуются линейными связями $\Psi_7 = k_i\Psi_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$. В табл. 3.4 приведены функции степенного вида $u = \varepsilon\xi^m$, которые порождают три линейных соотношения между функциями (3.2.5.14) для неньютоновских жидкостей.

Таблица 3.4. Степенны́е порождающие функции $u = \varepsilon\xi^m$, где $\varepsilon = \operatorname{sign}[m(m-1)]$, и соответствующие линейные соотношения вида $\Psi_7 = k_i\Psi_i$ для неньютоновских жидкостей ($n \neq 1$); еще два соотношения указаны в (3.2.5.37).

№	Степень m	Линейные соотношения	Ограничения
1	$m=\frac{2n+1}{n}$	$\Psi_7=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^n\Psi_1$	$n\neq 0$
2	$m=\frac{2n}{n-1}$	$\Psi_7=\varepsilon\frac{m-2}{m}\lvert m(m-1)\rvert^n\Psi_2$	$n\neq 0,\ 1$
3	$m=\frac{2n-1}{n-2}$	$\Psi_7=\frac{m-2}{m^2}\lvert m(m-1)\rvert^n\Psi_3$	$n\neq \frac{1}{2},\ 2$
4	$m=\frac{2n-1}{n-1}$	$\Psi_7=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^{n-1}\Psi_4$	$n\neq \frac{1}{2},\ 1$

Решение 1 для $u = \varepsilon\xi^{(2n+1)/n}$. Построим семейство точных решений, соответствующих функции $u = \varepsilon\xi^{\frac{2n+1}{n}}$ из первой строки в табл. 3.4. С учетом выражений (3.2.5.14) и линейных соотношений между Ψ_i (см. формулы (3.2.5.36)—(3.2.5.37) и табл. 3.4 при $m=\frac{2n+1}{n}$), уравнение (3.2.5.12)—(3.2.5.14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\big[g_t + gg_x - F - \kappa|m(m-1)|^n(m-2)r^{n+1}f^n\varphi^{2n+1}\big]\Psi_1 +\\ &\quad+\big[(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (m-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi)\big]\Psi_2 +\\ &\quad+ f\varphi\big[(f\varphi)_x - \tfrac{m-1}{m}f_x\varphi\big]\Psi_3 +\\ &\quad+ f(\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2)\Psi_4 = 0, \quad m = \tfrac{2n+1}{n}.\end{aligned}$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при всех Ψ_i, получим

$$g_t + gg_x - F - \kappa|m(m-1)|^n(m-2)r^{n+1}f^n\varphi^{2n+1} = 0, \qquad (3.2.5.38)$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (m-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0, \qquad (3.2.5.39)$$

$$mf\varphi_x + f_x\varphi = 0, \qquad (3.2.5.40)$$

$$\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = 0. \qquad (3.2.5.41)$$

В последних двух уравнениях было произведено деление на ненулевые множители и преобразовано уравнение (3.2.5.40).

Система УрЧП (3.2.5.38) — (3.2.5.41) имеет на два уравнения меньше, чем система (3.2.5.16)—(3.2.5.21). Кроме того, нет необходимости исследовать уравнения на совместность. Уравнения (3.2.5.38)—(3.2.5.40) позволяют найти функции f, g, F при произвольной $r(x)$. Функции $\varphi = \varphi(t,x)$ и $\psi = \psi(t,x)$ остаются произвольными, а h определяется формулой (3.2.5.24) при $a_4 = 0$.

Общее решение уравнения (3.2.5.40) имеет вид

$$f = a(t)\varphi^{-m} = a(t)\varphi^{-\frac{2n+1}{n}}, \qquad (3.2.5.42)$$

где $a(t)$ — произвольная функция. Подставив это выражение в (3.2.5.39) и решив полученное уравнение, находим функцию g:

$$g = \frac{a_t'(t)}{(m-2)a(t)}x + b(t) = n\frac{a_t'(t)}{a(t)}x + b(t), \qquad (3.2.5.43)$$

где $b(t)$ — произвольная функция. Подставив (3.2.5.42) и (3.2.5.43) в уравнение (3.2.5.38), определяем функцию давления

$$F = g_t + gg_x - \kappa|m(m-1)|^n (m-2) r^{n+1} f^n \varphi^{2n+1}, \quad m = \frac{2n+1}{n}. \quad (3.2.5.44)$$

Решение 2 для $u = \varepsilon\xi^{2n/(n-1)}$. Теперь возьмем функцию $u = \varepsilon\xi^{\frac{2n}{n-1}}$ из второй строки табл. 3.4. Учитывая формулы (3.2.5.14) и используя линейные соотношения между Ψ_i (см. выражения (3.2.5.36) — (3.2.5.37) и табл. 3.4 при $m = \frac{2n}{n-1}$), представим уравнение (3.2.5.12) — (3.2.5.14) в виде

$$\begin{aligned}
&(g_t + gg_x - F)\Psi_1 + \\
&\quad + \big[(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (m-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) - \\
&\quad - \kappa\varepsilon\frac{m-2}{m}|m(m-1)|^n r^{n+1} f^n \varphi^{2n+1}\big]\Psi_2 + \\
&\quad + f\varphi\big[(f\varphi)_x - \tfrac{m-1}{m} f_x\varphi\big]\Psi_3 + \\
&\quad + f(\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2)\Psi_4 = 0, \quad m = \frac{2n}{n-1}.
\end{aligned}$$

Приравнивая нулю функциональные множители при Ψ_i, получим определяющую систему

$$\begin{aligned}
&g_t + gg_x - F = 0, \\
&(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (m-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) \\
&\qquad - \kappa\varepsilon\frac{m-2}{m}|m(m-1)|^n r^{n+1} f^n \varphi^{2n+1} = 0, \\
&mf\varphi_x + f_x\varphi = 0, \\
&\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = 0.
\end{aligned} \quad (3.2.5.45)$$

Последнее уравнение в системе (3.2.5.45) совпадает с (3.2.5.41), а третье уравнение в (3.2.5.45) отличается от уравнения (3.2.5.40) только значением m. Функции $\varphi = \varphi(t,x)$ и $\psi = \psi(t,x)$ остаются произвольными, а h определяется формулой (3.2.5.24) при $a_4 = 0$. Функции f и g, а также функция давления F, находятся по формулам

$$\begin{aligned}
&f = a(t)\varphi^{-m} = a(t)\varphi^{-\frac{2n}{n-1}}, \\
&g = \frac{a_t'(t)}{(m-2)a(t)}x - \frac{\kappa\varepsilon}{m}|m(m-1)|^n a^{n-1}(t)\int r^{n+1}(x)\,dx + b(t), \\
&F = g_t + gg_x,
\end{aligned} \quad (3.2.5.46)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции, а $m = \frac{2n}{n-1}$.

Формулы (3.2.5.11), (3.2.5.24) при $a_4 = 0$ и (3.2.5.46) при произвольных $\varphi = \varphi(t,x)$ и $\psi = \psi(t,x)$ описывают точное решение уравнения (3.2.5.8) для произвольной функции формы тела $r(x)$.

Решение 3 для $u = \varepsilon\xi^{(2n-1)/(n-2)}$. Возьмем $u = \varepsilon\xi^{\frac{2n-1}{n-2}}$ из третьей строки табл. 3.4. Учитывая формулы (3.2.5.14), (3.2.5.36), (3.2.5.37) при $m = \frac{2n-1}{n-2}$

и рассуждая так же, как и при построении решения 1, из (3.2.5.12)—(3.2.5.14) получим определяющую систему

$$\begin{aligned}
&g_t + gg_x - F = 0,\\
&(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (m-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0,\\
&mf\varphi_x + f_x\varphi - \kappa\frac{m-2}{m}|m(m-1)|^n r^{n+1} f^{n-1}\varphi^{2n} = 0,\\
&\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.5.47}$$

Функции $\varphi = \varphi(t,x)$ и $\psi = \psi(t,x)$ в системе (3.2.5.47) можно считать произвольными. Третье уравнение (3.2.5.47) легко интегрируется, поскольку оно является ОДУ Бернулли для функции f, в котором x считается независимой переменной, а t играет роль параметра. Второе уравнение (3.2.5.47) является линейным ОДУ первого порядка для функции g с независимой переменной x и параметром t. Решения этих двух ОДУ опускаем. Функции F и h легко находятся из первого и последнего уравнений в (3.2.5.47).

Решение 4 для $u = \varepsilon\xi^{(2n-1)/(n-1)}$. Построим решение для $u = \varepsilon\xi^{\frac{2n-1}{n-1}}$ из четвертой строки табл. 3.4. Учитывая формулы (3.2.5.14), (3.2.5.36), (3.2.5.37) при $m = \frac{2n-1}{n-1}$ и рассуждая, как и ранее, из уравнения (3.2.5.12)—(3.2.5.14) выводим определяющую систему

$$\begin{aligned}
&g_t + gg_x - F = 0,\\
&(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (m-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0,\\
&mf\varphi_x + f_x\varphi = 0,\\
&\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 -\\
&\qquad - \kappa(m-2)|m(m-1)|^{n-1} r^{n+1} f^{n-1}\varphi^{2n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Ее общее решение записывается в виде

$$\begin{aligned}
&f = a(t)\varphi^{-m} = a(t)\varphi^{-\frac{2n-1}{n-1}},\\
&g = \frac{a'_t(t)}{(m-2)a(t)}x + b(t) = (n-1)\frac{a'_t(t)}{a(t)}x + b(t),\\
&h = \int \frac{1}{\varphi^2}\bigl\{\varphi\psi_t - \varphi_t\psi + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi\\
&\qquad - \kappa(m-2)|m(m-1)|^{n-1} r^{n+1} f^{n-1}\varphi^{2n+1}\bigr\}\,dx + c(t),\\
&F = g_t + gg_x,
\end{aligned}$$

где $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — произвольные функции, а $m = \frac{2n-1}{n-1}$.

Решение 5 для $u = -\ln|\xi|$. Подставив в (3.2.5.14) логарифмическую функцию $u = -\ln|\xi|$, получим

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = -\xi^{-1}, \quad \Psi_3 = \xi^{-2}, \quad \Psi_4 = \xi^{-2},\\
&\Psi_5 = \xi^{-1}, \quad \Psi_6 = -\xi^{-2}\ln|\xi|, \quad \Psi_7 = -2\xi^{-2n-1}.
\end{aligned} \tag{3.2.5.48}$$

Видно, что имеют место два линейных соотношения:

$$\Psi_5 = -\Psi_2, \quad \Psi_4 = \Psi_3. \tag{3.2.5.49}$$

Нетривиальные решения появляются, если $\Psi_7 = k_i\Psi_i$, где $i = 1, 2, 3$. Из (3.2.5.48) следует, что есть три допустимых значения реологического параметра: $n = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$. Первые два не имеют физического смысла и поэтому опускаются.

При $n = \frac{1}{2}$ имеем $\Psi_7 = -2\Psi_3$. Используя формулы (3.2.5.14), (3.2.5.48), (3.2.5.49) и уравнение (3.2.5.12)—(3.2.5.14), и рассуждая, как и ранее, получим определяющую систему УрЧП:

$$\begin{aligned}
&g_t + gg_x - F = 0,\\
&(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x - f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0,\\
&\varphi(f\varphi)_x + \varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 + 2\kappa r^{3/2}f^{-1/2}\varphi^2 = 0,\\
&f_x = 0.
\end{aligned}$$

Ее общее решение можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&f = f(t), \quad g = -\frac{f_t'(t)}{2f(t)}x + b(t),\\
&h = \int \frac{1}{\varphi^2}\left[f\varphi\varphi_x + \varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi + 2\kappa r^{3/2}f^{-1/2}\varphi^2\right]dx + c(t),\\
&F = g_t + gg_x,
\end{aligned}$$

где $f(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$ — произвольные функции.

Решение 6 для $u = \exp\xi$ при $n = 2$. Подставив в (3.2.5.14) экспоненциальную функцию $u = e^\xi$ и $n = 2$, имеем

$$\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = e^\xi, \quad \Psi_3 = e^{2\xi}, \quad \Psi_4 = e^\xi, \quad \Psi_5 = \xi e^\xi, \quad \Psi_6 = e^{2\xi}, \quad \Psi_7 = e^{2\xi}. \tag{3.2.5.50}$$

Видно, что данном случае выполняются три линейных соотношения:

$$\Psi_2 = \Psi_4, \quad \Psi_3 = \Psi_6 = \Psi_7. \tag{3.2.5.51}$$

Используя формулы (3.2.5.14), (3.2.5.50), (3.2.5.51) и уравнение (3.2.5.12), действуем таким же образом, как и при построении решения 1. В результате приходим к определяющей системе

$$g_t + gg_x - F = 0, \tag{3.2.5.52}$$

$$\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi = 0, \tag{3.2.5.53}$$

$$\varphi_x = \kappa r^3\varphi^4, \tag{3.2.5.54}$$

$$\begin{aligned}
&(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x +\\
&\quad + f(\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2) = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.5.55}$$

Функции $f = f(t,x)$ и $\psi = \psi(t,x)$ в системе (3.2.5.52)—(3.2.5.55) можно считать произвольными. Тогда из уравнений (3.2.5.53) и (3.2.5.54) следует, что

$$\varphi = -\left[3\kappa\int r^3\,dx + a(t)\right]^{-1/3}, \quad g = b(t)\varphi + \varphi\int\frac{\varphi_t}{\varphi^2}\,dx, \tag{3.2.5.56}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции. Функции F и h находятся из уравнений (3.2.5.52) и (3.2.5.55) и определяются по формулам

$$F = g_t + gg_x,$$
$$h = \int \frac{1}{f\varphi^2}\big[(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + f(\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi)\big]\,dx + c(t),$$

где $c(t)$ — произвольная функция.

Уравнение плоского пограничного слоя для общей модели неньютоновской жидкости. Для общей модели неньютоновской жидкости уравнение нестационарного плоского пограничного слоя для функции тока W записывается так [35, 46, 287]:

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} = [G(W_{yy})]_y + F(t, x). \qquad (3.2.5.57)$$

Здесь функция $G(U_y) = \frac{1}{\rho}\mu(U_y)U_y$ определяется реологической моделью жидкости, где $\mu(U_y) > 0$ — неньютоновской коэффициент вязкости (G — напряжение сдвига на единицу плотности жидкости). Остальные обозначения — такие же, как в уравнении (3.2.5.3). Для степенны́х жидкостей имеем $G(U_y) = (\kappa/n)|U_y|^{n-1}U_y$; в этом случае уравнение (3.2.5.57) принимает вид (3.2.5.3) при условии, что $U_y > 0$. Некоторые другие модели неньютоновской жидкости будут описаны далее (см. также [65, 95, 180, 279]).

О некоторых точных решениях и преобразованиях уравнения (3.2.5.57) см. [35, 46, 287].

Ищем точные решения уравнения (3.2.5.57) в виде

$$W = \varphi^{-2}u(\xi) + gy + h, \quad \xi = \varphi y + \psi, \qquad (3.2.5.58)$$

где функции $g = g(t, x)$, $h = h(t, x)$, $\varphi = \varphi(t, x)$, $\psi = \psi(t, x)$, $u = u(\xi)$ подлежат определению в ходе анализа.

Подставив выражение (3.2.5.58) в уравнение (3.2.5.57), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} &g_t + gg_x - F - \varphi^{-2}(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi)u'_\xi - \varphi^{-3}\varphi_x(u'_\xi)^2 + \\ &\quad + \varphi^{-2}(\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2)u''_{\xi\xi} + \\ &\quad + \varphi^{-2}(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi)\xi u''_{\xi\xi} + 2\varphi^{-3}\varphi_x u u''_{\xi\xi} = \varphi[G(u''_{\xi\xi})]'_\xi. \end{aligned} \qquad (3.2.5.59)$$

Чтобы уравнение (3.2.5.59) свелось к ОДУ для функции $u = u(\xi)$, надо положить

$$g_t + gg_x - F = a_1\varphi, \qquad (3.2.5.60)$$
$$\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi = a_2\varphi^3, \qquad (3.2.5.61)$$
$$\varphi_x = -a_3\varphi^4, \qquad (3.2.5.62)$$
$$\varphi\psi_t - \varphi_t\psi + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = a_4\varphi^3, \qquad (3.2.5.63)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольные постоянные. В результате приходим к нелинейному уравнению

$$a_1 - a_2 u'_\xi + a_3 (u'_\xi)^2 + a_4 u''_{\xi\xi} + a_2 \xi u''_{\xi\xi} - 2a_3 u u''_{\xi\xi} = [G(u''_{\xi\xi})]'_\xi. \qquad (3.2.5.64)$$

Интегрируя (3.2.5.61) и (3.2.5.62), получим

$$\varphi = \bigl[3a_3 x + b(t)\bigr]^{-1/3},$$
$$g = c(t)\varphi - \frac{1}{3a_3} b'_t(t) - \frac{a_2}{2a_3}\varphi^{-1},$$

где $b = b(t)$ и $c = c(t)$ — произвольные функции. Функции F и h легко находятся из (3.2.5.60) и (3.2.5.63); соответствующие выражения не приводятся. Функция $h = h(t, x)$ остается произвольной.

При $a_3 \neq 0$ введение новой переменной $\theta = \theta(\xi)$ по формуле

$$\theta = a_4 + a_2 \xi - 2a_3 u$$

преобразует ОДУ (3.2.5.64) к автономному уравнению, которое подстановкой $\omega(\theta) = \theta'_\xi$ сводится к ОДУ второго порядка.

При $a_3 = 0$ замена $q(\xi) = u'_\xi$ приводит уравнение (3.2.5.64) к ОДУ второго порядка.

Уравнение пограничного слоя для трехпараметрической модели жидкости. Уравнение плоского пограничного слоя для трехпараметрической полиномиальной реологической модели имеет вид

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} = (\kappa_1 + \kappa_2 W_{yy} + \kappa_3 W_{yy}^2) W_{yyy} + F(t, x), \quad (3.2.5.65)$$

где W — функция тока, которая вводится по формулам (3.2.3.3). Уравнение (3.2.5.65) является частным случаем уравнения (3.2.5.57) при

$$G(U_y) = \kappa_1 U_y + \tfrac{1}{2}\kappa_2 U_y^2 + \tfrac{1}{3}\kappa_3 U_y^3. \qquad (3.2.5.66)$$

При $\kappa_3 = 0$ имеем частный случай модели Сиско [66, 279].

Замечание 3.13. *Формально выражение (3.2.5.66) можно получить разложением неньютоновской вязкости μ в ряд по U_y с удержанием первых трех членов. Наличие трех параметров κ_i позволяет использовать представление (3.2.5.66) в широком диапазоне скоростей жидкости.*

Рассмотрим уравнение осесимметричного пограничного слоя для трехпараметрической полиномиальной реологической модели:

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} - \frac{r'_x}{r} W W_{yy} = (\kappa_1 + \kappa_2 W_{yy} + \kappa_3 W_{yy}^2) W_{yyy} + F(t, x), \qquad (3.2.5.67)$$

где функция формы тела $r = r(x)$ считается произвольной. При $r(x) = 1$ уравнение (3.2.5.67) совпадает с уравнением (3.2.5.65).

В уравнении (3.2.5.67) перейдем к переменным (3.2.5.7). В результате получим

$$w_{tz}+w_z w_{xz}-w_x w_{zz}=(\kappa_1 r^2+\kappa_2 r^3 w_{zz}+\kappa_3 r^4 w_{zz}^2)w_{zzz}+F(t,x), \tag{3.2.5.68}$$

Это уравнение допускает решение с обобщенным разделением переменных в виде многочлена третьей степени по z:

$$w=Az^3+Bz^2+Cz+D, \tag{3.2.5.69}$$

где $A=A(t)$ — произвольная функция; функции $B=B(t,x)$, $C=C(t,x)$, $D=D(t,x)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Подставив (3.2.5.69) в (3.2.5.68), после элементарных преобразований получим уравнение вида $Fz^2+Gz+H=0$. Приравнивая нулю функциональные множители F, G, H, приходим к системе УрЧП:

$$\begin{aligned} 3A'_t-3AC_x+2BB_x&=216\kappa_3 r^4 A^3,\\ B_t+CB_x-3AD_x&=18\kappa_2 r^3 A^2+72\kappa_3 r^4 A^2 B,\\ C_t+CC_x-2BD_x&=6\kappa_1 r^2 A+12\kappa_2 r^3 AB+24\kappa_3 r^4 AB^2+F. \end{aligned} \tag{3.2.5.70}$$

Полагая $B=B(t,x)$ произвольной функцией, из первых двух уравнений (3.2.5.70) находим

$$\begin{aligned} C&=\frac{1}{3A}B^2+\frac{A'_t}{A}x-72\kappa_3 A^2\int r^4\,dx+p(t),\\ D&=\frac{1}{3A}\int\bigl(B_t+CB_x-18\kappa_2 r^3 A^2-72\kappa_3 r^4 A^2 B\bigr)\,dx+q(t), \end{aligned}$$

где $A=A(t)$, $p=p(t)$, $q=q(t)$ — произвольные функции. Функция давления F определяется без интегрирования из последнего уравнения (3.2.5.70).

Уравнение пограничного слоя для модели Сиско обобщенной неньютоновской жидкости. Рассмотрим уравнение осесимметричного пограничного слоя для обобщенной модели Сиско неньютоновской жидкости:

$$W_{ty}+W_y W_{xy}-W_x W_{yy}-\frac{r'_x}{r}WW_{yy}=(\kappa_1 W_{yy}^{n_1-1}+\kappa_2 W_{yy}^{n_2-1})W_{yyy}+F(t,x), \tag{3.2.5.71}$$

где $r=r(x)$ — произвольная функция. Оно обобщает уравнение (3.2.5.6) и содержит четыре параметра: n_1, n_2, κ_1, κ_2. Частный случай $n_1=1$ (или $n_2=1$) соответствует трехпараметрической модели Сиско [66, 279].

Перепишем уравнение (3.2.5.71) в переменных (3.2.5.7):

$$w_{tz}+w_z w_{xz}-w_x w_{zz}=\bigl(\kappa_1 r^{n_1+1}w_{zz}^{n_1-1}+\kappa_2 r^{n_2+1}w_{zz}^{n_2-1}\bigr)w_{zzz}+F(t,x). \tag{3.2.5.72}$$

Анализ показывает, что уравнение (3.2.5.72) допускает решения с функциональным разделением переменных вида (3.2.5.11) для шести степенных функций $u(\xi) = \varepsilon\xi^m$, которые приведены в табл. 3.5 [308]. Первые шесть функций Ψ_i $(i=1,\ldots,6)$—такие же, как и в (3.2.5.14) и (3.2.5.36), а две другие функции определяются формулами

$$\Psi_7 = (u''_{\xi\xi})^{n_1-1}u'''_{\xi\xi\xi} = (m-2)[\varepsilon m(m-1)]^{n_1}\xi^{mn_1-2n_1-1},$$
$$\Psi_8 = (u''_{\xi\xi})^{n_2-1}u'''_{\xi\xi\xi} = (m-2)[\varepsilon m(m-1)]^{n_2}\xi^{mn_2-2n_2-1},$$

где $\varepsilon = \operatorname{sign}[m(m-1)]$. Помимо соотношений, указанных в последнем столбце табл. 3.5, также выполняются линейные соотношения (3.2.5.37).

Таблица 3.5. Показатели степени n_1, n_2, m и соответствующие линейные соотношения вида $\Psi_7 = \alpha_i\Psi_i$ и $\Psi_8 = \beta_i\Psi_i$ для обобщенной модели Сиско неньютоновской жидкости с порождающими функциями степенного вида $u = \varepsilon\xi^m$.

№	Связь между n_1 и n_2	m	n_1	n_2	Соотношения с Ψ_7 и Ψ_8
1	$n_2=2n_1+1$	$\frac{2n_1+1}{n_1}$	$\frac{1}{m-2}$	$\frac{m}{m-2}$	$\Psi_7=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^{n_1}\Psi_1$, $\Psi_8=\varepsilon\frac{m-2}{m}\lvert m(m-1)\rvert^{n_2}\Psi_2$
2	$n_2=3n_1+2$	$\frac{2n_1+1}{n_1}$	$\frac{1}{m-2}$	$\frac{2m-1}{m-2}$	$\Psi_7=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^{n_1}\Psi_1$, $\Psi_8=\frac{m-2}{m^2}\lvert m(m-1)\rvert^{n_2}\Psi_3$
3	$n_2=n_1+1$	$\frac{2n_1+1}{n_1}$	$\frac{1}{m-2}$	$\frac{m-1}{m-2}$	$\Psi_7=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^{n_1}\Psi_1$, $\Psi_8=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^{n_2-1}\Psi_4$
4	$n_2=\frac{1}{2}(3n_1+1)$	$\frac{2n_1}{n_1-1}$	$\frac{m}{m-2}$	$\frac{2m-1}{m-2}$	$\Psi_7=\varepsilon\frac{m-2}{m}\lvert m(m-1)\rvert^{n_1}\Psi_2$, $\Psi_8=\frac{m-2}{m^2}\lvert m(m-1)\rvert^{n_2}\Psi_3$
5	$n_2=\frac{1}{2}(n_1+1)$	$\frac{2n_1}{n_1-1}$	$\frac{m}{m-2}$	$\frac{m-1}{m-2}$	$\Psi_7=\varepsilon\frac{m-2}{m}\lvert m(m-1)\rvert^{n_1}\Psi_2$, $\Psi_8=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^{n_2-1}\Psi_4$
6	$n_2=\frac{1}{3}(n_1+1)$	$\frac{2n_1-1}{n_1-2}$	$\frac{2m-1}{m-2}$	$\frac{m-1}{m-2}$	$\Psi_7=\frac{m-2}{m^2}\lvert m(m-1)\rvert^{n_1}\Psi_3$, $\Psi_8=(m-2)\lvert m(m-1)\rvert^{n_2-1}\Psi_4$

Опуская анализ всех случаев, перечисленных в табл. 3.5, ограничимся одним конкретным примером.

► Пример 3.13. Рассмотрим решение, которое соответствует строке 3 в табл. 3.5. С учетом соотношений (3.2.5.37) имеем

$$\begin{gathered} n_1 = n, \quad n_2 = n+1, \quad m = \frac{2n+1}{n}, \\ \Psi_5 = (m-1)\Psi_2, \quad \Psi_6 = \frac{m-1}{m}\Psi_3, \\ \Psi_7 = (m-2)|m(m-1)|^n\Psi_1, \\ \Psi_8 = (m-2)|m(m-1)|^n\Psi_4. \end{gathered} \tag{3.2.5.73}$$

Подставим (3.2.5.11) при $u(\xi) = \varepsilon\xi^m$ в уравнение (3.2.5.72) и учтем соотношения (3.2.5.73). Рассуждая так же, как и в решении 1, приходим к определяющей системе

$$g_t + gg_x - F - \kappa_1(m-2)|m(m-1)|^n r^{n+1} f^n \varphi^{2n+1} = 0, \qquad (3.2.5.74)$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + (m-1)f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0, \qquad (3.2.5.75)$$

$$mf\varphi_x + f_x\varphi = 0, \qquad (3.2.5.76)$$

$$\varphi\psi_t - \psi\varphi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 + \\ - \kappa_2(m-2)|m(m-1)|^n r^{n+2} f^n \varphi^{2n+3} = 0. \qquad (3.2.5.77)$$

Решения уравнений (3.2.5.75) и (3.2.5.76) описываются формулами (3.2.5.42) и (3.2.5.43). Функция давления F вычисляется по формуле (3.2.5.44), где $\kappa = \kappa_1$. Функция h находится интегрированием:

$$h = \int \frac{1}{\varphi^2}\bigl\{\varphi\psi_t - \varphi_t\psi + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - g\varphi_x\psi - \\ - \kappa_2(m-2)|m(m-1)|^n r^{n+2} f^n \varphi^{2n+3}\bigr\}\,dx + c(t).$$

В общей сложности данное решение содержит пять произвольных функций: $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$. ◄

► Пример 3.14. (*Специальная двухпараметрическая модель Сиско.*) Рассмотрим теперь осесимметричный пограничный слой для двухпараметрической реологической модели неньютоновской жидкости, описываемой уравнением (3.2.5.67) при $\kappa_3 = 0$, которая представляет собой двухпараметрическую модель Сиско. В переменных (3.2.5.7) это уравнение принимает вид (3.2.5.68), где $\kappa_3 = 0$.

Решение с функциональным разделением переменных ищем в виде

$$w = fe^{\varphi z} + gz + h, \qquad (3.2.5.78)$$

где функции $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Подставив (3.2.5.78) в уравнение (3.2.5.68) при $\kappa_3 = 0$, после элементарных преобразований приходим к уравнению вида $Ae^{2\varphi z} + Bze^{\varphi z} + Ce^{\varphi z} + D = 0$ (коэффициент при $ze^{2\varphi z}$ тождественно равен нулю). Приравнивая нулю функциональные множители A, B, C, D, получим определяющую систему

$$\begin{aligned}
&\varphi_x = \kappa_2 r^3 \varphi^4, \\
&\varphi_t + g\varphi_x - \varphi g_x = 0, \\
&(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x - f\varphi^2 h_x = \kappa_1 r^2 f\varphi^3, \\
&g_t + gg_x = F.
\end{aligned} \qquad (3.2.5.79)$$

Считая функцию $f = f(t,x)$ произвольной, находим общее решение первых трех уравнений (3.2.5.79):

$$\varphi = -\left[3\kappa_2\int r^3\,dx + 3b(t)\right]^{-1/3},$$
$$g = c(t)\varphi + b_t'(t)\varphi\int\varphi^2\,dx,$$
$$h = \int\frac{1}{f\varphi^2}\big[(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x - \kappa_1 r^2 f\varphi^3\big]\,dx + d(t),$$

где $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — произвольные функции. Функция давления F без интегрирования находится из последнего уравнения (3.2.5.79). ◄

4. Метод дифференциальных связей

4.1. Метод дифференциальных связей для обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1.1. Описание метода. Дифференциальные связи первого порядка

Описание метода. Прежде чем описывать метод дифференциальных связей для уравнений в частных производных, рассмотрим сначала характерные особенности его применения к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Основная идея метода состоит в том, что точные решения сложного (неинтегрируемого) уравнения ищутся путем совместного анализа этого уравнения и более простого вспомогательного (обычно интегрируемого) уравнения, называемого *дифференциальной связью*.

Порядок дифференциальной связи совпадает с порядком входящей в нее старшей производной. Обычно порядок дифференциальной связи меньше, чем порядок исследуемого уравнения. Простейшими и наиболее часто используемыми являются дифференциальные связи первого порядка. Уравнение и дифференциальная связь должны содержать набор свободных параметров (иногда произвольных функций), значения которых выбираются так, чтобы уравнение и связь были совместными. После анализа на совместность все решения, полученные при интегрировании дифференциальной связи будут одновременно и решениями исходного уравнения. Рассматриваемый метод позволяет находить частные решения исходного уравнения при некоторых значениях определяющих параметров.

Для простоты рассмотрим сначала автономные обыкновенные дифференциальные уравнения вида*

$$F(y, y'_x, \ldots, y^{(n)}_x; \mathbf{a}) = 0, \tag{4.1.1.1}$$

которые явно не содержат независимой переменной x и зависят от вектора свободных параметров $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Для уравнений (4.1.1.1) следует брать дифференциальные связи первого порядка автономного вида

$$G(y, y'_x; \mathbf{b}) = 0, \tag{4.1.1.2}$$

*Подобные уравнения часто возникают в математической физике, когда точные решения нелинейных УрЧП ищутся в виде бегущей волны (см. разд. 2.1.1, п. 3°).

зависящие от вектора свободных параметров $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_s\}$.

Дифференцируя соотношение (4.1.1.2) достаточное число раз, можно выразить старшие производные через y и y'_x: $y^{(k)}_x = \varphi_k(y, y'_x; \mathbf{b})$. Подставив эти выражения в исходное уравнение (4.1.1.1), приходим к уравнению первого порядка

$$H(y, y'_x; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{4.1.1.3}$$

Исключение производной y'_x из (4.1.1.2) и (4.1.1.3) приводит к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению

$$P(y; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{4.1.1.4}$$

Далее ищем значения параметров $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при которых уравнение (4.1.1.4) удовлетворяется тождественно при любых y (это может привести к некоторым ограничениям на компоненты вектора $\mathbf{a}$). После этого выражаем вектор $\mathbf{b}$ через $\mathbf{a}$, так что $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a})$, и подставляем обратно в дифференциальную связь (4.1.1.2). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$g(y, y'_x; \mathbf{a}) = 0 \qquad (g = G|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{a})}). \tag{4.1.1.5}$$

Это уравнение совместно с исходным уравнением (4.1.1.1); иными словами, исходное уравнение является следствием уравнения (4.1.1.5) и поэтому наследует все его решения. Наконец, разрешая уравнение (4.1.1.5) относительно производной, приходим к уравнению с разделяющимися переменными, интегрирование которого позволяет найти его общее решение. Общее решение уравнения (4.1.1.5) является точным решением и исходного уравнения (4.1.1.1).

Замечание 4.1. *Если дифференциальная связь первого порядка задана в явном виде $y'_x = h(y; \boldsymbol{b})$, то ее последовательное дифференцирование*

$$y''_{xx} = (y'_x)'_y y'_x = hh'_y, \quad y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_y y'_x = h(hh'_y)'_y, \quad \dots$$

позволяет выразить старшие производные через y, так что $y^{(k)}_x = \varphi_k(y; \boldsymbol{b})$. Используя эти выражения и дифференциальную связь, после исключения производных из уравнения (4.1.1.1) сразу приходим к алгебраическому (трансцендентному) уравнению вида (4.1.1.4).

Замечание 4.2. *Вместо y'_x можно исключить зависимую переменную y из (4.1.1.2) и (4.1.1.3), в результате чего получим алгебраическое (трансцендентное) уравнение относительно производной: $Q(y'_x; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$. Далее ищутся значения параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, для которых это уравнение удовлетворяется тождественно для любых y'_x.*

Примеры нелинейных ОДУ и их дифференциальных связей. Структурный вид дифференциальной связи (4.1.1.2) во многих случаях можно выбирать аналогичным виду исходного уравнения (4.1.1.1) (но с другими определяющими параметрами). Проиллюстрируем сказанное на примерах конкретных уравнений второго, третьего, четвертого и более высоких порядков.

▶ Пример 4.1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка со степенной нелинейностью

$$y''_{xx} - cy'_x = ay + by^n, \tag{4.1.1.6}$$

которое встречается в теории химических реакторов, теории горения и математической биологии*.

Дополним уравнение (4.1.1.6) дифференциальной связью первого порядка

$$y'_x = \alpha y + \beta y^m, \tag{4.1.1.7}$$

которая является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется. Вид правой части уравнения (4.1.1.7) выбран аналогичным виду правой части исходного уравнения (4.1.1.6).

Уравнение и дифференциальная связь содержат семь параметров: a, b, c, n, m, α, β. Цель дальнейшего исследования состоит в определении параметров α, β, m дифференциальной связи, которые надо выразить через a, b, c, n. Одновременно с этим будут найдены ограничения на параметры уравнения и построено его решение.

Дифференцируя (4.1.1.7) и заменяя первую производную на правую часть (4.1.1.7), имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx} = (\alpha + m\beta y^{m-1})y'_x = (\alpha + m\beta y^{m-1})(\alpha y + \beta y^m) = \\ = \alpha^2 y + \alpha\beta(m+1)y^m + m\beta^2 y^{2m-1}. \end{aligned} \tag{4.1.1.8}$$

Исключив первую и вторую производные в (4.1.1.6) с помощью (4.1.1.7) и (4.1.1.8), после элементарных преобразований получим

$$(\alpha^2 - \alpha c - a)y + \beta[\alpha(m+1) - c]y^m + m\beta^2 y^{2m-1} - by^n = 0. \tag{4.1.1.9}$$

Чтобы это уравнение удовлетворялось тождественно при любых y, необходимо положить

$$\begin{aligned} &\alpha^2 - \alpha c - a = 0, \\ &\alpha(m+1) - c = 0, \\ &2m - 1 = n, \\ &m\beta^2 - b = 0. \end{aligned} \tag{4.1.1.10}$$

Если выполняются условия (4.1.1.10), то решения уравнения (4.1.1.7) также являются решениями более сложного уравнения (4.1.1.6). Определяющая система их четырех уравнений (4.1.1.10) содержит семь параметров a, b, c, n, m, α, β. Три параметра b, c, n исходного уравнения можно считать произвольными, остальные параметры выражаются так:

$$a = -\frac{2c^2(n+1)}{(n+3)^2}, \quad m = \frac{n+1}{2}, \quad \alpha = \frac{2c}{n+3}, \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{2b}{n+1}}, \tag{4.1.1.11}$$

*Уравнения (4.1.1.6) и (4.1.1.12) описывают решения типа бегущей волны уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова $u_t = u_{zz} - f(u)$ для некоторых видов кинетической функции $f(u)$. В этом случае имеем $u = y(x)$, где $x = z + ct$.

где $n \neq -1$, $n \neq -3$, $b(n+1) > 0$. Видно, что для совместности уравнений (4.1.1.6) и (4.1.1.7) необходимо, чтобы параметр a исходного уравнения был определенным образом связан с двумя другими параметрами c и n. В этом случае имеются два семейства параметров (4.1.1.11) уравнения (4.1.1.7), которые приводят к двум различным однопараметрическим решениям уравнений (4.1.1.6) и (4.1.1.7).

Интегрируя дифференциальную связь (4.1.1.7) (которая представляет собой ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными) и учитывая формулы (4.1.1.11), в итоге получим два точных решения уравнения (4.1.1.6) при $a = -2c^2(n+1)/(n+3)^2$:

$$y = \left[Ce^{\alpha(1-m)x} - (\beta/\alpha)\right]^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная, а константы m, α, β выражаются через параметры исходного уравнения по формулам (4.1.1.11). ◀

▶ Пример 4.2. Для построения точных решений ОДУ второго порядка с экспоненциальной нелинейностью

$$y''_{xx} - cy'_x = a + be^{\lambda y} \tag{4.1.1.12}$$

используем дифференциальную связь первого порядка

$$y'_x = \alpha + \beta e^{\mu y}, \tag{4.1.1.13}$$

правая часть которой выбрана аналогичной правой части исходного уравнения.

Анализ показывает, что три параметра b, c, λ уравнения (4.1.1.12) можно считать произвольными, а остальные параметры выражаются в виде

$$a = -\frac{2c^2}{\lambda}, \quad \alpha = \frac{2c}{\lambda}, \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{2b}{\lambda}}, \quad \mu = \frac{\lambda}{2}. \tag{4.1.1.14}$$

Видно, что для совместности уравнений (4.1.1.12) и (4.1.1.13) необходимо, чтобы параметр a был определенным образом связан с двумя другими параметрами уравнения c и λ. В этом случае можно выделить два семейства параметров (4.1.1.14) дифференциальной связи (4.1.1.13), которые приводят к двум различным однопараметрическим решениям уравнений (4.1.1.12) и (4.1.1.13).

Интегрируя дифференциальную связь (4.1.1.13), которая представляет собой ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными, в итоге получим два точных решения уравнения (4.1.1.12) при $a = -2k^2/\lambda$:

$$y = -\frac{2}{\lambda}\ln\left[C\exp(-cx) \mp \sqrt{\frac{b\lambda}{2c^2}}\,\right],$$

где C — произвольная постоянная. ◀

▶ Пример 4.3. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$y'''_{xxx} = ay^4 + by^2 + c \tag{4.1.1.15}$$

совместно с дифференциальной связью первого порядка

$$y'_x = \alpha y^2 + \beta. \tag{4.1.1.16}$$

С помощью (4.1.1.16) находим производные

$$y''_{xx} = 2\alpha y y'_x = 2\alpha y(\alpha y^2 + \beta) = 2\alpha^2 y^3 + 2\alpha\beta y,$$
$$y'''_{xxx} = (6\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta) y'_x = (6\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta)(\alpha y^2 + \beta) = 6\alpha^3 y^4 + 8\alpha^2\beta y^2 + 2\alpha\beta^2. \tag{4.1.1.17}$$

Чтобы третья производная в (4.1.1.17) совпала с правой частью (4.1.1.15), должны выполняться соотношения

$$a = 6\alpha^3, \quad b = 8\alpha^2\beta, \quad c = 2\alpha\beta^2. \tag{4.1.1.18}$$

Разрешив первые два уравнения относительно α и β и подставив полученные выражения в последнее уравнение, получим

$$\alpha = \left(\frac{a}{6}\right)^{1/3}, \quad \beta = \left(\frac{a}{6}\right)^{-2/3}\frac{b}{8}, \quad c = \frac{3b^2}{16a}. \tag{4.1.1.19}$$

Отсюда следует, что уравнение третьего порядка (4.1.1.15) при $c = 3b^2/(16a)$ имеет частное решение, которое определяется путем интегрирования уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (4.1.1.16), параметры которого связаны с параметрами исходного уравнения первыми двумя соотношениями (4.1.1.19). ◄

► Пример 4.4. Рассмотрим нелинейное уравнение четвертого порядка

$$y''''_{xxxx} = ay^n + by^{2n+3}. \tag{4.1.1.20}$$

совместно с дифференциальной связью первого порядка

$$(y'_x)^2 = \alpha y^m + \beta. \tag{4.1.1.21}$$

Последовательно дифференцируя (4.1.1.21), находим производные

$$\begin{aligned}
y''_{xx} &= \tfrac{1}{2}\alpha m y^{m-1} \qquad (\text{после сокращения на } y'_x),\\
y'''_{xxx} &= \tfrac{1}{2}\alpha m(m-1) y^{m-2} y'_x,\\
y''''_{xxxx} &= \tfrac{1}{2}\alpha m(m-1) y^{m-2} y''_{xx} + \tfrac{1}{2}\alpha m(m-1)(m-2) y^{m-3}(y'_x)^2 =\\
&= \tfrac{1}{2}\alpha\beta m(m-1)(m-2) y^{m-3} + \tfrac{1}{4}\alpha^2 m(m-1)(3m-4) y^{2m-3}.
\end{aligned} \tag{4.1.1.22}$$

Сравнение правой части уравнения (4.1.1.20) с правой частью последнего соотношения в (4.1.1.22) позволяет сделать следующие заключения о совместности уравнений (4.1.1.20) и (4.1.1.21).

1°. При $n \neq -1, -2, -3, -\frac{5}{3}$ и $b \neq 0$ значения параметров дифференциальной связи (4.1.1.21) можно выразить по формулам

$$m = n + 3, \quad \alpha = \pm 2\sqrt{\frac{b}{(n+2)(n+3)(3n+5)}}, \quad \beta = \frac{2a}{\alpha(n+1)(n+2)(n+3)}. \tag{4.1.1.23}$$

2°. При $b = 0$ и $n = -\frac{5}{3}$ имеем

$$m = \frac{4}{3}, \quad \beta = -\frac{27a}{4\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \text{ — произвольная постоянная.} \tag{4.1.1.24}$$

В данном случае решение уравнения (4.1.1.21) будет зависеть от двух произвольных постоянных (α играет роль дополнительной константы интегрирования). ◄

Замечание 4.3. *При $b = 0$ и $n = -\frac{5}{3}$ можно получить общее решение уравнения (4.1.1.20) (см. стр. 659 в [285]).*

► Пример 4.5. Для уравнения четвертого порядка с экспоненциальной нелинейностью

$$y''''_{xxxx} - cy''_{xx} = ae^{\lambda y} + be^{2\lambda y} \tag{4.1.1.25}$$

можно использовать дифференциальную связь

$$(y'_x)^2 = \alpha + \beta e^{\lambda y}. \tag{4.1.1.26}$$

Анализ показывает, что при любых значениях параметров исходного уравнения, удовлетворяющих условию $b\lambda > 0$, имеются два семейства параметров дифференциальной связи (берутся либо верхние, либо нижние знаки):

$$\alpha = \pm\frac{a}{\lambda^2}\left(\frac{3\lambda}{b}\right)^{1/2} + \frac{c}{\lambda^2}, \quad \beta = \pm\frac{2}{\lambda}\left(\frac{b}{3\lambda}\right)^{1/2},$$

когда уравнения (4.1.1.25) и (4.1.1.26) совместны (т. е. решения второго уравнения являются также решениями первого уравнения). ◄

► Пример 4.6. Покажем, что нелинейное уравнение $2n$-го порядка

$$y_x^{(2n)} + a[yy''_{xx} - (y'_x)^2] = b \tag{4.1.1.27}$$

допускает дифференциальную связь

$$(y'_x)^2 = \alpha y^2 + \beta y + \gamma. \tag{4.1.1.28}$$

Действительно, последовательно дифференцируя равенство (4.1.1.28), имеем

$$y''_{xx} = \alpha y + \tfrac{1}{2}\beta, \quad \ldots, \quad y_x^{(2n)} = \alpha^n y + \tfrac{1}{2}\alpha^{n-1}\beta.$$

Подставляя эти выражения в (4.1.1.27) и учитывая (4.1.1.28), находим коэффициенты дифференциальной связи:

$$\alpha \text{ — любое}, \quad \beta = 2\alpha^n/a, \quad \gamma = (\alpha^{2n-1} - ab)/a^2.$$ ◄

► Пример 4.7. Нетрудно проверить, что точные решения нелинейного дифференциального уравнения

$$y_x^{(2n)} = yf\big(yy''_{xx} - (y'_x)^2\big),$$

где $f(z)$ — произвольная функция, можно получить с помощью дифференциальной связи (4.1.1.28) при $\beta = 0$. ◄

► Пример 4.8. Покажем, что нелинейное уравнение n-го порядка вида

$$y_x^{(n)} = ae^{\lambda y} y_x^{(m)}, \quad 0 \leqslant m < n, \tag{4.1.1.29}$$

где $y_x^{(0)} = y$, допускает дифференциальную связь первого порядка

$$y'_x = be^{\mu y}. \tag{4.1.1.30}$$

Действительно, последовательное дифференцирование равенства (4.1.1.30) дает

$$y_x^{(m)} = b^m \mu^{m-1}(m-1)!\, e^{m\mu y} \quad \text{при} \quad m = 1,\, 2,\, \ldots$$

Подставляя полученные выражения в (4.1.1.29) и учитывая (4.1.1.30), в итоге находим коэффициенты дифференциальной связи:

$$\mu = \frac{\lambda}{n}, \qquad b = \left[\frac{an^{n-1}}{\lambda^{n-1}(n-1)!}\right]^{\frac{1}{n}} \qquad \text{при} \quad m = 0;$$

$$\mu = \frac{\lambda}{n-m}, \qquad b = \frac{\lambda}{n-m}\left[\frac{a(m-1)!}{(n-1)!}\right]^{\frac{1}{n-m}} \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant m < n.$$

◄

Замечание 4.4. *Из (4.1.1.30) следует, что $y''_{xx}/(y'_x)^2 = \text{const}$. Поэтому более общее, чем (4.1.1.29), дифференциальное уравнение вида*

$$y_x^{(n)} = e^{\lambda y} f\bigl(y''_{xx}/(y'_x)^2\bigr) y_x^{(m)},$$

где $f(z)$ — произвольная функция, также допускает дифференциальную связь (4.1.1.30).

В табл. 4.1 представлены нелинейные ОДУ, которые рассматривались в примерах 4.1 — 4.8, а также некоторые другие уравнения второго и более высоких порядков, точные решения которых можно найти с помощью дифференциальных связей первого порядка (по данным [282]).

4.1.2. Дифференциальные связи произвольного порядка. Общий метод исследования на совместность двух уравнений

В общем случае дифференциальная связь представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение произвольного порядка. Поэтому необходимо уметь анализировать переопределенные системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений на совместность. Ниже описывается общий алгоритм для анализа таких систем.

1°. *Случай ОДУ одинакового порядка.* Рассмотрим сначала два обыкновенных дифференциальных уравнения одного и того же порядка

$$F_1(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0, \tag{4.1.2.1}$$

$$F_2(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0. \tag{4.1.2.2}$$

Здесь и далее будем предполагать, что уравнения зависят от свободных параметров, которые для краткости опускаются. Исключим старшую производную

Таблица 4.1. Некоторые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения с параметрами и соответствующие дифференциальные связи первого порядка, позволяющие найти их точные решения.

№	Дифференциальные уравнения	Дифференциальные связи
1	$y''_{xx}=ay^n+by^{2n+1}$	$y'_x=\alpha+\beta y^{n+1}$
2	$y''_{xx}=ay^n+by^m$	$(y'_x)^2=\alpha y^{n+1}+\beta y^{m+1}+\gamma;\ n,m\neq-1$
3	$y''_{xx}=ae^{\lambda y}+be^{2\lambda y}$	$y'_x=\alpha+\beta e^{\lambda y}$
4	$y''_{xx}=ae^{\lambda y}+be^{\mu y}+c$	$(y'_x)^2=\alpha e^{\lambda y}+\beta e^{\mu y}+cy+\gamma$
5	$y''_{xx}=a\cos(ky)+b\sin(ky)$	$(y'_x)^2=\alpha\cos(ky)+\beta\sin(ky)+\gamma$
6	$y''_{xx}-ky'_x=ay+by^n$	$y'_x=\alpha y+\beta y^m$ при $m=\frac{1}{2}(n+1)$
7	$y''_{xx}-ky'_x=ay+by^n+cy^{2n-1}$	$y'_x=\alpha y+\beta y^n$
8	$y''_{xx}-ky'_x=ay^{n-1}+by^n+cy^{2n-1}$	$y'_x=\alpha+ky+\beta y^n$
9	$y''_{xx}-ky'_x=a+be^{\lambda y}$	$y'_x=\alpha+\beta e^{\mu y}$ при $\mu=\frac{1}{2}\lambda$
10	$y''_{xx}-ky'_x=a+be^{\lambda y}+ce^{2\lambda y}$	$y'_x=\alpha+\beta e^{\lambda y}$
11	$y''_{xx}-ky^{n-1}y'_x=ay+by^n+cy^{2n-1}$	$y'_x=\alpha y+\beta y^n$
12	$y''_{xx}-ke^{\lambda y}y'_x=ae^{\lambda y}+be^{2\lambda y}$	$y'_x=\alpha+\beta e^{\lambda y}$
13	$yy''_{xx}-k(y'_x)^2=ay^n+by^m+c$	$(y'_x)^2=\alpha y^n+\beta y^m+\gamma$ при $n,m\neq-1$
14	$y''_{xx}-k(y'_x)^2=ae^{\lambda y}+be^{\mu y}+c$	$(y'_x)^2=\alpha e^{\lambda y}+\beta e^{\mu y}+\gamma$
15	$y''_{xx}-k(y'_x)^2=a\cos(ky)+b\sin(ky)+c$	$(y'_x)^2=\alpha\cos(ky)+\beta\sin(ky)+\gamma$
16	$y'''_{xxx}=a+by^2+cy^4$	$y'_x=\alpha+\beta y^2$
17	$y'''_{xxx}=ay^n+by^{2n+2}+cy^{3n+4}$	$y'_x=\alpha+\beta y^{n+2}$
18	$y'''_{xxx}=ae^{3\lambda y}+be^{2\lambda y}+ce^{\lambda y}$	$y'_x=\alpha e^{\lambda y}+\beta$
19	$y'''_{xxx}=(ay^n+b)y'_x$	$(y'_x)^2=\alpha y^{n+2}+\beta y^2+\gamma y+\delta$
20	$y'''_{xxx}=(ae^{\lambda y}+be^{\mu y}+c)y'_x$	$(y'_x)^2=\alpha e^{\lambda y}+\beta e^{\mu y}+\gamma y^2+\delta y+\sigma$
21	$y'''_{xxx}=[a\cos(\lambda y+\mu)+b]y'_x$	$(y'_x)^2=\alpha\cos(\lambda y+\mu)+\beta y^2+\gamma y+\delta$
22	$y''''_{xxxx}=ay^n+by^{2n+3}$	$(y'_x)^2=\alpha y^{n+3}+\beta$
23	$y''''_{xxxx}=ae^{\lambda y}+be^{2\lambda y}$	$(y'_x)^2=\alpha+\beta e^{\lambda y}$
24	$y''''_{xxxx}=a(y'_x)^4+b(y'_x)^2+c$	$(y'_x)^2=\alpha+\beta e^{\mu y}$
25	$y''''_{xxxx}-cy''_{xx}=ae^{\lambda y}+be^{2\lambda y}$	$(y'_x)^2=\alpha+\beta e^{\lambda y}$
26	$y''''_{xxxx}=a[yy''_{xx}-(y'_x)^2]+by+c$	$y'_x=\alpha+\beta y$
27	$y''''_{xxxx}=ayy''_{xx}+b(y'_x)^2+cy^2+dy+p$	$(y'_x)^2=\alpha y^2+\beta y+\gamma$
28	$y''''_{xxxx}=a(y''_{xx})^2+by^2+c$	$(y'_x)^2=\alpha y^2+\beta y+\gamma$
29	$y^{(n)}_x=ae^{\lambda y}$	$y'_x=be^{\mu y}$ при $\mu=\lambda/n$
30	$y^{(n)}_x=ae^{\lambda y}y'_x$	$y'_x=be^{\mu y}$ при $\mu=\lambda/(n-1)$
31	$y^{(n)}_x=a[yy''_{xx}-(y'_x)^2]+by+c$	$y'_x=\alpha+\beta y$
32	$y^{(n)}_x=ae^{\lambda y}[y^{(m)}_x]^k$	$y'_x=be^{\mu y}$ при $\mu=\lambda/(n-km)$

(разрешив одно из уравнений относительно $y_x^{(n)}$ и подставив полученное выражение во второе уравнение). В результате имеем уравнение $(n-1)$-го порядка

$$G_1(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n-1)}) = 0. \tag{4.1.2.3}$$

Дифференцируя (4.1.2.3) по x и исключая производную $y_x^{(n)}$ из полученного уравнения с помощью любого из уравнений (4.1.2.1) или (4.1.2.2), приходим к другому уравнению $(n-1)$-го порядка

$$G_2(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n-1)}) = 0. \tag{4.1.2.4}$$

Таким образом, анализ двух уравнений n-го порядка (4.1.2.1) и (4.1.2.2) сводится к анализу двух уравнений $(n-1)$-го порядка (4.1.2.3) и (4.1.2.4). Понижая порядок уравнений далее аналогичным образом, в итоге приходим к одному алгебраическому (трансцендентному) уравнению (поскольку два дифференциальных уравнения первого порядка сводятся к одному алгебраическому уравнению). Анализ полученного алгебраического уравнения не представляет существенных сложностей и выполняется так же, как и ранее в разд. 4.1.1 для случая дифференциальной связи первого порядка.

► Пример 4.9. Рассмотрим полученную в примере 1.34 переопределенную систему, состоящую из двух ОДУ (см. первые два уравнения в (1.5.3.4)):

$$\begin{aligned} (\theta\theta'_x)'_x &= A_1\theta + A_2, \\ \theta''_{xx} &= A_3\theta + A_4. \end{aligned} \tag{4.1.2.5}$$

Покажем как, не используя решения второго линейного уравнения (4.1.2.5) при различных значениях определяющих параметров A_n, можно найти совместное решение этой системы путем исследования ее на совместность.

Раскроем скобки в первом уравнении (4.1.2.5), а затем исключим вторую производную с помощью второго уравнения. В результате получим ОДУ первого порядка

$$(\theta'_x)^2 + A_3\theta^2 = (A_1 - A_4)\theta + A_2.$$

Дифференцируя это уравнение и сокращая на θ'_x, приходим к ОДУ второго порядка

$$2\theta''_{xx} + 2A_3\theta = A_1 - A_4.$$

Исключая отсюда вторую производную с помощью второго уравнения (4.1.2.5), получим линейное алгебраическое уравнение относительно θ:

$$4A_3\theta + 3A_4 - A_1 = 0.$$

Чтобы тождественно удовлетворить этому уравнению, надо положить $A_3 = 0$ и $A_4 = \frac{1}{3}A_1$. При этих значениях переопределенная система ОДУ (4.1.2.5) имеет совместное решение в виде квадратичного многочлена

$$\theta = \frac{1}{6}A_1x^2 + Cx + \frac{3}{A_1}(A_2 - C^2),$$

где C — произвольная постоянная. ◄

2°. *Случай ОДУ различного порядка.* Пусть имеются два обыкновенных дифференциальных уравнения различного порядка:

$$F_1(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0, \tag{4.1.2.6}$$

$$F_2(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(m)}) = 0, \tag{4.1.2.7}$$

где $m < n$. Дифференцируя (4.1.2.7) $n - m$ раз, приводим систему (4.1.2.6) — (4.1.2.7) к системе вида (4.1.2.1) — (4.1.2.2), в которой оба уравнения имеют один и тот же порядок n.

► Пример 4.10. Рассмотрим уравнение четвертого порядка с квадратичной нелинейностью

$$y''''_{xxxx} = a(y''_{xx})^2 - by^2 + c \tag{4.1.2.8}$$

вместе с линейной дифференциальной связью второго порядка

$$y''_{xx} = \alpha y + \beta. \tag{4.1.2.9}$$

Двукратное дифференцирование (4.1.2.9) дает $y''''_{xxxx} = \alpha^2 y + \alpha\beta$. Используем это выражение и дифференциальную связь (4.1.2.9) для исключения производных из уравнения (4.1.2.8). В результате приходим к квадратичному уравнению относительно y, которое удовлетворяется тождественно при выполнении условий

$$a\alpha^2 - b = 0, \quad \alpha - 2a\beta = 0, \quad c = \alpha\beta - a\beta^2.$$

Два параметра a и b исходного уравнения можно считать произвольными, а остальные параметры выражаются через них следующим образом:

$$c = \frac{b}{4a^2}, \quad \alpha = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \beta = \pm\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

◄

► Пример 4.11. Рассмотрим еще одно уравнение четвертого порядка с квадратичной нелинейностью

$$y''''_{xxxx} = a(y''_{xx})^2 + b(y'_x)^2 + c. \tag{4.1.2.10}$$

Добавим к (4.1.2.10) нелинейную дифференциальную связь второго порядка

$$y''_{xx} = \alpha(y'_x)^2 + \beta, \tag{4.1.2.11}$$

которое представляет собой автономное уравнение, интегрируемое в квадратурах.

Последовательно дифференцируя (4.1.2.11), находим производные

$$\begin{aligned} y'''_{xxx} &= 2\alpha y'_x y''_{xx} = 2\alpha y'_x[\alpha(y'_x)^2 + \beta] = 2\alpha^2(y'_x)^3 + 2\alpha\beta y'_x, \\ y''''_{xxxx} &= [6\alpha^2(y'_x)^2 + 2\alpha\beta]y''_{xx} = [6\alpha^2(y'_x)^2 + 2\alpha\beta][\alpha(y'_x)^2 + \beta] = \\ &= 6\alpha^3(y'_x)^4 + 8\alpha^2\beta(y'_x)^2 + 2\alpha\beta^2. \end{aligned} \tag{4.1.2.12}$$

Подставив (4.1.2.11) и (4.1.2.12) в (4.1.2.10), получим биквадратное уравнение относительно производной

$$(6\alpha^3 - a\alpha^2)(y'_x)^4 + (8\alpha^2\beta - 2a\alpha\beta - b)(y'_x)^2 + 2\alpha\beta^2 - c = 0,$$

которое будет тождественно удовлетворяться, если положить

$$6\alpha^3 - a\alpha^2 = 0, \quad 8\alpha^2\beta - 2a\alpha\beta - b = 0, \quad 2\alpha\beta^2 - c = 0.$$

Два параметра a и b исходного уравнения можно считать произвольными, а остальные константы выражаются через них следующим образом:

$$c = 27\,a^{-3}b^2, \quad \alpha = \tfrac{1}{6}a, \quad \beta = -9\,a^{-2}b.$$ ◄

► Пример 4.12. Общая автономная дифференциальная связь второго порядка

$$y''_{xx} = f(y)$$

эквивалентна автономной дифференциальной связи первого порядка

$$(y'_x)^2 = F(y),$$

где $F(y) = 2\int f(y)\,dy + C$ и C — произвольная постоянная. Это доказывается дифференцированием второй дифференциальной связи и сравнением полученного уравнения с исходной дифференциальной связью. ◄

Замечание 4.5. *В принципе любую дифференциальную связь произвольного порядка (4.1.2.7) можно заменить на соответствующую дифференциальную связь первого порядка. В самом деле, описанный выше алгоритм последовательного понижения порядка системы (4.1.2.6) — (4.1.2.7) в невырожденном случае приводит к системе уравнений первого порядка, одно из которых можно рассматривать как дифференциальную связь первого порядка.*

4.1.3. Использование точечных преобразований в комбинации с дифференциальными связями

В некоторых случаях полезно сначала привести рассматриваемое ОДУ с помощью точечного преобразования к другому уравнению (более простому или более удобному для исследования), которое затем можно анализировать с помощью подходящей дифференциальной связи. При таком подходе решения автономного уравнения (4.1.1.1) ищутся в виде

$$y = G(u; \mathbf{b}), \tag{4.1.3.1}$$

где G — заданная функция, а $u = u(x)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (дифференциальной связи) первого порядка

$$H(u, u'_x; \mathbf{c}) = 0. \tag{4.1.3.2}$$

Функции G и H в (4.1.3.1) и (4.1.3.2) зависят от векторов свободных параметров $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Введение новой переменной u, определяемой соотношением (4.1.3.1), преобразует уравнение (4.1.1.1) к новому ОДУ с одной дифференциальной связью (4.1.3.2). В результате приходим к стандартной ситуации, которая обсуждалась в разд. 4.1.1.

► Пример 4.13. Следуя [282], рассмотрим шестипараметрическое уравнение с нелинейностью степенного типа

$$y''_{xx} + (a_1 + a_2 y^{n-1}) y'_x = b_1 y + b_2 y^n + b_3 y^{2n-1}, \quad n \neq 1. \tag{4.1.3.3}$$

Сначала сделаем подстановку $y = u^p$, где показатель степени p подлежит определению. Умножив преобразованное уравнение на u^{2-p}, имеем

$$puu''_{xx} + p(p-1)(u'_x)^2 + p(a_1 u + a_2 u^k) u'_x = b_1 u^2 + b_2 u^{k+1} + b_3 u^{2k}, \quad k = p(n-1)+1. \tag{4.1.3.4}$$

Случай 1. Чтобы получить уравнение с квадратичной нелинейностью, необходимо положить $k = 0$, откуда следует $p = \frac{1}{1-n}$. Таким образом, подстановка $y = u^{\frac{1}{1-n}}$ приводит уравнение (4.1.3.3) к виду

$$uu''_{xx} + s(u'_x)^2 + a_1 uu'_x + a_2 u'_x + b_1(n-1)u^2 + b_2(n-1)u + b_3(n-1) = 0, \quad s = \frac{n}{1-n}. \tag{4.1.3.5}$$

Для поиска точных решений уравнения (4.1.3.5) можно использовать различные дифференциальные связи, которые обсуждаются ниже.

1.1. К уравнению (4.1.3.5) добавим линейную дифференциальную связь

$$u'_x = \alpha u + \beta. \tag{4.1.3.6}$$

Исключив с помощью (4.1.3.6) производные в (4.1.3.5), получим квадратное уравнение вида $Au^2 + Bu + C = 0$. Приравнивая нулю его коэффициенты A, B, C, приходим к системе из трех алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (s+1)\alpha^2 + a_1\alpha + b_1(n-1) &= 0, \\ (2s+1)\alpha\beta + a_2\alpha + a_1\beta + b_2(n-1) &= 0, \\ s\beta^2 + a_2\beta + b_3(n-1) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.3.7}$$

Первое квадратное уравнение в системе (4.1.3.7) служит для определения α (в широком диапазоне изменения параметров a_1, b_1, n оно имеет два различных корня). Аналогично, последнее квадратное уравнение в (4.1.3.7) служит для определения β (в широком диапазоне изменения параметров a_2, b_3, n оно имеет два различных корня). Поэтому в общем случае второе уравнение в (4.1.3.7) определяет четыре допустимых значения коэффициента b_2, для которого существуют решения вида $u = Ce^{\alpha x} - (\beta/\alpha)$, удовлетворяющие дифференциальной связи (4.1.3.6).

1.2. Другие частные решения уравнения (4.1.3.5) можно найти с помощью дифференциальной связи

$$u'_x = \alpha u + \beta u^{1/2} + \gamma. \tag{4.1.3.8}$$

Используя это соотношение для исключения производных из (4.1.3.5), получим алгебраическое уравнение четвертой степени относительно $\xi = u^{1/2}$. Приравнивая его коэффициенты нулю, приходим к системе, состоящей из пяти алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (s+1)\alpha^2 + a_1\alpha + b_1(n-1) &= 0,\\ \beta[(2s+\tfrac{3}{2})\alpha + a_1] &= 0,\\ (s+\tfrac{1}{2})(\beta^2 + 2\alpha\gamma) + a_1\gamma + a_2\alpha + b_2(n-1) &= 0,\\ \beta[(2s+\tfrac{1}{2})\gamma + a_2] &= 0,\\ s\gamma^2 + a_2\gamma + b_3(n-1) &= 0. \end{aligned} \qquad (4.1.3.9)$$

При $\beta = 0$ дифференциальная связь (4.1.3.8) с точностью до обозначений совпадает с (4.1.3.6); поэтому далее полагаем $\beta \neq 0$.

Из второго, третьего и четвертого уравнений (4.1.3.9) находим коэффициенты дифференциальной связи (4.1.3.8):

$$\alpha = -\frac{a_1}{2s+\frac{3}{2}}, \quad \gamma = -\frac{a_2}{2s+\frac{1}{2}}, \quad \beta = \pm\left[\frac{b_2(1-n) - a_1\gamma - a_2\alpha - 2\alpha\gamma(s+\frac{1}{2})}{s+\frac{1}{2}}\right]^{1/2}.$$

Первое и последнее уравнения (4.1.3.9) накладывают следующие два ограничения на коэффициенты уравнения (4.1.3.5):

$$b_1 = \frac{a_1^2(s+\frac{1}{2})}{(n-1)(2s+\frac{3}{2})^2} = -\frac{2a_1^2(n+1)}{(n+3)^2}, \quad b_3 = \frac{a_2^2(s+\frac{1}{2})}{(n-1)(2s+\frac{1}{2})^2} = -\frac{2a_2^2(n+1)}{(3n+1)^2}.$$

Здесь было учтено соотношение $s = n/(1-n)$.

1.3. При $a_1 = a_2 = 0$ к уравнению (4.1.3.5) можно добавить нелинейную дифференциальную связь

$$(u'_x)^2 = \alpha u^2 + \beta u + \gamma. \qquad (4.1.3.10)$$

Простой анализ показывает, что коэффициенты этой дифференциальной связи можно выразить через коэффициенты уравнения (4.1.3.5) следующим образом:

$$\alpha = b_1(1-n)^2, \quad \beta = \frac{2b_2(1-n)^2}{1+n}, \quad \gamma = \frac{b_3(1-n)^2}{n}.$$

Замечание 4.6. *Дифференциальная связь вида (4.1.3.10) при $\alpha = 0$ определяет квадратичное решение*

$$u = \frac{1}{4}\beta x^2 + Cx + \frac{C^2-\gamma}{\beta},$$

где C — произвольная постоянная.

Случай 2. Положим теперь $k = 2$ в уравнении (4.1.3.4), откуда следует $p = \frac{1}{n-1}$, что соответствует подстановке $y = u^{\frac{1}{n-1}}$. В результате приходим к уравнению с нелинейностью четвертого порядка

$$\begin{aligned} &uu''_{xx} + c(u'_x)^2 + a_1uu'_x + a_2u^2u'_x =\\ &\qquad = b_1(n-1)u^2 + b_2(n-1)u^3 + b_3(n-1)u^4, \quad c = \frac{2-n}{n-1}. \end{aligned} \qquad (4.1.3.11)$$

Точные решения этого уравнение можно найти с помощью квадратичной дифференциальной связи

$$u'_x = \alpha u^2 + \beta u + \gamma. \qquad (4.1.3.12)$$

Используя это соотношение для исключения производных из (4.1.3.11), получим алгебраическое уравнение четвертой степени относительно u. Приравнивая его коэффициенты нулю, приходим к системе, состоящей из пяти алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}(c+2)\alpha^2 + a_2\alpha = b_3(n-1),\\ (2c+3)\alpha\beta + a_1\alpha + a_2\beta = b_2(n-1),\\ (c+1)(\beta^2+2\alpha\gamma) + a_1\beta + a_2\gamma = b_1(n-1),\\ \gamma[(2c+1)\beta + a_1] = 0,\\ c\gamma^2 = 0.\end{gathered} \tag{4.1.3.13}$$

Необходимо рассмотреть два случая $c = 0$ и $\gamma = 0$, которые следуют из последнего уравнения.

Рассмотрим только первый случай $c = 0$, который соответствует значению $n = 2$. Для упрощения выкладок также полагаем $a_2 = 0$. Коэффициенты дифференциальной связи (4.1.3.12) определяются из первого, третьего и четвертого уравнений (4.1.3.13):

$$\alpha = \pm\sqrt{b_3/2}, \quad \beta = -a_1, \quad \gamma = \pm\frac{b_1}{\sqrt{2b_3}}. \tag{4.1.3.14}$$

Второе уравнение в (4.1.3.13) задает соотношение между коэффициентами: $a_1\sqrt{2b_3} \pm b_2 = 0$ (во всех формулах берется либо верхний, либо нижний знак). Искомое решение находится путем интегрирования уравнения с разделяющимися переменными (4.1.3.12) с коэффициентами (4.1.3.14).

Замечание 4.7. *Полагая $k = 3$ в (4.1.3.5), что подразумевает $p = \frac{2}{n-1}$ и $y = u^{\frac{2}{n-1}}$, можно также искать решения данного уравнения в более сложном виде*

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2, \quad v'_x = \beta_0 + \beta_1 v + \beta_2 v^2.$$

◀

► Пример 4.14. Рассмотрим теперь шестипараметрическое уравнение с нелинейностями экспоненциального типа

$$y''_{xx} + (a_1 + a_2 e^{\lambda y})y'_x = b_1 + b_2 e^{\lambda y} + b_3 e^{2\lambda y}. \tag{4.1.3.15}$$

Сделав замену переменной $y = (\mu/\lambda)\ln u$, где параметр μ подлежит определению, и умножив результат на λu^2, приходим к уравнению

$$\mu u u''_{xx} - \mu(u'_x)^2 + \mu(a_1 u + a_2 u^{\mu+1})u'_x = b_1\lambda u^2 + b_2\lambda u^{\mu+2} + b_3 u^{2\mu+2}. \tag{4.1.3.16}$$

Обозначив в (4.1.3.16) $\mu = k - 1$, получим уравнение вида (4.1.3.4) с такими же нелинейностями, но с другими коэффициентами. Поэтому для построения точных решений уравнения (4.1.3.16) можно использовать те же самые дифференциальные связи, что и в примере 4.13. В частности, полагая в (4.1.3.16) $\mu = -1$, имеем уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u u''_{xx} - (u'_x)^2 + (a_1 u + a_2)u'_x + b_1\lambda u^2 + b_2\lambda u + b_3 = 0, \tag{4.1.3.17}$$

которое отличается от уравнения (4.1.3.5) только коэффициентами. Дифференциальные связи (4.1.3.6), (4.1.3.8) и (4.1.3.10) позволяют находить частные решения уравнения (4.1.3.17) (подробности опускаются). ◀

4.1.4. Использование нескольких дифференциальных связей

В некоторых случаях к рассматриваемому уравнению можно добавить несколько дифференциальных связей, содержащих дополнительную искомую функцию. Для определенности вернемся к автономному уравнению n-го порядка (4.1.1.1). Дополним его двумя дифференциальными связями первого порядка

$$y = G(u, u'_x; \mathbf{b}), \tag{4.1.4.1}$$

$$H(u, u'_x; \mathbf{c}) = 0, \tag{4.1.4.2}$$

где $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — векторы свободных параметров. Подставив (4.1.4.1) в (4.1.1.1), получим уравнение $(n+1)$-го порядка для функции $u = u(x)$:

$$F_1(u, u'_x, \ldots, u_x^{(n+1)}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{4.1.4.3}$$

Это уравнение вместе с дифференциальной связью (4.1.4.2) исследуется методом, описанным в разд. 4.1.1. Небольшое (но не принципиальное) отличие состоит в том, что порядок уравнения (4.1.4.3) выше, чем порядок исходного уравнения (4.1.1.1).

► Пример 4.15. В [218, 219, 221] (см. также [24]) дифференциальная связь (4.1.4.2) выбиралась в одном из следующих трех видов:

$$u'_x + u^2 - c_1 u - c_2 = 0, \tag{4.1.4.4}$$

$$(u'_x)^2 - 4u^3 - c_1 u^2 - c_2 u - c_3 = 0, \tag{4.1.4.5}$$

$$(u'_x)^2 - u^4 - c_1 u^3 - c_2 u^2 - c_3 u - c_4 = 0, \tag{4.1.4.6}$$

а дифференциальная связь (4.1.4.1) выбиралась из класса функций

$$y = \sum_{k=0}^{K} c_{1k} u^k + u'_x \sum_{l=0}^{L} c_{2l} u^l + \sum_{m=1}^{M} c_{3m} \left(\frac{u'_x}{u}\right)^m. \tag{4.1.4.7}$$

В (4.1.4.7) для дифференциальной связи (4.1.4.4) принято $K = M$, $c_{2l} = 0$ $(l = 1, \ldots, L)$. В результате был получен ряд точных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго, третьего и четвертого порядков. ◄

Замечание 4.8. *Все уравнения (4.1.4.4) — (4.1.4.6) сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными (их решения выражаются в элементарных функциях или в квадратурах). Решение уравнения (4.1.4.5) можно выразить через функцию Вейерштрасса $\wp = \wp(z, g_2, g_3)$, а решение уравнения (4.1.4.6) — через эллиптическую функцию Якоби.*

Дифференциальные связи (4.1.4.1) и (4.1.4.2) могут содержать производные u по x более высокого порядка.

► Пример 4.16. В работах [81, 85, 356, 369] использовался метод G'/G-разложения и искались частные решения автономного уравнения с помощью дифференциальных связей первого и второго порядка специального вида*:

$$y=\sum_{k=0}^{n} b_k\Big(\frac{u'_x}{u}\Big)^k, \tag{4.1.4.8}$$

$$u''_{xx}-c_1u'_x-c_0u=0. \tag{4.1.4.9}$$

Дифференциальные связи (4.1.4.8)—(4.1.4.9) можно упростить с помощью подстановки $\xi=u'_x/u$. В результате они сводятся к точечному преобразованию полиномиального типа и дифференциальной связи первого порядка типа Риккати:

$$\begin{aligned} &y=\sum_{k=0}^{n} b_k\xi^k,\\ &\xi'_x+\xi^2-c_1\xi-c_0=0. \end{aligned}$$

В [220] было показано, что поиск частных решений ОДУ методом G'/G-разложения, который основан на дифференциальных связях (4.1.4.8)—(4.1.4.9), приводит к таким же результатам, что и метод th-функций [152, 237, 263]. ◄

4.2. Описание метода дифференциальных связей для уравнений с частными производными**

4.2.1. Предварительные замечания. Простой пример

Основная идея метода: попытаться найти точные решения сложного уравнения в частных производных путем совместного анализа этого уравнения и более простого вспомогательного уравнения, называемого *дифференциальной связью*.

В разд. 1.1.1 рассматривались примеры нелинейных УрЧП, допускающих точные решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u(x,t)=\varphi(x)+\psi(t). \tag{4.2.1.1}$$

На начальном этапе функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ считаются произвольными и подлежат определению в ходе последующего анализа.

Дифференцируя выражение (4.2.1.1) по t, получим

$$u_t=f(t) \qquad (f=\psi'_t). \tag{4.2.1.2}$$

Верно и обратное: из соотношения (4.2.1.2) следует представление решения в виде (4.2.1.1).

*В оригинальной статье [356] и дальнейших публикациях использовалось обозначение $u=G$.

**Перед чтением этого раздела полезно ознакомиться с разд. 4.1.

Дифференцируя далее (4.2.1.2) по x, имеем

$$u_{xt} = 0. \tag{4.2.1.3}$$

Обратно, из (4.2.1.3) можно получить представление решения в виде (4.2.1.1).

Таким образом, задачу поиска точных решений вида (4.2.1.1) для конкретного уравнения с частными производными можно заменить эквивалентной задачей о поиске точных решений данного уравнения, удовлетворяющих дополнительному условию (4.2.1.2) или (4.2.1.3). Подобные дополнительные условия, записанные в виде одного или нескольких дифференциальных уравнений, принято назвать *дифференциальными связями*.

Прежде чем приводить общее описание метода дифференциальных связей, продемонстрируем его характерные особенности на простом примере.

► Пример 4.17. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a u_{yyy}, \tag{4.2.1.4}$$

которое встречается в теории гидродинамического пограничного слоя. Будем искать решения уравнения (4.2.1.4), удовлетворяющие линейной дифференциальной связи первого порядка

$$u_x = \varphi(y). \tag{4.2.1.5}$$

Здесь функция $\varphi(y)$ в общем случае не может быть произвольной, а должна удовлетворять условию совместности уравнений (4.2.1.4) и (4.2.1.5). Условие совместности представляет собой дифференциальное уравнение для определения $\varphi(y)$; оно выводится из уравнений (4.2.1.4) и (4.2.1.5) и соотношений, полученных из них путем дифференцирования.

Последовательно дифференцируя (4.2.1.5) по разным переменным, находим производные

$$u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = \varphi'_y, \quad u_{xxy} = 0, \quad u_{xyy} = \varphi''_{yy}, \quad u_{xyyy} = \varphi'''_{yyy}. \tag{4.2.1.6}$$

Дифференцируя (4.2.1.4) по x, имеем

$$u_{xy}^2 + u_y u_{xxy} - u_{xx} u_{yy} - u_x u_{xyy} = a u_{xyyy}. \tag{4.2.1.7}$$

Подставив в (4.2.1.7) производные (4.2.1.5) и (4.2.1.6), приходим к ОДУ третьего порядка для функции φ:

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} = a\varphi'''_{yyy}. \tag{4.2.1.8}$$

Это уравнение представляет собой условие совместности уравнений (4.2.1.4) и (4.2.1.5).

Для построения точного решения проинтегрируем уравнение (4.2.1.5). Получим

$$u = \varphi(y)x + \psi(y). \tag{4.2.1.9}$$

Функцию $\psi(y)$ найдем, подставив (4.2.1.9) в (4.2.1.4). Учитывая (4.2.1.8), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\psi(y)$:

$$\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} = a\psi'''_{yyy}. \tag{4.2.1.10}$$

В итоге получаем точное решение вида (4.2.1.9), где функции φ и ψ описываются уравнениями (4.2.1.8) и (4.2.1.10).

Замечание 4.9. *Указанное выше решение легче получить прямой подстановкой выражения (4.2.1.9) в исходное уравнение (4.2.1.4).*

Замечание 4.10. *В [370] дифференциальная связь (4.2.1.5) использовалась для поиска точных решений уравнений, описывающих плоское стационарное течение неньютоновской жидкости с вязкоупругими свойствами.* ◄

4.2.2. Общее описание метода дифференциальных связей

Идея построения точных решений нелинейных УрЧП путем использования дифференциальных связей с привлечением теории совместности принадлежит Н. Н. Яненко [68]. О методе дифференциальных связей, его связи с другими методами, а также многочисленных конкретных примерах его применения, см., например, [3, 48, 55, 137, 158, 209–211, 216, 239, 241, 258, 287, 359].

В общем случае процедура построения точных решений для нелинейных уравнений математической физики методом дифференциальных связей существенно сложнее, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений. Она состоит из нескольких последовательных этапов, которые описаны ниже.

1°. Поиск точных решений уравнения

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots)=0 \qquad (4.2.2.1)$$

осуществляется путем присоединения к нему дифференциальной связи (вспомогательного дифференциального уравнения)

$$G(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\,\ldots)=0. \qquad (4.2.2.2)$$

Вид дифференциальной связи (4.2.2.2) можно задаваться:

• исходя из априорных соображений (например, можно потребовать, чтобы связь представляла собой разрешимое уравнение),

• исходя из некоторых свойств рассматриваемого уравнения (например, его симметрий или законов сохранения).

2°. В общем случае полученная таким образом переопределенная система (4.2.2.1) — (4.2.2.2) для одной искомой функции u требует проведения анализа ее уравнений на совместность. Если дифференциальная связь (4.2.2.2) задана исходя из априорных соображений, она должна иметь достаточный функциональный произвол (т. е. содержать произвольные определяющие функции). В результате исследования системы (4.2.2.1) — (4.2.2.2) на совместность должны быть получены условия, конкретизирующие вид определяющих функций. Эти условия (*условия совместности*) записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (или системы уравнений с частными производными).

В простых случаях исследование на совместность проводится путем дифференцирования (возможно, многократного) уравнений (4.2.2.1) и (4.2.2.2) по x и t и исключения старших производных из полученных дифференциальных соотношений и уравнений (4.2.2.1), (4.2.2.2). В результате приходят к уравнению, содержащему степени младших производных. Приравнивание нулю коэффициентов при всех степенях производных позволяет найти условия совместности, которые связывают функциональные коэффициенты уравнений (4.2.2.1) и (4.2.2.2). В более сложных случаях при исследовании на совместность двух или более УрЧП с одной неизвестной функцией приходится прибегать к методам анализа переопределенных систем УрЧП на основе алгоритма Картана или алгоритма Жане — Спенсера — Кураниши (описание этих алгоритмов и другую информацию по теории переопределенных систем УрЧП можно найти, например, в [55, 224, 312], см. также [130]).

3°. Решаем систему полученных в п. 2° дифференциальных уравнений для определяющих функций. Затем эти функции подставляем в дифференциальную связь (4.2.2.2). В результате приходим к уравнению

$$g(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0. \qquad (4.2.2.3)$$

Дифференциальная связь (4.2.2.3), которая совместна с рассматриваемым уравнением (4.2.2.1), называется *инвариантным многообразием* для уравнения (4.2.2.1).

4°. Ищем общее решение (i) уравнения (4.2.2.3) или (ii) уравнения, которое является следствием (4.2.2.1) и (4.2.2.3). Полученное решение будет содержать некоторые произвольные функции $\{\varphi_m\}$ (эти функции могут зависеть от x и t, так и от u). Отметим, что в некоторых случаях вместо общего решения можно использовать частные решения уравнения (4.2.2.3) или его следствий.

5°. Решение, полученное в п. 4°, подставляем в исходное УрЧП (4.2.2.1). Приходим к уравнению, которое позволяет найти функции $\{\varphi_m\}$. Определив $\{\varphi_m\}$, подставляем их в решение из п. 4°. В результате получим точное решение исходного уравнения (4.2.2.1).

Замечание 4.11. *При неудачном выборе дифференциальной связи уравнения (4.2.2.1) и (4.2.2.2) могут оказаться несовместными (не имеющими общих решений).*

Замечание 4.12. *Вместо одной можно использовать несколько дифференциальных связей вида (4.2.2.2).*

Замечание 4.13. *На последних трех этапах метода дифференциальных связей приходится решать различные уравнения (системы уравнений). Если хотя бы на одном из этих этапов не удается получить решение, то не удается построить и точное решение исходного уравнения.*

Для бóльшей наглядности общая схема применения метода дифференциальных связей изображена на рис. 4.1.

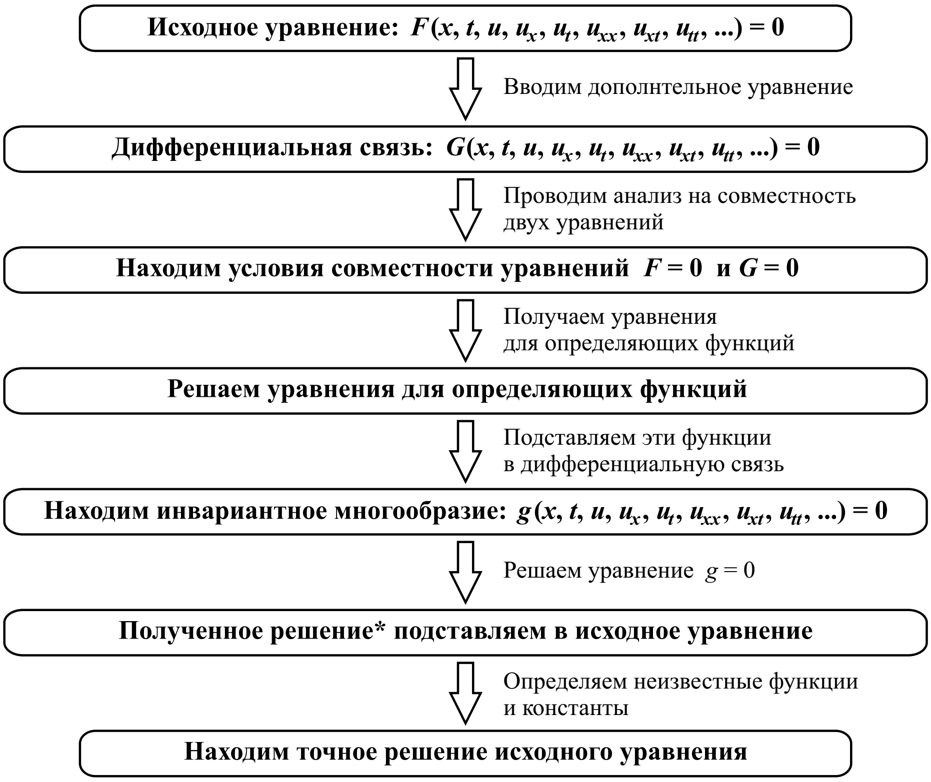

Рис. 4.1. Алгоритм построения точных решений методом дифференциальных связей.

4.3. Дифференциальные связи первого порядка для уравнений с частными производными

4.3.1. Эволюционные уравнения второго порядка

Дифференциальная связь первого порядка. Условие совместности. Процедура расщепления. Рассмотрим общее эволюционное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$u_{xx} = F(x, t, u, u_x, u_t). \tag{4.3.1.1}$$

Дополним это уравнение дифференциальной связью первого порядка общего вида

$$u_t = G(x, t, u, u_x). \tag{4.3.1.2}$$

Условие совместности этих уравнений выводится путем однократного дифференцирования (4.3.1.1) по t и двукратного дифференцирования (4.3.1.2) по x с

*Это решение обычно содержит некоторые произвольные функции и постоянные.

последующим приравниванием полученных выражений для смешанных производных третьего порядка u_{xxt} и u_{txx}:

$$\mathrm{D}_t F = \mathrm{D}_x^2 G. \tag{4.3.1.3}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования по t и x:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t}, \\ \mathrm{D}_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t}. \end{aligned} \tag{4.3.1.4}$$

Частные производные u_t, u_{xx}, u_{xt} и u_{tt} в формулах (4.3.1.4) должны быть выражены через x, t, u, u_x с помощью уравнений (4.3.1.1), (4.3.1.2) и соотношений, полученных дифференцированием этих уравнений. В результате имеем

$$\begin{aligned} &u_t = G, \quad u_{xx} = F, \quad u_{xt} = \mathrm{D}_x G = G_x + u_x G_u + F G_{u_x}, \\ &u_{tt} = \mathrm{D}_t G = G_t + G G_u + u_{xt} G_{u_x} = G_t + G G_u + (G_x + u_x G_u + F G_{u_x}) G_{u_x}. \end{aligned} \tag{4.3.1.5}$$

Здесь в выражении для F производную u_t надо заметить на G согласно (4.3.1.2) и $G_{u_x} = \partial G/\partial u_x$.

Условие совместности (4.3.1.3) с учетом соотношений (4.3.1.2), (4.3.1.4), (4.3.1.5) принимает вид $R(x,t,u,u_x) = 0$. Часто левую часть этого соотношения можно представить в виде полинома по производной u_x:

$$\sum_{m=1}^{M} R_m(x,t,u) u_x^m = 0.$$

Процедура расщепления по производной приводит к системе определяющих уравнений

$$R_m(x,t,u) = 0, \qquad m = 1, \ldots, M.$$

Иллюстративные примеры. Ниже рассмотрены несколько примеров, иллюстрирующих применение метода дифференциальных связей для построения точных решений нелинейных УрЧП. При этом для простоты и наглядности общие формулы для вычисления производных (4.3.1.3) и (4.3.1.4) использоваться не будут.

► Пример 4.18. Для поиска точных решений нелинейного уравнения теплопроводности с источником

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u) \tag{4.3.1.6}$$

используем дифференциальную связь простейшего вида

$$u_t = \varphi(u). \tag{4.3.1.7}$$

Функции $f(u)$, $g(u)$, $\varphi(u)$ в уравнениях (4.3.1.6) и (4.3.1.7) заранее неизвестны и подлежат определению в ходе последующего анализа. Процедура построения решения состоит из нескольких этапов, подробно описанных ниже.

1°. *Преобразование исходного УрЧП к более удобному виду*. Разрешив уравнение (4.3.1.6) относительно старшей производной, имеем

$$u_{xx} = \frac{u_t - f'_u(u)u_x^2 - g(u)}{f(u)} = \frac{\varphi(u) - g(u) - f'_u(u)u_x^2}{f(u)}.$$

Здесь на втором этапе была исключена производная u_t с помощью дифференциальной связи (4.3.1.7). Полученное соотношение удобно представить в следующем виде:

$$u_{xx} = h(u) - \frac{f'_u(u)}{f(u)}u_x^2, \quad h(u) = \frac{\varphi(u) - g(u)}{f(u)}. \tag{4.3.1.8}$$

Далее для краткости в промежуточных результатах будем опускать аргументы функций $f = f(u)$, $g = g(u)$, $\varphi = \varphi(u)$.

2°. *Вывод определяющей системы уравнений*. Последовательно дифференцируя по x связь (4.3.1.7), находим смешанную производную третьего порядка u_{txx}:

$$\begin{aligned} u_t &= \varphi, \quad u_{tx} = \varphi'_u u_x, \\ u_{txx} &= \varphi'_u u_{xx} + \varphi''_{uu} u_x^2 = \varphi'_u\Big(h - \frac{f'_u}{f}u_x^2\Big) + \varphi''_{uu}u_x^2 \\ &= h\varphi'_u + \Big(\varphi''_{uu} - \varphi'_u\frac{f'_u}{f}\Big)u_x^2. \end{aligned} \tag{4.3.1.9}$$

Здесь при выкладках была исключена вторая производная u_{xx} с помощью соотношения (4.3.1.8).

Дифференцируя (4.3.1.8) по t, вычисляем смешанную производную третьего порядка u_{xxt}:

$$\begin{aligned} u_{xxt} &= h'_u u_t - \Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u u_t u_x^2 - 2\frac{f'_u}{f}u_x u_{xt} \\ &= h'_u\varphi - \Big[\varphi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u + 2\varphi'_u\frac{f'_u}{f}\Big]u_x^2. \end{aligned} \tag{4.3.1.10}$$

Здесь на последнем этапе были исключены производные u_t и u_{xt} с помощью дифференциальной связи (4.3.1.7) и второго соотношения (4.3.1.9).

Приравнивая производные третьего порядка u_{xxt} и u_{txx}, которые определены формулами (4.3.1.9) и (4.3.1.10), получим соотношение

$$\Big[\varphi''_{uu} + \varphi'_u\frac{f'_u}{f} + \varphi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u\Big]u_x^2 + h\varphi'_u - h'_u\varphi = 0. \tag{4.3.1.11}$$

Приравнивая далее нулю функциональные коэффициенты при различных степенях u_x (процедура расщепления по производной u_x), приходим к определяющей системе уравнений

$$\begin{aligned} \varphi''_{uu} + \varphi'_u\frac{f'_u}{f} + \varphi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u &= 0, \\ h\varphi'_u - h'_u\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{4.3.1.12}$$

3°. *Решение определяющей системы уравнений*. Систему (4.3.1.12) удается проинтегрировать, поскольку первое уравнение можно представить в виде

$[(f\varphi)'_u/f]'_u = 0$, а у второго уравнения разделяются переменные. В результате имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{f}\biggl(A\int f\,du + B\biggr), \\ g &= (1 - Cf)\varphi, \end{aligned} \tag{4.3.1.13}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. При выводе формулы для g в (4.3.1.13) функция h была заменена другими функциями с учетом ее определения в (4.3.1.8).

Далее рассмотрим невырожденный случай, когда $A \neq 0$ в (4.3.1.13). Считая, что функция $f = f(u)$ задана произвольно, с помощью (4.3.1.13) находим функции $g(u)$ и $\varphi(u)$:

$$g(u) = \frac{a + cf}{f}\biggl(\int f\,du + b\biggr), \quad \varphi(u) = \frac{a}{f}\biggl(\int f\,du + b\biggr), \tag{4.3.1.14}$$

где $a = A$, $b = B/A$, $c = -AC$ — произвольные постоянные.

4°. *Определение общего вида решения с помощью дифференциальной связи.* Подставив функцию $\varphi(u)$ из (4.3.1.14) в дифференциальную связь (4.3.1.7), приходим к уравнению

$$u_t = \frac{a}{f}\biggl(\int f\,du + b\biggr). \tag{4.3.1.15}$$

Подстановка $w = \int f\,du + b$ приводит (4.3.1.15) к простому линейному ОДУ $w_t = aw$. Интегрируя его, находим общее решение уравнения (4.3.1.15) в неявном виде

$$\int f(u)\,du = \theta(x)e^{at} - b. \tag{4.3.1.16}$$

Здесь функция $\theta = \theta(x)$ играет роль постоянной интегрирования, которая зависит от x (т. к. w зависит от x и t, а уравнение $w_t = aw$ не зависит явно от x) и на данном этапе считается произвольной.

5°. *Получение решения исходного УрЧП.* Дифференцируя (4.3.1.16) по x и t, получаем $u_t = ae^{at}\theta/f$ и $u_x = e^{at}\theta'_x/f$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение (4.3.1.6) и учитывая (4.3.1.14), приходим к линейному ОДУ второго порядка

$$\theta''_{xx} + c\theta = 0, \tag{4.3.1.17}$$

общее решение которого имеет вид

$$\theta = \begin{cases} C_1 \sin\bigl(x\sqrt{c}\bigr) + C_2 \cos\bigl(x\sqrt{c}\bigr) & \text{при } c > 0, \\ C_1 \operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-c}\bigr) + C_2 \operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-c}\bigr) & \text{при } c < 0, \\ C_1 x + C_2 & \text{при } c = 0, \end{cases} \tag{4.3.1.18}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формулы (4.3.1.16)—(4.3.1.18) описывают точные решения (в неявном виде) уравнения (4.3.1.6) при произвольной $f(u)$ и функции $g(u)$, заданной первой формулой (4.3.1.14). ◀

Замечание 4.14. *В вырожденном случае, подставив $A = 0$ в (4.3.1.13), для функций $g(u)$ и $\varphi(u)$ получим следующие выражения (как и выше, f считается произвольной заданной функцией):*

$$g(u) = \frac{b}{f} + c, \quad \varphi(u) = \frac{b}{f},$$

где $b = B$ и $c = -BC$ — произвольные постоянные. Это решение можно вывести из (4.3.1.14) путем переобозначения постоянных $b \to b/a$ и $c \to ac/b$ с последующим предельным переходим при $a \to 0$. После простых вычислений находим соответствующее решение уравнения (4.3.1.6) в неявном виде:

$$\int f(u)\,du = bt - \frac{1}{2}cx^2 + C_1 x + C_2.$$

► Пример 4.19. Рассмотрим теперь нелинейное реакционно-диффузионно-конвективное уравнение

$$u_t = u_{xx} + f_1(u)u_x + f_0(u). \tag{4.3.1.19}$$

Для поиска его точных решений будем использовать квазилинейную дифференциальную связь первого порядка

$$u_t = g_1(u)u_x + g_0(u). \tag{4.3.1.20}$$

Уравнения (4.3.1.19) и (4.3.1.20) являются частными случаями уравнений (4.3.1.1) и (4.3.1.2) при $F = u_t - f_1(u)u_x - f_0(u)$ и $G = g_1(u)u_x + g_0(u)$. Функции $f_1(u)$, $f_0(u)$, $g_1(u)$, $g_0(u)$ заранее неизвестны и подлежат определению в ходе последующего анализа.

Приравнивая правые части соотношений (4.3.1.19) и (4.3.1.20), имеем

$$u_{xx} = h_1 u_x + h_0, \quad \text{где} \quad h_1 = g_1 - f_1, \quad h_0 = g_0 - f_0. \tag{4.3.1.21}$$

Здесь и далее аргументы функций f_1, f_0, g_1, g_0, h_1, h_0 опускаются.

Дифференцируя (4.3.1.20) дважды по x и используя выражение (4.3.1.21) для u_{xx}, находим смешанные производные:

$$\begin{aligned} u_{tx} &= g_1 u_{xx} + g_1' u_x^2 + g_0' u_x = g_1' u_x^2 + (g_1 h_1 + g_0')u_x + g_1 h_0, \\ u_{txx} &= g_1'' u_x^3 + (g_1 h_1' + 3g_1' h_1 + g_0'')u_x^2 + \\ &\quad + (g_1 h_0' + 3g_1' h_0 + g_1 h_1^2 + g_0' h_1)u_x + (g_1 h_1 + g_0')h_0, \end{aligned} \tag{4.3.1.22}$$

где штрих обозначает производную по u. Дифференцируя (4.3.1.21) по t и используя выражения (4.3.1.20) и (4.3.1.22) для u_t и u_{xt}, получим

$$\begin{aligned} u_{xxt} &= h_1 u_{xt} + h_1' u_x u_t + h_0' u_t = \\ &= (g_1 h_1' + g_1' h_1)u_x^2 + (g_1 h_1^2 + g_0' h_1 + g_0 h_1' + g_1 h_0')u_x + \\ &\quad + g_1 h_0 h_1 + g_0 h_0'. \end{aligned} \tag{4.3.1.23}$$

Приравнивая выражения для смешанных производных третьего порядка (4.3.1.22) и (4.3.1.23) и собирая слагаемые при одинаковых степенях u_x, приходим к полиномиальному уравнению третьей степени по производной u_x:

$$g_1'' u_x^3 + (2g_1' h_1 + g_0'')u_x^2 + (3g_1' h_0 - g_0 h_1')u_x + g_0' h_0 - g_0 h_0' = 0. \tag{4.3.1.24}$$

Чтобы удовлетворить соотношению (4.3.1.24) приравняем нулю функциональные множители при всех степенях u_x:

$$g_1''=0,\quad 2g_1'h_1+g_0''=0,\quad 3g_1'h_0-g_0h_1'=0,\quad g_0'h_0-g_0h_0'=0.$$

Общее решение этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений описывается формулами

$$\begin{aligned}&g_1=C_1u+C_2,\quad g_0=-C_1^2C_3u^3-C_1C_4u^2+C_5u+C_6,\\&h_1=3C_1C_3u+C_4,\quad h_0=C_3g_0,\end{aligned}\tag{4.3.1.25}$$

где $C_1,\ \ldots,\ C_6$ — произвольные постоянные. Используя формулы (4.3.1.21) для h_0 и h_1 вместе с (4.3.1.25), находим неизвестные функции, входящие в уравнения (4.3.1.19) и (4.3.1.20):

$$\begin{aligned}&f_1(u)=C_1(1-3C_3)u+C_2-C_4,\\&f_0(u)=(-C_1^2C_3u^3-C_1C_4u^2+C_5u+C_6)(1-C_3),\\&g_1(u)=C_1u+C_2,\quad g_0(u)=-C_1^2C_3u^3-C_1C_4u^2+C_5u+C_6.\end{aligned}\tag{4.3.1.26}$$

Остановимся подробнее на частном случае

$$C_1=-k,\quad C_2=C_4=0,\quad C_3=-1/k,\quad C_5=ak,\quad C_6=bk$$

в (4.3.1.26), где a, b, k — произвольные постоянные ($k\neq 0$). Соответствующее уравнение (4.3.1.19) и дифференциальная связь (4.3.1.20) имеют вид

$$u_t=u_{xx}-(k+3)uu_x+(k+1)(u^3+au+b),\tag{4.3.1.27}$$

$$u_t=-kuu_x+k(u^3+au+b).\tag{4.3.1.28}$$

Общее решение квазилинейного уравнения первого порядка (4.3.1.28) можно записать в неявном виде; оно содержит интеграл $I(u)=\int u(u^3+au+b)^{-1}\,du$ и обратную к нему функцию. В силу сложности своей структуры, это решение неудобно для построения точных решений уравнения (4.3.1.27).

В данном случае вместо (4.3.1.28) можно использовать следствие уравнений (4.3.1.27) и (4.3.1.28), полученное путем исключения производной u_t:

$$u_{xx}=3uu_x-u^3-au-b.\tag{4.3.1.29}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение совпадает с (4.3.1.21), где h_1 и h_0 выражаются последними двумя формулами (4.3.1.25). Подстановка $u=-U_x/U$ преобразует (4.3.1.29) в линейное ОДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$U_{xxx}+aU_x-b=0.\tag{4.3.1.30}$$

Его решения определяются корнями кубического уравнения $\lambda^3+a\lambda-b=0$. В частности, если все корни λ_n — различные действительные числа, общие решения уравнений (4.3.1.29) и (4.3.1.30) определяются по формулам

$$u=-U_x/U,\quad U=r_1(t)\exp(\lambda_1x)+r_2(t)\exp(\lambda_2x)+r_3(t)\exp(\lambda_3x).\tag{4.3.1.31}$$

Функции $r_n(t)$ находятся подстановкой (4.3.1.31) в уравнение (4.3.1.27) или (4.3.1.28).

Заметим, что уравнение (4.3.1.27) исследовалось более подробно с помощью другого метода в разд. 3.2.2 (при $a=1$ и $b_2=0$). ◀

► **Пример 4.20.** Рассмотрим нелинейное уравнение диффузионного типа

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 + u^2. \tag{4.3.1.32}$$

Возьмем дифференциальную связь первого порядка

$$u_x = \varphi(x,t), \tag{4.3.1.33}$$

где φ — некоторая (пока неизвестная) функция двух аргументов.

Используя (4.3.1.33), представим исходное уравнение (4.3.1.32) в виде

$$u_t = \varphi_x + \varphi^2 + u^2. \tag{4.3.1.34}$$

Найдем условие совместности уравнений (4.3.1.33) и (4.3.1.34). Для этого продифференцируем (4.3.1.33) по t, а (4.3.1.34) — по x, а затем исключим из полученных соотношений смешанную производную с учетом равенства $u_{xt} = u_{tx}$. Заменив с помощью (4.3.1.33) производную u_x на φ, имеем

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + 2\varphi\varphi_x + 2u\varphi.$$

Выразив отсюда u, получим

$$u = \frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}. \tag{4.3.1.35}$$

Подставив (4.3.1.35) в (4.3.1.33) и (4.3.1.34), приходим к переопределенной системе нелинейных УрЧП [145, 261, 352]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right) = \varphi, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right) = \varphi_x + \varphi^2 + \left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.3.1.36}$$

Нетрудно проверить, что первое уравнение (4.3.1.36) имеет решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$\varphi(x,t) = \psi(t)\sin(x + C), \tag{4.3.1.37}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная. Подставив (4.3.1.37) во второе уравнение (4.3.1.36), приходим к ОДУ для функции $\psi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi_t' + \psi}{2\psi}\right) = \left(\frac{\psi_t' + \psi}{2\psi}\right)^2 + \psi^2. \tag{4.3.1.38}$$

Если решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (4.3.1.38) известно, то решение исходного уравнения (4.3.1.32) может быть найдено по формуле [145, 261]:

$$u(x,t) = \frac{\psi_t' + \psi}{2\psi} - \psi\cos(x + C),$$

которая получается путем подстановки выражения (4.3.1.37) в (4.3.1.35). ◄

Замечание 4.15. *В общем случае решение уравнения с частными производными первого порядка (4.3.1.2) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений [207, 289].*

4.3.2. Уравнения второго порядка гиперболического типа

Аналогичным образом исследуется гиперболическое уравнение второго порядка вида

$$u_{xt} = F(x, t, u, u_x, u_t), \tag{4.3.2.1}$$

дополненное дифференциальной связью первого порядка (4.3.1.2). Считаем, что $G_{u_x} \neq 0$.

Условие совместности для этих уравнений получается путем однократного дифференцирования (4.3.2.1) по t и двукратного дифференцирования (4.3.1.2) по t и x с последующим приравниванием полученных выражений для смешанных производных третьего порядка u_{xtt} и u_{ttx}:

$$\mathrm{D}_t F = \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_t G]. \tag{4.3.2.2}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования (4.3.1.4), в которых частные производные u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} должны быть выражены через x, t, u, u_x с помощью (4.3.2.1) и (4.3.1.2) и их дифференциальных следствий.

Покажем, как вычисляются вторые производные. Продифференцируем соотношение (4.3.1.2) по x и заменим смешанную производную правой частью уравнения (4.3.2.1). В результате находим выражение для второй производной по x:

$$G_x + u_x G_u + u_{xx} G_{u_x} = F(x, t, u, u_x, u_t) \quad \Longrightarrow \quad u_{xx} = H_1(x, t, u, u_x). \tag{4.3.2.3}$$

Здесь и далее учитывается, что соотношение (4.3.1.2) позволяет выразить производную по t через производную по x. Дифференцируя далее (4.3.1.2) по t, имеем

$$u_{tt} = G_t + u_t G_u + u_{xt} G_{u_x} = G_t + G G_u + F G_{u_x} \quad \Longrightarrow \quad u_{tt} = H_2(x, t, u, u_x). \tag{4.3.2.4}$$

Заменяя в (4.3.1.4) производные u_t, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt} их выражениями из (4.3.1.2), (4.3.2.1), (4.3.2.3), (4.3.2.4), находим операторы полного дифференцирования D_t и D_x, которые входят в условие совместности (4.3.2.2).

► Пример 4.21. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{xt} = f(u). \tag{4.3.2.5}$$

Дополним (4.3.2.5) квазилинейной дифференциальной связью

$$u_x = \varphi(t) g(u). \tag{4.3.2.6}$$

Дифференцируя (4.3.2.5) по x и заменяя первую производную по x на правую часть равенства (4.3.2.6), имеем

$$u_{xxt} = \varphi g f'_u. \tag{4.3.2.7}$$

Дифференцируя далее (4.3.2.6) по x и t, получим два соотношения

$$u_{xx} = \varphi g'_u u_x = \varphi^2 g g'_u, \tag{4.3.2.8}$$

$$u_{xt} = \varphi'_t g + \varphi g'_u u_t. \tag{4.3.2.9}$$

Исключив в (4.3.2.9) смешанную производную с помощью уравнения (4.3.2.5), находим первую производную по t:

$$u_t = \frac{f - \varphi'_t g}{\varphi g'_u}. \tag{4.3.2.10}$$

Дифференцируя (4.3.2.8) по t и заменяя u_t правой частью равенства (4.3.2.10), имеем

$$u_{xxt} = 2\varphi\varphi'_t g g'_u + \varphi^2 (g g'_u)'_u u_t = 2\varphi\varphi'_t g g'_u + \varphi (g g'_u)'_u \frac{f - \varphi'_t g}{g'_u}. \tag{4.3.2.11}$$

Приравнивая теперь смешанные производные третьего порядка (4.3.2.7) и (4.3.2.11), после сокращения на φ и элементарных преобразований приходим к определяющему уравнению

$$\varphi'_t g[(g'_u)^2 - g g''_{uu}] = g g'_u f'_u - f(g g'_u)'_u, \tag{4.3.2.12}$$

которое имеет два различных решения.

Решение 1. Уравнение (4.3.2.12) удовлетворяется тождественно при любой функции $\varphi = \varphi(t)$, если положить

$$(g'_u)^2 - g g''_{uu} = 0,$$
$$g g'_u f'_u - f(g g'_u)'_u = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$f(u) = a e^{\lambda u}, \quad g(u) = b e^{\lambda u/2}, \tag{4.3.2.13}$$

где a, b, λ — произвольные постоянные. Для простоты выкладок далее рассмотрим случай

$$a = b = 1, \quad \lambda = -2. \tag{4.3.2.14}$$

Подставим функцию $g(u)$ из (4.3.2.13) — (4.3.2.14) в дифференциальную связь (4.3.2.6). Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$u = \ln[\varphi(t)x + \psi(t)], \tag{4.3.2.15}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставляя (4.3.2.15) в исходное уравнение (4.3.2.5) с правой частью (4.3.2.13) — (4.3.2.14), приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\psi(t)$:

$$\psi\varphi'_t - \varphi\psi'_t = 1.$$

Общее решение этого уравнения записывается так:

$$\psi(t) = C\varphi(t) - \varphi(t)\int \frac{dt}{\varphi^2(t)}, \tag{4.3.2.16}$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, формулы (4.3.2.15) и (4.3.2.16), где $\varphi(t)$ — произвольная функция, дают точное решение нелинейного УрЧП с экспоненциальной нелинейностью $u_{xt} = e^{-2u}$.

Решение 2. Второе решение определяется линейной зависимостью

$$\varphi(t) = at + b, \tag{4.3.2.17}$$

где a и b — произвольные постоянные. В этом случае, функции $f(u)$ и $g(u)$ связаны уравнением (4.3.2.12), где $\varphi'_t = a$. Интегрируя (4.3.2.6) с учетом (4.3.2.17), находим общий вид решения

$$u = u(z), \quad z = (at + b)x + \psi(t), \tag{4.3.2.18}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставим эту зависимость в исходное уравнение (4.3.2.5), а затем заменим x на z с помощью (4.3.2.18). В результате получим

$$[az + (at + b)\psi'_t - a\psi]u''_{zz} + au'_z = f(u). \tag{4.3.2.19}$$

Чтобы это соотношение было обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $u = u(z)$, надо положить

$$(at + b)\psi'_t - a\psi = \text{const}.$$

Интегрируя, находим функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = ct + d, \tag{4.3.2.20}$$

где c и d — произвольные постоянные.

Формулы (4.3.2.18) и (4.3.2.20) определяют решение уравнения (4.3.2.5) при произвольной функции $f(u)$. При этом функция $u(z)$ описывается уравнением $(az + bc - ad)u''_{zz} + au'_z = f(u)$, которое следует из (4.3.2.19) и (4.3.2.20). Частному случаю $a = d = 0$ соответствует решение типа бегущей волны, а случаю $b = c = d = 0$ соответствует автомодельное решение. ◄

4.3.3. Уравнения второго порядка общего вида

Рассмотрим уравнение второго порядка общего вида

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \tag{4.3.3.1}$$

вместе с дифференциальной связью первого порядка

$$G(x, t, u, u_x, u_t) = 0. \tag{4.3.3.2}$$

Последовательно дифференцируем уравнения (4.3.3.1) и (4.3.3.2) по обеим переменным для получения их дифференциальных следствий, содержащих вторые и третьи производные. Имеем

$$\begin{gathered} \mathrm{D}_x F = 0, \quad \mathrm{D}_t F = 0, \quad \mathrm{D}_x G = 0, \quad \mathrm{D}_t G = 0, \\ \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_x G] = 0, \quad \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_t G] = 0, \quad \mathrm{D}_t[\mathrm{D}_t G] = 0. \end{gathered} \tag{4.3.3.3}$$

Условие совместности для уравнений (4.3.3.1) и (4.3.3.2) можно найти путем исключения из девяти уравнений (4.3.3.1) — (4.3.3.3) производных u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}, u_{xxt}, u_{xtt}, u_{ttt} . В результате приходим к выражению вида

$$H(x, t, u, u_x) = 0. \tag{4.3.3.4}$$

Если в левой части (4.3.3.4) стоит полином по u_x, то для вывода условий совместности надо приравнять нулю функциональные множители этого полинома.

4.4. Дифференциальные связи второго и старших порядков. Некоторые обобщения

4.4.1. Дифференциальные связи второго порядка

Построение точных решений нелинейных уравнений в частных производных с помощью дифференциальных связей второго и более высоких порядков, как правило, требует нахождения точных решений этих дифференциальных связей. В общем случае последнее сделать весьма проблематично или невозможно. По этой причине обычно используют специальные дифференциальные связи, содержащие производные только по одной из переменных (фактически рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка по переменной x, а другая независимая переменная t входит неявно или считается параметром, так что постоянные интегрирования этого уравнения будут зависеть от t).

Обсудим задачу о совместности эволюционного уравнения второго порядка

$$u_t = F_1(x, t, u, u_x, u_{xx}) \tag{4.4.1.1}$$

с дифференциальной связью аналогичного вида

$$u_t = F_2(x, t, u, u_x, u_{xx}). \tag{4.4.1.2}$$

Во-первых, эту задачу можно свести к более простой задаче с дифференциальной связью первого порядка, которая рассматривалась в разд. 4.2.1. Для этого сначала надо исключить из уравнений (4.4.1.1) и (4.4.1.2) вторую производную u_{xx}. В результате получим уравнение первого порядка типа (4.3.1.2) (его можно рассматривать как более простую, чем исходная, дифференциальную связь), которое далее исследуется на совместность с исходным уравнением (4.4.1.1).

Во-вторых, исключив производную по t из (4.4.1.1) и (4.4.1.2), приходим к уравнению вида

$$H(x, t, u, u_x, u_{xx}) = 0, \tag{4.4.1.3}$$

которое можно трактовать как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x с параметром t. Постоянные интегрирования, возникающие при решении уравнения (4.4.1.3) будут произвольными функциями t, т. е. $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$.

Таким образом, эволюционная дифференциальная связь второго порядка общего вида (4.4.1.1) эквивалентна, с одной стороны, подходящей связи первого порядка типа (4.3.1.2), а с другой стороны — дифференциальной связи второго порядка в виде обыкновенного дифференциального уравнения (4.4.1.3). Такие эквивалентные связи технически использовать проще, чем исходную дифференциальную связь (4.4.1.2).

Замечание 4.16. *В левые части уравнения (4.4.1.1) и дифференциальной связи (4.4.1.2) вместо u_t может входить вторая производная u_{tt} (или u_{tx}). Тогда исключение u_{tt} (или u_{tx}) также приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка вида (4.4.1.3), использование которого более целесообразно, чем исходной дифференциальной связи.*

► Пример 4.22. Рассмотрим опять нелинейное уравнение теплопроводности с источником

$$u_t = [f_1(u)u_x]_x + f_2(u). \qquad (4.4.1.4)$$

Для поиска его точных решений теперь будем использовать автономную дифференциальную связь второго порядка с квадратичной нелинейностью относительно второй производной:

$$u_{xx} = g_1(u)u_x^2 + g_2(u). \qquad (4.4.1.5)$$

Функции $f_2(u)$, $f_1(u)$, $g_2(u)$, $g_1(u)$, входящие в (4.4.1.4) и (4.4.1.5), подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Исключив вторую производную из (4.4.1.4) и (4.4.1.5), приходим к УрЧП первого порядка

$$u_t = \varphi(u)u_x^2 + \psi(u), \qquad (4.4.1.6)$$

где

$$\varphi(u) = f_1(u)g_1(u) + f_1'(u), \quad \psi(u) = f_1(u)g_2(u) + f_2(u). \qquad (4.4.1.7)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по u.

Продифференцировав (4.4.1.5) по t, имеем

$$u_{xxt} = 2g_1 u_x u_{xt} + g_1' u_x^2 u_t + g_2' u_t.$$

Исключим производные u_{xxt}, u_{xt}, u_t из этого соотношения с помощью уравнений (4.4.1.5) и (4.4.1.6) и их следствий, которые выводятся с помощью дифференцирования. В результате получим

$$\begin{aligned}&(2\varphi g_1^2 + 3\varphi' g_1 + \varphi g_1' + \varphi'')u_x^4 +\\ &+ (4\varphi g_1 g_2 + 5\varphi' g_2 + \varphi g_2' - g_1\psi' - \psi g_1' + \psi'')u_x^2 + 2\varphi g_2^2 + \psi' g_2 - \psi g_2' = 0.\end{aligned}$$

Приравнивание нулю функциональных множителей при различных степенях u_x дает три уравнения, которые удобно записать в виде

$$\begin{gathered}(\varphi' + \varphi g_1)' + 2g_1(\varphi' + \varphi g_1) = 0,\\ 4g_2(\varphi' + \varphi g_1) + (\varphi g_2 - \psi g_1)' + \psi'' = 0,\\ \varphi = -\tfrac{1}{2}(\psi/g_2)'.\end{gathered} \qquad (4.4.1.8)$$

Первому уравнению можно удовлетворить, положив $\varphi' + \varphi g_1 = 0$. Соответствующее частное решение системы (4.4.1.8) имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{2}\mu', \quad \psi = \mu g_2, \quad g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'}, \quad g_2 = \left(2C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\right)\frac{1}{\mu'}, \qquad (4.4.1.9)$$

где $\mu = \mu(u)$ — произвольная функция.

Учитывая (4.4.1.7), находим функциональные коэффициенты исходного уравнения (4.4.1.4) и дифференциальной связи (4.4.1.5):

$$\begin{aligned} &f_1 = \Big(C_3 - \frac{1}{2}u\Big)\mu', \quad f_2 = (\mu - f_1)g_2, \\ &g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'}, \quad g_2 = \bigg(2C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\bigg)\frac{1}{\mu'}. \end{aligned} \tag{4.4.1.10}$$

Уравнение (4.4.1.5) с учетом (4.4.1.10) допускает первый интеграл

$$u_x^2 = \big[4C_1\mu + 4C_2\sqrt{|\mu|} + 2\sigma_t'(t)\big]\frac{1}{(\mu')^2}, \tag{4.4.1.11}$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция. Исключим u_x^2 из равенства (4.4.1.6) с помощью (4.4.1.11) и подставим функции φ и ψ из (4.4.1.9). В результате приходим к уравнению

$$\mu' u_t = -C_2\sqrt{|\mu|} - \sigma_t'(t). \tag{4.4.1.12}$$

Остановимся подробнее на частном случае $C_2 = C_3 = 0$. Интегрируя уравнение (4.4.1.12) и учитывая, что $\mu_t = \mu' u_t$, имеем

$$\mu = -\sigma(t) + \theta(x), \tag{4.4.1.13}$$

где $\theta(x)$ — произвольная функция. Подставив (4.4.1.13) в (4.4.1.11) и используя соотношение $\mu_x = \mu' u_x$, получим $\theta_x^2 - 4C_1\theta = 2\sigma_t - 4C_1\sigma$. Приравнивая обе части этого уравнения нулю и интегрируя полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, находим функции в правой части выражения (4.4.1.13):

$$\sigma(t) = A\exp(2C_1 t), \quad \theta(x) = C_1(x+B)^2, \tag{4.4.1.14}$$

где A и B — произвольные постоянные. Таким образом, точное решение уравнения (4.4.1.4) с функциями f_1 и f_2 из (4.4.1.10) при $C_2 = C_3 = 0$ можно представить в неявном виде

$$\mu(u) = -A\exp(2C_1 t) + C_1(x+B)^2.$$

В решении и определяющих соотношениях (4.4.1.10) функция $\mu(u)$ задается произвольным образом. ◄

► Пример 4.23. Рассмотрим класс нелинейных УрЧП второго порядка

$$u_t = f_2(u)u_{xx} + f_1(u)u_x + f_0(u).$$

Дифференциальную связь выбираем в виде

$$u_{xx} = g_1(u)u_x + g_0(u).$$

Анализ совместности этих уравнений приводит к следующим соотношениям для определяющих функций:

$$\begin{aligned} &f_2(u) \text{ — произвольная функция}, \\ &f_1(u) = C_1u + C_2 - (3C_1C_3u + C_4)f_2(u), \\ &f_0(u) = (-C_1^2C_3u^3 - C_1C_4u^2 + C_5u + C_6)[1 - C_3f_2(u)], \\ &g_1(u) = 3C_1C_3u + C_4, \\ &g_0(u) = C_3(-C_1^2C_3u^3 - C_1C_4u^2 + C_5u + C_6), \end{aligned}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные. ◄

4.4.2. Дифференциальные связи более высокого порядка. Определяющие уравнения

1°. Дифференциальные связи третьего и более высоких порядков, содержащие производные по двум или более независимым переменным используются очень редко, поскольку они приводят к очень громоздким вычислениям и весьма сложным уравнения (исходные уравнения часто существенно проще). Как правило, дифференциальная связь высокого порядка представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее производные только по одной независимой переменной, а остальные независимые переменные входят в качестве свободных параметров. Примером такой дифференциальной связи второго порядка является уравнение (4.4.1.3).

Для простоты изложения рассмотрим сначала эволюционное уравнение второго порядка

$$u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{4.4.2.1}$$

и дифференциальную связь n-го порядка

$$h \equiv u_x^{(n)} + g(t, x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n-1)}) = 0. \tag{4.4.2.2}$$

Обозначим через $[f]$ уравнение (4.4.2.1) и его дифференциальные следствия по x. Связь (4.4.2.2) и ее дифференциальные следствия по x будем обозначать $[h]$.

Уравнение (4.4.2.1) и дифференциальная связь (4.4.2.2) удовлетворяют условиям совместности, тогда и только тогда, когда

$$D_t(h)\big|_{[f]\cap[h]} = 0. \tag{4.4.2.3}$$

Если справедливо условие (4.4.2.3), то дифференциальная связь (4.4.2.2) представляет собой инвариантное многообразие для уравнения (4.4.2.1).

В [210] было показано, что при $n \geqslant 4$ условие (4.4.2.3) можно представить в виде эквивалентного определяющего уравнения:

$$\begin{aligned} D_t(h)\big|_{[f]} = f_2 D_x^2(h) &+ [f_1 + nD_x(f_2)]D_x(h) + \\ &+ [f_0 + nD_x(f_1) - h_{n-1}D_x(f_2) + \\ &+ \tfrac{1}{2}n(n-1)D_x^2(f_2) + f_2 h h_{n-1,n-1} - 2f_2 D_x(h_{n-1})]h. \end{aligned} \tag{4.4.2.4}$$

Здесь и далее D_t и D_x — операторы полного дифференцирования по t и по x. Используются также следующие краткие обозначения:

$$f_0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_1 = \frac{\partial f}{\partial u_x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial u_{xx}}, \quad h_{n-1} = \frac{\partial h}{\partial w}, \quad h_{n-1,n-1} = \frac{\partial^2 h}{\partial w^2}, \quad w = u_x^{(n-1)}.$$

Уравнение (4.4.2.4) является сложным нелинейным уравнением относительно h.

2°. В качестве определяющего инвариантного многообразия эволюционного уравнения (4.4.2.1) вместо нелинейного уравнения (4.4.2.4) можно использовать более простое линейное определяющее уравнение:

$$D_t(h)\big|_{[f]} = f_2 D_x^2(h) + [c_1 f_1 + c_2 D_x(f_2)] D_x(h) + [c_3 f_0 + c_4 D_x(f_1) + c_5 D_x^2(f_2)] h, \tag{4.4.2.5}$$

где $c_1, \ldots, c_5$ — некоторые постоянные, подлежащие определению. Уравнение (4.4.2.5) получено путем отбрасывания нелинейных слагаемых в уравнении (4.4.2.4) и замены постоянных неопределенными коэффициентами.

Если при некоторых значениях постоянных $c_1, \ldots, c_5$ функция h удовлетворяет уравнению (4.4.2.5), то $h = 0$ является инвариантным многообразием уравнения (4.4.2.1).

► **Пример 4.24.** Для уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 + u^2, \tag{4.4.2.6}$$

линейное определяющее уравнение (4.4.2.5) записывается так:

$$D_t(h)\big|_{[f]} = D_x^2(h) + 2c_1 u_x D_x(h) + 2(c_2 w + c_3 u_{xx}) h. \tag{4.4.2.7}$$

Решение уравнения (4.4.2.7) ищется в виде

$$h = u_{xxx} + a u_x, \tag{4.4.2.8}$$

где a — некоторая постоянная.

Последовательно дифференцируя (4.4.2.6) по x, имеем

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u_{xxx} + 2u_x u_{xx} + 2u u_x, \\ u_{xxt} &= u_x^{(4)} + 2u_x u_{xxx} + 2u_{xx}^2 + 2u u_{xx} + 2u_x^2, \\ u_{xxxt} &= u_x^{(5)} + 2u_x u_x^{(4)} + 6u_{xx} u_{xxx} + 2u u_{xxx} + 6u_x u_{xx}. \end{aligned} \tag{4.4.2.9}$$

Учитывая (4.4.2.8) и (4.4.2.9), вычислим левую и правую части определяющего уравнения (4.4.2.7). В результате получим

$$\begin{aligned} D_t(h)\big|_{[f]} &= u_x^{(5)} + 2u_x u_x^{(4)} + 6u_{xx} u_{xxx} + 2u u_{xxx} + \\ &\quad + (6 + 2a) u_x u_{xx} + a u_{xxx} + 2a u u_x, \\ D_x^2(h) + 2c_1 u_x D_x(h) + 2(c_2 u + c_3 u_{xx}) h &= u_x^{(5)} + 2c_1 u_x u_x^{(4)} + 2c_3 u_{xx} u_{xxx} + \\ &\quad + 2c_2 u u_{xxx} + 2(c_1 + a c_3) u_x u_{xx} + a u_{xxx} + 2a c_2 u u_x. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что линейному определяющему уравнению (4.4.2.7) можно удовлетворить, если в (4.4.2.7) и (4.4.2.8) взять коэффициенты

$$a = 1, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad c_3 = 3.$$

Полагая $a = 1$ в (4.4.2.8) и решая уравнение $h = 0$, находим

$$u = \varphi_0(t) + \varphi_2(t) \cos x + \varphi_3(t) \sin x. \tag{4.4.2.10}$$

Подставив это выражение в исходное уравнение (4.4.2.6), можно получить систему ОДУ для функций $\varphi_k(t)$. ◄

► Пример 4.25. Для уравнения

$$u_t = uu_{xx} - \tfrac{2}{3}u_x^2 \tag{4.4.2.11}$$

линейное определяющее уравнение (4.4.2.5) принимает вид

$$D_t(h)\big|_{[f]} = uD_x^2(h) + b_1 u_x D_x(h) + b_2 u_{xx} h, \tag{4.4.2.12}$$

где коэффициенты b_1 и b_2 можно выразить через c_1, …, c_5. Прямой подстановкой несложно убедиться, что при $n = 4$ и подходящем выборе коэффициентов b_1 и b_2 уравнению (4.4.2.12) можно удовлетворить, положив $h = u_{xxxx}$. Отсюда следует, что уравнение $u_{xxxx} = 0$ представляет собой инвариантное многообразие. Поэтому исходное уравнение (4.4.2.11) допускает решение в виде кубического многочлена по пространственной переменной x:

$$u = \varphi_3(t)x^3 + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t).$$

Подставив это выражение в (4.4.2.11), можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\varphi_k(t)$. ◄

Замечание 4.17. *Примеры 4.24 и 4.25, а также некоторые другие примеры использования линейных определяющих уравнений можно найти в [209–211]. В последней работе нелинейное уравнение теплопроводности вида $u_t = (u^k u_x)_x + f(u)$ исследовалось с помощью линейных определяющих уравнений второго и третьего порядков.*

3°. Рассмотрим эволюционное уравнение m-го порядка

$$u_t = f(t, x, u, u_x, \ldots, u_x^{(m)}) \tag{4.4.2.13}$$

вместе с дифференциальной связью (4.4.2.2).

Для нахождения функции h можно использовать линейное определяющее уравнение вида [210, 211]:

$$D_t(h)\big|_{[f]} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i} c_{ij} D_x^{i-j}(f_{m-j}) D_x^{m-i}(h), \tag{4.4.2.14}$$

где c_{ij} — некоторые константы, подлежащие определению. Уравнение (4.4.2.14) является обобщением уравнения (4.4.2.5) на случай $m > 2$.

Замечание 4.18. *В разд. 4.5 приводятся примеры дифференциальных связей второго и третьего порядка, которые эквивалентны наиболее распространенным типам точных решений.*

4.4.3. Использование нескольких дифференциальных связей. Системы нелинейных уравнений

В замечании 4.12 из разд. 4.2.2 (см. также разд. 4.5.3) отмечено, что можно использовать несколько дифференциальных связей вида (4.2.2.2). В общем случае все дифференциальные связи должны исследоваться на совместность с исходным уравнением.

Метод дифференциальных связей можно применять также для построения точных решений нелинейных систем уравнений.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

► Пример 4.26. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с источником
$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u). \tag{4.4.3.1}$$
Следуя [261, 352], зададим две дифференциальные связи первого порядка вида
$$\begin{aligned} u_t &= \varphi(x,t,u),\\ u_x &= \psi(x,t,u), \end{aligned} \tag{4.4.3.2}$$
где φ и ψ — некоторые (пока произвольные) функции трех аргументов.

Сначала найдем условие совместности дифференциальных связей (4.4.3.2). Для этого продифференцируем первую связь по x, вторую — по t, а затем заменим первые производные правыми частями соотношений (4.4.3.2). В результате получим
$$\begin{aligned} u_{tx} &= \varphi_x + \varphi_u u_x = \varphi_x + \psi\varphi_u,\\ u_{xt} &= \psi_t + \psi_u u_t = \psi_t + \varphi\psi_u. \end{aligned}$$
Приравнивая смешанные производные ($u_{tx} = u_{xt}$), приходим к условию совместности
$$\varphi_x + \psi\varphi_u - \psi_t - \varphi\psi_u = 0. \tag{4.4.3.3}$$

Подставив теперь (4.4.3.2) в исходное уравнение (4.4.3.1), имеем
$$\varphi = (\psi_x + \psi\psi_u)f + \psi^2 f'_u + g. \tag{4.4.3.4}$$
Исключив φ из условия совместности (4.4.3.3) с помощью (4.4.3.4) и учитывая (4.4.3.2), приходим к следующему уравнению для функции ψ:
$$\psi_t = (\psi_{xx} + 2\psi\psi_{xu} + \psi^2\psi_{uu})f + (3\psi\psi_x + 2\psi^2\psi_u)f'_u + \psi^3 f''_{uu} + \psi g'_u - g\psi_u. \tag{4.4.3.5}$$

Уравнение (4.4.3.5) имеет три независимые переменные x, t, u и выглядит более сложным, чем исходное уравнение (4.4.3.1), которое содержит только две независимые переменные x и t. Тем не менее наличие дополнительной переменной u обеспечивает более широкий выбор решений, которые можно искать, задав структуру функции ψ. Ниже будет показано, как можно строить классы решений нелинейного уравнения теплопроводности с источником (4.4.3.1), исходя из уравнения (4.4.3.5).

Случай 1. Сначала будем искать частные решения уравнения (4.4.3.5), независимые от x, в виде произведения [261, 352]:
$$\psi = \alpha(t)h(u), \tag{4.4.3.6}$$
где функции $\alpha = \alpha(t)$ и $h = h(u)$ подлежат определению. Формула (4.4.3.6) определяет структуру решения; функции $\alpha(t)$ и $h(u)$ пока неизвестны, они будут определяться в ходе последующего анализа. Подстановка решения (4.4.3.6) в уравнение (4.4.3.5) дает
$$\alpha'_t = \alpha^3 h(fh)''_{uu} + \alpha h(g/h)'_u.$$
Это уравнение имеет нетривиальное решение, если выполняются соотношения
$$\begin{aligned} h(fh)''_{uu} &= A,\\ h(g/h)'_u &= B, \end{aligned} \tag{4.4.3.7}$$

где A и B — произвольные постоянные. Уравнения (4.4.3.7) содержат три неизвестные функции; одну из них можно считать произвольно заданной, а две другие найти.

Функция (4.4.3.6) порождает решение исходного уравнения (4.4.3.1). В силу второго уравнения (4.4.3.2) это решение можно представить в неявном виде:

$$\int \frac{du}{h(u)} = \alpha(t)x + \beta(t), \tag{4.4.3.8}$$

где функция $\alpha = \alpha(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\alpha'_t = A\alpha^3 + B\alpha,$$

которое легко интегрируется. Функция $\beta(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, которое возникает после подстановки решения (4.4.3.8) в исходное уравнение (4.4.3.1).

Считая функцию $h = h(u)$ заданной произвольно, проинтегрируем уравнения (4.4.3.7). В итоге находим функции, которые определяют рассматриваемое уравнение (4.4.3.1):

$$f(u) = \frac{A}{h(u)} \int Q(u)\,du + \frac{C_1 u + C_2}{h(u)},$$
$$g(u) = h(u)\bigl[BQ(u) + C_3\bigr], \quad Q(u) = \int \frac{du}{h(u)},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Случай 2. Теперь будем искать частные решения уравнения (4.4.3.5), независимые от t, в виде произведения функций разных аргументов

$$\psi = \theta(x)p(u). \tag{4.4.3.9}$$

Подставив (4.4.3.9) в (4.4.3.5), после элементарных преобразований получим

$$\theta''_{xx} fp + \theta\theta'_x p(2fp'_u + 3f'_u p) + \theta^3 p^2 (fp)''_{uu} + \theta(pg'_u - p'_u g) = 0. \tag{4.4.3.10}$$

Такие функционально-дифференциальные уравнения подробно обсуждаются в главе 1. Решения уравнения (4.4.3.10) можно найти с помощью метода расщепления, описанного в разд. 1.5 [см. функциональное уравнение (1.5.2.6) и его решения (1.5.2.7) и (1.5.2.8)].

Не проводя детальный анализ уравнения (4.4.3.10), рассмотрим одно из его точных решений:

$$\theta(x) = x, \quad f(u) = \frac{au + b}{p(u)}, \quad g(u) = -3(au + b) - 2p(u) \int \frac{(au + b)p'_u(u)\,du}{p^2(u)}, \tag{4.4.3.11}$$

где $p = p(u)$ — произвольная функция, a и b — произвольные постоянные. Подставив (4.4.3.9) во вторую дифференциальную связь (4.4.3.2) и учитывая, что $\theta(x) = x$ [см. (4.4.3.11)], получим $u_x = xp(u)$. Интегрирование этого соотношения дает

$$\int \frac{du}{p(u)} = \frac{1}{2}x^2 + \xi(t). \tag{4.4.3.12}$$

Дифференцируя (4.4.3.12) по t и учитывая вид первой дифференциальной связи (4.4.3.2), находим: $\varphi = \xi_t' p(u)$. Подставим выражения для φ и ψ в (4.4.3.4). Используя соотношения (4.4.3.11), (4.4.3.12), получим линейное ОДУ для функции $\xi(t)$. Решение этого уравнение приводит к экспоненциальной зависимости

$$\xi(t) = Ce^{-2at}, \tag{4.4.3.13}$$

где C — произвольная постоянная.

Формулы (4.4.3.12) и (4.4.3.13) определяют решение в неявном виде нелинейного уравнения теплопроводности (4.4.3.1), в котором функциональные коэффициенты $f(u)$ и $g(u)$ задаются выражениями (4.4.3.11), где $p(u)$ — произвольная функция. ◀

▶ Пример 4.27. В трехмерном случае нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса и уравнением неразрывности, которые в краткой форме записываются так [27, 64]:

$$\begin{gathered}\mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V},\\ \nabla\cdot\mathbf{V} = 0,\end{gathered} \tag{4.4.3.14}$$

где $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ — вектор скорости жидкости, t — время, p — давление, отнесенное к плотности жидкости, ν — кинематическая вязкость, Δ и ∇ — операторы Лапласа и градиента по пространственным переменным x, y, z.

Уравнения (4.4.3.14) допускают точное решение вида [4, 5]:

$$\begin{aligned}&V_1 = x(-\tfrac{1}{2}F_z + w) + yv, \quad V_2 = xu - y(\tfrac{1}{2}F_z + w), \quad V_3 = F,\\ &p = p_0 - \tfrac{1}{2}\alpha x^2 - \tfrac{1}{2}\beta y^2 - \gamma xy - \tfrac{1}{2}F^2 + \nu F_z - \int F_t dz,\end{aligned} \tag{4.4.3.15}$$

где $p_0 = p_0(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ — произвольные функции, $F = F(t,x)$, $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$, $w = w(t,x)$ — искомые функции, которые описываются нелинейной системой четырех УрЧП:

$$F_{tx} + FF_{xx} - \tfrac{1}{2}F_x^2 = \nu F_{xxx} + 2(uv + w^2) - \alpha - \beta, \tag{4.4.3.16}$$

$$u_t + Fu_x - uF_x = \nu u_{xx} + \gamma, \tag{4.4.3.17}$$

$$v_t + Fv_x - vF_x = \nu v_{xx} + \gamma, \tag{4.4.3.18}$$

$$w_t + Fw_x - wF_x = \nu w_{xx} + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \tag{4.4.3.19}$$

Следуя [4, 5], будем анализировать уравнения (4.4.3.16)—(4.4.3.19), присоединив к ним три дифференциальные связи первого порядка

$$u = mF_x + A, \quad v = nF_x + B, \quad w = kF_x + C, \tag{4.4.3.20}$$

где m, n, k, A, B, C — искомые функции, зависящие от t. Потребуем, чтобы четыре уравнения (4.4.3.16)—(4.4.3.19) совпали после подстановки в них соотношений (4.4.3.20). В результате приходим к нелинейной системе для определения искомых функций, которая состоит из одного алгебраического уравнения и шести обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$mn + k^2 = \frac{1}{4}, \tag{4.4.3.21}$$

$$\frac{A - m'_t}{m} = \frac{B - n'_t}{n} = \frac{C - k'_t}{k} = 2(An + Bm + 2Ck), \tag{4.4.3.22}$$

$$\frac{\gamma - A'_t}{m} = \frac{\gamma - B'_t}{n} = \frac{\alpha - \beta - 2C'_t}{2k} = -\alpha - \beta + 2AB + 2C^2. \tag{4.4.3.23}$$

Эта система содержит семь уравнений для девяти неизвестных: шести функций m, n, k, A, B, C из (4.4.3.20) и трех функций α, β, γ из (4.4.3.16) — (4.4.3.19). В данном случае последние три функции также считаются искомыми. Можно показать, что последнее уравнение в (4.4.3.22) является следствием остальных трех уравнений из (4.4.3.21) и (4.4.3.22). Поэтому три неизвестные функции в системе (4.4.3.21) — (4.4.3.23) в общем случае можно считать произвольными.

В силу (4.4.3.20) — (4.4.3.23) система (4.4.3.16) — (4.4.3.19) сводится к одному уравнению с частными производными

$$F_{tx} + FF_{xx} - F_x^2 = \nu F_{xxx} + qF_x + p, \tag{4.4.3.24}$$

где функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$ определяются формулами

$$p = \frac{\gamma - A'_t}{m}, \quad q = \frac{A - m'_t}{m}. \tag{4.4.3.25}$$

При $m = n$ общее решение системы (4.4.3.21) — (4.4.3.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&m = n = \frac{1}{2}\sin\varphi, \quad k = \frac{1}{2}\cos\varphi,\\
&A = B = \frac{1}{2}(q\sin\varphi + \varphi'_t\cos\varphi), \quad C = \frac{1}{2}(q\cos\varphi - \varphi'_t\sin\varphi),\\
&\alpha = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}(\varphi'_t)^2 - \frac{1}{2}p(1 - \cos\varphi) + C'_t,\\
&\beta = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}(\varphi'_t)^2 - \frac{1}{2}p(1 + \cos\varphi) - C'_t,\\
&\gamma = \frac{1}{2}p\sin\varphi + A'_t,
\end{aligned} \tag{4.4.3.26}$$

где $p = p(t)$, $q = q(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ — произвольные функции. Для удобства свободные функции p и q в (4.4.3.26) выбраны таким образом, чтобы система (4.4.3.16) — (4.4.3.19) вместе с дифференциальными связями (4.4.3.20) и формулами (4.4.3.26) сводилась к одному уравнению (4.4.3.24) с теми же самыми функциями $p = p(t)$ и $q = q(t)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение: любое решение уравнения (4.4.3.24) при любых $p = p(t)$ и $q = q(t)$ порождает решение системы УрЧП (4.4.3.16) — (4.4.3.19).

Случай $m \neq n$ и большое число точных решений уравнения (4.4.3.24) можно найти в [4, 5, 43, 79]. ◄

► **Пример 4.28.** Рассмотрим нелинейную систему гидродинамического типа, состоящую из двух уравнений

$$\begin{aligned}
&F_{tx} + FF_{xx} - F_x^2 = \nu F_{xxx} + qF_x + p,\\
&G_t + FG_x - GF_x = \nu G_{xx},
\end{aligned} \tag{4.4.3.27}$$

первое из которых не зависит от G и совпадает с (4.4.3.24), а второе линейно по G. Функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$ в первом уравнении из (4.4.3.27) можно задавать произвольным образом.

Можно показать, что точные решения системы (4.4.3.27) порождают точные решения системы (4.4.3.16) – (4.4.3.19), а следовательно, и точные решения нестационарных трехмерных уравнений Навье – Стокса [4, 79].

Дополним систему (4.4.3.27) дифференциальной связью второго порядка

$$G = a(t) + b(t)F_x + c(t)F_{xx}. \tag{4.4.3.28}$$

Из второго уравнения системы (4.4.3.27) исключим G с помощью (4.4.3.28) и сравним полученное уравнение с первым уравнением (4.4.3.27) (а также с уравнениями, которые возникают после дифференцирования первого уравнения (4.4.3.27) по x). В результате находим условия совместности системы (4.4.3.27) и дифференциальной связи (4.4.3.28):

$$\begin{aligned} a'_t + bp &= 0, \\ b'_t + bq - a &= 0, \\ c'_t + qc &= 0. \end{aligned} \tag{4.4.3.29}$$

Интегрируя последнее уравнение в (4.4.3.29), имеем $c = C_1 \exp(-\int q\,dt)$, где C_1 – произвольная постоянная. Первые два уравнения (4.4.3.29) приводят к линейному ОДУ второго порядка для функции b:

$$b''_{tt} + qb'_t + (p + q'_t)b = 0. \tag{4.4.3.30}$$

Решив это уравнение, из второго уравнения в (4.4.3.29) без интегрирования можно определить функцию $a = a(t)$.

Полученный результат можно перефразировать следующим образом. Путь известно точное решение $F = F(t, x)$ первого уравнения (4.4.3.27). Тогда соответствующее точное решение второго уравнения (4.4.3.27) можно получить по формуле (4.4.3.28), где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.4.3.29).

Следует отметить, что формулу (4.4.3.28) можно использовать для анализа нелинейной устойчивости (или неустойчивости) решений системы (4.4.3.27) [38, 39]. ◄

Замечание 4.19. *Об использовании дифференциальных связей для построения точных решений уравнений газовой динамики см. [55, 241].*

4.5. Связь между методом дифференциальных связей и другими методами

4.5.1. Предварительные замечания

Метод дифференциальных связей, который основан на теории совместности двух и более уравнений в частных производных, является одним из наиболее общих методов (если не самым общим методом) построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных. Многие другие методы можно трактовать как его частные случаи.

Наиболее трудная и неформальная проблема, возникающая при применении этого метода, состоит в следующем: как найти подходящую дифференциальную связь для заданного нелинейного уравнения в частных производных. Например, если дифференциальная связь обладает недостаточным функциональным произволом, то можно не найти ни одного решения; если же она имеет слишком общий вид, то анализ совместности рассматриваемых нелинейных уравнений в частных производных может оказаться слишком сложным, чтобы найти какие-либо точные решения. Успешное решение указанной проблемы лежит за пределами формального описания метода дифференциальных связей и в каждом конкретном случае обычно определяется опытом и интуицией исследователя.

Кроме того, при применении метода дифференциальных связей на нескольких этапах приходится решать различные дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений, которые содержат произвольные функции, что существенно осложняет анализ. Если не удается найти решение хотя бы на одном из этих этапов, то не удается и построить точное решение исходного уравнения. Поэтому метод дифференциальных связей обычно сложнее применять, чем другие методы, описанные в данной книге.

Указанные обстоятельства объясняют, почему для построения точных решений нелинейных УрЧП на практике часто предпочтительнее использовать более простые, хотя и менее общие методы.

Важно отметить, что менее общие методы часто дают возможность конструктивным путем получить важные соотношения, которые можно трактовать как дифференциальные связи (эти соотношения нельзя получить априорно, исходя непосредственно из метода дифференциальных связей). Идеи и алгоритмы, положенные в основу этих методов, нередко позволяют им быть более эффективными*, чем метод дифференциальных связей, при построении точных решений отдельных классов нелинейных уравнений в частных производных.

Таким образом представляется, что методы обобщенного и функционального разделения переменных, прямой метод построения редукций и метод дифференциальных связей в совокупности дополняют друг друга. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки и может быть эффективнее других на подходящих классах нелинейных УрЧП.

Далее мы обсудим связь метода дифференциальных связей с другими методами, которые описаны в предыдущих главах данной книги.

*Здесь имеется ввиду, что эти методы быстрее приводят к искомому результату, причем промежуточных выкладок меньше и они существенно проще.

4.5.2. Обобщенное разделение переменных и дифференциальные связи

Методы обобщенного разделения переменных можно переформулировать в терминах метода дифференциальных связей (в том смысле, что любому решению с обобщенным разделением переменных можно поставить в соответствие эквивалентную дифференциальную связь).

Решения с обобщенным разделением переменных заданного вида путем исключения искомых функций с помощью дифференцирования сводятся к дифференциальным связям (похожая процедура используется в разд. 1.4, а также в разд. 4.2.1). В табл. 4.2 указаны примеры некоторых дифференциальных связей первого и второго порядка, которые эквивалентны наиболее распространенным решениям с разделяющимися переменными. Функции f и g можно выразить через исходные функции φ, ψ, χ. Видно, что каждому решению с разделяющимися переменными и с обобщенным разделением переменных можно поставить в соответствие несколько эквивалентных дифференциальных связей.

Верно и обратное: интегрируя приведенные в последнем столбце табл. 4.2 дифференциальные связи, можно получить общий вид решений с разделяющимися переменными и с обобщенным разделением переменных, которые указаны в предпоследнем столбце этой таблицы.

Таблица 4.2. Дифференциальные связи первого и второго порядка, соответствующее некоторым классам решений с разделяющимися переменными.

№	Тип решения	Структура решения	Дифференциальные связи
1	Решение с аддитивным разделением переменных	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$u_x=f(x)$ $u_t=g(t)$ $u_{xt}=0$
2	Решение с мультипликативным разделением переменных	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$u_x=f(x)u$ $u_t=g(t)u$ $uu_{xt}-u_xu_t=0$
3	Решение с обобщенным разделением переменных	$u=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$	$u_x=f(t)x+g(t)$ $xu_x-u=f(t)x^2+g(t)$ $xu_x-2u=f(t)x+g(t)$ $u_{xx}=f(t)$ $xu_{xx}-u_x=f(t)$
4	Решение с обобщенным разделением переменных	$u=\varphi(t)\psi(x)+\chi(t)$	$u_x=f(t)g(x)$ $u_t=f(t)u+g(t)$ $u_x=f(x)[u+g(t)]$ $u_{xx}-f(x)u_x=0$ $u_{xt}-g(t)u_x=0$

Решениям с обобщенным разделением переменных №№ 3 и 4 из табл. 4.2, которые содержат три свободные функции, можно поставить в соответствие также эквивалентные дифференциальные связи третьего порядка

$$u_{xxx} = 0 \quad \text{(структура решения: } u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)\text{)},$$
$$u_x u_{xxt} - u_{xx} u_{xt} = 0 \quad \text{(структура решения: } u = \varphi(t)\psi(x) + \chi(t)\text{)},$$

которые уже не содержат функциональный произвол.

Поиск решений с обобщенным разделением переменных вида

$$u(x,t) = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$$

с $2n$ неизвестными свободными функциями эквивалентен заданию дифференциальной связи порядка $2n$ (которая уже не содержит свободных функций). В общем случае число искомых функций $\varphi_i(x)$, $\psi_i(t)$ соответствует максимально возможному порядку дифференциальной связи.

Для решений, указанных в табл. 4.2, предпочтительнее использовать методы обобщенного разделения переменных, поскольку в этих методах требуется меньше шагов, где необходимо решать промежуточные дифференциальные уравнения. Более того, для построения точных решений УрЧП третьего и более высоких порядков метод дифференциальных связей приводит к очень громоздким вычислениям и весьма сложным уравнениям (исходные уравнения обычно выглядят гораздо проще). С другой стороны, метод обобщенного разделения переменных достаточно часто позволяет без особых усилий строить точные решения нелинейных УрЧП старших порядков (большое число подобных решений различных уравнений можно найти в книгах [286, 287]).

Замечание 4.20. *Дифференциальные соотношения, которые получаются в результате использования метода расщепления (см. разд. 1.5) при исследовании билинейных функционально-дифференциальных уравнений, возникающих после подстановки решений с обобщенным разделением переменных в рассматриваемые УрЧП, можно трактовать как дифференциальные связи. Таким образом метод расщепления позволяет конструктивно строить дифференциальные связи в процессе решения (важно подчеркнуть, что эти связи не известны заранее и не могут быть заданы из априорных соображений на начальном этапе анализа).*

4.5.3. Функциональное разделение переменных и дифференциальные связи

Решения с функциональным разделением переменных и эквивалентные дифференциальные связи. Методы функционального разделения переменных можно переформулировать в терминах метода дифференциальных связей (в том смысле, что любому решению с функциональным разделением переменных можно поставить в соответствие эквивалентную дифференциальную связь).

Решения с функциональным разделением переменных заданного вида путем исключения произвольных функций с помощью дифференцирования сводятся к дифференциальным связям. В табл. 4.3 указаны примеры некоторых дифференциальных связей первого и второго порядка, которые эквивалентны двум наиболее общим формам решений с функциональным разделением переменных. Функции f и g можно выразить через исходные функции U, φ, ψ. Видно, что каждому решению с обобщенным разделением переменных можно поставить в соответствие несколько эквивалентных дифференциальных связей.

Верно и обратное: интегрируя приведенные в последнем столбце табл. 4.3 дифференциальные связи, можно получить общий вид решений с функциональным разделением переменных, которые указаны в предпоследнем столбце этой таблицы.

Таблица 4.3. Дифференциальные связи первого и второго порядка, соответствующее двум классам решений с функциональным разделением переменных.

№	Тип решения	Структура решения	Дифференциальные связи
1	Решение с обобщенным разделением переменных (решение типа обобщенной бегущей волны)	$u=U(z),\ \ z=\varphi(t)x+\psi(t)$	$u_x=f(t)g(u)$ $u_t=[f(t)x+g(t)]u_x$ $u_{xx}-f(u)u_x^2=0$ $u_xu_{xt}-u_tu_{xx}=f(t)u_x^2$
2	Решение с обобщенным разделением переменных	$u=U(z),\ \ z=\varphi(x)+\psi(t)$	$u_x=f(x)g(u)$ $u_t=f(t)g(u)$ $u_t=f(x)g(t)u_x$ $uu_{xt}-f(u)u_xu_t=0$ $u_xu_{xt}-u_tu_{xx}=f(x)u_xu_t$ $u_xu_{tt}-u_tu_{xt}=g(t)u_xu_t$

Решениям с функциональным разделением переменных из табл. 4.3, которые содержат три свободные функции, можно поставить в соответствие также эквивалентные дифференциальные связи третьего порядка

$$u_x(u_tu_{xxx}-u_xu_{xxt})=2u_{xx}(u_tu_{xx}-u_xu_{xt})\quad \text{(вид решения: } u=U(\varphi(t)x+\psi(t))\text{)},$$
$$u_xu_t(u_tu_{xxt}-u_xu_{xtt})=u_{xt}(u_t^2u_{xx}-u_x^2u_{tt})\quad \text{(вид решения: } u=U(\varphi(x)+\psi(t))\text{)},$$

которые уже не содержат функциональный произвол.

Замечание 4.21. *Дифференциальные соотношения, которые получаются в результате применения метода функционального разделения переменных с использованием обобщенного принципа расщепления из возникающих после преобразования (2.7.1.2) УрЧП, можно трактовать как дифференциальные связи. Таким образом обобщенный принцип расщепления позволяет конструктивно строить дифференциальные связи в процессе решения (важно подчеркнуть, что эти связи не известны заранее и не могут быть заданы из априорных соображений на начальном этапе исследования).*

Сравнение эффективности методов дифференциальных связей и функционального разделения переменных. Хотя любое решение с функциональным разделением переменных заданного вида можно заменить эквивалентной дифференциальной связью, процедура нахождения точных решений методом дифференциальных связей, основанного на анализе совместности УрЧП, и процедура прямого функционального разделения переменных значительно отличаются. В случае общего положения они в итоге приводят к различным результатам. Сравним эффективность этих двух методов на примере уравнения реакционно-диффузионного типа (2.7.3.1) (его решения с функциональным разделением переменных были получены ранее в разд. 2.7.3).

Чтобы можно было применить метод дифференциальных связей, продифференцируем формулу (2.7.1.2) по t. В результате получим

$$u_t = \Theta(x,t)\phi(u), \tag{4.5.3.1}$$

где $\Theta(x,t) = \vartheta_t$ и $\phi(u) = 1/\zeta(u)$.

Соотношение (4.5.3.1) можно трактовать как дифференциальную связь первого порядка специального вида, которую будем использовать далее для построения точных решений уравнения (2.7.3.1) путем анализа на совместность переопределенной пары дифференциальных уравнений (2.7.3.1) и (4.5.3.1) с одной неизвестной функцией u. Дифференциальная связь (4.5.3.1) эквивалентна соотношению (2.7.1.2). На начальном этапе обе функции $\Theta(x,t)$ и $\phi(u)$, входящие в правую часть соотношения (4.5.3.1), считаются произвольными, а конкретный вид этих функций будет установлен в ходе последующего анализа.

Разрешим уравнение (2.7.3.1) относительно старшей производной u_{xx} и исключим u_t с помощью (4.5.3.1). Получим

$$u_{xx} = -\frac{f'_u}{f}u_x^2 - \Big(\frac{a'_x}{a} + \frac{b}{a}\frac{g}{f}\Big)u_x + \frac{\Theta\phi - ch}{af}. \tag{4.5.3.2}$$

Дифференцируя (4.5.3.1) дважды по x и учитывая соотношение (4.5.3.2), имеем

$$\begin{aligned}
u_{tx} &= \Theta\phi'_u u_x + \Theta_x\phi,\\
u_{txx} &= \Theta\phi'_u u_{xx} + \Theta\phi''_{uu}u_x^2 + 2\Theta_x\phi'_u u_x + \Theta_{xx}\phi\\
&= \Theta\Big(\phi''_u - \frac{f'_u}{f}\phi'_u\Big)u_x^2 + A_1(x,t,u)u_x + A_0(x,t,u),\\
A_1(x,t,u) &= \Big[2\Theta_x - \Theta\Big(\frac{a'_x}{a} + \frac{b}{a}\frac{g}{f}\Big)\Big]\phi'_u,\\
A_0(x,t,u) &= \Theta_{xx}\phi - \frac{c\Theta}{a}\frac{h}{f}\phi'_u + \frac{\Theta^2}{a}\frac{\phi}{f}\phi'_u.
\end{aligned} \tag{4.5.3.3}$$

где $A_1(x,t,u)$ и $A_0(x,t,u)$ не зависят от производной u_x и выражаются через функции, входящие в исходное УрЧП (2.7.3.1) и дифференциальную связь (4.5.3.1).

Дифференцируя (4.5.3.2) по t и используя соотношение (4.5.3.1) и первую формулу в (4.5.3.3), находим смешанную производную другим способом:

$$\begin{aligned}
u_{xxt} &= -\Theta\Big[\phi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u + 2\frac{f'_u}{f}\phi'_u\Big]u_x^2 + B_1(x,t,u)u_x + B_0(x,t,u),\\
B_1(x,t,u) &= -2\Theta_x\phi\frac{f'_u}{f} - \frac{a_x\Theta}{a}\phi'_u - \frac{b}{a}\Theta\Big(\frac{g\phi}{f}\Big)'_u,\\
B_0(x,t,u) &= -\frac{a_x\Theta_x}{a}\phi - \frac{b\Theta_x}{a}\frac{g}{f}\phi - \frac{c\Theta}{a}\phi\Big(\frac{h}{f}\Big)'_u + \frac{\Theta_t}{a}\frac{\phi}{f} + \frac{\Theta^2}{a}\phi\Big(\frac{\phi}{f}\Big)'_u,
\end{aligned} \tag{4.5.3.4}$$

где $B_1(x,t,u)$ и $B_0(x,t,u)$ не зависят от u_x.

Приравнивая смешанные производные третьего порядка (4.5.3.3) и (4.5.3.4), приходим к следующему соотношению, квадратичному по u_x:

$$Ku_x^2 + Mu_x + N = 0, \tag{4.5.3.5}$$

где

$$\begin{aligned} K &= \Theta\Big[\phi''_u + \phi'_u \frac{f'_u}{f} + \phi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u\Big],\\ M &= 2\Theta_x\Big(\phi'_u + \frac{f'_u}{f}\phi\Big) + \frac{b\Theta}{a}\Big(\frac{g}{f}\Big)'_u\phi,\\ N &= \Theta_{xx}\phi + \Theta_x\phi\Big(\frac{a'_x}{a} + \frac{b}{a}\frac{g}{f}\Big) - \frac{\Theta_t}{a}\frac{\phi}{f} + \frac{c\Theta}{a}\Big[\phi\Big(\frac{h}{f}\Big)'_u - \frac{h}{f}\phi'_u\Big] + \frac{\Theta^2}{a}\frac{\phi^2 f'_u}{f^2}. \end{aligned} \tag{4.5.3.6}$$

Функциональные коэффициенты K, M, N зависят от a, b, c, f, g, h, Θ, ϕ и их производных (и не зависят от u_x). Приравнивая нулю функциональные коэффициенты в (4.5.3.5) (процедура расщепления по производной u_x), получим определяющую систему уравнений $K = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Далее достаточно рассмотреть только первое уравнение этой системы (соответствующее $K = 0$), которое после деления на Θ принимает вид

$$\phi''_u + \phi'_u \frac{f'_u}{f} + \phi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u = 0. \tag{4.5.3.7}$$

Это уравнение допускает первый интеграл

$$\phi'_u + \phi\frac{f'_u}{f} = C_1. \tag{4.5.3.8}$$

Считая f произвольной функцией, а ϕ искомой функцией, и интегрируя соотношение (4.5.3.8), находим общее решение уравнения (4.5.3.7):

$$\phi = \frac{1}{f}\Big(C_1\int f\,du + C_2\Big), \tag{4.5.3.9}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, метод дифференциальных связей, основанный на связи (4.5.3.1), приводит к точному решению, в котором функции f и ϕ (входящие в исходное уравнение и дифференциальную связь) связаны соотношением (4.5.3.9).

Использование дифференциальной связи (4.5.3.1) эквивалентно представлению решения в виде (2.7.1.2). Поскольку $\phi = 1/\zeta$, решение (4.5.3.9) можно переписать через f и ζ:

$$\zeta = f\Big(C_1\int f\,du + C_2\Big)^{-1}. \tag{4.5.3.10}$$

Рассмотрим теперь некоторые решения, построенные в разд. 2.7.3 методом функционального разделения переменных. Решение (2.7.3.48) уравнения

(2.7.3.47) и решение (2.7.3.128) уравнения (2.7.3.127) являются частными случаями решений (2.7.1.2) при $\zeta = f/u$. Эти решения отличны от (4.5.3.10); следовательно, их нельзя получить методом дифференциальных связей со связью (4.5.3.1). Более сложные решения (2.7.3.10), (2.7.3.16), (2.7.3.33), (2.7.3.39), (2.7.3.57), (2.7.3.88), в которых функция ζ зависит не только от $f(u)$, но и от других функциональных коэффициентов $g(u)$ или/и $h(u)$ рассматриваемого класса уравнений (2.7.3.1), также нельзя найти методом дифференциальных связей, используя связь (4.5.3.1).

Замечание 4.22. *Можно показать, что указанные выше точные решения также нельзя получить методом дифференциальных связей, используя дифференциальную связь вида* $u_t = U(x,t,u)$, *которая является более общей, чем (4.5.3.1).*

Некоторые замечания о слабых симметриях. При применении метода дифференциальных связей к уравнению (2.7.3.1) потеря некоторых точных решений произошла при расщеплении соотношения (4.5.3.5)—(4.5.3.6) по степеням u_x. Теоретически, чтобы избежать подобных потерь, можно дополнительно рассматривать слабые симметрии [145, 317, 352]. Рассмотрим два возможных алгоритма поиска слабых симметрий на примере нелинейного уравнения (2.7.3.1).

Первый алгоритм. Этот алгоритм состоит из двух этапов.

1°. Первый (составной) этап предполагает вывод соотношения (4.5.3.5) и, следовательно, приводит к тем же результатам, что и при применении метода дифференциальных связей до процедуры расщепления по степеням u_x.

2°. Второй этап заключается в анализе трех уравнений в частных производных (4.5.3.1), (4.5.3.2) и (4.5.3.5)—(4.5.3.6) на совместность (чтобы вывести определяющее уравнение, которое затем необходимо интегрировать).

Анализ совместности этих УрЧП производится следующим образом. Уравнение (4.5.3.5) дифференцируется по t, после чего из полученного выражения исключаются производные u_t и u_{xt} с помощью связи (4.5.3.1) и первой формулы в (4.5.3.3). В результате приходим к соотношению

$$Pu_x^2 + Qu_x + R = 0, \tag{4.5.3.11}$$

где

$$\begin{aligned} &P = K_t + UK_u + 2U_uK,\\ &Q = M_t + UM_u + U_uM + 2U_xK,\\ &R = N_t + UN_u + U_xM,\\ &U = \Theta(x,t)\phi(u), \end{aligned} \tag{4.5.3.12}$$

а функции K, M, N находятся по формулам (4.5.3.6). Далее, исключив производную u_x из уравнений (4.5.3.5) и (4.5.3.11), получим определяющее уравнение, которое в невырожденном случае ($MP - KQ \not\equiv 0$) имеет вид

$$K(NP-KR)^2 - M(MP-KQ)(NP-KR) + N(MP-KQ)^2 = 0. \tag{4.5.3.13}$$

Уравнение (4.5.3.13) представляет собой очень сложное и весьма громоздкое нелинейное УрЧП. Оно содержит производные третьего порядка Θ_{xxt} и ϕ'''_{uuu} (напомним, что Θ и ϕ—искомые функции) и в развернутом виде (с учетом соотношений (4.5.3.5) и (4.5.3.12)) занимает почти целую страницу. Кроме того, уравнение (4.5.3.13), которое содержит одну или несколько произвольных функций $f(u)$, $g(u)$ и т. д., необходимо решать совместно с уравнениями (4.5.3.1) и (4.5.3.2) (или с исходным уравнением). В результате, вместо одного уравнения (2.7.3.1) (или уравнения (2.7.3.2) вместе с (2.7.1.2)), в данном случае приходится иметь дело с гораздо более сложной системой нелинейных УрЧП. Другими словами, рассматриваемый метод, основанный на анализе трех УрЧП (4.5.3.1), (4.5.3.2), (4.5.3.5), является чрезвычайно трудным для практического применения.

► Пример 4.29. Для большей наглядности рассмотрим линейное уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$, которое получается из (2.7.3.1), если положить

$$a(x) = 1, \quad b(x) = 0, \quad c(x) = 0, \quad f(u) = 1.$$

В этом случае необходимо подставить в уравнение (4.5.3.13) следующие функции:

$$\begin{aligned}
&K = U_{uu}, \quad M = 2U_{xu}, \quad N = U_{xx} - U_t, \quad U = \Theta\phi;\\
&P = U_{tuu} + UU_{uuu} + 2U_uU_{uu},\\
&Q = 2(U_{xtu} + UU_{xuu} + U_uU_{xu} + U_xU_{uu},\\
&R = U_{xxt} - U_{tt} + U(U_{xxu} - U_{tu}) + 2U_xU_{xu}.
\end{aligned} \tag{4.5.3.14}$$

Видно, что нелинейное УрЧП третьего порядка (4.5.3.13) — (4.5.3.14) изолируется (его можно решать независимо от исходного уравнения). Оно гораздо сложнее, чем рассматриваемое линейное уравнение теплопроводности второго порядка. ◄

Вырожденный случай $MP - KQ \equiv 0$ рассматривается аналогичным образом.

Второй алгоритм. В этом случае продифференцируем формулу (2.7.1.2) по t и x. В результате получим два соотношения

$$u_t = \vartheta_t\phi(u), \quad u_x = \vartheta_x\phi(u), \tag{4.5.3.15}$$

которые можно интерпретировать как две совместные дифференциальные связи, где функции $\vartheta = \vartheta(x,t)$ и $\phi(u) = 1/\zeta(u)$ подлежат определению. Дифференцируя второе соотношение (4.5.3.15) по x, находим вторую производную:

$$u_{xx} = \vartheta_{xx}\phi + \vartheta_x\phi'_u u_x = \vartheta_{xx}\phi + \vartheta_x^2\phi\phi'_u, \quad \phi = \phi(u). \tag{4.5.3.16}$$

Подставим производные (4.5.3.15) и (4.5.3.16) в (2.7.3.1). В результате приходим к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с уравнением (2.7.3.2). Далее используя обобщенный принцип расщепления, описанный в разд. 2.7.1, можно построить точные решения, полученные в первой части разд. 2.7.3 (без использования эквивалентных уравнений). Однако построить решения, полученные во второй части этого раздела с использованием эквивалентных уравнений, будет невозможно. Чтобы найти эти решения, необходимо сначала проинтегрировать дифференциальные соотношения (4.5.3.15) и вернуться к исходному соотношению (2.7.1.2), а затем рассмотреть эквивалентные уравнения, описанные в разд. 2.7.3.

Таким образом показано, что использование преобразования (2.7.1.2) в сочетании с обобщенным принципом расщепления может быть более эффективным для построения точных решений, чем использование одной или двух эквивалентных дифференциальных связей.

4.5.4. Прямой метод построения редукций и дифференциальные связи

Рассмотрим редукцию, основанную поиске решений в виде

$$u(x,t) = F\bigl(x,t,w(z)\bigr), \quad z = z(x,t), \tag{4.5.4.1}$$

где функции $F(x,t,w)$ и $z(x,t)$ выбираются так, чтобы $w(z)$ удовлетворяла одному обыкновенному дифференциальному уравнению; см. разд. 3.1.3.

Следуя [258], покажем, что поиск решения в виде (4.5.4.1) эквивалентен поиску решения методом дифференциальных связей с использованием квазилинейной дифференциальной связи первого порядка

$$\xi(x,t)u_t + \eta(x,t)u_x = \zeta(x,t,u). \tag{4.5.4.2}$$

Действительно, первые интегралы характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{\xi(x,t)} = \frac{dx}{\eta(x,t)} = \frac{du}{\zeta(x,t,u)}$$

имеют вид

$$z(x,t) = C_1, \quad \varphi(x,t,u) = C_2, \tag{4.5.4.3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Поэтому общее решение уравнения (4.5.4.2) можно записать следующим образом [289]:

$$\varphi(x,t,u) = w\bigl(z(x,t)\bigr), \tag{4.5.4.4}$$

где $w(z)$ — произвольная функция. Разрешив (4.5.4.4) относительно u, получим представление решения в виде (4.5.4.1).

Напомним, что представление искомой функции u в виде (4.5.4.1) является избыточным и, в зависимости от накладываемых условий на функции $F(x,t,w)$ и $z(x,t)$ и дальнейшего порядка действий, может приводить в итоге к различным решениям (сравни описание методов и примеры в разд. 3.1 и 3.2).

4.5.5. Неклассический метод поиска симметрий и дифференциальные связи

Краткое описание метода. *Неклассический метод поиска симметрий* [90] является важным частным случаем метода дифференциальных связей. Этот метод основан на присоединении к рассматриваемому нелинейному уравнению (4.2.2.1) двух дифференциальных связей. Одна из связей является квазилинейным УрЧП первого порядка общего вида

$$\xi(x,t,u)u_x + \eta(x,t,u)u_t = \zeta(x,t,u) \tag{4.5.5.1}$$

и называется *условием инвариантной поверхности*. Другая связь представляет собой вспомогательное уравнение

$$\xi F_x + \eta F_t + \zeta F_u + \zeta_1 F_{u_x} + \zeta_2 F_{u_t} + \zeta_{11} F_{u_{xx}} + \zeta_{12} F_{u_{xt}} + \zeta_{22} F_{u_{tt}} + \dots = 0, \tag{4.5.5.2}$$

совпадающее с условием инвариантности, которое лежит в основе *классического метода поиска симметрий* [31, 32, 91, 197, 259]. В уравнениях (4.5.5.1) и (4.5.5.2) $\xi = \xi(x,t,u)$, $\eta = \eta(x,t,u)$, $\zeta = \zeta(x,t,u)$ — искомые функции, а ζ_i и ζ_{ij} — координаты первого и второго продолжений, которые определяются формулами, приведенными в цитируемых книгах.

Неклассический метод поиска симметрий приводит к нелинейной определяющей системе УрЧП для искомых функций. Обсуждение этого метода, а также ряд конкретных примеров его использования, можно найти, например, в [48, 80, 90, 126, 127, 129, 130, 226, 257, 261, 287, 316, 318, 329]. Для дифференциальных связей первого порядка результаты применения метода дифференциальных связей и неклассического метода поиска симметрий совпадают (при условии, что дифференциальная связь совпадает с условием инвариантной поверхности).

Замечание 4.23. *В [257] на примере уравнения Фитцхью — Нагумо было показано, что неклассический метод поиска симметрий является более общим, чем прямой метод построения редукций.*

Замечание 4.24. *В [277, 278] было установлено, что при поиске точных решений нелинейных УрЧП методы функционального разделения переменных могут быть более эффективными, чем неклассический метод поиска симметрий, основанный на условии инвариантной поверхности. Этот факт иллюстрируется на примерах реакционно-диффузионных и конвективно-диффузионных уравнений с переменными коэффициентами, а также нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона.*

Классический метод поиска симметрий. При использовании классического метода поиска симметрий, основанного на групповом анализе УрЧП [31, 32, 91, 197, 259, 287], сначала рассматривают два уравнения: (4.2.2.1) и (4.5.5.2). Из них исключают одну из старших производных (например, u_{tt} для УрЧП второго порядка), а остальные производные (u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) считаются «независимыми». Получаемое выражение расщепляют по степеням независимых производных (т. е. приравниваются нулю все функциональные множители, стоящие перед различными степенями независимых производных). В результате приходят к переопределенной системе уравнений, из которой находят функции ξ, η, ζ. Затем эти функции подставляют в квазилинейное уравнение первого порядка (4.5.5.1), решение которого позволяет определить общий вид решения (это решение содержит произвольные функции). Далее, используя (4.2.2.1), уточняют структуру решения, полученную на предыдущем шаге.

В [239] было показано, что классический метод поиска симметрий является частным случаем метода дифференциальных связей.

Замечание 4.25. *Классический метод поиска симметрий приводит к линейной определяющей системе УрЧП для искомых функций ξ, η, ζ. Этот метод может привести к потере некоторых решений (которые можно найти неклассическим методом поиска симметрий), поскольку на первом шаге расщепления предполагается, что первые производные u_x и u_t независимы, в то время как эти производные в силу уравнения (4.5.5.1) линейно зависимы.*

Замечание 4.26. *Как правило, классический метод поиска симметрий не позволяет найти точные решения, которые можно получить путем применения методов обобщенного и функционального разделения переменных, прямого метода построения редукций и метода дифференциальных связей.*

Список литературы

[1] Аксенов В.А., Козырев А.А. Редукции уравнения стационарного пограничного слоя с градиентом давления. *Доклады АН*, 2013, т. 449, № 5, с. 516–520.

[2] Аксенов А.В., Козырев А.А. Одномерные и двумерные редукции уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2013, т. 2, № 4, с. 415–421.

[3] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. *Применение теоретико-групповых методов в гидрдинамике*. Новосибирск: Наука, 1994.

[4] Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье—Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных. *Теор. основы хим. технологии*, 2009, т. 43, № 5, с. 547–566.

[5] Аристов С.Н., Полянин А.Д. Точные решения трехмерных нестационарных уравнений Навье—Стокса. *Доклады АН*, 2009, т. 54, № 7, с. 35–40.

[6] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии. *Теор. основы хим. технологии*, 2016, т. 50, № 3, с. 294–301.

[7] Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости. *Изв. РАН. Мех. жидкости и газа*, 2016, № 2, с. 25-31.

[8] Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. О решении типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическом режиме. *Прикл. мат. мех.* (ПММ), 1957, т. 21, вып. 5, с. 718–720.

[9] Бурде Г.И. Об одном классе решений уравнения пограничного слоя. *Изв. РАН. Мех. жидкости и газа*, 1990. № 2. С. 45–51.

[10] Верещагина Л. И. Групповое расслоение уравнений пространственного нестационарного пограничного слоя. *Вестник ЛГУ*, 1973, т. 13, № 3, с. 82–86.

[11] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

[12] Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.

[13] Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, 1994, т. 34, № 3, с. 374–383.

[14] Гузачев М.А., Константинова Н.Ю., Попель П.С., Мозговой А.Г. Температурные зависимости кинематической вязкости жидких висмута, свинца и их взаимных растворов. *Теплофизика и аэромеханика*, 2011, т. 18, № 3, с. 485–491.

[15] Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985.

[16] Жужин Г.В. Ламинарный пограничный слой неньютоновской жидкости (качественное исследование). *Прикл. мех. и техн. физика*, 1987, № 3, с. 71–81.

[17] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. О точных решениях уравнений пограничного слоя степенных жидкостей. *Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа*, 1989, № 5, с. 39–42.

[18] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения.* М.: Международная программа образования, 1996.

[19] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Физматлит, 2001.

[20] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Точные решения и преобразования нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн. *Доклады АН*, 2001, т. 381, № 1, с. 31–36.

[21] Игнатович Н.В. Нередуцируемые к инвариантным, частично-инвариантные решения уравнений стационарного погранслоя. *Мат. заметки*, 1993, т. 53, № 1, с. 140–143.

[22] Косов А.А., Семенов Э.И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы реакции-диффузии, *Диф. уравнения*, 2018, т. 54, № 1, с. 108–122.

[23] Косов А.А., Семенов Э.И. О точных решениях уравнения нелинейной диффузии. *Сиб. матем. журн.*, 2019, т. 60, № 1, с. 123–140.

[24] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010.

[25] Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[26] Лойцянский Л.Г. *Ламинарный пограничный слой*. М.: Физматлит, 1962.

[27] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Наука, 1973.

[28] Маркеев А.П. *Теоретическая механика*. М.: Наука, 1990.

[29] Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.

[30] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. *Доклады АН СССР*, 1959, т. 125, № 3, с. 492–495.

[31] Овсянников Л.В. *Групповые свойства дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

[32] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[33] Павловский Ю.Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1961, т. 1, № 2, с. 280–294.

[34] Похожаев С.И. Об одной задаче Л. В. Овсянникова. *Прикл. механика и техн. физика*, 1989, № 2, с. 5–10.

[35] Полянин А.Д. Точные решения и преобразования уравнений стационарного ламинарного пограничного слоя. *Теор. основы хим. технологии*, 2001, т. 35, № 4, с. 339–348.

[36] Полянин А.Д. Преобразования и точные решения уравнений пограничного слоя, содержащие произвольные функции. *Доклады АН*, 2001, т. 379, № 3, с. 334–339.

[37] Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье — Стокса с обобщенным разделением переменных. *Доклады АН*, 2001, т. 380, № 4, с. 491–496.

[38] Полянин А.Д. О нелинейной неустойчивости решений систем гидродинамического типа. *Письма в ЖЭТФ*, т. 90, № 3, с. 238–242.

[39] Полянин А.Д. Нелинейная неустойчивость решений уравнений Навье—Стокса. *Теор. основы хим. технологии*, 2009, т. 43, № 6, с. 881–888.

[40] Полянин А.Д. Точные решения уравнений нестационарного пограничного слоя степенных неньютоновских жидкостей. *Доклады АН*, 2015, т. 463, № 5, с. 547–551.

[41] Полянин А.Д. Редукции и новые точные решения нелинейных уравнений конвективной диффузии с переменными коэффициентами. *Вестник НИЯУ "МИФИ"*, 2018, т. 7, № 6, с. 497–507.

[42] Полянин А.Д. Методы функционального разделения переменных и их применение в математической физике. *Мат. моделирование и численные методы*, 2019, № 1, с. 65–97.

[43] Полянин А.Д., Аристов С.Н. Системы уравнений гидродинамического типа: Точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость. *Доклады АН*, 2009, т. 428, № 2, с. 180–185.

[44] Полянин А.Д., Журов А.И. Решения с функциональным разделением переменных двух классов нелинейных уравнений математической физики. *Доклады АН*, 2019, т. 486, № 3, с. 287–291.

[45] Полянин А.Д., Журов А.И. Об одном методе построения точных решений нелинейных уравнений математической физики. *Доклады АН*, 2019, т. 489, № 3, с. 235–239.

[46] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Уравнения нестационарного пограничного слоя: Общие преобразования and точные решения. *Теор. основы хим. технологии*, 2001, т. 34, № 6, с. 563–573.

[47] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики*. М.: Физматлит, 2002.

[48] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

[49] Полянин А.Д., Линчук Л.В. Построение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений методом расщепления. *Вестник НИЯУ "МИФИ"*, 2020, т. 9, № 1, с. 32–44.

[50] Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Точные решения и качественные особенности гиперболических реакционно-диффузионных уравнения с запаздыванием. *Теор. основы хим. технологии*, 2015, т. 49, № 5, с. 527–541.

[51] Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Реакционно-диффузионные модели с запаздыванием: Некоторые свойства, уравнения, задачи и решения. *Теор. основы хим. технологии*, 2018, т. 52, № 3, с. 278–293.

[52] Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье—Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат. *Теор. основы хим. технологии*, 2016, т. 53, № 1, с. 107–114.

[53] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье—Стокса. *Успехи механики*, 2006, № 6, с. 3–76.

[54] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии. *Мат. заметки*, 2000, т. 67, № 2, с. 250–256.

[55] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике*. Новосибирск: Наука, 1984.

[56] Соболев С. Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах. *Успехи физ. наук*, 1991, т. 161, № 3, с. 5–29.

[57] Титов С.С. О решениях нелинейных уравнений в частных производных в виде многочленов по одной из переменных. *Численные методы механики сплошной среды*, Новосибирск, 1977, т. 8, № 1, с. 144–149.

[58] Титов С.С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики. *Аэродинамика* (ред Т.П. Иванова), Саратовский ун-т, 1988, с. 104–110.

[59] Титов С.С., Устинов В.А. Исследование многочленных решений уравнений фильтрации газа с целым показателем адиабаты. *Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной следы* (сб. науч. трудов). Урал. отд-ние АН СССР, Инст. математики и механики, 1985, с. 64–70.

[60] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1972.

[61] Флетчер К. *Численные методы на основе метода Галёркина*. М.: Мир, 1988.

[62] Хабиров С.В. Применение контактных преобразований неоднородного уравнения Монжа—Ампера в одномерной газовой динамике. *Доклады АН*, 1990, т. 310, №. 2, с. 333–336

[63] Хабиров С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа—Ампера. *Мат. сборник*, 1990, т. 181, № 12, с. 1607–1622.

[64] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. М.: Наука, 1974.

[65] Шульман З.П., Берковский Б.М. *Пограничный слой неньютоновских жидкостей.* Минск: Наука и техника, 1966.

[66] Шульман З.П. *Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей*. М.: Энергия, 1975.

[67] Эстевес П.Г., Чу Ч., Разделение переменных в нелинейных волновых уравнениях с переменной волновой скоростью. *Теор. мат. физика*, 2002, т. 133, № 2, с. 202–210.

[68] Яненко Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды IV Всесоюзного мат. съезда, т. 2, с. 613–621. Л.: Наука, 1964.

[69] Abazari R., Jamshidzadeh S. Exact solitary wave solutions of the complex Klein–Gordon equation. *Optik*, 2015, Vol. 126, pp. 1970–1975.

[70] Ablowitz M.J., Clarkson P.A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

[71] Ablowitz M.J., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1981.

[72] Acrivos A., Shah M.J., Petersen E.E. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces. *AIChE J.*, 1960, Vol. 6, No. 2, pp. 312–317.

[73] Ahmed E., Abdusalam H.A., Fahmy E.S. On telegraph reaction diffusion and coupled maplattice in some biological systems. *Int. J. Modern Phys. C*, 2001, Vol. 12, pp. 717–726.

[74] Alquran M.T. Solitons and periodic solutions to nonlinear partial differential equations by the sine–cosine method. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 2012, Vol. 6, No. 1, pp. 85–88.

[75] Ames W.F., Lohner J.R., Adams E. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1981, Vol. 16, Nos 5–6, pp. 439–447.

[76] Anco S.C., Liu S. Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, Vol. 297, pp. 317–342.

[77] Annaby M.H., Mansour Z.S. *q-Fractional Calculus and Equations*. Berlin: Springer, 2012.

[78] Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous flow between two moving parallel disks: exact solutions and stability analysis. *J. Fluid Mech.*, 2002, Vol. 464, pp. 209–215.

[79] Aristov S.N., Polyanin A.D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier–Stokes equations. *Russian J. Math. Physics*, 2010, Vol. 17, No. 1, pp. 1–18.

[80] Arrigo D., Broadbridge P., Hill J.M. Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman–Cole and Clarkson–Kruskal, *J. Math. Phys.,* 1993, Vol. 34, pp. 4692–4703.

[81] Aslan I., Ozis T. Analytic study on two nonlinear evolution equations by using the (G'/G)-expansion method. *Appl. Math. Comput.*, 2009, Vol. 209, No. 2, pp. 425–429.

[82] Barannyk A.F., Barannyk T.A., Yuryk I.I. Generalized separation of variables for nonlinear equation $u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2$. *Rep. Math. Phys.*, 2013, Vol. 71, pp. 1–13.

[83] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Appl. Math.*, 2001, Vol. 69, pp. 43–94.

[84] Bekir A. New solitons and periodic wave solutions for some nonlinear physical models by using the sine–cosine method. *Physica Scripta*, 2008, Vol. 77, No. 4, 045008.

[85] Bekir A. Application of the G'/G-expansion method for nonlinear evolution equations. *Physics Letters A*, 2008, Vol. 372, pp. 3400–3406.

[86] Bekir A., Boz A. Exact solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method. *Physics Letters A*, 2008, Vol. 372, No. 10, pp. 1619–1625.

[87] Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, In: *Encyclopedia of Physics, Vol. VIII/2* (ed. S. Flügge), pp. 1–384. Berlin: Springer, 1963.

[88] Birkhoff G. *Hydrodynamics*. Princeton: Princeton University Press, 1960.

[89] Bluman G.W., Cheviakov A.F. Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, Vol. 333, pp. 93–111.

[90] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation. *J. Math. Mech.*, 1969, Vol. 18, pp. 1025–1042.

[91] Bluman G.W., Cole J.D. *Similarity Methods for Differential Equations*. New York: Springer, 1974.

[92] Bluman G.W., Kumei S. *Symmetries and Differential Equations*. New York: Springer, 1989.

[93] Bluman G.W., Temuerchaolu, Sahadevan R. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation. *J. Math. Phys.*, 2005, Vol. 46, 023505.

[94] Blyth M.G., Hall P. Oscillatory flow near a stagnation point. *SIAM J. Appl. Math.*, 2003, Vol. 63, pp. 1604–1614.

[95] Böhme G. *Non-Newtonian Fluid Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 1987.

[96] Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'une canal rectangulaire horizontal, et communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appl.*, 1872, Ser. 2, Vol. 17, pp. 55–108.

[97] Boussinesq J. Recherches théorique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. *J. Math. Pures Appl.,* 1904, Vol. 10, No. 1, pp. 5–78.

[98] Boyce W.E., DiPrima R.C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 4th ed.* New York: John Wiley & Sons., 1986.

[99] Bradshaw-Hajek B.H. Nonclassical symmetry solutions for non-autonomous reaction-diffusion equations. *Symmetry*, 2019, Vol. 11, 208.

[100] Bradshaw-Hajek B.H., Edwards M.P., Broadbridge P., Williams G.H. Nonclassical symmetry solutions for reaction-diffusion equations with explicit spatial dependence. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl.*, 2007, Vol. 67, No. 9, pp. 2541–2552.

[101] Bradshaw-Hajek B.H., Moitsheki R.J. Symmetry solutions for reaction-diffusion equations with spatially dependent diffusivity. *Appl. Math. Comput.*, 2015, Vol. 254, pp. 30–38.

[102] Broadbridge P., Daly E., Goard J. Exact solutions of the Richards equation with nonlinear plant-root extraction. *Water Resources Research*, 2017, Vol. 53, No. 11, pp. 9679–9691.

[103] Bulbul B., Sezer M., Greiner W. *Relativistic Quantum Mechanics–Wave Equations, 3rd ed.*. Berlin: Springer, 2000.

[104] Burde G.I. The construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Steady flows. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1994, Vol. 47, No. 2, pp. 247–260.

[105] Burde G.I. The construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Unsteady flows, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1995, Vol. 48, No. 4, pp. 611–633.

[106] Burde G.I. New similarity reductions of the steady-state boundary-layer equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1996, Vol. 29, No. 8, pp. 1665–1683.

[107] Calogero F., Degasperis A. *Spectral Transform and Solitons: Tolls to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*. Amsterdam: North-Holland Publ., 1982.

[108] Cantwell B.J. Similarity transformations for the two-dimensional, unsteady, stream function equation. *J. Fluid Mech.*, 1978, Vol. 85, No. 2, pp. 257–271.

[109] Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II. *Geophysical J. Int.*, 1967, Vol. 13, No. 5, pp. 529–539.

[110] Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1984.

[111] Cattaneo C. Sulla conduzione de calore. *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 1948, Vol. 3, pp. 3–21.

[112] Caudrey P.J., Eilbeck J.C., Gibbon J.D. The sine-Gordon equation as a model classical field theory. *Il Nuovo Cimento B Series*, 1975, Vol. 25, No. 2, pp. 497–512.

[113] Chen S., Wei J. Stability and bifurcation in a diffusive logistic population model with multiple delays. *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 2015, Vol. 25, No. 8, 1550107.

[114] Cherniha R. New non-Lie ansätze and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion-convection equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1998, Vol. 31, pp. 8179–8198.

[115] Cherniha R., Davydovych V. *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology*. Cham: Springer, 2017.

[116] Cherniha R., King J.R., Kovalenko S. Lie symmetry properties of nonlinear reaction-diffusion equations with gradient-dependent diffusivity, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2016, Vol. 36, pp. 98–108.

[117] Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion-convection equations. *J. Physics A: Math. Theor.*, 2007, Vol. 40, No. 33, pp. 10049–10070.

[118] Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction-diffusion-convection equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, Vol. 403, pp. 23–37.

[119] Cherniha R., Serov M., Rassokha I. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction–diffusion–convection equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 342, pp. 1363–1379.

[120] Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. Lie and Q-conditional symmetries of reaction-diffusion-convection equations with exponential nonlinearities and their application for finding exact solutions. *Symmetry*, 2018, Vol. 10, No. 4, 123.

[121] Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.

[122] Choudhary S., Daftardar-Gejji V. Invariant subspace method: A tool for solving fractional partial differential equations. *Fractional Calculus & Appl. Analysis*, 2017, Vol. 20, No. 2, pp. 477–493.

[123] Choudhary S., Daftardar-Gejji V. Solving systems of multi-term fractional PDEs: Invariant subspace approach. *Int. J. Modeling, Simulation, & Scientific Comput.*, 2019, Vol. 10, No. 1, 1941010.

[124] Chun C. Soliton and periodic solutions for the fifth-order KdV equation with the Exp-function method. *Physics Letters A*, 2008, Vol. 372, No. 16, pp. 2760–2766.

[125] Chun C., Neta B. Some modification of Newton's method by the method of undetermined coefficients. *Comp. Math. Appl.*, 2008, Vol. 56, No. 10, pp. 2528–2538.

[126] Clarkson P.A. Nonclassical symmetry reductions of the Boussinesq equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, Vol. 5, pp. 2261–2301.

[127] Clarkson P.A., Hood S. Nonclassical symmetry reductions and exact solutions of the Zabolotskaya–Khokhlov equation. *European J. Appl. Math.*, 1992, Vol. 3, No. 4, pp. 381–414.

[128] Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.*, 1989, Vol. 30, No. 10, pp. 2201–2213.

[129] Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations. *Methods Appl. Anal.*, 1997, Vol. 4, No. 2, pp. 173–195.

[130] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions. *SIAM J. Appl. Math.*, 1994, Vol. 54, No. 6, pp. 1693–1719.

[131] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Physica D*, 1994, Vol. 70, No. 3, pp. 250–288.

[132] Clarkson P.A., McLeod J.B., Olver P.J., Ramani R. Integrability of Klein–Gordon equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, Vol. 17, pp. 798–802.

[133] Crabtree F.L., Küchemann D., Sowerby L. , In: *Laminar Boundary Layers* (ed. L. Rosenhead). Oxford: Oxford University Press, 1963.

[134] Craik A. The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces: some exact solutions. *J. Fluid Mech.*, 1989, Vol. 198, pp. 275–292.

[135] Crane L.J. Flow past a stretching plate. *ZAMP*, 1970, Vol. 21, No. 4, pp. 645–647.

[136] Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F. (eds.). *The sine-Gordon Model and its Applications*. Heidelberg: Springer, 2014.

[137] Curro C., Fusco D., Manganaro N. Differential constraints and exact solution to Riemann problems for a traffic flow model. *Acta App. Math.*, 2012, Vol. 122, pp. 167–178.

[138] de Oliveira O.R.B. A formula substituting the undetermined coefficients and the annihilator methods. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 2013, Vol. 44, No. 3, pp. 462–468.

[139] Dierkes D., Oberlack M., Cheviakov A. New similarity reductions and exact solutions for helically symmetric viscous flows. *Phys. Fluids*, 2020, Vol. 32, 053604, doi: 10.1063/5.0005423.

[140] Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press, 1982.

[141] Doyle P.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, Vol. 33, No. 2, pp. 315–326.

[142] Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.

[143] Dubinskii Y.A. *Analytic Pseudo-Differential Operators and Their Applications*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

[144] Dunbar S.R., Othmer H.G. On a nonlinear hyperbolic equation describing transmission lines, cell movement, and branchingrandom walks. In: *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry, in: Lecture Notes in Biomath.* (ed. Othmer H.G.), Vol. 66, pp. 274–289, Springer, Berlin, 1986.

[145] Dzhamay A.V., Vorob'ev E.M. Infinitesimal weak symmetries of nonlinear differential equations in two independent variables. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1994, Vol. 27, pp. 5541–5549.

[146] Elwakila S.A., El-Labany S.K., Zahran M.A., Sabry R. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations. *Physics Letters A*, 2002, Vol. 299, Nos 2–3, pp. 179–188.

[147] Erbas B., Yusufoglu E. Exp-function method for constructing exact solutions of Sharma–Tasso–Olver equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, Vol. 41, No. 5, pp. 2326–2330.

[148] Estévez P.G. Non-classical symmetry and the singular manifold: the Burgers and the Burgers–Huxley equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1994, Vol. 27, pp. 2113–2127.

[149] Estévez P.G., Gordoa P.R. Painleve analysis of the generalized Burgers–Huxley equation. *J. Phys. A: Math. Gen.,* 1990, Vol. 23, No. 1, pp. 4831–4837.

[150] Estévez P.G., Qu C.Z., Zhang S.L. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, Vol. 275, pp. 44–59.

[151] Faddeev L.D., Takhtajan L.A. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Berlin: Springer, 1987.

[152] Fan E. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Physics Letters A*, 2000, Vol. 277, Nos 4–5, pp. 212–218.

[153] Finlayson B.A. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. New York: Academic Press, 1972.

[154] Fort J., Méndez V. Wavefronts in time-delayed reaction–diffusion systems. Theory and comparison to experiment. *Rep. Prog. Phys.*, 2002, Vol. 65, pp. 895–954.

[155] Franklin J., Daoud A. *Proof in Mathematics: An Introduction*. Sydney: Kew Books, 2011.

[156] Fushchich W.I., Serov N.I., Ahmerov T.K. On the conditional symmetry of the generalized Korteweg-de Vries equation. *Proc. Ukr. Acad. Sci.,* 1991, Vol. A 12, pp. 28–30.

[157] Galaktionov V.A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications. *Differ. & Integral Equations*, 1990, Vol. 3, No. 5, pp. 863–874.

[158] Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 1994, Vol. 23, pp. 1595–621.

[159] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 1995, Vol. 125, No. 2, pp. 225–246.

[160] Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A. A quasilinear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures. *J. Soviet Math.*, 1988, Vol. 41, No. 5, pp. 1222–1292.

[161] Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear evolution equations with quadratic nonlinearities. *Dif. & Integral Equations*, 1995, Vol. 8, No. 8, pp. 1997–2024.

[162] Galaktionov V.A., Posashkov S.A., Svirshchevskii S.R. Generalized separation of variables for differential equations with polynomial nonlinearities. *Diff. Equations*, 1995, Vol. 31, No. 2, pp. 233–240.

[163] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

[164] Gandarias M.L., Romero J.L., Díaz J.M. Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1999, Vol. 32, pp. 1461–1473.

[165] Gandarias M.L. Classical point symmetries of a porous medium equation. *J. Phys. A*, 1996, Vol. 29, pp. 607–633.

[166] Gandarias M.L.,Torrisi M., Valenti A. Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2004, Vol. 39, pp. 389–398.

[167] Gazizov R., Kasatkin A. Construction of exact solutions for fractional order differential equations by the invariant subspace method. *Computers & Math. Applications*, 2013, Vol. 66, No. 5, pp. 576–584.

[168] Gilding B.H., Kersner R. *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*. Basel: Birkhüser, 2004.

[169] Giona M., Roman H.E. Fractional diffusion equation for transport phenomena in random media. *Physica A: Stat. Mech. & Appl.,* 1992, Vol. 185, No. 1–4, pp. 87–97.

[170] Gorenflo R., Iskenderov A., Luchko Y. Mapping between solutions of fractional diffusion-wave equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2000, Vol. 3, No. 1, pp. 75–86.

[171] Gourley S.A., Bartuccelli M.V. Parameter domains for instability of uniform states in systems with many delays. *J. Math. Biology*, 1997, Vol. 35, pp. 843–867.

[172] Grauel A., Steeb W.-H. Similarity solutions of the Euler equations and the Navier–Stokes equations in two space dimensions. *Int. J. Theor. Phys.*, 1985, Vol. 24, pp. 255–265.

[173] Greenspan H.P. On the motion of a small viscous droplet that wets a surface. *J. Fluid Mech.*, 1978, Vol. 84, pp. 125–143.

[174] Griffiths G.W., Schiesser W.E. *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations*. Academic Press, Amsterdam, 2012.

[175] Grosch C.E., Salwen H. Oscillating stagnation point flow. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 1982, Vol. 384, pp. 175–190.

[176] Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein-Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys.*, 1992, Vol. 33, pp. 2498–2503.

[177] Guderley K.G. *The Theory of Transonic Flow*. Oxford: Pergamon, 1962.

[178] Hand L.N., Finch J.D. *Analytical Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[179] Harko T., Mak M.K. Exact travelling wave solutions of non-linear reaction-convection-diffusion equations. – An Abel equation based approach. *J. Math. Phys.*, 2015, Vol. 56, 111501.

[180] Harris J. *Rheology and Non-Newtonian Flow*. London: Longman, 1977.

[181] Hayek M. Analytical solution to transient Richards' equation with realistic water profiles for vertical infiltration and parameter estimation. *Water Resources Research*, 2016, Vol. 52, No. 6, pp. 4438–4457.

[182] Hayek M. A family of analytical solutions of a nonlinear diffusion–convection equation. *Physica A: Stat. Mech. Appl.*, 2018, Vol. 490, pp. 1434–1445.

[183] He J.H., Wu X.H. Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, Vol. 30, No. 3, pp. 700–708.

[184] He J.H., Abdou M.A. New periodic solutions for nonlinear evolution equation using Exp-method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, Vol. 34, pp. 1421–1429.

[185] Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. *Dinglers Polytech. J.*, 1911, Vol. 326, pp. 321–324, 344–348, 357–362, 372–374, 407–410.

[186] Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: World Scientific, 2000.

[187] Hood S. New exact solutions of Burgers's equation—an extension to the direct method of Clarkson and Kruskal. *J. Math. Physics*, 1995, Vol. 36, No. 4, 1971.

[188] Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function - generalizations of Clarkson's and Kruskal's method. *IMA J. Appl. Math.*, 2000, Vol. 64, No. 3, pp. 223–244.

[189] Hu J., Qu C. Functionally separable solutions to nonlinear wave equations by group foliation method. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, Vol. 330, pp. 298–311.

[190] Huang D.J., Ivanova N.M. Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations. *J. Math. Phys.*, 2007, Vol. 48, No. 7, 073507.

[191] Huang D.J., Zhou S. Group properties of generalized quasi-linear wave equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, Vol. 366, pp. 460–472.

[192] Huang D.J., Zhou S. Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations. *Acta Appl. Math.*, 2012, Vol. 117, No. 1, pp. 135–183.

[193] Huang D.J., Zhu Y., Yang Q. Reduction operators and exact solutions of variable coefficient nonlinear wave equations with power nonlinearities. *Symmetry*, 2017, Vol. 9, No. 1, 3, doi:10.3390/sym9010003.

[194] Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, Vol. 271, pp. 455–466.

[195] Hui W.H. Exact solutions of the unsteady two-dimensional Navier–Stokes equations. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1987, Vol. 38, pp. 689–702.

[196] Hwang G. The elliptic sinh-Gordon equation in the quarter plane. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2016, Vol. 23, No. 1, pp. 127–140.

[197] Ibragimov N.H. (ed.). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*. Boca Raton: CRC Press, 1994.

[198] Ibragimov N.H., Khabirov S.V. Contact transformation group classification of nonlinear wave equations. *Nonlin. Dyn.*, 2000, Vol. 22, pp. 61–71.

[199] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$. *J. Math. Phys.*, 1991, Vol. 32, pp. 2988–2995.

[200] Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, Vol. 197, No. 2, pp. 322–344.

[201] Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations. *Dynamics of PDE*, 2008, Vol. 5, No. 2, pp. 139–171.

[202] Ji L. Conditional Lie–Bäcklund symmetries and functionally generalized separable solutions to the generalized porous medium equations with source. *J. Math. Anal. & Appl.*, 2012, Vol. 389, pp. 979–988.

[203] Ji L.N., Qu C.Z. Conditional Lie–Bäcklund symmetries and invariant subspaces to nonlinear diffusion equations with convection and source. *Stud. Appl. Math.*, 2013, Vol. 131, pp. 266–301.

[204] Ji L., Qu C. Conditional Lie–Bäcklund symmetries and solutions to $(n + 1)$-dimensional nonlinear diffusion equations. *J. Math. Phys.*, 2007, Vol. 48, 103509.

[205] Jia H., Xu W., Zhao X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x-dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 339, pp. 982–995.

[206] Jordan P.M., Dai W., Mickens R.E. A note on the delayed heat equation: Instability with respect to initial data. *Mech. Research Comm.*, 2008, Vol. 35 pp. 414–420.

[207] Kamke E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, II, Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine gesuchte Funktion*. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1965.

[208] Kamke E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Leipzig: B. G. Teubner, 1977.

[209] Kaptsov O.V. Determining equations and differential constraints. *Nonlinear Math. Phys.*, 1995, Vol. 2, pp. 283–291.

[210] Kaptsov O.V. Linear determining equations for differential constraints. *Sbornik: Mathematics*, 1998, Vol. 189, pp. 1839–1854.

[211] Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, Vol. 36, No. 5, pp. 1401–1414.

[212] Kar A., Chan C.L., Mazumder J. Comparative studies on nonlinear hyperbolic and parabolic heat conduction for various boundary conditions: Analytic and numerical solutions. *Int. J. Heat Transfer*, 1992, Vol. 114, pp. 14–20.

[213] Khalid M., Sultana M., Zaidi F., Arshad U. Solving linear and nonlinear Klein–Gordon equations by new perturbation iteration transform method. *TWMS J. App. Eng. Math.*, 2016, Vol. 6, No. 1, pp. 115–125.

[214] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[215] Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, 2nd ed.* New York: Dover Publ., 2000.

[216] Kruglikov B. Symmetry approaches for reductions of PDEs, differential constraints and Lagrange–Charpit method. *Acta Appl. Math.*, 2008, Vol. 101, pp. 145–161.

[217] Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys.*, 1993, Vol. 94, No. 2, pp. 211–218.

[218] Kudryashov N.A. Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function. *Zeitschrift fur Naturforschung*, 2004, Vol. 59, pp. 443–454.

[219] Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, Vol. 24, No. 5, pp. 1217–1231.

[220] Kudryashov N.A. A note on the G'/G-expansion method. *Appl. Math. Comput.*, 2010, Vol. 21, No. 4, pp. 1755–1758.

[221] Kudryashov N.A., Loguinova N.B. Extended simplest equation method for nonlinear differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 2008, Vol. 205, No. 1, pp. 396–402.

[222] Kudryashov N.A., Loguinova N.B. Be careful with the Exp-function method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, Vol. 14, No. 5, pp. 1881–189.

[223] Kudryashov N.A., Rybka R.B., Sboev A.G. Analytical properties of the perturbed FitzHugh–Nagumo model. *Appl. Math. Lett.*, 2018, Vol. 76, pp. 142–147.

[224] Kuranishi M. *Lectures on Involutive Systems on Partial Differential Equations*. Sao Paulo: Publ. Soc. Math., 1967.

[225] Lahno V., Zhdanov R., Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations. *Acta Appl. Math.*, 2006, Vol. 91, pp. 253–313.

[226] Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation. *J. Phys. A*, 1989, Vol. 22, pp. 2915–2924.

[227] Lloyd S.P. The infinitesimal group of the Navier–Stokes equations. *Acta Mech.*, 1981, Vol. 38, pp. 85–98.

[228] Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay. *Appl. Math. Comput.*, 2020, Vol. 378, 125193.

[229] Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein — Gordon equation with a delay. *Math. Methods Appl. Sciences*, 2016, Vol. 39, No. 12, pp. 3255–3270.

[230] Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. Nonclassical symmetry reductions of the three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *J. Phys. A: Math. & General.*, 1998, Vol. 31, pp. 7965–7980.

[231] Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. Nonclassical symmetry reductions of the two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *Studies in Applied Mathematics*, 1999, Vol. 103, pp. 183–240.

[232] Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 2000, Vol. 53, pp. 175–206.

[233] Ma P.K.H., Hui W.H. Similarity solutions of the two-dimensional unsteady boundary-layer equations. *J. Fluid Mech.*, 1990, Vol. 216, pp. 537–559.

[234] Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. In: *Waves and Stability in Continuous Media* (ed. by Rionero S., Ruggeri T), pp. 246–251. Singapore: World Scientific, 1994.

[235] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation. *Appl. Math. Letters*, 1996, Vol. 9, No. 6, pp. 23–28.

[236] Mainardia F., Pagnini G. The Wright functions as solutions of the time-fractional diffusion equation. *Appl. Math. & Comput.*, 2003, Vol. 141, pp. 51–62.

[237] Malfliet W., Hereman W. The tanh method: exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. *Physica Scripta*, 1996, Vol. 54, pp. 563–568.

[238] Martin M.N. The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. *Canad. J. Math.*, 1953, Vol. 3, pp. 165–187.

[239] Meleshko S.V. Differential constraints and one-parameter Lie–Bäcklund groups. *Sov. Math. Dokl.*, 1983, Vol. 28, pp. 37–41.

[240] Meleshko S.V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. *Nonlinear Dynamics*, 2004, Vol. 36, No. 1, pp. 47–68.

[241] Meleshko S.V. *Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2005.

[242] Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 338, pp. 448–466.

[243] Meleshko S.V., Pukhnachev V.V. On one class of the partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1999, No. 2, pp. 24–33.

[244] Merchant G.I., Davis S.H. Modulated stagnation-point flow and steady streaming. *J. Fluid Mech.*, 1989, Vol. 198, pp. 543–555.

[245] Metzler R., Glöckle W.G., Nonnenmacher T.F. Fractional model equation for anomalous diffusion. *Physica A: Stat. Mechanics & Appl.*, 1994, Vol. 211, No. 1, pp. 13–24.

[246] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: afractional dynamics approach. *Physics Reports*, Vol. 339, No. 1, pp. 1–77.

[247] Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: Wiley, 1993.

[248] Miller W. (Jr.). Mechanism for variable separation in partial differential equations and their relationship to group theory. In: *Symmetries and Nonlinear Phenomena* (eds. D. Levi, P. Winternitz). London: World Scientific, 1989.

[249] Miller W. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *J. Phys. A.*, 1993, Vol. 26, pp. 1901–1913.

[250] Molati M., Murakawa H. Exact solutions of nonlinear diffusion-convection-reaction equation: A Lie symmetry analysis approach. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, Vol. 67, pp. 253–263.

[251] Molz F.J. Models of water transport in the soil-plant system: A review. *Water Resources Research*, 1981, Vol. 17, No. 5, pp. 1245–1260.

[252] Moore R.L. Exact non-linear forced periodic solutions of the Navier–Stokes equations. *Physica D*, 1991, Vol. 52, pp. 179–190.

[253] Murphy G.M. *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. New York: D. Van Nostrand, 1960.

[254] Naeem I., Khan M.D. Symmetry classification of time-fractional diffusion equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, Vol. 42, pp. 560–570.

[255] Nigmatullin R.R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. *Physica Status Solidi*, 1986, Vol. 133, pp. 425 425–430.

[256] Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.B., Zakharov V.E. *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method*. New York: Plenum Press, 1984.

[257] Nucci M.C., Clarkson P.A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation. *Phys. Lett. A*, 1992, Vol. 164, pp. 49–56.

[258] Olver P.J. Direct reduction and differential constraints. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1994, Vol. 444, pp. 509–523.

[259] Olver P.J. *Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed.* New York: Springer, 2000.

[260] Olver P.J., Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations. *Phys. Lett. A*, 1986, Vol. 114, No. 3, pp. 107–112.

[261] Olver P.J., Vorob'ev E.M. Nonclassical and conditional symmetries. In *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3* (ed. Ibragimov N.H.), pp. 291–328. Boca Raton: CRC Press, 1996.

[262] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations. *Phys. Lett. A*, 1986, Vol. 118, pp. 172–176.

[263] Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. *Computer Physics Communications*, 1996, Vol. 98, pp. 288–300.

[264] Parkes E.J. Observations on the tanh-coth expansion method for finding solutions to nonlinear evolution equations. *Appl. Math. Comp.*, 2010, Vol. 217, No. 4, pp. 1749–1754.

[265] Pavlov K.B. Boundary-layer theory in non-Newtonian nonlinearly viscous media. *Fluid Dynamics*, 1978, Vol. 13, No. 3, pp. 360–366.

[266] Pereira E., Suazo E., Trespalacios J. Riccati–Ermakov systems and explicit solutions for variable coefficient reaction-diffusion equations, *Appl. Math. Comput.*, 2018, Vol. 329, pp. 278–296.

[267] Philip J.R. Theory of infiltration. *Adv. Hydrosci.*, 1967, Vol. 5, pp. 215–305.

[268] Pike R., Sabatier P. (eds.). *Scattering: Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science, vols. 1 and 2*. San Diego: Academic Press, 2002.

[269] Plyukhin O.H. Conditional symmetries and exact solutions of one reaction-diffusion-convection equation *Nonlinear Oscillations*, 2007, Vol. 10, pp. 381–394.

[270] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999.

[271] Polyanin A.D. Method for solution of some non-linear boundary value problems of a non-stationary diffusion-controlled (thermal) boundary layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1982, Vol. 25, No. 4, pp. 471–485.

[272] Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Lett.*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.

[273] Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, Vol. 111, pp. 95–105.

[274] Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, Vol. 114, pp. 29–40.

[275] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 2019, Vol. 347, pp. 282–292.

[276] Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2019, Vol. 73, pp. 379–390.

[277] Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 2019, Vol. 7, No. 5, 386.

[278] Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 1, 90.

[279] Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. Taylor & Francis, London, 2002.

[280] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.

[281] Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed.*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2016.

[282] Polyanin A.D., Shingareva I.K. Overdetermined systems of ODEs with parameters and their applications: The method of differential constraints. and the generalized separation of variables in PDEs *Math. Advances Pure & Appl. Sci.*, 2018, Vol. 1, No. 1, pp. 1–22.

[283] Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Lett.*, 2015, Vol. 46, pp. 38–43.

[284] Polyanin A.D., Sorokin V.G. New exact solutions of nonlinear wave type PDEs with delay. *Appl. Math. Lett.*, 2020, Vol. 108, 106512.

[285] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. CRC Press, Boca Raton–New York, 2003.

[286] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. CRC Press, Boca Raton, 2004.

[287] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.* CRC Press, Boca Raton, 2012.

[288] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. CRC Press, Boca Raton — London, 2018.

[289] Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Moussiaux A. *Handbook of First Order Partial Differential Equations*. Taylor & Francis, London, 2002.

[290] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions to nonlinear equations of mechanics and mathematical physics. *Doklady Physics*, 1998, Vol. 43, No. 6, pp. 381–385.

[291] Polyanin A.D., Zhurov A.I. On RF-pairs, Bäcklund transformations and linearization of nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2012, Vol. 17, pp. 536–544.

[292] Polyanin A.D., Zhurov A.I. On order reduction of non-linear equations of mechanics and mathematical physics, new integrable equations and exact solutions. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2012, Vol. 47, No. 5, pp. 413–417.

[293] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, Vol 54, pp. 115–126.

[294] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Integration of linear and some model non-linear equations of motion of incompressible fluids. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, Vol. 49, pp. 77–83.

[295] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of non-linear differential-difference equations of a viscous fluid with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, Vol. 57, pp. 116–122.

[296] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, pp. 409–416.

[297] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 3, pp. 417–430.

[298] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to non-linear delay Klein — Gordon equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, Vol. 19, No. 8, pp. 2676–2689.

[299] Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, Vol. 59, pp. 16–22.

[300] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-linear instability and exact solutions to some delay reaction-diffusion systems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, Vol. 62, pp. 33–40.

[301] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Lett.*, 2014, Vol. 37, pp. 43–48.

[302] Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, Vol. 67, pp. 267–277.

[303] Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction–diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, Vol. 71, pp. 104–115.

[304] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2015, Vol. 74, pp. 40–50.

[305] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional and generalized separable solutions to unsteady Navier–Stokes equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, Vol. 79, pp. 88–98.

[306] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2016, Vol. 31, pp. 11–20.

[307] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Non-isothermal flows of liquid metals and melts: qualitative features, asymptotic models, problems, exact and approximate solutions. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, Vol. 82, pp. 104–113.

[308] Polyanin A.D., Zhurov A.I. One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2016, Vol. 85, pp. 70–80.

[309] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction–diffusion type equations. *Appl. Math. Lett.*, 2020, Vol. 100, 106055, doi: 10.1016/j.aml.2019.106055.

[310] Polyanin A.D., Zhurov A.I., Vyazmin A.V. Generalized separation of variables in nonlinear heat and mass transfer equations. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 2000, Vol. 25, Nos. 3–4, pp. 251–267.

[311] Polyanin A.D., Zhurov A.I., Vyazmina E.A. Exact solutions to nonlinear equations and systems of equations of general form in mathematical physics. *AIP Conf. Proc.*, 2008, Vol. 1067, 64, doi: 10.1063/1.3030831

[312] Pommaret J.F. *Systems in Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*. New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1978.

[313] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *J. Physics A: Math. Gen.*, 2004, Vol. 37, No. 30, pp. 7547–7565.

[314] Popovych R.O., Sophocleous C., Vaneeva O.O. Exact solutions of a remarkable fin equation. *Appl. Math. Letters*, 2008, Vol. 21, No. 3, pp. 209–214.

[315] Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 1987, Vol. 12, No. 4, pp. 71–87.

[316] Pucci E. Similarity reductions of partial differential equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, Vol. 25, pp. 2631–2640.

[317] Pucci E., Saccomandi G. On the weak symmetry groups of partial differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, Vol. 163, pp. 588–598.

[318] Pucci E., Saccomandi, G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*, 2000, Vol. 139, pp. 28–47.

[319] Pucci E., Salvatori M.C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1986, Vol. 21, pp. 147–155.

[320] Pukhnachov V.V. Group properties of the Navier–Stokes equations in the plane case. *J. Appl. Math. Tech. Phys.*, 1960, No. 1, pp. 83–90.

[321] Qu C.Z. Group classification and generalized conditional symmetry reduction of the nonlinear diffusion-convection equation with a nonlinear source. *Stud. Appl. Math.*, 1997, Vol. 99, 107–136.

[322] Qu C.Z., Zhang S.L., Liu R.C. Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with the nonlinear source. *Physica D*, 2000, Vol. 144, pp. 97–123.

[323] Quarteroni A., Valli A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Berlin: Springer, 2008.

[324] Racke R., Saal J. Hyperbolic Navier–Stokes equations I: Localwell-posedness, *Evol. Equations & Control Theory*, 2012, Vol. 1, No. 1, pp. 195–215.

[325] Riley N., Vasantha R. An unsteady stagnation-point flow. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1988, Vol. 42, pp. 511–521.

[326] Rott N. Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. *Quart. Appl. Math.*, 1956, Vol. 13, No. 4, pp. 444–451.

[327] Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics*. Providence: American Math. Society, 1983.

[328] Rui W. Idea of invariant subspace combined with elementary integral method for investigating exact solutions of time-fractional NPDEs. *Applied Math. & Comput.*, 2018, Vol. 339, pp. 158–171.

[329] Saccomandi G. A remarkable class of non-classical symmetries of the steady two-dimensional boundary-layer equations. *J. Phys. A: Math. & General*, 2004, Vol. 37, pp. 7005–7017.

[330] Sahadevan R., Prakash P. Exact solution of certain time fractional nonlinear partial differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 2016, Vol. 85, pp. 659–673.

[331] Sahadevan R., Bakkyaraj T. Invariant subspace method and exact solutions of certain nonlinear time fractional partial differential equations. *Fractional Calculus & Appl. Analysis*, 2015, Vol. 18, No. 1, pp. 146–162.

[332] Sahadevan R., Prakash P. On Lie symmetry analysis and invariant subspace methods of coupled time fractional partial differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2017, Vol. 104, No. 2017, pp. 107–120.

[333] Salas A.H. Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method. *Appl. Math. & Comput.*, 2008, Vol. 205, No. 1, pp. 291–297.

[334] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1993.

[335] Scott A.C. The application of Bäcklund transforms to physical problems. In: *Bäcklund Transformations* (ed. R.M. Miura), pp. 80–105. Berlin: Springer, 1975.

[336] Smyth N.F., Hill J.M. High-order nonlinear diffusion. *IMA J. Appl. Math.*, 1988, Vol. 40, pp. 73–86.

[337] Sophocleous C., Kingston J.G. Cyclic symmetries of one-dimensional non-linear wave equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1999, Vol. 34, pp. 531–543.

[338] Steuerwald R. Über enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation. *Abh. Bayer. Akad. Wiss.* (Muench.), 1936, Vol. 40, pp. 1–105.

[339] Su N. Modified Richards equation and its exact solutions for soil water dynamics on eroding hillslopes. *Water Resources Research*, 2002, Vol. 38, No. 6, 1072.

[340] Svirshchevskii S.R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations. *Phys. Lett. A*, 1995, Vol. 199, pp. 344–348.

[341] Svirshchevskii S.R. Invariant linear subspaces and exact solutions of nonlinear evolutions equations. *Nonlinear Math. Phys.*, 1996, Vol. 3, No. 1–2, pp. 164–169.

[342] Świerczyński Z. On the oscillons in the signum-Gordon model. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2017, Vol. 24, No. 1, pp. 20–28.

[343] Tang X.Y., Liang Z.F., Wang J.Y. Nonlocal symmetries and conservation laws of the sinh-Gordon equation. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2017, Vol. 24, No. 1, pp. 93–106.

[344] Toda M. Studies of a nonlinear lattice. *Phys. Rep.*, 1975, Vol. 8, pp. 1–125.

[345] Tzou D.Y. *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*. Washington: Taylor & Francis, 1997.

[346] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, Vol. 330, No. 2, pp. 1363–1386.

[347] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source. *Acta Appl. Math.*, 2009, Vol. 106, No. 1, pp. 1–46.

[348] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations, I. Enhanced group classification. *Lobachevskii J. Math.*, 2010, Vol. 31, No. 2, pp. 100–122.

[349] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, Vol. 396, pp. 225–242.

[350] Vaneeva O., Zhalij A. Group classification of variable coefficient quasilinear reaction-diffusion equations. *Publ. L'Institute Mathématique* (Nouvelle série), 2013, Vol. 94(108), pp. 81–90.

[351] Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *Comptes Rendus*, 1958, Vol. 246, pp. 3154–3155.

[352] Vorob'ev E.M. Weak and partial symmetries of nonlinear PDE in two independent variables. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1996, Vol. 3, pp. 330–335.

[353] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989, Vol. 42, No. 11, pp. 269–282.

[354] Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, Vol. 23, pp. 159–177.

[355] Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction–diffusion interval neural networks with time-varying delays. *Physics Letters A*, 2006, Vol. 350, pp. 342–348.

[356] Wang M., Ji X., Zhang J. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 2008, Vol. 372, pp. 417–423.

[357] Wang R., Ji L. Conditional Lie–Bäcklund symmetries and functionally generalized separation of variables to quasi-linear diffusion equations with source. *Symmetry*, 2020, Vol. 12, No. 5, 844; doi:10.3390/sym12050844

[358] Wang X.Y. Nerve propagation and wall in liquid crystals. *Physics Letters A*, 1985, Vol. 112, pp. 402–406.

[359] Wazwaz A.-M. Several new exact solutions for a fast diffusion equation by the differential constraints of the linear determining equations. *Appl. Math. & Comput.*, 2003, Vol. 145, Nos 2–3, pp. 525–540.

[360] Wazwaz A.-M. The sine-cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures. *Applied Mathematics & Computation*, 2004, Vol. 159, No. 2, pp. 559–576.

[361] Wazwaz A.-M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. *Mathematical & Computer Modelling*, 2004, Vol. 40, Nos 5–6, pp. 499–508.

[362] Wazwaz A.-M. The tanh method and the sine-cosine method for solving the KP-MEW equation. *Int. J. Computer Mathematics*, 2005, Vol. 82, No. 2, pp. 235–246.

[363] Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, 1974.

[364] Weiss J., Tabor M., Carnevalle G. The Painlevé property for partial differential equations. *J. Math. Phys.*, 1983, Vol. 24, No. 3, pp. 522–526.

[365] Witelski T.P. Intermediate asymptotics for Richards' equation in a finite layer. *J. Eng. Math.*, 2003, Vol. 45, pp. 3790–399.

[366] Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York: Springer, 1996.

[367] Xu X. New algebraic approaches to classical boundary layer problems. *Acta Math. Sinica* (English Series), 2011, Vol. 27, pp. 1023–1070.

[368] Xu X. *Algebraic Approaches to Partial Differential Equations*. Berlin — New York: Springer, 2013.

[369] Zayeda E.M.E., Gepreel K.A. The (G'/G)-expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics. *J. Math. Physics*, 2009, Vol. 50, 013502.

[370] Zhang D., Feng S., Lu Z., Liu Y. Application of differential constraint method to exact solution of second-grade fluid. *Appl. Math. Mech. (Engl. Ed.)*, 2009, Vol. 30, No. 4, pp. 403–412.

[371] Zhang S., Tonga J.-L., Wanga W. Exp-function method for a nonlinear ordinary differential equation and new exact solutions of the dispersive long wave equations. *Computers & Math. Applications*, 2009, Vol. 58, Nos 11–12, pp. 2294–2299.

[372] Zhang S.L., Lou S.Y., Qu C.Z. New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, Vol. 36, pp. 12223–12242.

[373] Zhang S.L., Lou S.Y. Variable separation and derivative-dependent functional separable solutions to generalized nonlinear wave equations. *Commun. Theor. Phys.*, 2004, Vol. 41, pp. 161–174.

[374] Zhang S.L., Lou S.Y., Qu C.Z., Yue R.H. Classification and functional separable solutions to extended nonlinear wave equations. *Commun. Theor. Phys.*, 2005, Vol. 44, pp. 589–596.

[375] Zhang W. The extended tanh method and the exp-function method to solve a kind of nonlinear heat equation. *Math. Probl. Eng.*, 2010 (**2010**), Article ID 935873.

[376] Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *J. Phys. A*, 1994, Vol. 27, pp. L291–L297.

[377] Zhurov A.I., Polyanin A.D. Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2020, Vol. 27, pp. 1–16.

[378] Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1998.

Научное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич
ЖУРОВ Алексей Иванович

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Оригинал-макет: А.И. Журов, А.Д. Полянин

Формат 70x100/16.
Гарнитура «Times New Roman». Печать цифровая.
Учетн. печ. л. 28,36. Тираж 300 экз.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)
119526 Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1
http://www.ipmnet.ru/

Отпечатано в типографии «Элис Групп»
105094, г. Москва, Семеновская Набережная, д. 3/1, корп. 6
http://www.alice-group.ru/

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Д. ПОЛЯНИН, А.И. ЖУРОВ

ИПМех РАН

Книга посвящена описанию и применению методов обобщенного и функционального разделения переменных, используемых для поиска точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Достаточно подробно рассматривается также прямой метод построения редукций (во многом родственный методам функционального разделения переменных) и его более общая версия, основанная на принципе расщепления. Кроме того, дано описание метода дифференциальных связей, который обобщает многие другие точные методы.

Изложение сопровождается многочисленными примерами использования методов для поиска точных решений конкретных нелинейных уравнений математической физики. Исследуются уравнения тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамики, нелинейной оптики, теории горения, химической технологии, биологии и др. Особое внимание уделено нелинейным уравнения достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Такие уравнения наиболее сложны для анализа, а их точные решения представляют больший практический интерес и могут применяться для оценки точности численных методов решения соответствующих начально-краевых задач. Книга содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался.

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной и вычислительной математики, теоретической физики, механики, теории управления и химической технологии. Отдельные разделы книги и примеры могут быть использованы в курсах лекций по уравнениям математической физики, методам математической физики и уравнениям с частными производными, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

ISBN 978-5-91741-258-0

9 785917 412580