$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)$$

А. Д. ПОЛЯНИН

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = u_{yyy}$$

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Д. ПОЛЯНИН

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Москва
ИПМех РАН
2023

УДК 517.9
ББК 517.2
П 54

Полянин А. Д. **Лекции по нелинейным уравнениям математической физики**. — М.: Издательство «ИПМех РАН», 2023. — 256 с. — ISBN 978-5-91741-283-2.

Излагаются эффективные аналитические методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и механики. Описаны методы обобщенного и функционального разделения переменных, прямой метод построения редукций (метод Кларксона — Крускала), метод поиска слабых симметрий, метод дифференциальных связей и некоторые другие методы. Показано, что точные решения одних уравнений нередко могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений. Исследуются уравнения массо- и теплопереноса, гидродинамики, теории волн, нелинейной акустики, теории горения, нелинейной оптики и др. Во всех разделах рассматриваются примеры использования методов для построения точных решений конкретных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Приведены многочисленные задачи и упражнения, позволяющие получить практические навыки применения рассматриваемых методов.

Изложение материала ведется в соответствии с принципом «от простого к сложному». Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом.

Книга предназначена для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, механики и физики. Ее теоретический материал и упражнения могут быть использованы в курсах лекций по прикладной математике и математической физике, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Табл. 16. Ил. 8. Библиогр. 116 назв.

Р е ц е н з е н т ы: доктор физико-математических наук А. В. Аксенов
доктор физико-математических наук С. А. Лычев

ISBN 978-5-91741-283-2

Оглавление

Предисловие

Данная книга представляет собой расширенный курс лекций по нелинейным уравнениям математической физики, который автор читал студентам-старшекурсникам кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана в 2004–2020 гг. При этом основное внимание было уделено описанию и применению эффективных аналитических методов, позволяющих получать точные решения нелинейных уравнений математической физики.

Со временем выяснилось, что в курс целесообразно включить вспомогательные разделы (инвариантные решения обыкновенных дифференциальных уравнений, методы решения квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка, методы решения функциональных уравнений и др.), которые полезны для лучшего понимания последующего материала или используются для построения точных решений уравнений с частными производными. Изложение некоторых разделов удалось значительно упростить.

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиться поиском и анализом частных решений, которые принято называть точными решениями.

Точные решения уравнений математической физики способствуют пониманию качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн и др.).

Следует отметить, что точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Точные решения уравнений математической физики играют важную роль стандартных «математических эталонов», которые широко используются для оценки точности и разработки различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов.

В книге описаны методы обобщенного и функционального разделения переменных, прямой метод построения редукций (метод Кларксона — Крускала), метод поиска слабых симметрий, метод дифференциальных связей и некоторые другие методы, позволяющие находить точные решения нелинейных уравнений математической физики*. Излагается элементарная теория инвариантов, дающая возможность с минимальными

* Выбор методов в значительной мере обусловлен профессиональными интересами и научной деятельностью автора.

усилиями получать наиболее распространенные решения, которые обычно ищутся методами группового анализа дифференциальных уравнений*. Обсуждается ряд простых, но достаточно эффективных методов построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и функционально-дифференциальных уравнений с частными производными, которые приводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: (i) точные решения рассматриваемых уравнений могут использоваться для поиска более сложных решений этих же уравнений; (ii) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений или других классов уравнений, имеющих аналогичные нелинейные члены.

Изложение методов сопровождается многочисленными конкретными примерами и упражнениями, необходимыми для лучшего усвоения материала и получения практических навыков решения нелинейных дифференциальных уравнений.

При отборе практического материала (примеров и упражнений) автор отдавал наибольшее предпочтение следующим двум важным типам уравнений:

- уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, нелинейной оптике, биологии и др.);
- уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от нескольких свободных параметров или содержат произвольные функции (точные решения таких уравнений представляют особый интерес для тестирования численных методов).

Изложение материала ведется в соответствии с принципом «от простого к сложному». Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой автор по возможности старался избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны кратко и упрощенно (без доказательств), чего вполне достаточно для их успешного применения в большинстве приложений. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Подробное оглавление позволяет быстро находить необходимую информацию.

Отметим, что в книгу включена важная специальная вводная глава, в которой описано место и роль точных методов (позволяющих получать точные решения) среди других методов. Там же рассмотрены качественные особенности, отличительные признаки, достоинства и недостатки различных методов прикладной математики.

Автор надеется, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, механики, физики, теории управления и химической технологии. Отдельные разделы книги и упражнения могут быть использованы для чтения лекций и проведения практических занятий по прикладной математике и математической физике для студентов физико-математических специальностей университетов и технических вузов.

А. Д. Полянин
апрель 2023 г.

* Методы группового анализа дифференциальных уравнений содержат большой объем технически сложного материала и должны быть предметом отдельного лекционного спецкурса.

Некоторые обозначения и замечания

Латинские буквы

$C_1, C_2, \ldots$ — произвольные постоянные;
t — время ($t \geqslant 0$), независимая переменная;
u — искомая функция (зависимая переменная) для уравнений математической физики;
x — пространственная переменная, независимая переменная;
y — искомая функция (зависимая переменная) для обыкновенных дифференциальных уравнений;
$x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные, декартовы координаты в n-мерном пространстве.

Краткие обозначения производных

Частные производные функции $u = u(x, t)$:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad u_x^{(n)} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Обыкновенные производные функции $f = f(x)$:

$$f'_x = \frac{df}{dx}, \quad f''_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''_{xxx} = \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad f''''_{xxxx} = \frac{d^4 f}{dx^4}, \quad f_x^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при} \quad n > 4.$$

Замечания

1. В книге часто используются сокращения ОДУ и УрЧП, которые соответственно обозначают «обыкновенное дифференциальное уравнение» (или «обыкновенные дифференциальные уравнения») и «уравнение с частными производными» (или «уравнения с частными производными»).

2. Если формула или решение содержит производные некоторых функций, то предполагается, что эти производные существуют.

3. Если формула или решение содержит неопределенные или определенные интегралы, то предполагается, что эти интегралы существуют.

4. В формулах и решениях, содержащих выражения типа $\dfrac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.

5. В книге не рассматриваются простые решения, которые зависят только от одной независимой переменной, входящей в исходное УрЧП.

6. В книге часто используется очень простая и наглядная классификация наиболее распространенных решений по их внешнему виду, которая не связана с типом и видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

ТАБЛИЦА

Наиболее распространенные типы точных решений для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией u

№	Название решения	Структура решения (x и t можно поменять местами)
1	Решение с аддитивным разделением переменных	$u=\varphi(x)+\psi(t)$
2	Решение с мультипликативным разделением переменных	$u=\varphi(x)\psi(t)$
3	Решение типа бегущей волны*	$u=U(z),\quad z=\alpha x+\beta t,\quad \alpha\beta\neq 0$
4	Автомодельное решение	$u=t^\alpha F(z),\quad z=xt^\beta$
5	Решение с обобщенным разделением переменных (специальный случай)	$u=\varphi(t)\theta(x)+\psi(t)$
6	Решение с обобщенным разделением переменных	$u=\varphi_1(x)\psi_1(t)+\dots+\varphi_n(x)\psi_n(t)$
7	Решение типа обобщенной бегущей волны	$u=U(z),\quad z=\varphi(t)x+\psi(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных (специальный случай)	$u=U(z),\quad z=\varphi(x)+\psi(t)$
9	Решение с функциональным разделением переменных	$u=U(z)$, $z=\varphi_1(x)\psi_1(t)+\dots+\varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе независимые переменные могут играть роль пространственных координат.

1. Введение. Методы прикладной математики

Предварительные замечания. Дифференциальные уравнения в частных производных второго и более высоких порядков часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и многочисленных приложениях.

Далее пойдет речь о методах решения задач, которые допускают математическую формулировку в виде дифференциальных уравнений и некоторых дополнительных условий (начальных и граничных). Основные теоретические методы условно можно разделить на следующие четыре класса*:

- *точные методы*,
- *асимптотические методы (методы возмущений)*,
- *численные методы*,
- *приближенные аналитические методы*.

Данная классификация весьма удобна, она основана на использовании ряда характерных черт и отличительных признаков каждого класса. Важно отметить, что большинство специалистов обычно хорошо владеют только методами одного класса (это обстоятельство нередко приводит к недооценке возможностей других методов и ошибочным высказываниям на тему «какие методы важнее»). Ниже приведено краткое описание методов каждого класса, указаны их основные достоинства и недостатки.

Замечание 1.1. *При решении конкретных задач нередко приходится использовать сочетание нескольких методов различных классов (см. далее разд. 1.5).*

Замечание 1.2. *Некоторые методы в зависимости от их конкретной реализации при решении различных задач можно отнести как численным, так и к приближенным аналитическим методам (например, различные модификации метода Галеркина).*

1.1. Точные методы

1.1.1. Краткая информация

▷ **Отличительные признаки.**

1. Позволяют получать точные решения.
2. В процессе решения не допускаются какие-либо упрощения.

---

*Здесь не рассматриваются *качественные методы*, которые сравнительно редко используются в приложениях.

▷ **Основные достоинства точных решений.**

1. Формируют физические представления о рассматриваемых явлениях и процессах.

2. Наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме сложных нелинейных эффектов.

3. Широко используются в учебных курсах университетов для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений.

4. Широко используются в качестве тестовых задач для всех других методов.

5. Позволяют планировать эксперименты для определения эмпирических параметров.

▷ **Основные недостатки точных методов.**

1. Имеют ограниченную область применимости (часто не позволяют получить искомый результат).

2. Иногда приводят к решениям сложного вида, которые неудобно использовать на практике.

▷ **Возможности проверки публикуемых результатов читателями.**

Точные решения обычно нетрудно проверить путем подстановки их в рассматриваемые уравнения (при этом нет необходимости знать метод получения решений).

1.1.2. Более подробная информация

Под точными методами здесь понимаются математические методы, при использовании которых *в процессе решения не допускаются какие-либо упрощения рассматриваемых задач*. Эти методы позволяют получать точные решения в виде математических формул, интегралов или рядов (более строгое определение точного решения дается в разд. 6). Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением или корневой особенностью, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др.

Некоторые нестандартные ситуации проиллюстрированы ниже на модельных задачах, которые описываются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (при применении численных методов в таких ситуациях необходимо понимать качественные особенности решений подобных задач).

► Пример 1.1. (*Пространственная локализация решений.*) Рассмотрим двухточечную краевую задачу со степенной нелинейностью:

$$y''_{xx} = y^k; \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0, \tag{1.1.2.1}$$

где $0 < k < 1$.

Точное решение задачи (1.1.2.1) записывается так:

$$y = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{h}\right)^{\frac{2}{1-k}}, & 0 \leqslant x < h; \\ 0, & x \geqslant h, \end{cases} \tag{1.1.2.2}$$

где $h = \sqrt{2(1+k)/(1-k)^2}$. Видно, что изменение решения происходит на ограниченном участке $0 \leqslant x \leqslant h$ (т. е. решение локализовано).

В задаче (1.1.2.1) граничное условие на бесконечности можно заменить условием в конечной точке $y(x_1) = 0$. В этом случае при $x_1 > h$ решение в области локализации $0 \leqslant x < h$ также определяется формулой (1.1.2.2), а при $h \leqslant x \leqslant x_1$ решение равно нулю. ◄

► Пример 1.2. (*Неединственность или несуществование решений.*) Рассмотрим двухточечную краевую задачу с экспоненциальной нелинейностью (модельная задача теории горения):

$$y''_{xx} + \lambda e^y = 0; \tag{1.1.2.3}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{1.1.2.4}$$

Общее решение уравнения (1.1.2.3) имеет вид

$$y = \ln\left[\frac{2c^2}{\lambda \operatorname{ch}^2(cx + b)}\right], \tag{1.1.2.5}$$

где b и c — произвольные постоянные. Подставив (1.1.2.5) в граничные условия (1.1.2.4), после несложных преобразований получим трансцендентную систему уравнений для определения коэффициентов b и c:

$$\lambda = \frac{8b^2}{\operatorname{ch}^2 b}, \qquad c = -2b.$$

Функция $\lambda(b) = 8b^2/\operatorname{ch}^2 b$ положительна при $b \neq 0$, стремится к нулю при $b \to 0$ и $b \to \infty$ и имеет максимум равный $\lambda_* = \max \lambda(b) = 3.5138$. Рассматриваемая задача при $0 < \lambda < \lambda_*$ имеет два решения, при $\lambda = \lambda_*$ — одно решение, при $\lambda > \lambda_*$ — не имеет решения. ◄

► Пример 1.3. (*Бесконечное множество решений.*) Задача Коши

$$y'_t = y^{1/3}; \qquad y(0) = 0$$

имеет бесконечное множество решений (однопараметрическое семейство):

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ 0 \leqslant t \leqslant a, \\ \left[\frac{2}{3}(t-a)\right]^{3/2} & \text{при } \ t \geqslant a, \end{cases}$$

где $a>0$ — произвольная постоянная. Функция $y(t)$ непрерывно дифференцируема везде, включая точку $t=a$, и удовлетворяет рассматриваемому уравнению с нулевым начальным условием.

В этой задаче не выполнены условия теоремы единственности решения. Для выделения единственного решения здесь надо выставить дополнительное условие (например, задать ненулевое значение искомой функции $y=y_1$ в некоторой точке $t=t_1$). ◄

► Пример 1.4. (*Решение с обострением.*) Задача Коши

$$y'_t = ay^2; \qquad y(0)=1$$

имеет точное решение

$$y=\frac{1}{1-at}.$$

При $a>0$ это решение существует лишь на ограниченном интервале времени $0\leqslant t<1/a$ и стремится к бесконечности при $t\to 1/a$. Положение сингулярной точки $t=t_*=1/a$, в которой функция y обращается в бесконечность, заранее неизвестно и определяется в процессе построения решения. ◄

► Пример 1.5. (*Решение с корневой особенностью.*) Задача Коши

$$y'_t = -\frac{1}{2y}; \qquad y(0)=a>0$$

имеет точное решение

$$y=\sqrt{a^2-t}.$$

Это решение существует на ограниченном интервале времени $0\leqslant t\leqslant a^2$. Положение сингулярной точки $t=t_*=a^2$, в которой производная функции y обращается в бесконечность, заранее неизвестно и определяется в процессе построения решения. ◄

Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.). Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве тестовых задач для проверки корректности и оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения.

Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования программ компьютерной алгебры, предназначенных для аналитических вычислений (системы Maple, Mathematica, MATLAB, CONVODE и др.)

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии, биологии и экологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий. Точные методы чаще всего применяют:

● для решения различных классов линейных задач, описываемых уравнениями с частными производными в областях с простой геометрией (наибольшую пользу они приносят при исследовании линейных уравнений с постоянными коэффициентами);

● для решения задач, описываемых линейными и нелинейными уравнениями с частными производными первого порядка.

Наиболее распространенными методами, используемыми для решения линейных задач математической физики, являются *метод разделения переменных*, *методы интегральных преобразований* (Лапласа, Фурье, Меллина и др.), *метод, основанный на функциях Грина*, и *метод характеристик*. Для решения задач, описываемых линейными и нелинейными уравнениями с частными производными первого порядка, обычно используются *метод характеристик* и *метод разделения переменных*.

Простейшим методом решения нелинейных задач математической физики и механики является *метод подобия*, позволяющий ввести *автомодельные переменные*, которые дают возможность перейти от сложных уравнений с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям. О других методах решения нелинейных уравнений математической физики будет подробно рассказано далее в разд. 1.6 и главах 5–11.

Для подавляющего большинства сложных задач, описываемых уравнениями с частными производными, не удается найти точное аналитическое решение (сказанное справедливо и для существенно более простых алгебраических и трансцендентных уравнений, а также для обыкновенных дифференциальных уравнений). Основные причины, затрудняющие получение точных решений, обусловлены, как правило, нелинейностью уравнений или граничных условий, зависимостью коэффициентов уравнений от координат, сложной формой границ и др. Поэтому для получения необходимой информации об исследуемом явлении или процессе приходится прибегать к разного рода упрощениям в математической формулировке соответствующей задачи, к различным приближениям и аппроксимациям, численным методам или к тем и другим одновременно.

1.2. Асимптотические методы (методы возмущений)

1.2.1. Краткая информация

▷ **Отличительные признаки**

1. Один параметр задачи считается малым или большим*.

2. Решение ищется в виде одного или нескольких асимптотических разложений по этому параметру.

▷ **Основные достоинства асимптотических методов**

1. Позволяют регулярным образом находить члены разложения и получать приближенные формулы.

2. Позволяют установить качественные особенности явлений/процессов и приближенные законы подобия.

3. Позволяют исследовать задачи, в которых существуют узкие пространственно-временные области с быстрым изменением решения.

4. Результаты используются в качестве тестовых задач для оценки точности численных и приближенных аналитических методов.

5. Являются основой для разработки численных методов в задачах с малым параметром.

6. Являются основой для разработки комбинированных методов.

▷ **Основные недостатки асимптотических методов**

1. Не позволяют получить результат для промежуточных (конечных) значений характерного параметра.

2. Нередко отсутствует строгое математическое обоснование.

▷ **Возможности проверки публикуемых результатов читателями**

Асимптотические решения нередко можно проверить прямой подстановкой в рассматриваемые уравнения и граничные/начальные условия путем анализа порядков членов полученных разложений.

1.2.2. Более подробная информация

Рассматриваемые задачи часто настолько сложны, что возникает необходимость построения упрощенных (модельных) уравнений, которые дают возможность лучше понять физический смысл рассматриваемого явления или процесса и дать его наглядную интерпретацию. Характерным и очень важным примером построения приближенных уравнений такого рода являются *уравнения пограничного слоя*. Упрощение исходных полных уравнений позволило получить более простые уравнения пограничного слоя (например, в гидро- и аэродинамике и теории конвективного тепло- и массопереноса) и сформулировать соответствующие законы подобия. Авторы ранних работ при выводе приближенных уравнений обычно руководствовались интуицией и правдоподобными рассуждениями, но постепенно выяснилось, что надежнее и лучше

*Сложные задачи могут содержать несколько малых или/и больших параметров.

пользоваться асимптотическими методами (методами возмущений), совершая предельный переход по одному или нескольким малым (или большим) параметрам и используя регулярные процедуры.

В простейшем случае, когда неизвестная величина u зависит от одной независимой переменной x и малого параметра ε, асимптотические разложения ищутся в виде

$$u = \sum_{j=1}^{n} \delta_j(\varepsilon) a_j(z) + o(\delta_n(\varepsilon)), \qquad z = \varepsilon^k x,$$

где $\delta_k(\varepsilon)$ — асимптотическая последовательность, т. е. $\delta_{j+1}(\varepsilon)/\delta_j(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $a_{j+1}(z)/a_j(z) = O(1)$, z — растянутая переменная. Асимптотические методы позволяют формализованным образом получать первое и последующие члены разложения. Эти методы помимо наиболее простого и хорошо известного *метода регулярных разложений* включают также *метод усреднения*, *метод сращиваемых асимптотических разложений*, *методы двух- и многомаситабных разложений* и другие методы.

Асимптотические решения представляются в виде одного или нескольких рядов, каждый член которых удовлетворяет более простому, чем исходное, дифференциальному уравнению. Возникающие при решении неизвестные постоянные и структура асимптотического разложения (т. е. зависимость членов асимптотической последовательности δ_j от малого или большого параметра) определяются последовательно в процессе анализа, например, с помощью процедуры сращивания. Чтобы выявить качественные черты изучаемой задачи и дать хорошее численное приближение к искомому решению, как правило, достаточно знать лишь несколько первых членов разложения.

► Пример 1.6. Для иллюстрации качественных особенностей задач с пограничным слоем рассмотрим тестовую краевую задачу для линейного ОДУ*:

$$\varepsilon y''_{xx} + y'_x + y = 0 \qquad (0 < x < 1); \tag{1.2.2.1}$$

$$y(0) = a, \qquad y(1) = b, \tag{1.2.2.2}$$

где a, b, ε — свободные определяющие параметры. При $\varepsilon = 0$ ОДУ второго порядка (1.2.2.1) вырождается в ОДУ первого порядка, решение которого не может удовлетворить одновременно двум граничным условиям (1.2.2.2). В задаче (1.2.2.1)–(1.2.2.2) при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) пограничный слой (область, которая характеризуется большими градиентами решения) образуется вблизи точки $x = 0$.

В зависимости от значений свободных параметров задача (1.2.2.1)–(1.2.2.2) может иметь как монотонные, так и немонотонные решения. Точное решение

*Здесь и далее ОДУ обозначает *обыкновенное дифференциальное уравнение* (или *обыкновенные дифференциальные уравнения*).

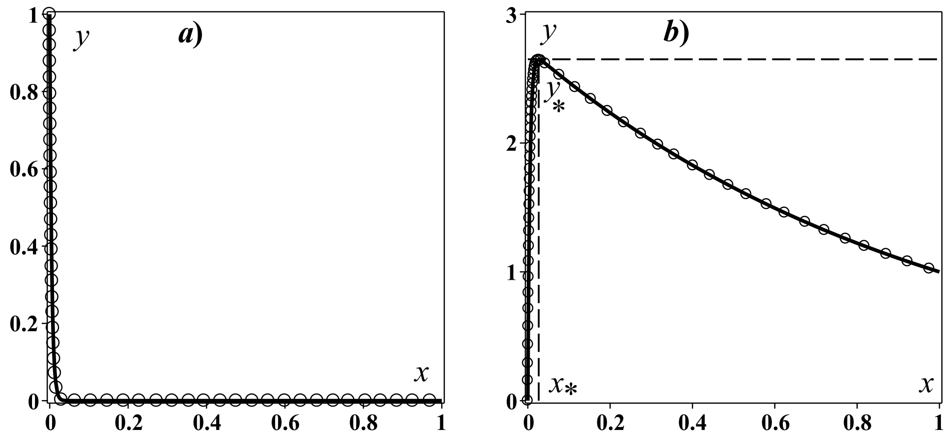

Рис. 1.1. Точные решения (1.2.2.3) задачи (1.2.2.1)–(1.2.2.2) (сплошные линии) и асимптотические решения (1.2.2.4) этой задачи (точки) для двух наборов численных значений определяющих параметров: *a*) $a=1$, $b=0$, $\varepsilon=0.005$; *b*) $a=0$, $b=1$, $\varepsilon=0.005$.

этой задачи определяется формулами

$$\begin{gathered} y=\frac{ae^{\lambda_2}-b}{e^{\lambda_2}-e^{\lambda_1}}e^{\lambda_1 x}+\frac{b-ae^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2}-e^{\lambda_1}}e^{\lambda_2 x}, \\ \lambda_1=\tfrac{1}{2}\varepsilon^{-1}\bigl(-1-\sqrt{1-4\varepsilon}\,\bigr), \quad \lambda_2=\tfrac{1}{2}\varepsilon^{-1}\bigl(-1+\sqrt{1-4\varepsilon}\,\bigr). \end{gathered} \tag{1.2.2.3}$$

Для малых ε справедливы приближенные соотношения

$$\lambda_1\simeq-\varepsilon^{-1}, \quad \lambda_2\simeq-1, \quad y'_x(0)\simeq\varepsilon^{-1}(be-a),$$

а соответствующее асимптотическое решение задачи (1.2.2.1)–(1.2.2.2) при $\varepsilon\to0$ имеет вид

$$y_a\simeq(a-eb)e^{-x/\varepsilon}+be^{1-x}. \tag{1.2.2.4}$$

Для конкретности, далее будем полагать, что $a\geqslant0$, $b\geqslant0$. Если $a>eb$, то функция (1.2.2.4) монотонно убывает. Если $a<eb$, то функция (1.2.2.4) монотонно (и очень быстро) возрастает в узкой области $0\leqslant x<x_*$, где

$$x_*\simeq\varepsilon\ln\Bigl[\frac{1}{\varepsilon}\Bigl(1-\frac{a}{eb}\Bigr)\Bigr], \qquad y_*\simeq eb, \tag{1.2.2.5}$$

а в оставшейся области $x_*\leqslant x\leqslant1$ решение монотонно (и достаточно медленно) убывает.

Точные решения (1.2.2.3) задачи (1.2.2.1)–(1.2.2.2) показаны сплошными линиями на рис. 1.1 для двух наборов численных значений определяющих параметров: *a*) $a=1$, $b=0$, $\varepsilon=0.005$ и *b*) $a=0$, $b=1$, $\varepsilon=0.005$. Для второго набора значений решение в области $0\leqslant x\leqslant x_*\approx0.0267$ быстро возрастает (от нуля до максимального значения $y_*\approx2.6462$), а в области $x_*\leqslant x\leqslant1$ медленно убывает; в этом случае максимум разности между асимптотическим решением (1.2.2.4) и точным решением (1.2.2.3) на всем интервале $0\leqslant x\leqslant1$ равен 0.0720 (а относительная погрешность равна 0.0272).

Для решения подобных сингулярных задач с малым параметром применяются специальные численные методы, поскольку стандартные численные методы с постоянным шагом требуют неоправданно большого числа точек сетки и могут приводить к значительным погрешностям. В таких случаях достаточно часто используются методы с кусочно-равномерной сеткой, которые характеризуется мелким шагом в пограничном слое и достаточно крупным шагом вне его. ◄

Важно подчеркнуть, что наличие малого или большого параметра во многих случаях обусловлено физической реальностью. Например, практически во всех задачах о конвективной диффузии в жидкостях имеется большой безразмерный параметр $\mathrm{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта, где ν — кинематическая вязкость жидкости, D — коэффициент диффузии (для воды — $\mathrm{Sc} = 0.5 \times 10^3$, для вязких жидкостей типа глицерина — $\mathrm{Sc} \sim 10^6$, для моторных масел — $\mathrm{Sc} \sim 10^8$); указанное обстоятельство приводит к появлению диффузионного пограничного слоя и диффузионного следа за реагирующей частицей. В сингулярно-возмущенных задачах такого рода существуют узкие пространственно-временные области, в которых решение быстро меняется. Структура, протяженность и число этих областей, как правило, заранее неизвестны. Это сильно затрудняет непосредственное использование конечно-разностных численных методов, которые обычно основаны на априорном представлении о качественном поведении решения.

Строгое математическое обоснование асимптотических методов для решения сложных нелинейных задач в настоящее время нередко отсутствует. Однако непротиворечивость полученных результатов и огромный опыт успешного практического применения этих методов дают основание считать их весьма мощным инструментом прикладной математики и механики.

Получающиеся при использовании методов возмущений асимптотические ряды часто расходятся или очень медленно сходятся. Кроме того, как правило, удается вычислить лишь несколько (обычно не более двух или трех) первых членов возмущенного разложения. Указанные обстоятельства не позволяют оценить поведение решения при промежуточных (конечных) значениях параметра или переменной и накладывают существенные ограничения на использовании асимптотических формул для расчетов в инженерной практике. Это — наиболее существенный недостаток методов возмущений.

Для улучшения асимптотических рядов применяли различные преобразования и приемы (преобразования Эйлера и Шенкса, Паде аппроксимации, приближения рациональными дробями и др.), которые несмотря на их полезность не обладают общностью. Обычно их приходится использовать интуитивно, без понимания соответствующего механизма.

Несмотря на указанные недостатки, в настоящее время — время интенсивного развития вычислительной математики и компьютерной техники — методы возмущений отнюдь не утрачивают своего значения. Они служат для выяснения принципиально важных закономерностей и качественных особенностей сложных линейных и нелинейных задач, для построения тестовых решений, а в ряде случаев являются также основой для разработки вычислительных методов. Следует отметить, что в тех задачах, где асимптотические методы весьма эффективны, стандартные численные методы, как правило, становятся малопригодными.

1.3. Численные методы

1.3.1. Краткая информация

▷ **Отличительные признаки**

1. Независимые переменные и искомые величины рассматриваются на дискретном множестве точек.

2. Основаны на различных аппроксимациях и использовании компьютеров.

▷ **Основные достоинства численных методов**

1. Обладают большой универсальностью и имеют широкий диапазон применимости.

2. Анимация результатов дает наглядное представление о рассматриваемых явлениях и процессах.

3. Использование стандартных подпрограмм позволяет сравнительно просто и быстро решать многие задачи.

4. Позволяют исследовать сложные задачи с большим числом неизвестных при промежуточных значениях характерных параметров.

5. Являются незаменимым аппаратом для расчета, проектирования, управления и оптимизации элементов конструкций, аппаратов и технологических процессов.

6. Использование стандартных подпрограмм часто не требуют от исследователя глубокого понимания применяемых методов*.

▷ **Недостатки численных методов**

1. Необходимость тестирования получаемых решений (особенно имеющих качественные особенности, подобные описанным в разд. 1.1.2 и 1.2.2).

2. Нередко отсутствует строгое математическое обоснование.

3. Наличие в задаче большого числа параметров и широкий диапазон их изменения часто делают численные результаты ненаглядными и неудобными для анализа.

4. Необходимость прибегать к дополнительному аналитическому исследованию для задач с сингулярными особенностями.

5. Таблицы и графики часто менее удобны, чем простые формулы.

▷ **Возможности проверки публикуемых результатов читателями**

Публикуемые численные решения обычно очень трудно проверить (фактически для этого нужно заново численно решить задачу).

*Естественно здесь речь идет о сравнительно простых задачах.

1.3.2. Более подробная информация

Неудобство прямого использования результатов асимптотического анализа в инженерной практике в значительной мере может быть преодолено путем применения численных методов (конечно-разностных, проекционных, конечных элементов, итерационных и др.) с использованием компьютеров. Конечно-разностные методы основаны на замене любых дифференциальных соотношений соответствующими конечно-разностными аппроксимациями, что позволяет для решения уравнений с частными производными использовать различные численные алгоритмы, содержащие большое число алгебраических и логических операций. Точность и скорость вычислительного процесса зависит от способа аппроксимации дифференциальных величин; от геометрии и плотности системы дискретных точек, в которых вычисляются искомые величины и их производные; от способа организации численного алгоритма, управляющего алгебраическими и логическими операциями.

Численные методы, в совокупности, обладают большой универсальностью и позволяют эффективно получать решения различного рода задач для промежуточных значений параметра и координаты, т. е. в той области, где не могут быть использованы асимптотические методы. Стремительное вторжение ЭВМ в разные области человеческой деятельности привело к довольно распространенному мнению о всесильности численных методов. Это, в свою очередь способствует тому, что многие исследователи все чаще предпочитают обращаться к ним, пренебрегая другими теоретическими методами.

Несмотря на очевидную полезность и общность численных методов, их порой необоснованно переоценивают. Отметим некоторые недостатки численных методов.

● Таблицы и графики, являющиеся результатом численных расчетов, часто менее удобны чем приближенные аналитические формулы. Наличие в задаче большого числа характерных параметров (а иногда и произвольных функций) и широкий диапазон их изменения, как правило, делают результаты численных расчетов ненаглядными и неудобными для интерпретации и анализа*.

● Необходимость прибегать к дополнительному аналитическому исследова-

*При математическом моделировании сложных систем с большим числом варьируемых параметров до проведения массированных численных расчетов полезно сделать оценку времени, которое потребуется для исследования. Поясним сказанное на модельном примере. Пусть имеется достаточно сложная задача с 9 варьируемыми параметрами (подобные задачи возникают, например, при оптимизации технологических процессов, определении границ устойчивости многопараметрических систем, оптимизации формы летательных аппаратов и др.). Будем считать, что нужно численно проанализировать десять значений для каждого из параметров, поэтому надо рассмотреть 10^9 вариантов. Пусть решение тестового варианта задачи для одного набора параметров занимает одну секунду, что дает 86400 ($60 \times 60 \times 24$) вариантов в сутки. Чтобы проанализировать все 10^9 вариантов потребуется более 30 лет непрерывной работы компьютера. Это очень долго, поэтому в данном случае исследователям надо либо упрощать рассматриваемую модель, либо использовать другие численные методы, либо переходить на существенно более мощный компьютер и т. д.

нию при наличии различного типа сингулярностей решений и особых точек в коэффициентах дифференциальных уравнений (подобное исследование часто трудно осуществить в рамках численных методов, особенно если исследователи впервые сталкиваются с подобными ситуациями).

• Необходимость дополнительного привлечения асимптотических методов при исследовании задач с малым параметром и при получении решения в областях с большими градиентами решения* или в областях с неоднородной микроструктурой.

• Необходимость тестирования результатов численного решения путем сопоставления с известными точными решениями или решениями модельных задач.

Один из наиболее существенных недостатков, которым часто просто пренебрегают (ввиду малой информированности, а также из-за неправильного понимания и неудачного употребления термина «точный метод» применительно к численным методам), состоит в том, что для гарантированной уверенности в адекватности и точности результатов численного решения сложных задач при отсутствии тестовых решений вычисления следует проводить сразу по нескольким принципиально различным схемам. Такое дублирование необходимо даже тогда, когда первое из полученных численных решений приводит к внешне разумным и хорошо интерпретируемым результатам.

Указанная ситуация обусловлена тем, что для подавляющего большинства сложных нелинейных задач отсутствует строгое обоснование той или иной вычислительной процедуры. Практика показывает, что расхождение публикуемых в печати данных разных авторов, исследовавших одну и ту же задачу различными (а иногда и идентичными) численными методами, как правило, составляет 5–15%. Известны случаи, когда это отличие было значительно больше и приводило даже к качественно различным результатам (например, для внутренней задачи массопереноса при больших числах Пекле).

Рассмотрим простой модельный пример, поясняющий одну из возможных причин возникновения опасности «плохих» вычислений. Будем считать, что искомая величина выражается в виде определенного интеграла, а подынтегральное выражение хотя и непрерывно дифференцируемо, но его вторая или третья производная имеет особенность (неограничена) в какой-либо точке. Использование стандартных подпрограмм, основанных на формулах Симпсона, может привести к значительной ошибке (поскольку погрешность этих формул оценивается четвертой производной, которая в данном случае может быть неограниченной).

---

*Создание и использование адаптивных сеток с автоматическим выбором шага и направления в пространстве требует много времени и больших усилий значительной группы исследователей (такие сетки не являются универсальными и обычно применимы к весьма ограниченному классу задач). Отметим интересную статью Franz & Roos (2011), в которой содержится любопытная коллекция примеров экзотических численных решений краевых задач с пограничным слоем, полученных на основе использования неадекватных численных алгоритмов и схем.

Важно отметить, что публикуемые численные результаты во многом остаются лишь на совести авторов — их практически невозможно проверить даже опытному рецензенту (с аналогичными трудностями приходится сталкиваться также при анализе экспериментальных работ); во многих случаях эти результаты сложно использовать «посторонним» людям, незнакомым с автором.

Несмотря на указанные недостатки, численные методы в настоящее время играют определяющую роль в развитии научно-технического прогресса, являясь основным аппаратом исследования инженерно-технических и экономических задач, связанных, в первую очередь, с расчетом, проектированием, управлением и оптимизацией конструкций, аппаратов и технологических процессов. Численные методы широко используются для математического моделирования природных явлений.

1.4. Приближенные аналитические методы

1.4.1. Краткая информация

▷ **Отличительные признаки**

1. Основаны на интуитивных соображениях и нестрогих рассуждениях*.

2. При решении задач используются различные упрощения и субъективные представления авторов о качественном поведении решений.

▷ **Основные достоинства приближенных методов**

1. Позволяют получать простые формулы, удобные для практических расчетов.

2. Дают возможность сравнительно быстро получать приближенные оценки.

3. Эффективны в задачах, характерные параметры которых заданы с невысокой точностью.

4. Являются основой для разработки комбинированных методов.

5. Не требуют от исследователя обширных математических знаний.

▷ **Недостатки приближенных методов**

1. Полное отсутствие строго математического обоснования.

2. Не могут быть использованы при необходимости получения большой точности.

▷ **Возможности проверки публикуемых результатов читателями**

Публикуемые результаты невозможно проверить при отсутствии описания способа их получения.

* В этом разделе в основном рассматриваются приближенные аналитические методы инженерного типа.

1.4.2. Более подробная информация

До сих пор сохраняют свое значение разнообразные и во многом опирающиеся на интуитивные соображения (о свойствах и структуре решения) приближенные инженерные методы, к которым относятся, например, однопараметрические *интегральные методы* в теории ламинарного и турбулентного пограничного слоя, *метод равнодоступной поверхности* в задачах массопереноса с поверхностными реакциями, различные модификации *метода линеаризации* уравнений или граничных условий и др. Использования этих простых методов во многих случаях оказывается вполне достаточно для практических целей. К сожалению, мода на численные методы за последние несколько десятилетий привела к тому, что приближенные методы часто недооцениваются и редко используются.

Многие приближенные методы основаны на глубоком и неформальном понимании физической сущности явления. Конкретные представления о механизме рассматриваемого явления или процесса, которые черпаются непосредственно из повседневной практической деятельности или эксперимента и неявно заложены в приближенный метод, нередко позволяют получать искомые зависимости, успешно конкурирующие с результатами соответствующего численного анализа. Более того, в ряде случаев приближенные формулы значительно более удобны для проведения практических расчетов, чем любые вычисления с привлечением ЭВМ. Это обычно происходит тогда, когда одна и та же формула, полученная тем или иным разумным приближенным методом, дает возможность учесть сразу много факторов.

Поясним сказанное на примере. Известны простые общие формулы позволяющие приближенно вычислять средние числа Шервуда для любой кинетики объемной или поверхностной химической реакции, произвольного типа течения и формы частиц (в этих случаях исходная постановка задачи помимо обычных безразмерных параметров дополнительно содержит произвольные функции). Подобные результаты принципиально не могут быть получены численными методами: можно посчитать лишь много различных частных случаев (с фиксированной кинетикой, геометрией течения и формой частиц) и для каждого из них определить искомые зависимости в виде таблиц и графиков. При этом представляется маловероятным дать какие-либо рекомендации общего характера (например, для произвольной кинетики химической реакции). Из сказанного ясно, что актуальная проблема получения любых достаточно общих приближенных соотношений не может быть исчерпана применением численных методов.

Важно подчеркнуть, что имеющиеся в настоящее время опытные данные для численных значений многих физико-химических постоянных (например, константы скорости, порядок и энергии активации объемных и поверхностных химических реакций) имеют весьма невысокую точность. Это дополнительно говорит в пользу того, что в такого рода задачах уместно использовать апробированные приближенные методы, точность которых выше точности определения исходных констант, входящих в уравнение.

Приближенные методы очень удобны для получения достаточно грубых оценок на предварительном этапе любого исследования, а также тогда, когда результат должен быть получен сравнительно быстро. Приближенные методы нередко играют большую роль в формировании качественного понимания того или иного явления или процесса.

Общие и хронические недостатки всех приближенных методов инженерного типа — их сравнительно невысокая точность и отсутствие математического обоснования. Оценка точности используемых приближенных методов обычно проводится на примере частных случаев, для которых уже имеются необходимые для проверки точные, численные или асимптотические результаты. При этом обычно считают, что если на типичных тестовых задачах определенного класса данный метод работает достаточно хорошо, то его можно использовать и для других задач рассматриваемого класса. Принципиальное ограничение приближенных методов — они не могут быть использованы при необходимости получения большой точности.

1.5. Комбинирование теоретических методов

Из сказанного выше следует, что все перечисленные классы теоретических методов имеют свои характерные достоинства и недостатки. При этом важно, что все теоретические методы полностью не перекрывают друг друга. Поэтому при решении конкретных задач часто приходится прибегать к сочетанию нескольких методов различных классов. Приведем несколько конкретных примеров.

Введение автомодельных переменных (что соответствует использованию точных методов для анализа уравнений с частными производными и существенно упрощает исходную задачу) нередко приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решение которых нельзя представить в замкнутом виде. Поэтому на втором этапе исследования полученное ОДУ решают либо численными, либо приближенными методами.

► Пример 1.7. (*Задача Блазиуса.*) Ниже приведена краткая схема получения решения задачи пограничного слоя на плоской пластине:

- $\boxed{\text{Уравнения Навье — Стокса, УрЧП}}$

  $\Downarrow$ Асимптотический метод (большие числа Рейнольдса)

- $\boxed{\text{Более простые уравнения пограничного слоя, УрЧП}}$

  $\Downarrow$ Точный метод (введение автомодельных переменных)

- $\boxed{\text{Обыкновенное дифференциальное уравнение}}$

  $\Downarrow$ Численный (или приближенный аналитический) метод

- $\boxed{\text{Искомое решение}}$ ◄

Наличие сингулярностей в коэффициентах дифференциальных уравнений, точное решение которых отсутствует, вынуждает исследователя сначала «раскрывать» все особенности аналитически, а затем применять численные методы. Нередко приходится использовать сочетание асимптотических и численных методов (гидродинамический и тепловой пограничный слой).

Весьма перспективными оказываются комбинированные методы, основанные на сочетании асимптотических и приближенных методов (*методы асимптотических аналогий, асимптотической коррекции* и др.). Это позволяет, с одной стороны, получить окончательные результаты в простом аналитическом виде, а с другой — устранить наиболее существенные недостатки приближенных формул, связанные с их неточным поведением в некоторых предельных случаях. При этом, как правило, существенно повышается точность приближенных формул и нередко возрастает их информативность, что позволяет для расчета сходных задач использовать одну и ту же формулу.

Замечание 1.3. *Из сказанного следует, что ошибочно противопоставлять друг другу различные классы теоретических методов, которые имеют свои характерные достоинства и недостатки и разную область применимости. Гораздо вернее считать, что* ***все теоретические методы (точные, асимптотические, численные, приближенные) взаимно дополняют друг друга****.*

1.6. Точные решения и методы решения нелинейных уравнений математической физики

Общее решение нелинейных уравнений математической физики и механики удается получить очень редко (в исключительных случаях). Поэтому обычно приходится ограничиться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*. Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются следующие решения:

(a) Решения, которые выражаются через элементарные функции.

(b) Решения, которые выражаются в виде квадратур*.

(c) Решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Простейший случай (a) специально выделен из более общего случая (b), поскольку некоторые авторы ограничиваются поиском только таких точных

*Интегрирование уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений в виде аналитических формул, при записи которых используется указанный априори запас допустимых функций и перечисленный набор допустимых математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение (это необходимо, если в уравнение входят произвольные или специальные функции), а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции), операций дифференцирования и взятия неопределенного интеграла.

решений. В случаях (a) и (b) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме.

Под точными методами решения нелинейных уравнений математической физики понимаются методы, позволяющие получать точные решения.

Наиболее распространенные и весьма эффективные точные методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики перечислены ниже в сводной табл. 1.1. Эти методы имеют широкую область применимости, позволяя строить точные решения нелинейных УрЧП разных типов и разных порядков (в настоящее время имеется много публикаций, в которых с помощью этих методов получено большое число точных решений).

Замечание 1.4. *В табл. 1.1 указаны только методы, обладающие широким диапазоном применимости и пригодные для поиска точных решений уравнений различных типов (параболических, гиперболических, эллиптических, смешанных) и разных порядков. Метод Монжа, метод Хироты и другие точные методы, имеющие существенно более узкую область применимости, здесь не рассматриваются.*

Замечание 1.5. *В теории тепло- и массопереноса и гидродинамике* эффективно работают только первые шесть методов, указанных в табл. 1.1.*

Литература к главе 1

Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности. *Жур. выч. мат. и мат. физики*, 2005, т. 45б, № 10, с. 1837–1847.

Баренблатт Г. И. *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика, 2-е изд.* М.: Гидрометеоиздат, 1982.

Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. *Жур. выч. мат. и мат. физики*, 1969, т. 9, № 4, с. 841–859.

Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы, 9-е изд.*. М.: Лаборатория знаний, 2020.

Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. *Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком*. М.: Наука, 1985.

Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Мат. заметки*, 1969, т. 6, № 2, с. 237–248.

Коул Дж. *Методы возмущений в прикладной математике*. М.: Мир, 1972.

Найфэ А. *Введение в методы возмущений*. М.: Мир, 1984.

Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Самарский А. А. *Теория разностных схем, 3-е изд.* М.: Наука, 1989.

Franz S., Roos H.-G. The capriciousness of numerical methods for singular perturbations. *SIAM Review*, 2011, Vol. 53, No. 1, pp. 157–173.

Lagerstrom P.A. *Matched Asymptotic Expansions. Ideas and Techniques*. New York: Springer, 1988.

* Здесь имеется ввиду поиск точных решений уравнений гидродинамического пограничного слоя и уравнений Навье — Стокса.

Таблица 1.1. Основные методы поиска точных решений нелинейных уравнений математической физики.

№	Название метода	Характерные особенности
1	Классический метод поиска симметрий (метод группового анализа)	Основан на поиске однопараметрических групп Ли непрерывных преобразований, которые сохраняют вид УрЧП. Позволяет получать автомодельные и другие инвариантные решения
2	Неклассический метод поиска симметрий (допускает различные модификации)	Обобщает классический метод поиска симметрий (основан на условии инвариантной поверхности). Позволяет описать более широкий класс точных решений, но более сложен для использования
3	Прямой метод построения редукций (метод Кларксона — Крускала)	Задается общий вид решения с несколькими свободными функциями. Для определения этих функций используются специальные приемы, одна из искомых функций должна удовлетворять ОДУ
4	Метод дифференциальных связей	Наиболее общий метод. Основан на анализе совместности рассматриваемого УрЧП и вспомогательных (более простых) дифференциальных уравнений, называемых дифференциальными связями
5	Методы обобщенного разделения переменных	Решение ищется в виде суммы попарных произведений функций разных аргументов (как в методе Галеркина). Для определения искомых функций используют несколько разных методов
6	Методы функционального разделения переменных	Задается вид решения (в явной или неявной форме) с несколькими свободными функциями. Эти функции определяются методами дифференцирования или расщепления
7	Метод обратной задачи рассеяния (теория солитонов)	Основан на специальном представлении уравнения (с помощью пары Лакса линейных операторов) или на условии совместности двух систем линейных дифференциальных уравнений
8	Метод усеченных разложений Пенлеве	Основан на поиске решений в виде усеченных разложений, имеющих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается произвольной функцией

Polyanin A.D., Dilman V.V. *Methods of Modeling Equations and Analogies in Chemical Engineering*. Boca Raton — Ann Arbor: CRC Press/Begell House, 1994.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed*. Boca Raton — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2012.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton — London: CRC Press, 2018.

Shishkin G.I., Shishkina L.P. *Difference Methods for Singular Perturbation Problems*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2009.

2. Элементарная теория инвариантов: Алгебраические и обыкновенные дифференциальные уравнения

Предварительные замечания. В данной главе описан простой метод, позволяющий упрощать алгебраические уравнения, интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка и понижать порядок обыкновенных дифференциальных уравнений второго и старших порядков, а также получать точные решения нелинейных уравнений с частными производными с помощью инвариантов (об этом будет рассказано в главе 5 «Элементарная теория инвариантов: Уравнения с частными производными»). Построение инвариантов осуществляется путем поиска преобразований, сохраняющих вид рассматриваемых уравнений. Приведены многочисленные примеры решения конкретных дифференциальных уравнений. Важно отметить, что использование даже простейших линейных преобразований сдвига и масштабирования (и их комбинаций) позволяет единообразно описать разрешимых (или допускающих понижение порядка) обыкновенных дифференциальных уравнений значительно больше, чем описано в стандартных учебниках. При использовании указанного простого метода надо уметь решать лишь самые простые алгебраические уравнения (или системы таких уравнений) и уметь дифференцировать.

2.1. Симметрии. Общая схема использования инвариантов для решения уравнений

2.1.1. Симметрии. Преобразования, сохраняющие вид уравнений. Инварианты

В природе и технике (и элементарной геометрии) обычно встречается либо зеркальная симметрия, когда одна половина предмета зеркально-симметрична другой, либо центральная симметрия, когда предмет переходит сам в себя при повороте относительно некоторого центра. Однако понятие симметрии гораздо шире, чем в указанных случаях. В общем случае под симметрией понимается неизменность при какой-либо процедуре не только предметов, но и физических явлений, математических формул, уравнений и т. д. Далее пойдет речь о том, как использовать свойство симметрии для поиска решений или упрощения различных классов нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и с частными производными) и систем таких уравнений.

Под симметриями математических уравнений будут пониматься преобразования, сохраняющие вид уравнений. Ниже приведены примеры конкретных уравнений, которые сохраняют свой вид при некоторых простых преобразованиях.

► Пример 2.1. Рассмотрим биквадратное уравнение

$$x^4 + ax^2 + 1 = 0. \tag{2.1.1.1}$$

Замена

$$x = -\bar{x}$$

приводит к точно такому же уравнению

$$\bar{x}^4 + a\bar{x}^2 + 1 = 0$$

(т. е. уравнение (2.1.1.1) сохраняет вид при преобразовании $x = -\bar{x}$).

Два других преобразования

$$x = \pm\frac{1}{\tilde{x}}$$

также сохраняют вид уравнения (2.1.1.1), поскольку после умножения на $\tilde{x}^4$ получим

$$\tilde{x}^4 + a\tilde{x}^2 + 1 = 0.$$

Пусть $x_1 = x_*$ — решение уравнения (2.1.1.1). Приведенные преобразования, сохраняющие вид данного уравнения, позволяют найти его три других решения: $x_2 = -x_*$, $x_3 = 1/x_*$, $x_4 = -1/x_*$. ◄

► Пример 2.2. Вид дифференциального уравнения

$$y''_{xx} - y'_x = 0 \tag{2.1.1.2}$$

не изменится, если сделать любое преобразование вида

$$\begin{aligned}
&x = \bar{x} + a, \quad && y = \bar{y} \quad && (a \text{ — любое число});\\
&x = \bar{x}, && y = \bar{y} + b && (b \text{ — любое число});\\
&x = \bar{x}, && y = c\bar{y} && (c \text{ — любое число, не равное нулю}),
\end{aligned} \tag{2.1.1.3}$$

поскольку для всех трех указанных преобразований в результате получим точно такое же уравнение

$$\bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}'_{\bar{x}} = 0.$$

◄

Далее будет показано, что преобразования, сохраняющие вид уравнений, позволяют «размножать» решения уравнений.

Инвариант преобразования — функция (отличная от постоянной), которая сохраняет вид при действии данного преобразования. Инвариант преобразования может зависеть от независимых и зависимой переменной и их производных (если идет речь о дифференциальных уравнениях). Для пояснения понятия инвариантов, которые сохраняют вид при заданных преобразованиях, рассмотрим несколько простых конкретных примеров.

► **Пример 2.3.** Однопараметрическое преобразование одинакового сдвига по обеим осям

$$x = \bar{x} + a, \quad y = \bar{y} + a,$$

где a — любое число, имеет инвариант

$$I = y - x = \bar{y} - \bar{x}.$$

Если x — независимая переменная, а y — зависимая переменная, то другими инвариантами этого преобразования являются производные

$$I_2 = y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}, \quad I_3 = y''_{xx} = \bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}}, \quad \ldots$$ ◄

► **Пример 2.4.** Однопараметрическое преобразование одинакового изменения масштабов длины по обоим осям

$$x = a\bar{x}, \quad y = a\bar{y},$$

где $a \neq 0$ — любое число, имеет инвариант

$$I_1 = \frac{y}{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}.$$

Если x — независимая переменная, а y — зависимая переменная, то имеются также более сложные инварианты, которые зависят от производных и сохраняют вид при действии данного преобразования, например,

$$I_2 = y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}, \quad I_3 = xy''_{xx} = \bar{x}\bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}}.$$ ◄

► **Пример 2.5.** Однопараметрическое преобразование, представляющее собой изменение масштаба по одной переменной и сдвига по другой переменной, вида

$$x = a\bar{x}, \quad y = \bar{y} + k \ln a,$$

где $a \neq 0$ — любое число, k — заданная константа, имеет инвариант

$$I_1 = y - k \ln x = \bar{y} - k \ln \bar{x}.$$

Два других инварианта, которые зависят от производных и не меняются при действии данного преобразования, имеют вид

$$I_2 = xy'_x = \bar{x}\bar{y}'_{\bar{x}}, \quad I_3 = x^2 y''_{xx} = \bar{x}^2 \bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}}.$$ ◄

Замечание 2.1. *В примерах 2.3–2.5 инварианты преобразований не зависели явно от параметра a. Такие и подобные инварианты однопараметрических преобразований играют первостепенную роль при анализе и решении обыкновенных дифференциальных уравнений (и уравнений с частными производными).*

Замечание 2.2. *Инвариант преобразования определяется неоднозначно. Если I — инвариант некоторого преобразования, то $f(I)$, где f — произвольная функция, также является инвариантом этого преобразования. На практике предпочтительнее использовать инварианты простейшего вида, которые приводят к наиболее простым выкладкам.*

2.1.2. Общая схема использования инвариантов для решения математических уравнений

Ниже изображена принципиальная схема исследования математических уравнений, которая основана на поиске преобразований, сохраняющих вид уравнений, с последующем переходом в уравнении от исходных переменных к новым переменным — инвариантам преобразований.

$$\boxed{\text{Исходное уравнение}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Ищется преобразование, сохраняющее вид уравнения}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Находятся инварианты, сохраняющие вид при действии этого преобразования}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Исходное уравнение записывается в терминах инвариантов}}$$

После выполнения указанных действий уравнение часто упрощается или приводится к разрешимому виду. Важно отметить, что данная схема с успехом может применяться для самых различных типов математических уравнений (см. далее разделы 2.2–2.4 и главу 5).

Для лучшего понимания и усвоения идей использования инвариантов для решения математических уравнений при изложении дальнейшего материала применяется принцип «от простого к сложному»: сначала кратко излагаются соответствующие результаты для алгебраических уравнений, потом — для обыкновенных дифференциальных уравнений, а лишь затем — для нелинейных уравнений математической физики.

2.2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

2.2.1. Алгебраические уравнения, содержащие четные степени

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-4}x^{2n-4} + \cdots + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0, \quad (2.2.1.1)$$

содержащие только четные степени. Биквадратное уравнение является частным случаем уравнения (2.2.1.1) при $n = 2$.

Замена

$$x = -\bar{x} \quad (2.2.1.2)$$

приводит точно к такому же уравнению для $\bar{x}$ (говорят, что уравнение (2.2.1.1) инвариантно относительно преобразования (2.2.1.2)). Отсюда следует, что если уравнение (2.2.1.1) имеет решение $x = x_1$, то оно имеет также другое решение $x = -x_1$.

Возводя в квадрат обе части (2.2.1.2), получим простейшую алгебраическую функцию, которая сохраняет вид при преобразовании (2.2.1.2):

$$x^2 = \bar{x}^2 \tag{2.2.1.3}$$

Эта функция и является инвариантом преобразования (2.2.1.2). Если выбирать инвариант (2.2.1.3) за новую переменную, $z = x^2$, то уравнение (2.2.1.1) порядка $2n$ преобразуется к уравнению порядка n:

$$a_{2n}z^n + a_{2n-2}z^{n-1} + a_{2n-4}z^{n-2} + \dots + a_4z^2 + a_2z + a_0 = 0.$$

Таким образом в данном случае переход от исходной переменной x к инварианту преобразования (2.2.1.3) $z = x^2$ позволяет упростить рассматриваемое уравнение (понизить его порядок в два раза).

2.2.2. Возвратные уравнения и их обобщения

Возвратное алгебраическое уравнение четной степени имеет вид

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_0 \neq 0). \tag{2.2.2.1}$$

Левая часть этого уравнения называется *возвратным многочленом**, а само уравнение — *возвратным уравнением*.

В уравнении (2.2.2.1) сделаем замену

$$x = \frac{1}{\bar{x}} \tag{2.2.2.2}$$

После умножения на $\bar{x}^{2n}$ получим точно такое же уравнение. Отсюда следует, что если уравнение (2.2.2.1) имеет корень $x = b$, то оно имеет также другое решение $x = 1/b$.

Простейшее возвратное уравнение — квадратное уравнение

$$a_0x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Делим его на x:

$$a_0\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + a_1 = 0.$$

Результат удобно представить в форме уравнения первого порядка

$$a_0z + a_1 = 0,$$

где

$$z = x + \frac{1}{x} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{x}} \tag{2.2.2.3}$$

— простейший *инвариант преобразования* (2.2.2.2).

Теорема 1. *В общем случае возвратное уравнение порядка* $2n$ *допускает понижение порядка с помощью подстановки* (2.2.2.3). *В результате получается алгебраическое уравнение порядка* n.

* Коэффициенты возвратного многочлена, одинаково удаленные от его начала и конца, равны.

► Пример 2.6. Рассмотрим возвратное уравнение четвертого порядка

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Делим его на x^2:

$$a\Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) + b\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + c = 0. \qquad (2.2.2.4)$$

Учитываем, что

$$\Big(x + \frac{1}{x}\Big)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

В результате уравнение (2.2.2.4) подстановкой (2.2.2.3), которая основана на инварианте преобразования (2.2.2.2), сводится к уравнению второго порядка

$$az^2 + bz + c - 2a = 0.$$

◄

Теорема 2. *В общем случае возвратное алгебраическое уравнение нечетного порядка*

$$P_{2n+1}(x) = 0, \quad \text{где} \quad P_{2n+1}(x) \equiv a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

имеет корень $x = -1$, а его левая часть допускает представление

$$P_{2n+1}(x) = (x+1)Q_{2n}(x),$$

где $Q_{2n}(x)$ — возвратный многочлен степени $2n$.

► Пример 2.7. Возвратное уравнение третьего порядка

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

может быть представлено в виде

$$(x+1)[ax^2 + (b-a)x + a] = 0.$$

◄

Из теоремы 2 следует, что возвратное уравнение порядка $2n+1$ после деления на $(x+1)$ и введения новой переменной (2.2.2.3) сводится к уравнению порядка n.

Замечание 2.3. *Обобщенные возвратные уравнения*

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \cdots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + \\ + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}a_1x + \lambda^n a_0 = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

не меняются при преобразовании

$$x = \frac{\lambda}{\bar{x}}.$$

Простейший инвариант этого преобразования имеет вид

$$z = x + \frac{\lambda}{x} = \bar{x} + \frac{\lambda}{\bar{x}}.$$

Переход в исходном уравнении $2n$-го порядка от x к новой переменной z приводит более простому уравнению n-го порядка.

2.2.3. Системы алгебраических уравнений, симметричные относительно перестановки аргументов

Многочлен $P(x,y)$ от двух переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке аргументов: $P(x,y)=P(y,x)$.

Замечание 2.4. *В терминах преобразований симметрический многочлен определяется как многочлен, сохраняющий вид при преобразовании* $x=\bar{y}$, $y=\bar{x}$.

Простейшие симметрические многочлены

$$u=x+y, \quad w=xy \tag{2.2.3.1}$$

называются *элементарными*. Эти многочлены являются простейшими алгебраическими инвариантами при перестановке аргументов.

Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть единственным образом выражен через элементарные многочлены.

Для решения систем двух алгебраических уравнений

$$P(x,y)=0, \qquad Q(x,y)=0,$$

где P и Q — симметрические многочлены, полезно в качестве новых переменных использовать элементарные симметрические многочлены (2.2.3.1). Подобные системы обладают следующим свойством: если система имеет решение $x=x_0$, $y=y_0$, то она имеет также решение $x=y_0$, $y=x_0$.

► Пример 2.8. Рассмотрим нелинейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x^2+axy+y^2&=b,\\ x^4+cx^2y^2+y^4&=d. \end{aligned} \tag{2.2.3.2}$$

Система (2.2.3.2) не меняется при перестановке аргументов.

Переходя в (2.2.3.2) от x, y к переменным (2.2.3.1) и учитывая формулы

$$\begin{aligned} &x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2w,\\ &x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2w)^2-2w^2=u^4-4u^2w+2w^2, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} u^2+(a-2)w&=b,\\ u^4-4u^2w+(c+2)w^2&=d. \end{aligned} \tag{2.2.3.3}$$

Исключая из уравнений u, приходим к квадратному уравнению

$$(a^2+c-2)w^2-2abw+b^2-d=0.$$

Дальнейшая процедура определения решений элементарна и здесь не приводится. ◄

► Пример 2.9. Рассмотрим нелинейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=a,\\ x^3+y^3&=b. \end{aligned} \tag{2.2.3.4}$$

Переходя к переменным (2.2.3.1) и учитывая равенство $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$, получим

$$u^2 - 2w = a,$$
$$u^3 - 3uw = b.$$

Исключив w, приходим к кубическому уравнению

$$u^3 - 3au + 2b = 0. \qquad (2.2.3.5)$$

Отметим, что прямое исключение из системы (2.2.3.4) переменной y приводит к существенно более сложному, чем (2.2.3.5), алгебраическому уравнению шестой степени:

$$(a - x^2)^3 = (b - x^3)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2x^6 - 3ax^4 - 2bx^3 + 3a^2x^2 + b^2 - a^3 = 0. \blacktriangleleft$$

Выводы. Описанный метод исследования, основанный на использовании инвариантов, позволяет решать и упрощать некоторые типы алгебраических уравнений (понижать их порядки) и систем алгебраических уравнений.

Задачи и упражнения к разд. 2.2

1. Найти общий вид алгебраического уравнения четвертой степени, которое сохраняет вид при преобразовании $x = -1/\bar{x}$. Указать замену, понижающую порядок полученного уравнения.

2. Свести алгебраическое уравнение пятой степени $x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + x = 0$ к квадратному уравнению. Найти корни исходного уравнения при $a = b = -1/2$.

3. Решить систему уравнений

$$x + y = a, \quad x^3 + y^3 = b(x^2 + y^2).$$

4. Решить систему уравнений

$$x + y = a, \quad x^4 + y^4 = b.$$

5. Решить систему уравнений

$$x^3 + y^3 = a, \quad x^2y + xy^2 = b.$$

2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2.3.1. Преобразования, сохраняющие вид уравнения, и их инварианты

Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение (*кратко* ОДУ)

$$F(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0 \qquad (2.3.1.1)$$

инвариантно относительно (*обратимого*) *преобразования*

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \psi(\bar{x}, \bar{y}), \qquad (2.3.1.2)$$

если в результате подстановки (2.3.1.2) в (2.3.1.1) получим точно такое же уравнение

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'_{\bar{x}}, \ldots, \bar{y}^{(n)}_{\bar{x}}) = 0. \qquad (2.3.1.3)$$

Функция F в уравнениях (2.3.1.1) и (2.3.1.3) одинакова.

Преобразования, сохраняющие вид уравнения, позволяют «размножать» его решения. Действительно, пусть известно частное решение

$$y = g(x) \qquad (2.3.1.4)$$

уравнения (2.3.1.1). Поскольку уравнение (2.3.1.1) после перехода к новым переменным (2.3.1.2) сохраняет такой же вид, то преобразованное уравнение (2.3.1.3) имеет решение

$$\bar{y} = g(\bar{x}). \qquad (2.3.1.5)$$

Возвращаясь в (2.3.1.5) к старым переменным по формулам (2.3.1.2) (их предварительно надо разрешить относительно $\bar{x}$ и $\bar{y}$) получим решение уравнения (2.3.1.1), которое, в случае общего положения будет отличаться от исходного решения (2.3.1.4).

► Пример 2.10. Дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y'''_{xxx} - y'_x = 0 \qquad (2.3.1.6)$$

имеет частное решение

$$y = e^x.$$

Преобразование

$$x = \bar{x} + a, \qquad y = \bar{y} + b \qquad (2.3.1.7)$$

сохраняет вид этого уравнения, поэтому преобразованное уравнение $\bar{y}'''_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}'_{\bar{x}} = 0$ имеет решение $\bar{y} = e^{\bar{x}}$. Подставляя сюда старые переменные, полученные обращением формул (2.3.1.7), имеем новое решение уравнения (2.3.1.6):

$$y = Ae^x + b, \qquad A = e^{-a},$$

содержащее две произвольные постоянные A и b. ◄

Функция $I(x, y, y'_x)$ (отличная от постоянной) называется *инвариантом преобразования* (2.3.1.2), если она сохраняет вид при этом преобразовании

$$I(x, y, y'_x) = I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'_{\bar{x}}).$$

Замечание 2.5. *Если $I = I(x, y, y'_x)$ — инвариант преобразования (2.3.1.2), то $\Psi(I)$, где Ψ — произвольная функция, тоже является инвариантом данного преобразования.*

2.3.2. Процедура понижения порядка ОДУ при $n \geqslant 2$ (приведение ОДУ к разрешимому виду $n = 1$)

Конкретизируем описанную в разд. 2.1.2 общую схему использования инвариантов для анализа математических уравнений применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

На первом этапе ищется *однопараметрическое преобразование*

$$x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}; c), \qquad y = \psi(\bar{x}, \bar{y}; c), \tag{2.3.2.1}$$

которое сохраняет вид уравнения (2.3.1.1). Преобразование (2.3.2.1) обязательно должно зависеть от *одного свободного параметра* $c \in [c_1, c_2]$ (само исходное уравнение (2.3.1.1) от этого параметра не зависит).

На втором этапе для уравнений второго и более высоких порядков (при $n \geqslant 2$) строятся два функционально-независимых инварианта преобразования (2.3.2.1):

$$I_1 = I_1(x, y), \qquad I_2 = I_2(x, y, y'_x), \tag{2.3.2.2}$$

которые явно не зависят от c.

На третьем этапе инварианты (2.3.2.2) выбираются в качестве новых переменных для уравнения (2.3.1.1), т. е. делается преобразование

$$u = I_2, \quad z = I_1, \quad u = u(z).$$

Указанная процедура приводит к понижению порядка уравнения на единицу.

Для уравнений первого порядка (при $n = 1$) на третьем этапе в (2.3.1.1) надо сделать замену

$$z = I_1, \quad z = z(x).$$

В результате уравнение приводится к разрешимому виду (к уравнению с разделяющимися переменными).

2.3.3. Используемые преобразования. Процедура определения инвариантов

Далее будем использовать только простейшие преобразования вида

$$x = \bar{x} + A, \qquad y = \bar{y} + B \qquad \textit{преобразование сдвига};$$
$$x = A\bar{x}, \qquad y = B\bar{y} \qquad \textit{преобразование масштабирования}$$

и их комбинации

$$x = A_1\bar{x} + B_1, \quad y = A_2\bar{y} + B_2. \tag{2.3.3.1}$$

В последнем случае производные связаны линейными соотношениями

$$y'_x = \frac{A_2}{A_1}\bar{y}'_{\bar{x}}, \quad y''_{xx} = \frac{A_2}{A_1^2}\bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}}, \quad y^{(n)}_x = \frac{A_2}{A_1^n}\bar{y}^{(n)}_{\bar{x}}. \tag{2.3.3.2}$$

Коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 преобразования (2.3.3.1) определяются из условия инвариантности рассматриваемого уравнения (коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 должны зависеть от одного свободного параметра c).

Справедливо следующее утверждение. Пусть преобразование (2.3.3.1) сохраняет вид некоторого уравнения, имеющего частное решение (2.3.1.4). Тогда это уравнение имеет также решение

$$y = B_2 + A_2 g\left(\frac{x - B_1}{A_1}\right).$$

Первый инвариант I_1 получаем путем исключения параметра a из равенств (2.3.3.1), а второй инвариант I_2 — путем исключения параметра a из одного из соотношений (2.3.3.1) и первого соотношения (2.3.3.2).

2.3.4. Анализ конкретных обыкновенных дифференциальных уравнений

Ниже приведены примеры использования элементарной теории инвариантов для упрощения и интегрирования конкретных обыкновенных дифференциальных уравнений.

► Пример 2.11. Нелинейное ОДУ второго порядка, не зависящее явно от y:

$$y''_{xx} = F(x, y'_x). \tag{2.3.4.1}$$

Это уравнение не меняется при произвольном сдвиге по зависимой переменной $y \Longrightarrow y + c$, где c — свободный параметр, что эквивалентно преобразованию

$$x = \bar{x}, \qquad y = \bar{y} + c \qquad (y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}). \tag{2.3.4.2}$$

При этом из трех величин x, y, y'_x две остаются неизменными:

$$x = \bar{x}, \qquad y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}.$$

Это и есть инварианты преобразования (2.3.4.2), т. е. $I_1 = x$, $I_2 = y'_x$. Выбираем их за новые переменные:

$$u = y'_x, \quad z = x, \quad u = u(z).$$

В результате получим ОДУ первого порядка: $u'_x = F(x, u)$. ◄

► Пример 2.12. Автономное уравнение второго порядка, не зависящее явно от x:

$$y''_{xx} = F(y, y'_x). \tag{2.3.4.3}$$

Это уравнение не меняется при произвольном сдвиге по независимой переменной $x \Longrightarrow x + c$, где c — свободный параметр, что эквивалентно преобразованию

$$x = \bar{x} + c, \qquad y = \bar{y} \qquad (y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}). \tag{2.3.4.4}$$

При этом из трех величин x, y, y'_x две остаются неизменными:

$$y = \bar{y}, \quad y'_x = \bar{y}'_{\bar{x}}.$$

Это и есть инварианты преобразования (2.3.4.4), т. е. $I_1 = y$, $I_2 = y'_x$. Выбираем их за новые переменные:

$$u = y'_x, \quad z = y, \quad u = u(z).$$

В результате получим уравнение первого порядка: $uu'_y = F(y, u)$. ◀

► Пример 2.13. Нелинейное уравнение второго порядка

$$y''_{xx} = yF\Big(x, \frac{y'_x}{y}\Big) \tag{2.3.4.5}$$

не меняется при растяжении зависимой переменной $y \Longrightarrow cy$, где $c \neq 0$ — свободный параметр, что эквивалентно преобразованию

$$x = \bar{x}, \quad y = c\bar{y} \quad (y'_x = c\bar{y}'_{\bar{x}}). \tag{2.3.4.6}$$

При этом две комбинации из трех величин x, y, y'_x остаются неизменными:

$$x = \bar{x}, \quad \frac{y'_x}{y} = \frac{\bar{y}'_{\bar{x}}}{\bar{y}}.$$

Это инварианты преобразования (2.3.4.6). Выбираем их за новые переменные:

$$u = \frac{y'_x}{y}, \quad z = x, \quad u = u(z).$$

Дифференцируя u по x, имеем

$$u'_x = \frac{y''_{xx}}{y} - \Big(\frac{y'_x}{y}\Big)^2 = \frac{y''_{xx}}{y} - u^2.$$

Исключая с помощью этого соотношения y''_{xx} в (2.3.4.5), приходим к уравнению первого порядка

$$u'_x = F(x, u) - u^2.$$ ◀

Замечание 2.6. *При $F(x, u) = g(x) + f(x)u$ уравнение (2.3.4.5) является общим линейным однородным ОДУ второго порядка. Указанным преобразованием оно сводится к ОДУ первого порядка с квадратичной нелинейностью.*

► Пример 2.14. Рассмотрим нелинейное ОДУ второго порядка

$$yy''_{xx} - (y'_x)^2 = ky^3e^{\lambda x}. \tag{2.3.4.7}$$

Ищем инвариантное преобразование в виде

$$x = \bar{x} + b, \quad y = c\bar{y}. \tag{2.3.4.8}$$

Подставив (2.3.4.8) в (2.3.4.7), а затем сократив на c, получим уравнение

$$\bar{y}\bar{y}''_{\bar{x}\bar{x}} - (\bar{y}'_{\bar{x}})^2 = ce^{\lambda b}k\bar{y}^3e^{\lambda\bar{x}}.$$

Требуя его совпадения с уравнением (2.3.4.7), получим соотношение для определения параметра b:

$$ce^{\lambda b} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{1}{\lambda}\ln c. \tag{2.3.4.9}$$

При этом параметр c остается свободным.

Подставим (2.3.4.9) в (2.3.4.8), а затем из второго соотношения исключим параметр c с помощью первого соотношения. Имеем

$$y = \bar{y}e^{\lambda(\bar{x}-x)} \quad \Longrightarrow \quad ye^{\lambda x} = \bar{y}e^{\lambda\bar{x}}.$$

Таким образом получен первый инвариант преобразования (2.3.4.8)–(2.3.4.9) в виде

$$I_1 = ye^{\lambda x}. \tag{2.3.4.10}$$

Чтобы найти второй инвариант, вычислим производную

$$y'_x = c\bar{y}'_{\bar{x}}.$$

Исключаем здесь параметр c, используя второе соотношение (2.3.4.8). В результате получим второй инвариант

$$\frac{y'_x}{y} = \frac{\bar{y}'_{\bar{x}}}{\bar{y}} = I_2. \tag{2.3.4.11}$$

Для понижения порядка исходного уравнения надо принять за новые переменные инварианты (2.3.4.10)–(2.3.4.11):

$$z = e^{\lambda x}y, \quad u = \frac{y'_x}{y}, \quad u = u(z). \tag{2.3.4.12}$$

С одной стороны

$$u'_x = \frac{y''_{xx}}{y} - \left(\frac{y'_x}{y}\right)^2 = \frac{y''_{xx}}{y} - u^2; \tag{2.3.4.13}$$

с другой стороны

$$u'_x = u_z z'_x = (\lambda e^{\lambda x}y + e^{\lambda x}y'_x)u'_z = \left(\lambda z + e^{\lambda x}y\frac{y'_x}{y}\right)u'_z = (\lambda z + zu)u'_z. \tag{2.3.4.14}$$

Приравнивая правые части соотношений (2.3.4.13)–(2.3.4.14), имеем

$$\frac{y''_{xx}}{y} - u^2 = (\lambda z + zu)u'_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{y''_{xx}}{y} = u^2 + (\lambda z + zu)u'_z.$$

Подставив в (2.3.4.7), после элементарных преобразований получим ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

$$(\lambda + u)u'_z = k,$$

которое легко интегрируется. ◄

Замечание 2.7. *Аналогичными свойствами обладает более общее нелинейное ОДУ второго порядка*

$$y''_{xx} = yF\left(e^{\lambda x}y, \frac{y'_x}{y}\right).$$

Преобразование (2.3.4.12) приводит его к ОДУ первого порядка:

$$u^2 + (\lambda z + zu)u'_z = F(z, u).$$

► **Пример 2.15.** Рассмотрим теперь нелинейное ОДУ первого порядка

$$y'_x = f\Big(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\Big). \tag{2.3.4.15}$$

Левая часть этого уравнения не меняется при преобразованиях вида

$$x = a\bar{x} + b, \quad y = a\bar{y} + c, \tag{2.3.4.16}$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Подставим (2.3.4.16) в аргумент правой части уравнения (2.3.4.15):

$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2} = \frac{a(\alpha_1\bar{x} + \beta_1\bar{y}) + \alpha_1 b + \beta_1 c + \gamma_1}{a(\alpha_2\bar{x} + \beta_2\bar{y}) + \alpha_2 b + \beta_2 c + \gamma_2}. \tag{2.3.4.17}$$

Чтобы уравнение (2.3.4.15) было инвариантным относительно преобразования (2.3.4.16) в (2.3.4.17) надо положить

$$\begin{aligned} \alpha_1 b + \beta_1 c + \gamma_1 &= a\gamma_1, \\ \alpha_2 b + \beta_2 c + \gamma_2 &= a\gamma_2. \end{aligned} \tag{2.3.4.18}$$

В этом случае числитель и знаменатель последней дроби в (2.3.4.17) можно сократить на a. Соотношения (2.3.4.18) можно рассматривать как систему двух линейных алгебраических уравнений первого порядка для определения коэффициентов b и c. При этом коэффициент a остается произвольным.

Таким образом мы показали, что уравнение (2.3.4.15) инвариантно относительно преобразования (2.3.4.16), (2.3.4.18), а первым инвариантом этого преобразования является аргумент правой части уравнения (2.3.4.15). Поэтому в уравнении (2.3.4.15) надо сделать замену

$$z = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}, \quad \text{где} \quad z = z(x). \tag{2.3.4.19}$$

Разрешим (2.3.4.19) относительно y, а затем продифференцируем по x. Заменив затем y'_x на $f(z)$ (это следует из (2.3.4.15) и (2.3.4.19)), после элементарных преобразований приходим к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)x + \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{(\beta_2 z - \beta_1)^2} z'_x = f(z) + \frac{\alpha_2 z - \alpha_1}{\beta_2 z - \beta_1}.$$

◄

В табл. 2.1 представлены некоторые ОДУ второго порядка, допускающие понижение порядка путем использования простейших инвариантных преобразований. Для уравнений первого порядка (когда функция $F(u, v, w)$ не зависит от третьего аргумента) уравнения, указанные в табл. 2.1, решаются путем перехода от y к новой зависимой переменной $z = I_1(x, y)$, где I_1 — первый инвариант.

Приведенные в табл. 2.1 результаты легко обобщаются на нелинейные уравнения произвольного порядка.

Заключительные замечания. Описанный метод исследования ОДУ использует идеи метода группового анализа дифференциальных уравнений, но

Таблица 2.1. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка, их инвариантные преобразования и инварианты.

Уравнение	Инвариантное преобразование	Первый инвариант	Второй инвариант
$F(x, y'_x, y''_{xx}) = 0$	$y = \bar{y} + c$	$I_1 = x$	$I_2 = y'_x$
$F(y, y'_x, y''_{xx}) = 0$	$x = \bar{x} + c$	$I_1 = y$	$I_2 = y'_x$
$F(\alpha x + \beta y + \gamma, y'_x, y''_{xx}) = 0$	$x = \bar{x} + c\beta,\ y = \bar{y} - c\alpha$	$I_1 = \alpha x + \beta y + \gamma$	$I_2 = y'_x$
$F\Bigl(x, \frac{y'_x}{y}, \frac{y''_{xx}}{y}\Bigr) = 0$	$y = c\bar{y}$	$I_1 = x$	$I_2 = \frac{y'_x}{y}$
$F(y, xy'_x, x^2 y''_{xx}) = 0$	$x = c\bar{x}$	$I_1 = y$	$I_2 = xy'_x$
$F\Bigl(e^{\lambda x} y, \frac{y'_x}{y}, \frac{y''_{xx}}{y}\Bigr) = 0$	$x = \bar{x} - \frac{1}{\lambda}\ln c,\ y = c\bar{y}$	$I_1 = e^{\lambda x} y$	$I_2 = \frac{y'_x}{y}$
$F(e^{\lambda x} y, e^{\lambda x} y'_x, e^{\lambda x} y''_{xx}) = 0$	$x = \bar{x} - \frac{1}{\lambda}\ln c,\ y = c\bar{y}$	$I_1 = e^{\lambda x} y$	$I_2 = e^{\lambda x} y'_x$
$F(xe^{\lambda y}, xy'_x, x^2 y''_{xx}) = 0$	$x = c\bar{x},\ y = \bar{y} - \frac{1}{\lambda}\ln c$	$I_1 = xe^{\lambda y}$	$I_2 = xy'_x$
$F(x^k y, x^{k+1} y'_x, x^{k+2} y''_{xx}) = 0$	$x = c\bar{x},\ y = c^{-k}\bar{y}$	$I_1 = x^k y$	$I_2 = x^{k+1} y'_x$
$F\Bigl(x^n y^m, \frac{xy'_x}{y}, \frac{x^2 y''_{xx}}{y}\Bigr) = 0$	$x = c^m \bar{x},\ y = c^{-n}\bar{y}$	$I_1 = x^n y^m$	$I_2 = \frac{xy'_x}{y}$

значительно проще последнего. Для применения данного метода надо уметь решать лишь самые простые алгебраические уравнения (и системы) и уметь дифференцировать, в то время как при использовании метода группового анализа на промежуточных этапах приходится рассматривать уравнения с частными производными (т. е. приходится выходить за рамки стандартного курса по обыкновенным дифференциальных уравнениям). В качестве еще одного достоинства этого простого метода следует отметить, что здесь практически не приходится вводить новых понятий, которыми изобилует метод группового анализа. Данный метод позволяет единообразно описать разрешимых (или допускающих понижение порядка) обыкновенных дифференциальных уравнений значительно больше, чем рассмотрено в подавляющем большинстве существующих учебников.

Задачи и упражнения к разд. 2.3

1. Понизить порядок уравнения (2.1.1.2) тремя различными способами, используя преобразования (2.1.1.3).

2. Найти три преобразования, которые сохраняют вид уравнения $xy''_{xx} - y'_x = 0$. Используя эти преобразования понизить порядок этого уравнения разными способами.

3. Найти три преобразования, которые сохраняют вид уравнения $y''_{xx} - (y'_x)^2 = 0$. Используя эти преобразования понизить порядок этого уравнения разными способами.

4. Решить уравнение $y'_x = y(kx + \ln y)$.

5. Решить уравнение $xy'_x = f(ky + \ln x)$, где $f(z)$ — произвольная функция.

6. Решить обобщенно-однородное уравнение $y'_x = ax^{k-1}\exp(yx^{-k})$.

7. Решить обобщенно-однородное уравнение $xy'_x = yf(x^n y^m)$.

8. Понизить порядок уравнения Эмдена — Фаулера $y''_{xx} = Ax^n y^m$.

9. Понизить порядок уравнения $y''_{xx} = Ax^n e^{\lambda y}$.

10. Понизить порядок уравнения $y''_{xx} = Ay^n e^{\lambda x}$.

11. Найти преобразование, понижающее порядок обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера $y''_{xx} = Ax^n y^m (y'_x)^k$.

12. Найти преобразование, понижающее порядок уравнения $y''_{xx} = Ay^n e^{\lambda x}(y'_x)^m$.

13. Найти преобразование, понижающее порядок уравнения $y''_{xx} = Ax^n e^{\lambda y}(y'_x)^m$.

14. Написать обобщения уравнений, приведенных в табл. 2.1, на случай ОДУ третьего порядка.

15. Написать обобщения уравнений, приведенных в табл. 2.1, на случай ОДУ произвольного порядка.

Литература к главе 2

Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре, 2-е изд. М.: Наука, 2002.

Ибрагимов Н.Х. *Азбука группового анализа*. М.: Знание, 1989, № 8.

Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Знание, 1991, № 7.

Кудряшов Н.А. Симметрия алгебраических и дифференциальных уравнений. Соросовский образовательный журнал, 1998, № 9, с. 104–110.

Полянин А.Д. Элементарная теория использования инвариантов для решения математических уравнений. *Вестник Самарского государственного университета*, 2008, № 6(65), с. 152–176.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton — London: CRC Press, 2018.

3. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка

3.1. Характеристическая система. Общее решение

3.1.1. Уравнения с двумя независимыми переменными

Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными x и y имеют вид

$$f(x,y,u)u_x + g(x,y,u)u_y = h(x,y,u), \tag{3.1.1.1}$$

где u — искомая функция. Такие уравнения достаточно часто встречаются в различных приложениях (в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, теории волн, акустике, теории фильтрации, теории массо- и теплопереноса, химической технологии и других областях).

Уравнение (3.1.1.1) является *линейным*, если функциональные коэффициенты f и g не зависят от u, а правая часть уравнения имеет вид $h(x,y,u) = h_1(x,y)u + h_0(x,y)$.

Общее решение уравнения (3.1.1.1) строится в несколько этапов, описанных ниже.

1°. Уравнению с частными производными (3.1.1.1) ставится в соответствие *характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений*:

$$\frac{dx}{f(x,y,u)} = \frac{dy}{g(x,y,u)} = \frac{du}{h(x,y,u)}. \tag{3.1.1.2}$$

2°. Находятся два функционально независимых интеграла* характеристической системы ОДУ 3.1.1.2:

$$Q_1(x,y,u) = C_1, \qquad Q_2(x,y,u) = C_2, \tag{3.1.1.3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3°. Общее решение уравнения (3.1.1.1) записывается в неявной форме

$$\Psi(Q_1, Q_2) = 0, \tag{3.1.1.4}$$

где Ψ — произвольная функция двух аргументов, имеющая непрерывные первые производные.

*Якобиан функций Q_1 и Q_2 отличен от нуля.

Замечание 3.1. *Разрешив (3.1.1.4) относительно Q_1 или Q_2, решение часто записывают в виде*

$$Q_k = \Phi(Q_{3-k}), \quad k = 1,\, 2, \tag{3.1.1.5}$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента.

Дополнительные комментарии. Характеристическая система ОДУ записана в *симметричной форме* (3.1.1.2). Она эквивалентна двум ОДУ:

$$y'_x = \frac{g(x,y,u)}{f(x,y,u)}, \quad u'_x = \frac{h(x,y,u)}{f(x,y,u)}. \tag{3.1.1.6}$$

Аналогичным образом можно использовать другие эквивалентные системы, состоящие из двух ОДУ: $x'_y = f/g$, $u'_y = h/g$ или $u'_x = h/f$, $u'_y = h/g$. На практике выбираются системы, которые проще интегрировать (например, системы, состоящие из изолированных уравнений).

Замечание 3.2. *В частном случае $h \equiv 0$ второе уравнение системы ОДУ (3.1.1.6) имеет тривиальный первый интеграл*

$$u = C_2. \tag{3.1.1.7}$$

В этом случае при интегрировании первого уравнения (3.1.1.6) функция u рассматривается как свободный постоянный параметр.

► Пример 3.1. Рассмотрим линейное уравнение в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами

$$u_x + a u_y = b, \tag{3.1.1.8}$$

которое является частным случаем уравнения (3.1.1.1) при $f(x,y,u) = 1$, $g(x,y,u) = a$, $h(x,y,u) = b$.

Запишем характеристическую систему ОДУ:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{a} = \frac{du}{b}, \tag{3.1.1.9}$$

которая эквивалентна двум независимым линейным уравнениям

$$y'_x = a, \quad u'_x = b.$$

Интегрируя эти уравнения, имеем $y = ax + C_1$ и $u = bx + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Разрешая полученные решения относительно C_1 и C_2, находим первые интегралы характеристической системы (3.1.1.9):

$$y - ax = C_1, \quad u - bx = C_2,$$

Используя замечание 3.1 при $k = 2$, после переноса члена bx в правую часть выражения (3.1.1.5) получим общее решение уравнения (3.1.1.8) в явном виде

$$u = bx + \Phi(y - ax), \tag{3.1.1.10}$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция.

При $b = 0$ решение (3.1.1.10) называется *решением типа бегущей волны*. ◄

► Пример 3.2. Рассмотрим линейное уравнение в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами

$$u_x + axu_y + bu = 0, \tag{3.1.1.11}$$

которое является частным случаем уравнения (3.1.1.1) при $f(x, y, u) = 1$, $g(x, y, u) = ax$, $h(x, y, u) = -bu$.

Запишем характеристическую систему ОДУ:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{ax} = -\frac{du}{bu},$$

которая эквивалентна двум независимым линейным уравнениям

$$y'_x = ax, \quad u'_x = -bu.$$

Интегрируя эти уравнения, имеем $y = \frac{1}{2}ax^2 + C_1$ и $u = C_2 e^{-bx}$. Разрешая полученные соотношения относительно C_1 и C_2, находим первые интегралы характеристической системы

$$y - \tfrac{1}{2}ax^2 = C_1, \quad ue^{bx} = C_2.$$

Используя замечание 3.1 при $k = 2$, после умножения обеих частей выражения (3.1.1.5) на e^{-bx}, получим общее решение уравнения (3.1.1.8) в явном виде

$$u = e^{-bx}\Phi(y - \tfrac{1}{2}ax^2),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная функция. ◄

Замечание 3.3. *Общее решение линейных уравнений с частными производными первого порядка (3.1.1.1) можно представить в явном виде (разрешенном относительно искомой функции u).*

► Пример 3.3. Рассмотрим теперь нелинейное уравнение

$$u_x + auu_y = 1. \tag{3.1.1.12}$$

Соответствующая характеристическая система ОДУ

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{au} = \frac{du}{1}$$

эквивалентна двум независимым уравнениям (второе из этих уравнений является нелинейным):

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 1/(au).$$

Два независимых интеграла этой системы имеют вид

$$u - x = C_1, \quad au^2 - 2y = C_2.$$

Общее решение исходного уравнения (3.1.1.12) записывается в неявной форме

$$\Psi(u - x,\, au^2 - 2y) = 0. \tag{3.1.1.13}$$

Замечание 3.4. *Решение (3.1.1.13), в отличие от решений, полученных в примерах 3.1 и 3.2, нельзя представить в явном виде, разрешенном относительно искомой функции u. Это свойство является типичным для нелинейных уравнений с частными производными первого порядка.*

◄

3.1.2. Уравнения с произвольным числом независимых переменных

Общее квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка с n независимыми переменными имеет вид

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+f_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(x_1,\ldots,x_n,u). \tag{3.1.2.1}$$

Общее решение уравнения (3.1.2.1) строится следующим образом.

Сначала уравнению (3.1.2.1) ставится в соответствие *характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений*:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n,u)}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n,u)}=\frac{du}{g(x_1,\ldots,x_n,u)}.$$

Затем определяются n независимых интегралов этой системы

$$Q_1(x_1,\ldots,x_n,u)=C_1,\quad \ldots,\quad Q_n(x_1,\ldots,x_n,u)=C_n, \tag{3.1.2.2}$$

где $C_1,\ldots,C_n$ — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (3.1.2.1) задается неявно формулой

$$\Psi(Q_1,\ldots,Q_n)=0,$$

где Ψ — произвольная функция n аргументов, $Q_m=Q_m(x_1,\ldots,x_n,u)$ — функции, входящие в интегралы (3.1.2.2), $m=1,\ldots,n$.

Задачи и упражнения к разд. 3.1

1. Найти общее решение линейного уравнения

$$au_x+au_y=f(x).$$

2. Найти общее решение линейного уравнения

$$xu_x+ayu_y=b.$$

3. Найти общее решение нелинейного уравнения

$$u_x+au_y=f(u).$$

4. Найти общее решение уравнения Хопфа

$$u_x+uu_y=0.$$

5. Найти общее решение модельного уравнения газовой динамики

$$u_x+f(u)u_y=0.$$

6. Найти общее решение линейного уравнения

$$u_x+au_y+bu_z=c.$$

3.2. Задача Коши. Процедура построения решения. Теорема существования и единственности

3.2.1. Две формулировки задачи Коши

1°. *Обобщенная задача Коши.* Требуется найти решение $u = u(x, y)$ уравнения (3.1.1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad u = h_3(\xi), \tag{3.2.1.1}$$

где ξ — параметр ($\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$), а $h_k(\xi)$ — заданные функции.

Геометрическая интерпретация: требуется найти интегральную поверхность уравнения (3.1.1.1), проходящую через линию (3.2.1.1), заданную параметрически.

2°. *Классическая задача Коши.* Требуется найти решение $u = u(x, y)$ уравнения (3.1.1.1), удовлетворяющее начальному условию

$$u = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{3.2.1.2}$$

где $\varphi(y)$ — заданная функция.

Классическую задачу Коши удобно представить в виде обобщенной задачи Коши, записав начальное условие (3.2.1.2) в параметрическом виде:

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad u = \varphi(\xi). \tag{3.2.1.3}$$

3.2.2. Процедура решения задачи Коши

Процедура решения задачи Коши (3.1.1.1), (3.2.1.1) состоит из нескольких этапов. Сначала определяются два независимых интеграла (3.1.1.3) характеристической системы (3.1.1.2). Затем для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в интегралы (3.1.1.3) подставляются начальные данные (3.2.1.1):

$$Q_1(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)) = C_1, \qquad Q_2(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)) = C_2. \tag{3.2.2.1}$$

Исключая из (3.1.1.3) и (3.2.2.1) постоянные C_1 и C_2, имеем

$$\begin{aligned} Q_1(x, y, u) &= Q_1(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)), \\ Q_2(x, y, u) &= Q_2(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)). \end{aligned} \tag{3.2.2.2}$$

Формулы (3.2.2.2) представляют собой *параметрическую форму решения* задачи Коши (3.1.1.1), (3.2.1.1). В некоторых случаях, исключая из (3.2.2.2) параметр ξ, удается получить решение в явном виде.

► Пример 3.4. Рассмотрим задачу Коши для *уравнения Хопфа*

$$u_x + u u_y = 0 \tag{3.2.2.3}$$

с начальным условием

$$u = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{3.2.2.4}$$

Сначала представим начальное условие (3.2.2.4) в параметрическом виде (3.2.1.1):

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad u = \varphi(\xi). \tag{3.2.2.5}$$

Решая характеристическую систему ОДУ

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{u} = \frac{du}{0}, \tag{3.2.2.6}$$

находим два независимых интеграла:

$$u = C_1, \qquad y - ux = C_2. \tag{3.2.2.7}$$

Используя начальные условия (3.2.2.5), определяем значения постоянных интегрирования: $C_1 = \varphi(\xi)$, $C_2 = \xi$. Подставляя эти выражения в (3.2.2.7), получим решение задачи Коши (3.2.2.3), (3.2.2.4) в параметрическом виде:

$$u = \varphi(\xi), \tag{3.2.2.8}$$

$$y = \xi + \varphi(\xi)x. \tag{3.2.2.9}$$

Характеристики (3.2.2.9) представляют собой прямые линии в плоскости (x, y) с углом наклона $\varphi(\xi)$, пересекающие ось y в точках ξ. На каждой характеристике функция u имеет одинаковое значение, равное $\varphi(\xi)$ (на разных характеристиках значения u в общем случае разные).

При $\varphi'(\xi) > 0$ различные характеристики не пересекаются, и формулы (3.2.2.8), (3.2.2.9) описывают однозначное решение. В качестве примера рассмотрим начальный профиль

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} u_1 & \text{при } \xi \leqslant 0, \\ \dfrac{u_2\xi^2 + \varepsilon u_1}{\xi^2 + \varepsilon} & \text{при } \xi > 0, \end{cases} \tag{3.2.2.10}$$

где $u_1 < u_2$ и $\varepsilon > 0$. Из формул (3.2.2.8), (3.2.2.9) получим однозначное гладкое решение во всей полуплоскости $x > 0$. В области, которую заполняют характеристики $y = \xi + u_1 x$ (при $\xi \leqslant 0$), решение постоянно:

$$u = u_1 \quad \text{при} \quad y/x \leqslant u_1. \tag{3.2.2.11}$$

При $\xi > 0$ решение можно определить по формулам (3.2.2.8)–(3.2.2.10).

Посмотрим, во что перейдет указанное решение в предельном случае $\varepsilon \to 0$, который соответствует кусочно-непрерывному начальному профилю

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} u_1 & \text{при } \xi \leqslant 0, \\ u_2 & \text{при } \xi > 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad u_1 < u_2. \tag{3.2.2.12}$$

Далее считаем, что $\xi > 0$ [при $\xi \leqslant 0$ справедлива формула (3.2.2.11)]. При $\xi = \text{const} \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$ из (3.2.2.10) имеем $\varphi(\xi) = u_2$. Поэтому в области, которую заполняют характеристики $y = \xi + u_2 x$ (при $\xi > 0$), решение постоянно:

$$u = u_2 \quad \text{при} \quad y/x \geqslant u_2 \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0). \tag{3.2.2.13}$$

При $\xi \to 0$ функция φ может принимать любое значение между u_1 и u_2 в зависимости от соотношений между двумя малыми параметрами ε и ξ, при этом первым слагаемым в правой части формулы (3.2.2.9) можно пренебречь. В результате из (3.2.2.8), (3.2.2.9) находим соответствующую асимптотику решения в явном виде:

$$u = y/x \quad \text{при} \quad u_1 \leqslant y/x \leqslant u_2 \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0). \tag{3.2.2.14}$$

Объединяя формулы (3.2.2.11), (3.2.2.13) и (3.2.2.14), получим решение задачи Коши для уравнения (3.2.2.3) с начальным условием (3.2.2.12):

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1 & \text{при } y \leqslant u_1 x, \\ y/x & \text{при } u_1 x \leqslant y \leqslant u_2 x, \\ u_2 & \text{при } y \geqslant u_2 x. \end{cases} \tag{3.2.2.15}$$

Характеристики уравнения (3.2.2.3) при условии (3.2.2.12) и зависимость функции u от y показаны на рис. 3.1 (где $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = 2$, $x_0 = 1$). В приложениях такое решение называют *центрированной волной разрежения*.

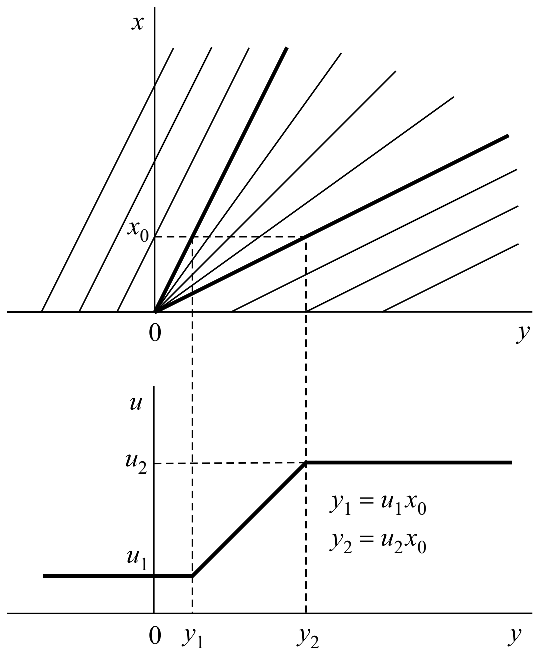

Рис. 3.1. Характеристики задачи Коши (3.2.2.3), (3.2.2.4) с начальным профилем (3.2.2.12) и зависимость искомой величины u от координаты y при $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = 2$, $x_0 = 1$.

Замечание 3.5. *При наличии участка с $\varphi'(\xi) < 0$ характеристики будут пересекаться в некоторой области. В точке пересечения двух характеристик, задаваемых различными значениями параметра ξ_1 и ξ_2, функция u согласно первой формуле (3.2.2.10) будет иметь два разных значения, которые равны $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$. Поэтому в области* *пересечения характеристик решение будет многозначным. Этот пример демонстрирует локальность теоремы существования и единственности, которая рассматривается далее.*

◀

3.2.3. Теорема существования и единственности

Пусть D_0 — область плоскости (x, y), а D — цилиндрическая область пространства (x, y, u), полученная из D_0 добавлением координаты u, причем $|u| < A_1$. Пусть коэффициенты уравнения (3.1.1.1) f, g, h — непрерывно дифференцируемые функции от x, y, u в D, а $x = h_1(\xi)$, $y = h_2(\xi)$, $u = h_3(\xi)$ — непрерывно дифференцируемые функции от ξ для $|\xi| < A_2$, определяющие кривую C в D с простой проекцией C_0 в D_0, и такие, что $(h_1')^2 + (h_2')^2 \neq 0$ (штрих обозначает производную по ξ). Считаем, что $fh_2' - gh_1' \neq 0$ на C. Тогда существует подобласть $\overline{D}_0$ области D_0, содержащая C_0, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (3.1.1.1) в D_0 и начальному условию (3.2.1.1) на C_0. Эта функция определяется единственным образом.

Важно отметить, что эта теорема носит локальный характер: существование решения гарантируется только в некоторой, достаточно «узкой», заранее не фиксированной, окрестности линии C (см. замечание 3.5 в конце примера 3.4).

Литература к главе 3

Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка*. М.: Наука, 1966.

Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*. М.: Наука, 1978.

Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*. М.: Физматлит, 2003.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

4. Решение некоторых функциональных уравнений

4.1. Метод дифференцирования по независимым переменным

4.1.1. Предварительные замечания

Функциональными уравнениями называются уравнения, содержащие искомые функции, зависящие от разных аргументов, а *функционально-дифференциальными уравнениями* — уравнения, содержащие искомые функции разных аргументов и производные этих функций.

Простейшими и наиболее распространенными функциональными уравнениями являются *разностные уравнения*, которые используются для численного решения дифференциальных уравнений. Методы решения разностных уравнений достаточно хорошо разработаны.

Функциональные уравнения, отличные от разностных уравнений, обычно бывают сложнее дифференциальных уравнений. Не существует общих методов решения функциональных уравнений, для различных узких классов функциональных уравнений используются свои специфические методы. Общие решения функциональных уравнений могут включать произвольные постоянные или зависеть от произвольных функций, функциональные уравнения могут иметь несколько решений или вообще не иметь решений.

В данном главе будут рассмотрены функциональные уравнения, решение которых удается свести к решению более простых обыкновенных дифференциальных уравнений или к решению линейных уравнений с частными производными первого порядка.

4.1.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по независимым переменным

В ряде случаев путем дифференцирования по независимым переменным удается исключить некоторые аргументы рассматриваемого функционального уравнения и свести его к обыкновенному дифференциальному уравнению. Полученное таким образом решение затем надо подставить в исходное уравнение, чтобы «убрать» лишние постоянные интегрирования (которые могут возникнуть из-за процедуры дифференцирования, которое использовалось для построения решения).

Замечание 4.1. *В некоторых случаях процедуру дифференцирования по независимым переменным надо проводить в комбинации с умножением (или делением) уравнения и его дифференциальных следствий на подходящие функции. Иногда уравнение или его следствия полезно предварительно прологарифмировать.*

► Пример 4.1. Рассмотрим *функциональное уравнение Коши*:

$$f(x) + f(y) = f(x + y), \tag{4.1.2.1}$$

где x, y — независимые переменные, а $f(x)$ — искомая функция. Отметим, что уравнение (4.1.2.1) является линейным.

Дифференцируя функциональное уравнение (4.1.2.1) по x и по y, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению $f''_{zz}(z) = 0$, где $z = x + y$. Его решением является линейная функция

$$f(z) = az + b, \tag{4.1.2.2}$$

где a и b — произвольные постоянные.

Подставив функцию (4.1.2.2) в (4.1.2.1), получим $b = 0$. В итоге находим однопараметрическое решение уравнения Коши (4.1.2.1):

$$f(x) = ax,$$

где a — произвольная постоянная. ◄

Замечание 4.2. *В примере 4.1 функциональное уравнение (4.1.2.1) достаточно было продифференцировать один раз по любой независимой переменной. Например, после дифференцирования по x, получим равенство*

$$f'_x(x) = f'_z(z), \qquad z = x + y,$$

в котором слева и справа стоят функции разных аргументов. Это возможно лишь при выполнении условий $f'_x(x) = f'_z(z) = a$, где a — произвольная постоянная (процедура разделения переменных). Интегрирование уравнения $f'_z(z) = a$ приводит к формуле (4.1.2.2). Далее действуем точно также, как и в примере 4.1.

► Пример 4.2. Рассмотрим нелинейное функциональное уравнение (*логарифмическое уравнение Коши*):

$$f(x)f(y) = f(x + y). \tag{4.1.2.3}$$

Считая $f > 0$, прологарифмируем уравнение (4.1.2.3), а затем продифференцируем полученное выражение по x и по y. Имеем

$$\begin{aligned} &[\ln f(x)f(y)]_{xy} = [\ln f(x) + \ln f(y)]_{xy} = 0 && \text{(левая часть уравнения)},\\ &[\ln f(x+y)]_{xy} = [\ln f(z)]''_{zz}, \quad z = x + y && \text{(правая часть уравнения)}. \end{aligned}$$

В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению $[\ln f(z)]''_{zz} = 0$, где $z = x + y$. Интегрируя дважды, находим $\ln f(z) = az + b$ или

$$f(z) = e^{az+b}, \tag{4.1.2.4}$$

где a и b — произвольные постоянные.

Подставив функцию (4.1.2.4) в (4.1.2.3), получим $b = 0$. В итоге находим однопараметрическое решение функционального уравнения (4.1.2.1):

$$f(x) = e^{ax},$$

где a — произвольная постоянная.

Отметим, что уравнение (4.1.2.3) допускает также тривиальное решение $f = 0$ (при логарифмировании предполагалось, что $f > 0$). ◀

► Пример 4.3. Рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + af(x)f(y), \qquad a \neq 0, \tag{4.1.2.5}$$

которое при $a = -1$ встречается в теории вероятностей.

Дифференцируя обе части уравнения по x и y, имеем

$$f''_{zz}(z) = af'_x(x)f'_y(y), \tag{4.1.2.6}$$

где $z = x + y$. Прологарифмируем обе части уравнения (4.1.2.6), а затем полученное равенство продифференцируем по x и y. Приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[\ln f''_{zz}(z)]''_{zz} = 0. \tag{4.1.2.7}$$

Интегрируя (4.1.2.7) дважды по переменной z, имеем

$$f''_{zz}(z) = C_1 \exp(C_2 z), \tag{4.1.2.8}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставив (4.1.2.8) в (4.1.2.6), получим уравнение

$$C_1 \exp[C_2(x+y)] = af'_x(x)f'_y(y),$$

которое допускает разделение переменных. Интегрирование приводит к выражению

$$f(x) = A\exp(C_2 x) + B, \qquad A = \pm\frac{1}{C_2}\sqrt{\frac{C_1}{a}}. \tag{4.1.2.9}$$

Подставив (4.1.2.9) в исходное уравнение (4.1.2.5), находим значения постоянных: $A = -B = 1/a$ и $C_2 = \beta$ — произвольная постоянная. В результате получим искомое решение

$$f(x) = \frac{1}{a}\bigl(e^{\beta x} - 1\bigr).$$

◀

До сих пор рассматривались функциональные уравнения, которые содержали одну неизвестную функцию. Аналогичным образом решаются также функциональные уравнения, которые содержат сразу несколько неизвестных функций.

► Пример 4.4. Рассмотрим *уравнение Пексидера*:

$$f(x) + g(y) = h(x+y), \tag{4.1.2.10}$$

где x, y — независимые переменные, а $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — искомые функции.

Дифференцируя функциональное уравнение (4.1.2.10) по x и по y, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению $h''_{zz}(z)=0$, где $z=x+y$. Его решением является линейная функция

$$h(z) = az + b. \tag{4.1.2.11}$$

Подставляя это выражение в (4.1.2.10), получим

$$f(x) + g(y) = ax + ay + b.$$

Разделяя переменные, находим функции f и g:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + c,\\ g(y) &= ay - c. \end{aligned} \tag{4.1.2.12}$$

Таким образом, решение уравнения Пексидера (4.1.2.10) дается формулами (4.1.2.11), (4.1.2.12), где a, b, c — произвольные постоянные. ◀

Замечание 4.3. *Метод дифференцирования по независимым аргументам допускает различные обобщения и будет использован далее главах 6 и 7 для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые выражаются через решения функционально-дифференциальных уравнений.*

❖ *Задачи и упражнения к разд. 4.1*

1. Решить *функциональное уравнение Дженсена*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

2. Решить функциональное уравнение

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

3. Решить функциональное уравнение

$$f(x) + f(y/x) = f(y).$$

4. Решить функциональное уравнение

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{f(x)f(y)}.$$

5. Решить функциональное уравнение

$$f(xy) = af(x)f(y).$$

6. Решить *функциональное уравнение Лобачевского*

$$f(x+y)f(x-y) = f^2(x).$$

7. Решить *функциональное уравнение Гаусса*

$$f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) = f(x)f(y).$$

8. Решить функциональное уравнение

$$f(x)g(y) = h(x+y).$$

9. Решить функциональное уравнение

$$f(x)g(y) + h(y) = f(x+y).$$

10. Решить функциональное уравнение

$$f(xy)g(y/x) = f^2(y).$$

11. Решить функциональное уравнение

$$f(x+y) = a^{xy} f(x)f(y).$$

12. Решить функциональное уравнение

$$f(xy) = [f(x)]^y.$$

13. Решить функциональное уравнение

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

14. Решить функциональное уравнение

$$f\big((x^n + y^n)^{1/n}\big) = af(x)f(y).$$

4.2. Метод дифференцирования по параметру

4.2.1. Рассматриваемые классы уравнений. Описание метода

Предварительные замечания. В некоторых случаях путем дифференцирования по параметру удается свести рассматриваемое функциональное уравнение к линейному уравнению с частными производными первого порядка. Это уравнение интегрируется методом, описанным в разд. 3.1. На заключительном этапе полученное решение надо подставить в исходное уравнение, чтобы исключить лишние решения (которые могут возникнуть из-за дифференцирования рассматриваемого уравнения по параметру).

Рассматриваемые классы функциональных уравнений. Будем рассматривать линейные функциональные уравнения вида

$$w(x,t) = \theta(x,t,a)w\big(\varphi(x,t,a), \psi(x,t,a)\big), \tag{4.2.1.1}$$

где x и t — независимые переменные, $w = w(x,t)$ — искомая функция, $\theta = \theta(x,t,a)$, $\varphi = \varphi(x,t,a)$, $\psi = \psi(x,t,a)$ — заданные функции, a — свободный параметр, который может принимать любые значения (на некотором интервале).

Будем считать, что при частном значении $a = a_0$ выполняются равенства

$$\theta(x,t,a_0) = 1, \quad \varphi(x,t,a_0) = x, \quad \psi(x,t,a_0) = t, \tag{4.2.1.2}$$

т. е. при $a = a_0$ рассматриваемое функциональное уравнение (4.2.1.1) превращается в тождество.

Замечание 4.4. *Функциональные уравнения вида (4.2.1.1) возникают при решении некоторых обратных задач математической физики, когда по заданным свойствам решений требуется определить вид соответствующих нелинейных уравнений (такие задачи будут рассматриваться далее в главе 6).*

Описание метода. Разложим (4.2.1.1) в ряд по параметру a в окрестности a_0 с учетом равенств (4.2.1.2). С точностью до малых членов порядка $o(a-a_0)$ получим

$$\begin{aligned}\varphi(x,t,a) &\simeq x+\varphi_a^\circ(x,t)\Delta a,\\ \psi(x,t,a) &\simeq t+\psi_a^\circ(x,t)\Delta a,\\ \theta(t,x,a) &\simeq 1+\theta_a^\circ(x,t)\Delta a,\\ w\bigl(\varphi(x,t,a),\psi(x,t,a)\bigr) &\simeq w\bigl(x+\varphi_a^\circ(x,t)\Delta a,\; t+\psi_a^\circ(x,t)\Delta a\bigr)\simeq\\ &\simeq w(x,t)+\varphi_a^\circ(x,t)\Delta a\, w_x+\psi_a^\circ(x,t)\Delta a\, w_t,\end{aligned}\tag{4.2.1.3}$$

где использованы обозначения

$$\Delta a=a-a_0,\quad \varphi_a^\circ(x,t)=\frac{\partial\varphi}{\partial a}\bigg|_{a=a_0},\quad \psi_a^\circ(x,t)=\frac{\partial\psi}{\partial a}\bigg|_{a=a_0},\quad \theta_a^\circ(x,t)=\frac{\partial\theta}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}.$$

Подставив два последних соотношения (4.2.1.3) в правую часть уравнения (4.2.1.1), с точностью до $o(\Delta a)$ имеем

$$\begin{aligned}\theta(x,t,a)w\bigl(\varphi(x,t,a),\psi(x,t,a)\bigr) &\simeq w(x,t)+\\ &+[\varphi_a^\circ(x,t)w_x+\psi_a^\circ(x,t)w_t+\theta_a^\circ(x,t)w]\Delta a.\end{aligned}\tag{4.2.1.4}$$

Заменим теперь правую часть уравнения (4.2.1.1) правой частью соотношения (4.2.1.4) и сократим в обеих частях функцию $w(x,t)$. Затем поделим полученное выражение на Δa и перейдем к пределу при $\Delta a\to 0$. В результате приходим к линейному уравнению с частными производными первого порядка для функции w:

$$\varphi_a^\circ(x,t)w_x+\psi_a^\circ(x,t)w_t+\theta_a^\circ(x,t)w=0.\tag{4.2.1.5}$$

Для решения уравнения (4.2.1.5) надо рассмотреть соответствующую характеристическую систему УрЧП (см. разд. 3.1):

$$\frac{dx}{\varphi_a^\circ(x,t)}=\frac{dt}{\psi_a^\circ(x,t)}=-\frac{dw}{\theta_a^\circ(x,t)w}.\tag{4.2.1.6}$$

Пусть

$$Q_1(x,t)=C_1,\quad Q_2(x,t,w)=C_2\tag{4.2.1.7}$$

— независимые интегралы характеристической системы (4.2.1.6). Тогда общее решение уравнения (4.2.1.5) имеет вид

$$Q_2(x,t,w)=F\bigl(Q_1(x,t)\bigr),\tag{4.2.1.8}$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Из решения (4.2.1.8) надо выразить w и подставить его для проверки в исходное уравнение (4.2.1.1) [могли появится лишние решения; возможны также случаи, когда решение уравнения с частными производными (4.2.1.5) вообще не является решением функционального уравнения (4.2.1.1): см. далее пример 4.7].

Замечание 4.5. *Уравнение (4.2.1.5) можно получить из (4.2.1.1) путем дифференцирования по параметру a, после чего надо положить $a = a_0$. Другими словами, уравнение (4.2.1.5) можно вывести с помощью формулы*

$$\left[\frac{\partial}{\partial a}\theta(x,t,a)w\bigl(\varphi(x,t,a),\psi(x,t,a)\bigr)\right]_{a=a_0} = 0,$$

которую легко запомнить.

Замечание 4.6. *Второй интеграл (4.2.1.7) удобно выбрать линейным относительно w, т. е. $Q_2(x,t,w) = \xi(x,t)w$, а формулу (4.2.1.8) переписать в виде, разрешенном относительно w.*

Замечание 4.7. *В вырожденных случаях $\varphi_a^\circ(x,t) \equiv 0$ и $\psi_a^\circ(x,t) \equiv 0$ уравнение (4.2.1.5) легко интегрируется, поскольку является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением, в котором одна из независимых переменных играет роль параметра.*

Замечание 4.8. *Метод дифференцирования по параметру можно использовать также для решения более сложных функциональных уравнений вида*

$$w\bigl(\varphi_1(x,t,a),\psi_1(x,t,a)\bigr) = \theta(x,t,a)w\bigl(\varphi_2(x,t,a),\psi_2(x,t,a)\bigr) + \eta(x,t,a),$$

которые обращаются в тождество при некотором значении $a = a_0$ (некоторые уравнения такого рода приведены для упражнений в конце разд. 4.2.2).

4.2.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по параметру

► Пример 4.5. *Автомодельные решения*, которые часто встречаются в математической физике, можно определить как решения, инвариантные относительно преобразования масштабирования, т. е. удовлетворяющие функциональному уравнению:

$$w(x,t) = a^k w(a^m x, a^n t), \tag{4.2.2.1}$$

где k, m, n — некоторые заданные константы, a — произвольная положительная постоянная.

Уравнение (4.2.2.1) обращается в тождество при $a = 1$. Дифференцируя (4.2.2.1) по a, а затем полагая $a = 1$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка:

$$mxw_x + ntw_t + kw = 0. \tag{4.2.2.2}$$

Первые интегралы соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{mx} = \frac{dt}{nt} = -\frac{dw}{kw}$$

записываются так:

$$xt^{-m/n} = C_1, \qquad t^{k/n} w = C_2 \qquad (n \neq 0).$$

Поэтому общее решение уравнения с частными производными (4.2.2.2) имеет вид

$$w(x,t) = t^{-k/n} F(z), \qquad z = xt^{-m/n}, \tag{4.2.2.3}$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Прямой проверкой можно убедиться, что выражение (4.2.2.3) является решением рассматриваемого функционального уравнения (4.2.2.1). ◄

► **Пример 4.6.** Рассмотрим функциональное уравнение

$$w(x,t) = a^k w(a^m x, t + \beta \ln a), \tag{4.2.2.4}$$

где k, m, β — некоторые заданные константы, $a > 0$ — произвольная постоянная.

Уравнение (4.2.2.4) обращается в тождество при $a = 1$. Дифференцируя (4.2.2.4) по a, а затем полагая $a = 1$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка:

$$mxw_x + \beta w_t + kw = 0. \tag{4.2.2.5}$$

Соответствующая характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{mx} = \frac{dt}{\beta} = -\frac{dw}{kw}$$

допускает первые интегралы:

$$x \exp(-mt/\beta) = C_1, \qquad w \exp(kt/\beta) = C_2.$$

Поэтому общее решение уравнения с частными производными (4.2.2.5) имеет вид

$$w(x,t) = \exp(-kt/\beta) F(z), \qquad z = x \exp(-mt/\beta), \tag{4.2.2.6}$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что выражение (4.2.2.6) является решением функционального уравнения (4.2.2.4). ◄

► **Пример 4.7.** Рассмотрим теперь функциональное уравнение

$$w(x,t) = a^k w\big(x + (1-a)t,\, a^n t\big), \tag{4.2.2.7}$$

где $a > 0$ — любое, n — некоторая константа.

Уравнение (4.2.2.7) обращается в тождество при $a = 1$. Дифференцируя (4.2.2.7) по a, а затем полагая $a = 1$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка:

$$-tw_x + ntw_t + kw = 0. \tag{4.2.2.8}$$

Соответствующая характеристическая система

$$-\frac{dx}{t} = \frac{dt}{nt} = -\frac{dw}{kw}$$

имеет первые интегралы:

$$t + nx = C_1, \qquad wt^{k/n} = C_2.$$

Поэтому общее решение уравнения с частными производными (4.2.2.8) имеет вид

$$w(x,t) = t^{-k/n} F(nx + t), \tag{4.2.2.9}$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Подставим выражение (4.2.2.9) в исходное уравнение (4.2.2.7). После сокращения на $t^{-k/n}$ получим

$$F(nx + t) = F(nx + \sigma t), \qquad \sigma = (1 - a)n + a^n. \tag{4.2.2.10}$$

Отсюда при $F(z) \neq \text{const}$ имеем $\sigma = 1$, или

$$(1 - a)n + a^n = 1. \tag{4.2.2.11}$$

Поскольку равенство (4.2.2.10) должно выполняться для любых $a > 0$, то и (17) должно выполняться для любых $a > 0$. Это может быть только при одном значении:

$$n = 1.$$

В этом случае решение уравнения (4.2.2.7) дается формулой [см. (4.2.2.9) при $n = 1$]:

$$w(x,t) = t^{-k} F(x + t), \tag{4.2.2.12}$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Если $n \neq 1$, то уравнение (4.2.2.7) имеет только вырожденное решение $w(x,t) = Ct^{-k/n}$, где C — произвольная постоянная [вырожденное решение соответствует $F = \text{const}$ в (4.2.2.10)]. ◄

Задачи и упражнения к разд. 4.2

1. Решить функциональное уравнение

$$w(x,t) = w(x + ak_1, t + ak_2).$$

2. Решить функциональное уравнение

$$w(x + ak_1, t) = w(x, t + ak_2).$$

3. Решить функциональное уравнение

$$w(a^m x, t) = a^k w(x, a^n t).$$

4. Решить функциональное уравнение

$$w(a^m x, t) = w(x, a^n t) + k \ln a.$$

5. Решить функциональное уравнение

$$w(a^m x, t) = a^k w(x, t + \beta \ln a).$$

6. Решить функциональное уравнение

$$w(x, t) = w(x + ak_1, t + ak_2) + ac.$$

7. Решить функциональное уравнение

$$w(x, t) = e^{ac} w(x + ak_1, t + ak_2).$$

8. Решить функциональное уравнение

$$w(x + ak_1, t) = e^{ac} w(x, t + ak_2).$$

Замечание 4.9. *Для решения уравнений 1–8 использовать метод дифференцирования по параметру* a *(см. замечание 4.8).*

4.3. Метод исключения аргумента с помощью тестовых функций

4.3.1. Рассматриваемые классы уравнений. Описание метода

Будем исследовать функциональные уравнения вида (4.2.1.1), удовлетворяющие условиям (4.2.1.2).

Вместо уравнения (4.2.1.1) рассмотрим более общее вспомогательное функциональное уравнение

$$w(x, t) = \theta(x, t, \xi) w\big(\varphi(x, t, \xi), \psi(x, t, \xi)\big), \tag{4.3.1.1}$$

где $\xi = \xi(x, t)$ — произвольная функция.

Основная идея метода: если нам удастся получить точное решение уравнения (4.3.1.1), то это решение будет одновременно и решением исходного функционального уравнения (4.2.1.1) [так как уравнение (4.2.1.1) соответствует частному случаю уравнения (4.3.1.1) при $\xi = a$].

Поскольку функция $\xi = \xi(x, t)$ является произвольной, выберем теперь тестовую (пробную) функцию, исходя из условия

$$\psi(x, t, \xi) = b, \tag{4.3.1.2}$$

где b — некоторая постоянная (обычно удобно полагать $b = 1$ или $b = 0$). Разрешив (4.3.1.2) относительно ξ и подставив полученную тестовую функцию $\xi = \xi(x, t)$ в (4.3.1.1), имеем

$$w(x, t) = \theta(x, t, \xi(x, t)) \Phi(\varphi(x, t, \xi(x, t))), \tag{4.3.1.3}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi) \equiv w(\varphi, b)$.

Выражение (4.3.1.3) является основой для построения точного решения исходного функционального уравнения: его надо подставить в (4.2.1.1) и выяснить, для каких функций $\Phi(\varphi)$ оно будет решением (при этом могут появиться некоторые ограничения на вид определяющих функций θ, φ, ψ).

Замечание 4.10. *Условие (4.3.1.2) соответствует исключению второго аргумента (поскольку он заменяется на константу) в правой части уравнения (4.3.1.1).*

Замечание 4.11. *Вместо условия (4.3.1.2) функцию $\xi = \xi(x,t)$ можно выбирать из аналогичного условия: $\varphi(x,t,\xi) = b$.*

4.3.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом исключения аргумента

► Пример 4.8. Рассмотрим функциональное уравнение (4.2.2.1), которое является частным случаем уравнения (4.2.1.1) при $\theta(x,t,a) = a^k$, $\varphi(x,t,a) = a^m x$, $\psi(x,t,a) = a^n t$.

Следуя описанной в разд. 4.3.1 схеме, используем вспомогательное уравнение

$$w(x,t) = \xi^k w(\xi^m x, \xi^n t), \tag{4.3.2.1}$$

где тестовую функцию ξ согласно (4.3.1.2) определим из условия

$$\xi^n t = 1 \qquad (b = 1). \tag{4.3.2.2}$$

Отсюда находим $\xi = t^{-1/n}$. Подставив эту зависимость в (4.3.2.1), имеем

$$w(x,t) = t^{-k/n}\Phi(t^{-m/n}x), \tag{4.3.2.3}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi) \equiv w(\varphi, 1)$.

Прямой проверкой легко установить, что выражение (4.3.2.3) является решением рассматриваемого функционального уравнения (4.2.2.1) для произвольной функции Φ и совпадает (с точностью до переобозначения) с решением (4.2.2.3), полученным методом дифференцирования по параметру. ◄

Замечание 4.12. *Вместо 1 в правой части равенства (4.3.2.2) можно было взять любую отличную от нуля константу b; результат был бы тем же самым (с точностью до переопределения произвольной функции Φ).*

► Пример 4.9. Рассмотрим функциональное уравнение (4.2.2.4), которое является частным случаем уравнения (4.2.1.1) при $\theta(x,t,a) = a^k$, $\varphi(x,t,a) = a^m x$, $\psi(x,t,a) = t + \beta\ln a$.

Следуя описанной схеме, рассмотрим более общее вспомогательное уравнение

$$w(x,t) = \xi^k w(\xi^m x, t + \beta\ln\xi). \tag{4.3.2.4}$$

Тестовую функцию ξ найдем из условия

$$t + \beta\ln\xi = 0 \qquad (b = 0).$$

Имеем $\xi = \exp(-t/\beta)$. Подставив эту зависимость в (4.3.2.4), получим

$$w(x,t) = e^{-kt/\beta}\Phi(xe^{-mt/\beta}), \tag{4.3.2.5}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi) \equiv w(\varphi, 0)$. Прямой проверкой можно убедиться, что выражение (4.3.2.5) является решением функционального уравнения (4.2.2.4) для произвольной функции Φ и совпадает с решением (4.2.2.6), полученным методом дифференцирования по параметру. ◄

► Пример 4.10. Рассмотрим теперь функциональное уравнение (4.2.2.7), которое является частным случаем уравнения (4.2.1.1) при $\theta(x,t,a) = a^k$, $\varphi(x,t,a) = x + (1-a)t$, $\psi(x,t,a) = a^n t$.

Следуя описанной схеме, рассмотрим вспомогательное уравнение

$$w(x,t) = \xi^k w\bigl(x + (1-\xi)t,\ \xi^n t\bigr). \tag{4.3.2.6}$$

где тестовую функцию ξ согласно (4.3.1.2) определим из условия (4.3.2.2). Имеем $\xi = t^{-1/n}$. Подставив эту зависимость в (4.3.2.6), получим

$$w(x,t) = t^{-k/n}\Phi(z), \qquad z = x + t - t^{(n-1)/n}, \tag{4.3.2.7}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi) \equiv w(\varphi, 1)$.

Подставим выражение (4.3.2.7) в исходное уравнение (4.2.2.7). После сокращения на $t^{-k/n}$ имеем

$$\Phi\bigl(x + t - t^{(n-1)/n}\bigr) = \Phi\bigl(x + (1 - a + a^n)t - a^{n-1}t^{(n-1)/n}\bigr). \tag{4.3.2.8}$$

Поскольку это равенство должно выполняться для всех $a > 0$, то имеются две возможности:

$$\begin{aligned} &1) \qquad n\text{ — любое}, \quad \Phi = C = \text{const};\\ &2) \qquad n = 1, \qquad\quad \Phi\text{ — любая}. \end{aligned} \tag{4.3.2.9}$$

Во втором случае, соответствующем значению $n = 1$ в функциональном уравнении (4.2.2.7), его решение записывается так:

$$w(x,t) = t^{-k}F(x+t), \tag{4.3.2.10}$$

где $F(z)$ — произвольная функция, $F(z) = \Phi(z-1)$. Видно, что формула (4.3.2.10) совпадает с решением (4.2.2.12), полученным методом дифференцирования по параметру. ◄

Замечание 4.13. *Метод исключения аргумента значительно проще метода дифференцирования по параметру, поскольку он связан только с разрешением алгебраических (трансцендентных) уравнений вида (4.3.1.2) относительно ξ и не связан с выводом и решением соответствующих дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.*

Замечание 4.14. *Метод исключения аргумента с помощью тестовых функций не является строгим математическим методом. Однако решения конкретных функциональных уравнений, полученные методом исключения аргумента в разд. 4.3.2, совпадают с решениями этих уравнений, полученными в разд. 4.2.2 методом дифференцирования по параметру. Следует отметить, что промежуточные результаты решения уравнения (4.2.2.12) этими методами не всегда совпадают [сравни формулы (4.2.2.9) и (4.3.2.7)].*

✤ *Задачи и упражнения к разд. 4.3*

См. задачи и упражнения к разд. 4.2.

Литература к главе 4

Ацел Я., Домбр Ж. *Функциональные уравнения с несколькими переменными*. М.: Физматлит, 2003.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Boca Raton—London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007 (Chapters 17 and T12).

5. Элементарная теория инвариантов: Уравнения с частными производными

Предварительные замечания. В данной главе описан простой метод, позволяющий находить точные решения нелинейных уравнений математической физики. Этот метод основан на использовании линейных преобразований сдвига и масштабирования (и их комбинаций) и позволяет единообразно находить наиболее распространенные инвариантные решения нелинейных УрЧП. Приведены примеры построения автомодельных и других точных решений нелинейных уравнений теории тепло- и массопереноса, теории волн и гидродинамики. Рассмотрены также некоторые обратные задачи, в которых требуется определить вид уравнения, обладающего решениями с заданными свойствами. Важно отметить, что данный метод проводит к небольшому объему промежуточных вычислений. При его практическом применении, в основном, надо уметь решать самые простые алгебраические уравнения (или системы таких уравнений) и уметь дифференцировать.

5.1. Описание метода построения решений, основанного на теории инвариантов

5.1.1. Преобразования, сохраняющие вид уравнения, и их инварианты

Будем рассматривать обратимые преобразования вида

$$x = X(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}), \quad t = T(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}), \quad u = U(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}). \tag{5.1.1.1}$$

Говорят, что уравнение с частными производными

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \tag{5.1.1.2}$$

инвариантно относительно преобразования (5.1.1.1), если в результате подстановки (5.1.1.1) в (5.1.1.2) получим точно такое же уравнение

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{t}\bar{t}}, \dots) = 0 \tag{5.1.1.3}$$

Функция F в уравнениях (5.1.1.1) и (5.1.1.2) одинакова.

Функция $I(x, t, u)$ (отличная от константы) называется *инвариантом преобразования* (5.1.1.1), если она сохраняется при этом преобразовании, т. е.

$$I(x, t, u) = I(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}).$$

Замечание 5.1. *Если $I = I(x, t, u)$ — инвариант преобразования (5.1.1.1), то $\Psi(I)$, где Ψ — произвольная функция, тоже является инвариантом данного преобразования.*

5.1.2. Процедура построения точных решений

Конкретизируем описанную ранее (см. главу 2 «Элементарная теория инвариантов: Алгебраические и обыкновенные дифференциальные уравнения») общую схему использования инвариантов для анализа математических уравнений применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными.

На первом этапе ищется *однопараметрическое преобразование*

$$x = X(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}; c), \quad t = T(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}; c), \quad u = U(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}; c), \tag{5.1.2.1}$$

которое сохраняет вид уравнения (5.1.1.2). Преобразование (5.1.2.1) зависит от *свободного параметра* $c \in [c_1, c_2]$ (причем само рассматриваемое уравнение (5.1.1.2) от этого параметра не зависит).

На втором этапе строятся два функционально-независимых инварианта преобразования (5.1.2.1):

$$I_1 = I_1(x, y, u), \qquad I_2 = I_2(x, y, u). \tag{5.1.2.2}$$

Инварианты (5.1.2.2) не зависят от параметра c и находятся путем исключения c из соотношений (5.1.2.1).

На третьем этапе инварианты (5.1.2.2) выбираются в качестве новых переменных и точное решение уравнения (5.1.1.2) ищется в виде

$$I_2 = \Phi(I_1), \tag{5.1.2.3}$$

где функция $\Phi = \Phi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, которое получается путем подстановки (5.1.2.3) в (5.1.1.2) (соответствующее решение называется *инвариантным решением*).

Как и ранее, в качестве преобразований (5.1.2.1) будем рассматривать только простейшие однопараметрические преобразования

$$x = \bar{x} + a_1, \quad t = \bar{t} + a_2, \quad u = \bar{u} + a_3 \quad (\textit{преобразование сдвига}); \tag{5.1.2.4}$$

$$x = b_1\bar{x}, \quad t = b_2\bar{t}, \quad u = b_3\bar{u} \quad (\textit{преобразование масштабирования}), \tag{5.1.2.5}$$

и их композиции. Здесь a_n и b_n ($n=1,\ 2,\ 3$) — постоянные величины, зависящие от свободного параметра c. Такие преобразования будем называть *простейшими преобразованиями*.

Ниже на конкретном примере показано, как определять инварианты простейших преобразований и вид соответствующих инвариантных решений.

► **Пример 5.1.** Рассмотрим преобразование, состоящее из преобразования сдвига по переменной x и преобразований масштабирования по переменным t и u:

$$x = \bar{x} + k\ln c, \qquad t = c\bar{t}, \qquad u = c^m\bar{u}, \tag{5.1.2.6}$$

где k и m — некоторые константы, $c > 0$ — свободный параметр.

Инварианты данного преобразования найдем путем исключения параметра c из соотношений (5.1.2.6) следующим образом. Сначала, выразив c из второго (наиболее простого) соотношения (5.1.2.6), получим

$$c = t/\bar{t}. \tag{5.1.2.7}$$

Подставив (5.1.2.7) в первое соотношение (5.1.2.6), последовательно имеем

$$x = \bar{x} + k\ln(t/\bar{t}) \implies x - k\ln t = \bar{x} - k\ln\bar{t}.$$

Поэтому функция

$$I_1 = x - k\ln t \tag{5.1.2.8}$$

является инвариантом преобразования (5.1.2.6). Подставив теперь (5.1.2.7) в третье соотношение (5.1.2.6), получим

$$u = (t/\bar{t})^m\bar{u} \implies ut^{-m} = \bar{u}\bar{t}^{-m}.$$

Поэтому второй инвариант преобразования (5.1.2.6) определяется формулой

$$I_2 = ut^{-m}. \tag{5.1.2.9}$$

Инвариантное решение ищем в виде (5.1.2.3) или более удобном эквивалентном виде (разрешенном относительно искомой функции u):

$$u = t^m\Phi(z), \qquad z = x - k\ln t, \tag{5.1.2.10}$$

где для удобства первый инвариант I_1 был переобозначен на z. Подставив выражение (5.1.2.10) в рассматриваемое уравнение с частными производными можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Phi = \Phi(z)$. ◄

Замечание 5.2. *Если в рассматриваемом УрЧП порядок старшей производный по x больше порядка старшей производный по t, то первый инвариант $I_1 = z$ следует выбирать линейным по x. В этом случае наиболее просто вычисляются частные производные по x.*

Замечание 5.3. *Не всякое преобразование имеет инварианты (см. замечание 5.8 после примера 5.9).*

5.2. Примеры построения точных решений нелинейных уравнений математической физики

5.2.1. Решения типа бегущей волны (построенные с помощью преобразований сдвига)

Решениями типа бегущей волны называются точные решения вида

$$u = \Phi(z), \qquad z = kx - \lambda t,$$

где $\Phi = \Phi(z)$ — некоторая функция, k и λ — некоторые константы или свободные параметры. Эти решения не меняются при однопараметрическом преобразовании сдвига независимых переменных вида $t = \bar{t} + ck$, $x = \bar{x} + c\lambda$, где c — произвольная постоянная.

► Пример 5.2. Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности

$$u_t = [f(u)u_x]_x. \tag{5.2.1.1}$$

Это уравнение не меняется при произвольном сдвиге по независимым переменным

$$t = \bar{t} + ck, \quad x = \bar{x} + c\lambda, \quad u = \bar{u}, \tag{5.2.1.2}$$

где c — свободный параметр, а k и λ — некоторые заданные числа (которые могут выбираться произвольно). Исключая из первых двух соотношений (5.2.1.2) параметр c находим один из инвариантов

$$\frac{x-\bar{x}}{\lambda} = \frac{t-\bar{t}}{k} \quad \Longrightarrow \quad kx - \lambda t = k\bar{x} - \lambda\bar{t} = I_1.$$

Вторым инвариантом здесь является $I_2 = u = \bar{u}$. В силу (5.1.2.3) уравнение (5.2.1.1) допускает решение вида

$$u = \Phi(z), \qquad z = kx - \lambda t. \tag{5.2.1.3}$$

Подставив (5.2.1.3) в (5.2.1.1), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$k^2[f(\Phi)\Phi'_z]'_z + \lambda\Phi'_z = 0.$$

Интегрируя дважды, получим его решение в неявном виде

$$k^2 \int \frac{f(\Phi)\,d\Phi}{\lambda\Phi + C_1} = -z + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ◄

Замечание 5.4. *Решения типа бегущей волны допускают уравнения общего вида, которые не зависят явно от независимых переменных:*

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0. \tag{5.2.1.4}$$

Подставляя (5.2.1.3) в (5.2.1.4), получим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Phi(z)$:

$$F(\Phi,\, k\Phi'_z,\, -\lambda\Phi'_z,\, k^2\Phi''_{zz},\, -k\lambda\Phi''_{zz},\, \lambda^2\Phi''_{zz},\, \ldots) = 0. \tag{5.2.1.5}$$

► Пример 5.3. Рассмотрим линейное волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{5.2.1.6}$$

Ищем его решение типа бегущей волны в виде (5.2.1.3). Подставив (5.2.1.3) в (5.2.1.6), после элементарных преобразований имеем

$$(a^2k^2 - \lambda^2)\Phi''_{zz} = 0. \tag{5.2.1.7}$$

Уравнению (5.2.1.7) можно тождественно удовлетворить, если приравнять нулю числовой множитель в круглых скобках. В результате получим два допустимых значения постоянных:

$$\lambda_1 = ak, \qquad \lambda_2 = -ak. \tag{5.2.1.8}$$

В этих случаях функция $\Phi(z)$ в (5.2.1.3) остается произвольной. Подставляя значения (5.2.1.8) в (5.2.1.3), имеем два решения

$$u_1 = \Phi_1(kx - akt), \qquad u_2 = \Phi_2(kx + akt),$$

где $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная. Поскольку волновое уравнение (5.2.1.6) линейно, в силу принципа линейной суперпозиции, его решения можно складывать. В результате получим составное решение Даламбера

$$u = \Phi_1(kx - akt) + \Phi_2(kx + akt), \tag{5.2.1.9}$$

которое является общим решением рассматриваемого уравнения. Без ограничения общности в (5.2.1.9) можно положить $k=1$, что соответствует переопределению функций Φ_1 и Φ_2.

Линейное решение $\Phi(z) = Az + B$, соответствующее обращению в нуль второй производной Φ''_{zz} в (5.2.1.7), не дает дополнительных решений. ◄

► **Пример 5.4.** Нетрудно проверить, что однородное уравнение Монжа — Ампера

$$u_{xt}^2 - u_{xx}u_{tt} = 0$$

имеет точное решение типа бегущей волны (5.2.1.3), где $\Phi(z)$ — произвольная функция, k и λ — произвольные постоянные. ◄

5.2.2. Автомодельные решения (построенные с помощью преобразований масштабирования)

Автомодельными решениями называются точные решения вида

$$u = t^k\Phi(z), \qquad z = t^m x,$$

где $\Phi = \Phi(z)$ — некоторая функция, k и m — некоторые константы. Эти решения не меняются при однопараметрическом преобразовании масштабирования переменных вида $t = c\bar{t}$, $x = c^{-m}\bar{x}$, $u = c^k\bar{u}$, где $c > 0$ — произвольная постоянная.

► **Пример 5.5.** Рассмотрим уравнение нестационарной теплопроводности с нелинейным источником степенного вида

$$u_t = u_{xx} + \beta u^n. \tag{5.2.2.1}$$

Ищем инвариантное преобразование масштабирования

$$x = a\bar{x}, \quad t = c\bar{t}, \quad u = b\bar{u}. \tag{5.2.2.2}$$

Подставив (5.2.2.2) в (5.2.2.1) и умножив все члены на c/b, имеем

$$\bar{u}_{\bar{t}} = \frac{c}{a^2}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + cb^{n-1}\beta\bar{u}^n.$$

Требуя совпадения с уравнением (5.2.2.1), получим два соотношения

$$\frac{c}{a^2} = 1, \qquad cb^{n-1} = 1.$$

Выразим параметры a и b через c:

$$a = \sqrt{c}, \quad b = c^{\frac{1}{1-n}}.$$

Подставляя эти величины в (5.1.2.5), находим инвариантное преобразование

$$x = \sqrt{c}\,\bar{x}, \quad t = c\bar{t}, \quad u = c^{\frac{1}{1-n}}\bar{u}, \tag{5.2.2.3}$$

содержащее свободный параметр $c > 0$.

Перейдем теперь к определению инвариантов. Из первых двух соотношений (5.2.2.3) исключаем c:

$$x = \left(\frac{t}{\bar{t}}\right)^{1/2}\bar{x} \quad \Longrightarrow \quad xt^{-1/2} = \bar{x}\bar{t}^{-1/2} \quad \Longrightarrow \quad I_1 = xt^{-1/2}. \tag{5.2.2.4}$$

Из второго и последнего соотношений (5.2.2.3) исключаем c:

$$u = \left(\frac{t}{\bar{t}}\right)^{\frac{1}{1-n}}\bar{u} \quad \Longrightarrow \quad ut^{\frac{1}{n-1}} = \bar{u}\bar{t}^{\frac{1}{n-1}} \quad \Longrightarrow \quad I_2 = ut^{\frac{1}{n-1}}. \tag{5.2.2.5}$$

Соотношение (5.1.2.3) с учетом (5.2.2.4)–(5.2.2.5) определяет вид автомодельного решения

$$u = t^{\frac{1}{1-n}}\Phi(z), \quad z = xt^{-1/2}. \tag{5.2.2.6}$$

Подставив (5.2.2.6) в (5.2.2.1), после несложных преобразований приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{1-n}\Phi - \frac{1}{2}z\Phi'_z = \Phi''_{zz} + \beta\Phi^n.$$

◀

Замечание 5.5. *Преобразование (5.1.2.5) часто удобнее записывать в виде*

$$t = c\bar{t}, \quad x = c^k\bar{x}, \quad u = c^m\bar{u} \qquad (c > 0), \tag{5.2.2.7}$$

а затем определять значения постоянных k и m, при которых сохраняется вид рассматриваемого уравнения (здесь c — свободный параметр).

► **Пример 5.6.** Проиллюстрируем использование преобразований масштабирования (5.2.2.7) на нелинейном уравнении теплопроводности

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \tag{5.2.2.8}$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Подставив (5.2.2.7) в (5.2.2.8), имеем

$$\bar{u}_{\bar{t}} = c^{1-2k}[f(c^m\bar{u})\bar{u}_{\bar{x}}]_{\bar{x}}, \tag{5.2.2.9}$$

Требуя совпадения вида уравнений (5.2.2.8) и (5.2.2.9) и учитывая произвольность функции $f(u)$, находим параметры используемого преобразования: $k = 1/2$ и $m = 0$. Отсюда следует, что уравнение (5.2.2.8) допускает автомодельное решение (показать это самостоятельно, рассуждая как в примере 5.5):

$$u = \Phi(z), \quad z = xt^{-/2}. \tag{5.2.2.10}$$

Подставив (5.2.2.10) в (5.2.2.8), получим ОДУ для функции $\Phi = \Phi(z)$:

$$[f(\Phi)\Phi'_z]'_z + \tfrac{1}{2} z\Phi'_z = 0. \qquad (5.2.2.11)$$

Общее решение этого нелинейного ОДУ можно получить только для нескольких функций $f(\Phi)$, в частности, при $f(\Phi) = \mathrm{const}$ (что соответствует линейному ОДУ). ◀

Замечание 5.6. *Начально-краевая задача для уравнения (5.2.2.8) (в области $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$) с начальным и граничным условиями вида*

$$u(x,0) = A, \quad u(t,0) = B \qquad (A \text{ и } B \text{ — произвольные постоянные}),$$

имеет автомодельное решение (5.2.2.10), где функция $\Phi = \Phi(z)$ описывается ОДУ (5.2.2.11) и граничными условиями

$$\Phi(0) = B, \quad \Phi(\infty) = A.$$

Примеры некоторых других уравнений, имеющих автомодельные решения, приведены в табл. 5.1 (используется сокращение ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение).

Таблица 5.1. Некоторые нелинейные уравнения математической физики, которые допускают автомодельные решения.

Уравнение	Его название	Вид решения	Итоговое ОДУ
$u_t = au_{xx} + buu_x$	Уравнение Бюргерса	$u = t^{-1/2}w(z)$, $z = xt^{-1/2}$	$aw'' + bww' + \frac{1}{2}zw' + \frac{1}{2}w = 0$
$u_t = au_{xx} + bu_x^2$	Потенциальное уравнение Бюргерса	$u = u(z)$, $z = xt^{-1/2}$	$au'' + b(u')^2 + \frac{1}{2}zu' = 0$
$u_t = f(u_x)u_{xx}$	Уравнение фильтрации	$u = t^{1/2}w(z)$, $z = xt^{-1/2}$	$2f(w')w'' + zw' - u = 0$
$u_{tt} = [f(u)u_x]_x$	Волновое уравнение	$u = u(z)$, $z = x/t$	$(z^2u')' = [f(u)u']'$
$u_{xx} + u_{yy} = au^n$	Уравнение теплопроводности с источником	$u = x^{\frac{2}{1-n}}w(z)$, $z = y/x$	$(1+z^2)w'' - \frac{2(1+n)}{1-n}zw' + {}$ $+ \frac{2(1+n)}{(1-n)^2}w - aw^n = 0$
$u_{xx} + au_yu_{yy} = 0$	Уравнение околозвукового течения газа	$u = x^{-3k-2}w(z)$, $z = x^ky$, k — любое	$\frac{a}{k+1}w'w'' + \frac{k^2}{k+1}z^2w'' -$ $- 5kzw' + 3(3k+2)w = 0$
$u_t = au_{xxx} + buu_x$	Уравнение Кортевега – де Фриза	$u = t^{-2/3}w(z)$, $z = xt^{-1/3}$	$aw''' + bww' + \frac{1}{3}zw' + \frac{2}{3}w = 0$
$u_yu_{xy} - u_xu_{yy} = au_{yyy}$	Уравнение пограничного слоя	$u = x^{\lambda+1}w(z)$, $z = x^\lambda y$, λ — любое	$(2\lambda+1)(w')^2 - (\lambda+1)ww'' =$ $= aw'''$

Аналогичный подход с успехом может использоваться для построения автомодельных решений систем уравнений с частными производными.

► Пример 5.7. Рассмотрим систему уравнений стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине:

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y &= au_{yy}, \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.2.12}$$

Сделаем в (5.2.2.12) растяжение независимых и зависимых переменных по правилу

$$x = c\bar{x}, \quad y = c^k\bar{y}, \quad u = c^m\bar{u}, \quad v = c^n\bar{v}, \tag{5.2.2.13}$$

где $c > 0$ — произвольная постоянная, а константы k, m, n подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Подставим (5.2.2.13) в (5.2.2.12), а затем умножим полученные уравнения на подходящие постоянные множители. В результате получим

$$\begin{aligned} \bar{u}\bar{u}_{\bar{x}} + c^{n-m-k+1}\bar{v}\bar{u}_{\bar{y}} &= c^{-m-2k+1}a\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}}, \\ \bar{u}_{\bar{x}} + c^{n-m-k+1}v_{\bar{y}} &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.2.14}$$

Потребуем, чтобы вид уравнений преобразованной системы (5.2.2.14) совпал с видом уравнений исходной системы (5.2.2.12). Это условие дает два линейных алгебраических уравнения для констант k, m, n:

$$\begin{aligned} n - m - k + 1 &= 0, \\ -2k - m + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Разрешив их относительно m и n, получим

$$m = 1 - 2k, \quad n = -k, \tag{5.2.2.15}$$

где показатель k может быть выбран произвольно. Подставим соотношения (5.2.2.15) в преобразование (5.2.2.13):

$$x = c\bar{x}, \quad y = c^k\bar{y}, \quad u = c^{1-2k}\bar{u}, \quad v = c^{-k}\bar{v}.$$

Находим отсюда инварианты путем исключения параметра c:

$$\begin{aligned} &y = \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^k \bar{y} && \Longrightarrow && yx^{-k} = \bar{y}\bar{x}^{-k} = I_1 = \zeta; \\ &u = \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^{1-2k} \bar{u} && \Longrightarrow && ux^{2k-1} = \bar{u}\bar{x}^{2k-1} = I_2; \\ &v = \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^k \bar{v} && \Longrightarrow && vx^k = \bar{v}\bar{x}^k = I_3. \end{aligned}$$

Решение ищется в виде $I_2 = U(I_1)$, $I_3 = V(I_1)$, т. е.

$$ux^{2k-1} = U(\zeta), \quad vx^k = V(\zeta).$$

Разрешив эти соотношения относительно искомых функций, имеем

$$u(x, y) = x^{1-2k}U(\zeta), \quad v(x, y) = x^{-k}V(\zeta), \quad \zeta = yx^{-k}, \tag{5.2.2.16}$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (5.2.2.16) в исходную систему (5.2.2.12), в итоге получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U = U(\zeta)$ и $V = V(\zeta)$:

$$\begin{aligned} U\big[(1-2k)U - k\zeta U'_\zeta\big] + VU'_\zeta &= aU''_{\zeta\zeta}, \\ (1-2k)U - k\zeta U'_\zeta + V'_\zeta &= 0. \end{aligned}$$ ◄

5.2.3. Другие инвариантные решения (построенные с помощью композиций преобразований сдвига и масштабирования)

Ниже на конкретных примерах показано, каким образом можно находить инвариантные решения нелинейных уравнений математической физики с помощью композиций преобразований сдвига и масштабирования.

► Пример 5.8. Рассмотрим уравнение Клейна—Гордона с нелинейностью экспоненциального вида

$$u_{tt} = u_{xx} + \beta e^{\lambda u}. \tag{5.2.3.1}$$

Ищем инвариантное преобразование в виде композиции преобразований сдвига и масштабирования:

$$x = a\bar{x}, \quad t = c\bar{t}, \quad u = \bar{u} + b. \tag{5.2.3.2}$$

Подставив (5.2.3.2) в (5.2.3.1) и умножив на c^2, получим

$$\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{c^2}{a^2}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + c^2 e^{\lambda b}\beta e^{\lambda \bar{u}}.$$

Чтобы это уравнение совпало с (5.2.3.1), надо положить

$$\frac{c^2}{a^2} = 1, \qquad c^2 e^{\lambda b} = 1.$$

Отсюда имеем

$$a = c, \quad b = -\frac{2}{\lambda}\ln c$$

и преобразование (5.2.3.2) принимает вид

$$x = c\bar{x}, \quad t = c\bar{t}, \quad u = \bar{u} - \frac{2}{\lambda}\ln c, \tag{5.2.3.3}$$

где $c > 0$ — произвольная постоянная.

Исключая из соотношений (5.2.3.2) параметр c, находим инварианты

$$I_1 = \frac{x}{t} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}}, \qquad I_2 = u + \frac{2}{\lambda}\ln t = \bar{u} + \frac{2}{\lambda}\ln \bar{t}. \tag{5.2.3.4}$$

Соотношение (5.1.2.3) с учетом (5.2.3.4) определяет вид инвариантного решения

$$w = \Phi(z) - \frac{2}{\lambda}\ln t, \qquad z = \frac{x}{t}. \tag{5.2.3.5}$$

Подставив (5.2.3.5) в (5.2.3.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(z^2\Phi'_z)'_z + \frac{2}{\lambda} = \Phi''_{zz} + \beta e^{\lambda\Phi}.$$

◄

Замечание 5.7. *Преобразование (5.2.3.2) часто удобнее записывать в виде*

$$t = c\bar{t}, \quad x = c^k\bar{x}, \quad u = \bar{u} + m\ln c \qquad (c > 0), \tag{5.2.3.6}$$

а затем определять значения постоянных k и m, при которых сохраняется вид рассматриваемого уравнения (здесь c — свободный параметр).

► Пример 5.9. Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности

$$u_t = (u^n u_x)_x. \tag{5.2.3.7}$$

Ищем инвариантное преобразование в виде композиции преобразований сдвига и масштабирования:

$$x = a\bar{x}, \quad t = \bar{t} + b, \quad u = c\bar{u}. \tag{5.2.3.8}$$

Подставив (5.2.3.8) в (5.2.3.7) и поделив на c, получим

$$\bar{u}_{\bar{t}} = \frac{c^n}{a^2}(\bar{u}^n \bar{u}_{\bar{x}})_{\bar{x}}. \tag{5.2.3.9}$$

Требование совпадения (5.2.3.9) с уравнением (5.2.3.7) дает одно условие

$$\frac{c^n}{a^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = c^{n/2},$$

где c — произвольная постоянная. При этом другой параметр b остается произвольным, т. е. полученное инвариантное преобразование

$$x = c^{n/2}\bar{x}, \quad t = \bar{t} + b, \quad u = c\bar{u} \tag{5.2.3.10}$$

является двухпараметрическим.

Поскольку для применимости используемого метода требуется однопараметрическое инвариантное преобразование положим

$$b = f(c), \tag{5.2.3.11}$$

где вид функции f будет определяться далее. Исключая параметр c из двух последних соотношений (5.2.3.10) с учетом (5.2.3.11), имеем

$$t = \bar{t} + f\Big(\frac{u}{\bar{u}}\Big). \tag{5.2.3.12}$$

Добавив к обеим частям (5.2.3.12) функцию $\varphi(u)$, получим

$$t + \varphi(u) = \bar{t} + \varphi(u) + f\Big(\frac{u}{\bar{u}}\Big).$$

Это равенство будет определять инвариант $I(t, u) = I(\bar{t}, \bar{u})$, если выполняется соотношение

$$\varphi(u) + f\Big(\frac{u}{\bar{u}}\Big) = \varphi(\bar{u}), \tag{5.2.3.13}$$

которое можно рассматривать как функциональное уравнение. Считая u и $\bar{u}$ независимыми переменными величинами, методом дифференцирования (см. разд. 4.1), можно найти решение уравнения (5.2.3.13):

$$f(c) = A \ln c, \tag{5.2.3.14}$$

где A — произвольная постоянная. Подставив (5.2.3.11) в (5.2.3.10) с учетом (5.2.3.14), получим

$$x = c^{n/2}\bar{x}, \quad t = \bar{t} + A \ln c, \quad u = c\bar{u} \tag{5.2.3.15}$$

При $A \neq 0$ выразим из второго соотношения (5.2.3.15) параметр c через t и подставим в оставшиеся соотношения. В результате находим инварианты

$$I_1 = xe^{knt} = \bar{x}e^{kn\bar{t}}, \quad I_2 = ue^{2kt} = \bar{u}e^{2k\bar{t}}, \quad \text{где} \quad k = -\frac{1}{2A}. \tag{5.2.3.16}$$

Используя теперь формулу (5.1.2.3), определяем вид точного решения уравнения (5.2.3.7):

$$u = e^{-2kt}\Phi(z), \qquad z = xe^{knt}. \tag{5.2.3.17}$$

Подставив (5.2.3.17) в (5.2.3.7), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\Phi(z)$:

$$-2k\Phi + knz\Phi'_z = (\Phi^n\Phi'_z)'_z. \qquad \blacktriangleleft$$

Замечание 5.8. *Преобразование (5.2.3.10) при $b = c$ сохраняет вид уравнения (5.2.3.7), но не имеет инвариантов. Отсюда следует, что не каждое преобразование, сохраняющее вид уравнения, имеет инварианты.*

Замечание 5.9. *Точные решения вида*

$$u = e^{kt}\Phi(z), \qquad z = xe^{mt},$$

где k и m — некоторые константы, называются предельными автомодельными решениями. Такие решения инвариантны относительно композиции преобразования сдвига по t и преобразований масштабирования по x и u.

Основные ограничения метода построения решений, основанного на теории инвариантов:

1) не всегда существует преобразование (отличное от тождественного), сохраняющее вид уравнения;

2) не всякое преобразование, сохраняющее вид уравнения, можно эффективно использовать (преобразование должно зависеть от свободного параметра);

3) не всегда существует инвариант заданного преобразования.

В табл. 5.2 приведены примеры инвариантных решений, которые могут быть получены путем использования композиций преобразований сдвига и масштабирования, сохраняющих вид нелинейных уравнений математической физики.

Задачи и упражнения к разд. 5.2

1. Найти автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности (5.2.3.7) (решение более общего вида, чем (5.2.2.10)).

2. Найти решение нелинейного уравнения теплопроводности (5.2.3.7), основанное на инвариантном преобразовании вида

$$x = \bar{x} + a, \quad t = b\bar{t}, \quad u = c\bar{u}.$$

3. Найти автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности с источником

$$u_t = a(u^n u_x)_x + bu^k.$$

Таблица 5.2. Инвариантные решения, которые могут быть получены путем использования композиций преобразований сдвига и масштабирования, сохраняющих вид уравнений (c — произвольная постоянная, $c > 0$).

Инвариантные преобразования	Вид инвариантных решений	Примеры уравнений
$t = \bar{t} + ck,\ \ x = \bar{x} + c\lambda$	$u = u(z),\ \ z = kx - \lambda t$	$u_t = [f(u)u_x]_x$
$t = c\bar{t},\ \ x = c^k\bar{x},\ \ u = c^m\bar{u}$	$u = t^m w(z),\ \ z = xt^{-k}$	Уравнения см. в табл. 5.1
$t = \bar{t} + \ln c,\ \ x = c^k\bar{x},\ \ u = c^m\bar{u}$	$u = e^{mt}w(z),\ \ z = xe^{-kt}$	$u_t = a(u^n u_x)_x$; $k = \frac{1}{2}mn$, m — любое
$t = c\bar{t},\ \ x = \bar{x} + k\ln c,\ \ u = c^m\bar{u}$	$u = t^m w(z),\ \ z = x - k\ln t$	$u_t = a(u^n u_x)_x$; $m = -1/n$, k — любое
$t = c\bar{t},\ \ x = c^\beta\bar{x},\ \ u = \bar{u} + \alpha\ln c$	$u = w(z) + \alpha\ln t,\ \ z = xt^{-\beta}$	$u_t = (e^u u_x)_x$; $\alpha = 2\beta - 1$, β — любое
$t = c\bar{t},\ \ x = \bar{x} + \beta\ln c,\ \ u = \bar{u} + \alpha\ln c$	$u = w(z) + \alpha\ln t$, $z = x - \beta\ln t$	$u_{xt}^2 - u_{xx}u_{tt} = 0$; α, β — любые
$t = \bar{t} + c,\ x = \bar{x} + c\lambda,\ u = \bar{u} + ck$	$u = w(z) + kt,\ \ z = x - \lambda t$	$u_t = f(u_x)u_{xx}$; k, λ — любые
$t = \bar{t} + \ln c,\ x = \bar{x} + k\ln c,\ u = c^m\bar{u}$	$u = e^{mt}w(z),\ \ z = x - kt$	$u_{xt}^2 - u_{xx}u_{tt} = 0$; k, m — любые

4. Найти инвариантные точные решения нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x.$$

5. Найти инвариантное решение стационарного уравнения теории горения с экспоненциальным тепловыделением

$$u_{xx} + u_{yy} = \beta e^{\lambda u}.$$

6. Найти автомодельное и другие инвариантные точные решения уравнения нелинейной фильтрации

$$u_t = au_x^k u_{xx}.$$

7. Найти автомодельное и другие инвариантные точные решения нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} = a(u^n u_x)_x.$$

8. Найти инвариантные точные решения нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x.$$

9. Найти инвариантные точные решения уравнения околозвукового газового потока

$$u_{xx} + au_y u_{yy} = 0,$$

основанные на поиске инвариантных композиций преобразований сдвига и масштабирования.

10. Найти инвариантные точные решения уравнения

$$u_{xx} + F(u_x, u_y)u_{yy} = 0.$$

11. Найти инвариантные точные решения уравнения Монжа—Ампера

$$u_{xy}^2 = u_{xx}u_{yy}.$$

12. Найти инвариантные точные решения уравнения Буссинеска:

$$u_{tt} + a(uu_x)_x + bu_{xxxx} = 0.$$

5.3. Обратные задачи (определение вида уравнения по его свойствам)

5.3.1. Предварительные замечания

До сих пор мы искали точные решения заданных нелинейных уравнений с частными производными. Однако иногда требуется определить вид уравнения, обладающего заданными свойствами (или имеющего определенные решения). Такие задачи называются *обратными задачами*. В некоторых случаях решение обратных задач сводится к решению функциональных уравнений, методы решения которых описаны ранее в главе 4. Ниже приведены несколько примеров, иллюстрирующих постановку обратных задач и методы их решения.

5.3.2. Примеры обратных задач и их решений

► Пример 5.10. Рассмотрим нелинейное уравнение параболического типа достаточно общего вида

$$u_t = au_{xx} + F(u, u_x). \tag{5.3.2.1}$$

Требуется найти наиболее общую функцию $F = F(u, w)$, для которой уравнение (5.3.2.1) допускает автомодельные решения.

Чтобы уравнение (5.3.2.1) имело автомодельное решение, это уравнение должно быть инвариантным относительно преобразования масштабирования (5.2.2.7). Подставив (5.2.2.7) в (5.3.2.1), после элементарных преобразований получим

$$\bar{u}_{\bar{t}} = c^{1-2k}a\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + c^{1-m}F(c^m\bar{u}, c^{m-k}\bar{u}_{\bar{x}}). \tag{5.3.2.2}$$

Требование, чтобы уравнение (5.3.2.2) совпало, с точностью до переобозначений переменных, с уравнением (5.3.2.1), дает $k = \frac{1}{2}$ и приводит к следующему функциональному уравнению для $F = F(u, w)$:

$$F(u, w) = c^{1-m}F(c^m u, c^{m-1/2}w), \tag{5.3.2.3}$$

где $w = u_x$. Два метода решения подобных функциональных уравнений были описаны ранее в разд. 4.2 и 4.3 (u и w рассматриваются как независимые аргументы, $c > 0$ — свободный параметр). Используя любой из этих методов, находим общее решение уравнения (5.3.2.3) (получите это решение самостоятельно):

$$F(u,w) = u^{\frac{m-1}{m}} f\bigl(u^{\frac{1-2m}{2m}} w\bigr), \qquad m \neq 0, \tag{5.3.2.4}$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

Подставив (5.3.2.4) в (5.3.2.1), получим уравнение

$$u_t = au_{xx} + u^{\frac{m-1}{m}} f\bigl(u^{\frac{1-2m}{2m}} u_x\bigr), \tag{5.3.2.5}$$

которое инвариантно относительно преобразования масштабирования (5.2.2.7) при $k = \frac{1}{2}$ (m — свободный параметр).

Используя преобразование масштабирования (5.2.2.7) с указанными параметрами, можно показать, что уравнение (5.3.2.4) имеет автомодельное решение вида (см. разд. (5.2.2)):

$$w = t^m \varphi(z), \qquad z = xt^{-1/2},$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$m\varphi - \tfrac{1}{2} z\varphi'_z = a\varphi''_{zz} + \varphi^{\frac{m-1}{m}} f\bigl(\varphi^{\frac{1-2m}{2m}} \varphi'_z\bigr).$$

Замечание 5.10. *Случай $m = 0$, при котором уравнение (5.3.2.5) теряет смысл, надо рассмотреть отдельно. При $m = 0$ функциональное уравнение (5.3.2.3) принимает вид*

$$F(u,w) = cF(u, c^{-1/2} w). \tag{5.3.2.6}$$

Его общее решение определяется формулой (получите это решение самостоятельно):

$$F(u,w) = f(u) w^2 \qquad (m = 0), \tag{5.3.2.7}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Подставив (5.3.2.7) в (5.3.2.1), получим уравнение

$$u_t = au_{xx} + f(u) u_x^2, \tag{5.3.2.8}$$

которое инвариантно относительно преобразования масштабирования (5.2.2.7) при $k = \frac{1}{2}$, $m = 0$.

Уравнение (5.3.2.8) имеет автомодельное решение вида (см. разд. (5.2.2)):

$$u = \varphi(z), \qquad z = xt^{-1/2},$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$-\tfrac{1}{2} z\varphi'_z = a\varphi''_{zz} + f(\varphi)(\varphi'_z)^2.$$

◀

► Пример 5.11. Рассмотрим другое нелинейное уравнение

$$u_{tt} = F(u, u_x) u_{xx}. \tag{5.3.2.9}$$

Требуется найти наиболее общую функцию $F = F(u, w)$, для которой уравнение (5.3.2.9) допускает предельные автомодельные решения (см. замечание 5.9).

Чтобы уравнение (5.3.2.9) имело предельное автомодельное решение, это уравнение должно быть инвариантным относительно композиции преобразований сдвига и масштабирования вида

$$t = \bar{t} + A\ln c, \quad x = c\bar{x}, \quad u = c^m\bar{u}, \tag{5.3.2.10}$$

где c — произвольная постоянная ($c > 0$), A и m — некоторые константы.

Подставив (5.3.2.10) в (5.3.2.9) и сократив на c^m, получим уравнение

$$\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}} = c^{-2}F(c^m\bar{u}, c^{m-1}\bar{u}_{\bar{x}})\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}. \tag{5.3.2.11}$$

Требование, чтобы уравнение (5.3.2.11) совпало, с точностью до переобозначений переменных, с уравнением (5.3.2.9), приводит к следующему функциональному уравнению для $F = F(u, w)$:

$$F(u, w) = c^{-2}F(c^m u, c^{m-1}w). \tag{5.3.2.12}$$

Общее решение функционального уравнения (5.3.2.12) имеет вид (получите это решение самостоятельно; см. разд. 4.2 или 4.3):

$$F(u, w) = u^{\frac{2}{m}} f\bigl(u^{\frac{1-m}{m}}w\bigr), \qquad m \neq 0, \tag{5.3.2.13}$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

Подставив (5.3.2.13) в (5.3.2.9), получим

$$u_{tt} = u^{\frac{2}{m}} f\bigl(u^{\frac{1-m}{m}}u_x\bigr)u_{xx}. \tag{5.3.2.14}$$

Используя преобразование (5.3.2.10), можно показать, что уравнение (5.3.2.14) допускает предельное автомодельное решение вида

$$u = e^{kmt}\psi(y), \quad y = xe^{-kt},$$

где $k = 1/A$ и m — свободные параметры.

Самостоятельно получите уравнение для функции $\psi = \psi(y)$.

Замечание 5.11. *Случай $m = 0$ надо рассмотреть отдельно. При $m = 0$ функциональное уравнение (5.3.2.12) принимает вид*

$$F(u, w) = c^{-2}F(u, c^{-1}w). \tag{5.3.2.15}$$

Его общее решение определяется формулой (получите это решение самостоятельно):

$$F(u, w) = f(u)w^{-2} \qquad (m = 0), \tag{5.3.2.16}$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Подставив (5.3.2.16) в (5.3.2.9), приходим к уравнению

$$u_{tt} = f(u)u_x^{-2}u_{xx}, \tag{5.3.2.17}$$

которое допускает точное решение вида

$$u = \psi(y), \quad y = xe^{-kt}. \tag{5.3.2.18}$$

где функция $\psi = \psi(y)$ описывается ОДУ

$$k^2 y(y\psi'_y)'_y = f(\psi)(\psi'_y)^{-2}\psi''_{yy}. \tag{5.3.2.19}$$

(Самостоятельно покажите, что уравнение (5.3.2.17) имеет решение вида (5.3.2.18) и получите уравнение (5.3.2.19) для функции $\psi = \psi(y)$.) ◄

► Пример 5.12. Найдем теперь общий вид функции $F = F(u, w)$, для которой уравнение (5.3.2.9) будет инвариантным относительно следующей композиции преобразований масштабирования и переноса:

$$t = c\bar{t}, \quad x = c^k\bar{x}, \quad u = \bar{u} + A\ln c, \tag{5.3.2.20}$$

где c — произвольная постоянная ($c > 0$), A и k — некоторые константы.

Подставив (5.3.2.20) в (5.3.2.9), получим

$$\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}} = c^{2(1-k)}F(\bar{u} + A\ln c,\, c^{-k}\bar{u}_{\bar{x}})\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}. \tag{5.3.2.21}$$

Сравнение (5.3.2.21) и (5.3.2.9) приводит к функциональному уравнению

$$F(u, w) = c^{2(1-k)}F(u + A\ln c, c^{-k}w), \tag{5.3.2.22}$$

общее решение которого определяется формулой

$$F(u, w) = e^{2(k-1)\lambda u}f(e^{k\lambda u}w), \qquad \lambda = 1/A, \tag{5.3.2.23}$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

Уравнение (5.3.2.9) с функцией (5.3.2.23) допускает инвариантные решения вида

$$u = \theta(r) + \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad r = xt^{-k}.$$

Самостоятельно вывести уравнение для функции $\theta(r)$. ◄

Заключительные замечания. Описанный простой метод поиска инвариантных решений нелинейных уравнений математической физики использует идеи метода группового анализа дифференциальных уравнений, но намного проще для практического применения. Этот метод основан на линейных преобразованиях сдвига и масштабирования (и их комбинаций) и позволяет единообразно находить наиболее распространенные инвариантные решения нелинейных УрЧП (эти решения составляют более половины решений, которые можно найти с помощью классического метода группового анализа). Важно отметить, что данный метод проводит к небольшому объему промежуточных вычислений. При его использовании, в основном, надо уметь решать самые простые алгебраические уравнения (или системы таких уравнений) и уметь дифференцировать.

Задачи и упражнения к разд. 5.3

1. Найти общий вид функции $F(x, u)$, для которой уравнение
$u_t = u_{xx} + F(x, u)$
имеет автомодельное решение. Найти это решение.

2. Найти общий вид функции $F(u,w)$, для которой уравнение

$$u_t = uu_{xx} + F(u,u_x)$$

имеет автомодельное решение. Найти это решение.

3. Найти общий вид функции $F(v,w)$, для которой уравнение

$$u_t = u^2 F(u_x, u_{xx})$$

имеет автомодельное решение. Найти это решение.

4. Для предыдущего уравнения из п. 3 найти наиболее общие функции $F(v,w)$, для которых это уравнение имеет другие простейшие инвариантные решения (которые строятся при помощи комбинаций преобразований сдвига и масштабирования).

5. Найти общий вид функции $F(v,w)$, для которой уравнение

$$u_{xt} = uF(u_x, u_{xx})$$

имеет автомодельное решение. Найти это решение.

6. Для предыдущего уравнения из п. 5 найти наиболее общие функции $F(v,w)$, для которых это уравнение имеет другие простейшие инвариантные решения (которые строятся при помощи комбинаций преобразований сдвига и масштабирования).

7. Найти функции $a(x)$ и $b(x)$, для которых уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)$$

имеет автомодельное решение [функции $f(u)$ и $g(u)$ считаются произвольными]. Найти это решение.

8. Найти функции $a(x)$ и $b(x)$, для которых предыдущее уравнение из. п. 7 имеет другие простейшие инвариантные решения (которые строятся на основе комбинаций преобразований сдвига и масштабирования).

9. Найти функции $a(t)$ и $b(x)$, для которых уравнение

$$u_t = [a(t)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)$$

имеет автомодельное решение [функции $f(u)$ и $g(u)$ считаются произвольными]. Найти это решение.

10. Найти функции $a(x)$ и $b(t)$, для которых уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(t)g(u)$$

имеет автомодельное решение [функции $f(u)$ и $g(u)$ считаются произвольными]. Найти это решение.

11. Найти функции $a(x)$ и $b(x)$, для которых уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x$$

имеет автомодельное решение [функции $f(u)$ и $g(u)$ считаются произвольными]. Найти это решение.

12. Найти функции $a(x)$ и $b(x)$, для которых уравнение

$$u_{xt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)$$

имеет автомодельное решение [функции $f(u)$ и $g(u)$ считаются произвольными]. Найти это решение.

Литература к главе 5

Баренблатт Г.И. *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика, 2-е изд.* М.: Гидрометеоиздат, 1982.

Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

Дородницын В.А., Еленин Г.Г. *Симметрия в решениях уравнений математической физики*. М.: Знание, 1984, № 4.

Ибрагимов Н.Х. *Азбука группового анализа*. М.: Знание, 1989, № 8.

Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.

Полянин А.Д. Элементарная теория использования инвариантов для решения математических уравнений. *Вестник Самарского государственного университета*, 2008, № 6(65), с. 152–176.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. М.: Наука, 1972.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton—London: CRC Press, 2012.

6. Методы обобщенного разделения переменных

6.1. Решения с простым разделением переменных

6.1.1. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных

Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией $u = u(x, t)$ этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$u = \varphi(x)\psi(t), \tag{6.1.1.1}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и определяются в ходе последующего анализа.

Интегрирование отдельных классов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов:

$$u = \varphi(x) + \psi(t). \tag{6.1.1.2}$$

Некоторые нелинейные уравнения математической физики второго и более высоких порядков также имеют точные решения вида (6.1.1.1) или (6.1.1.2). Подобные решения будем называть соответственно *решениями с мультипликативным* и *аддитивным разделением переменных*.

6.1.2. Решения с простым разделением переменных нелинейных уравнений математической физики

В простейших случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях с частными производными с двумя независимыми переменными проводится по той же схеме, что и в линейных уравнениях. Точное решение ищется в виде произведения или суммы функций разных аргументов. Подставив (6.1.1.1) или (6.1.1.2) в рассматриваемое уравнение и делая элементарные алгебраические операции, приходят к равенству двух выражений (для уравнений с двумя переменными), зависящих от разных аргументов. Такая ситуация возможна только в том случае, когда каждое из указанных выражений равно одной и той же постоянной величине. В результате для определения двух искомых величин $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получают два обыкновенных дифференциальных уравнения (одно для φ, а другое для ψ). Точные решения с подобным разделением переменных будем называть *решениями с простым разделением переменных*.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

► Пример 6.1. Уравнение теплопроводности со степенно́й нелинейностью

$$u_t = a(u^k u_x)_x \tag{6.1.2.1}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов. Подставив (6.1.1.1) в уравнение (6.1.2.1), приходим к выражению

$$\varphi\psi_t' = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi_x')_x'.$$

Разделив обе части на $\varphi\psi^{k+1}$, получим

$$\frac{\psi_t'}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi_x')_x'}{\varphi}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно лишь при выполнении условий

$$\frac{\psi_t'}{\psi^{k+1}} = C, \qquad \frac{a(\varphi^k\varphi_x')_x'}{\varphi} = C, \tag{6.1.2.2}$$

где C — произвольная постоянная. Решение первого ОДУ (6.1.2.2) выражается в элементарных функциях, а решение второго ОДУ может быть представлено в неявной форме.

Процедура построения решения с разделяющимися переменными вида (6.1.1.1) нелинейного уравнения (6.1.2.1) при $k \neq 0$ полностью аналогична процедуре, используемой для решения линейного уравнения теплопроводности (это уравнение соответствует значению $k = 0$ в (6.1.2.1)). ◄

► Пример 6.2. Волновое уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u}u_x)_x \tag{6.1.2.3}$$

имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов. Подставим выражение (6.1.1.2) в уравнение (6.1.2.3). После деления обеих частей на $e^{\lambda\psi}$ приходим к равенству

$$e^{-\lambda\psi}\psi_{tt}'' = a(e^{\lambda\varphi}\varphi_x')_x', \tag{6.1.2.4}$$

левая часть которого зависит только от переменной t, а правая — только от x. Приравнивая левую и правую части (6.1.2.4) константе, имеем

$$e^{-\lambda\psi}\psi_{tt}'' = C, \quad a(e^{\lambda\varphi}\varphi_x')_x' = C. \tag{6.1.2.5}$$

Оба ОДУ (6.1.2.5) являются автономными (т. е. не зависят явно от независимых переменных), поэтому они допускают понижение порядка и приводятся к простым уравнениям. Кроме того, второе уравнение (6.1.2.5) после однократного интегрирования сводится к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными. В итоге можно получить решение уравнения (6.1.2.3) вида (6.1.1.2), которое выражается в элементарных функциях. ◄

► Пример 6.3. Уравнение теплопроводности в анизотропной среде с источником логарифмического типа

$$[f(x)u_x]_x + [g(y)u_y]_y = au \ln u \tag{6.1.2.6}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi(x)\psi(y). \tag{6.1.2.7}$$

Подставим выражение (6.1.2.7) в уравнение (6.1.2.6). После деления на $\varphi\psi$ и переноса отдельных слагаемых в разные части полученного равенства, имеем

$$\frac{1}{\varphi}[f(x)\varphi'_x]'_x - a\ln\varphi = -\frac{1}{\psi}[g(y)\psi'_y]'_y + a\ln\psi.$$

Левая часть этого выражения зависит только от переменной x, а правая — только от y. Приравнивая их постоянной величине, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$. ◄

В табл. 6.1 приведены другие примеры точных решений с простым (аддитивным или мультипликативным) разделением переменных некоторых нелинейных уравнений математической физики.

6.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях

Во многих случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях с частными производными происходит иначе, чем в линейных уравнениях. Для иллюстрации сказанного приведем несколько конкретных нелинейных уравнений, допускающих решения вида (6.1.1.1) или (6.1.1.2), которые однако не относятся к решениям с простым разделением переменных.

► Пример 6.4. Рассмотрим уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$u_t = f(t)u_{xx} + uu_x^2 - au^3, \tag{6.1.3.1}$$

где $f(t)$ — произвольная функция.

Ищем точные решения в виде произведения функций разных аргументов. Подставим (6.1.1.1) в (6.1.3.1) и поделим обе части полученного равенства на $f(t)\varphi(x)\psi(t)$. В результате имеем

$$\frac{\psi'_t}{f\psi} = \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} + \frac{\psi^2}{f}[(\varphi'_x)^2 - a\varphi^2]. \tag{6.1.3.2}$$

Левая часть функционально-дифференциального уравнения (6.1.3.2) зависит только от t, а правая содержит сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от x, а другое представляет собой произведение функций разных аргументов. Уравнение (6.1.3.2) никаким способом не удается представить в виде равенства функций разных аргументов (в отличие от примеров, рассмотренных ранее в разд. 6.1.2). Это, однако, не означает, что уравнение (6.1.3.1) не имеет решений вида (6.1.1.1).

Таблица 6.1. Некоторые нелинейные уравнения математической физики, допускающие решения с простым разделением переменных.

Уравнение	Название	Вид решений	Определяющие уравнения
$u_t=au_{xx}+bu\ln u$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx}/\varphi-b\ln\varphi=$ $=-\psi'_t/\psi+b\ln\psi=C$
$u_t=a(u^k u_x)_x+bu$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$(\psi'_t-b\psi)/\psi^{k+1}=$ $=a(\varphi^k\varphi'_x)'_x/\varphi=C$
$u_t=a(u^k u_x)_x+bu^{k+1}$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x/\varphi+b\varphi^k=$ $=\psi'_t/\psi^{k+1}=C$
$u_t=a(e^{\lambda u}u_x)_x+b$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$e^{-\lambda\psi}(\psi'_t-b)=a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x=C$
$u_t=a(e^u u_x)_x+be^u$	Уравнение теплопроводности с источником	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$e^{-\psi}\psi'_t=a(e^{\varphi}\varphi'_x)'_x+be^{\varphi}=C$
$u_t=au_{xx}+bu_x^2$	Потенциальное уравнение Бюргерса	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$\psi'_t=a\varphi''_{xx}+b(\varphi'_x)^2=C$
$u_t=au_x^k u_{xx}$	Уравнение фильтрации	$u=\varphi(x)+\psi(t)$, $u=f(x)g(t)$	$\psi'_t=a(\varphi'_x)^k\varphi''_{xx}=C_1$, $g'_t/g^{k+1}=a(f'_x)^k f''_{xx}/f=C_2$
$u_t=f(u_x)u_{xx}$	Уравнение фильтрации	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$\psi'_t=f(\varphi'_x)\varphi''_{xx}=C$
$u_{tt}=a(u^k u_x)_x$	Волновое уравнение	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$\psi''_{tt}/\psi^{k+1}=a(\varphi^k\varphi'_x)'_x/\varphi=C$
$u_{tt}=a(e^{\lambda u}u_x)_x$	Волновое уравнение	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt}=a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x=C$
$u_{tt}=au_{xx}+bu\ln u$	Волновое уравнение с источником	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$\psi''_{tt}/\psi-b\ln\psi=$ $=a\varphi''_{xx}/\varphi+b\ln\varphi=C$
$u_{xx}+a(u^k u_y)_y=0$	Стационарное уравнение анизотропной теплопроводности	$u=\varphi(x)\psi(y)$	$\varphi''_{xx}/\varphi^{k+1}=-a(\psi^k\psi'_y)'_y/\psi=C$
$u_{xx}+au_y u_{yy}=0$	Уравнение стационарного трансзвукового газового потока	$u=\varphi(x)+\psi(y)$, $u=f(x)g(y)$	$\varphi''_{xx}=-a\psi'_y\psi''_{yy}=C_1$, $f''_{xx}/f=-ag'_y g''_{yy}/g=C_2$
$u_{xy}^2=u_{xx}u_{yy}$	Уравнение Монжа — Ампера	$u=\varphi(x)+\psi(y)$, $u=f(x)g(y)$	$\varphi''_{xx}=0$ или $\psi''_{yy}=0$, $(f'_x)^2/(ff''_{xx})=gg''_{yy}/(g'_y)^2=C$
$u_t=au_{xxx}+bu_x^2$	Потенциальное уравнение Кортевега — де Фриза	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$\psi'_t=a\varphi'''_{xxx}+b(\varphi'_x)^2=C$
$u_y u_{xy}-u_x u_{yy}=au_{yyy}$	Уравнение пограничного слоя	$u=\varphi(x)+\psi(y)$, $u=f(x)g(y)$	$-\varphi'_x=a\psi'''_{yyy}/\psi''_{yy}=C_1$, $f'_x=ag'''_{yyy}[(g'_y)^2-gg''_{yy}]^{-1}=C_2$

1°. Прямой проверкой можно убедиться, что функционально-дифференциальное уравнение (6.1.3.2) при $a > 0$ имеет два решения

$$\varphi(x) = C\exp\bigl(\pm x\sqrt{a}\,\bigr), \quad \psi(t) = \exp\Bigl[a\int f(t)\,dt\Bigr], \tag{6.1.3.3}$$

где C — произвольная постоянная. Оба решения (6.1.3.3) для φ обращают в нуль выражение в квадратных скобках в (6.1.3.2), что позволяет разделить переменные.

2°. При $a > 0$ имеется более общее решение функционально-дифференциального уравнения (6.1.3.2):

$$\varphi(x) = C_1\exp\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr) + C_2\exp\bigl(-x\sqrt{a}\,\bigr),$$
$$\psi(t) = e^F\Bigl(C_3 + 8aC_1C_2\int e^{2F}\,dt\Bigr)^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. В данном случае функция $\varphi = \varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (6.1.3.2), которые зависят от x, одновременно будут равны некоторым постоянным:

$$\varphi''_{xx}/\varphi = a, \quad (\varphi'_x)^2 - a\varphi^2 = 4aC_1C_2.$$

Это обстоятельство и позволяет разделить переменные. Отметим, что функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли $\psi'_t = af(t)\psi - 4aC_1C_2\psi^3$.

3°. Имеется другое решение функционально-дифференциального уравнения (6.1.3.2) при $a < 0$:

$$\varphi(x) = C_1\sin\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr) + C_2\cos\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr),$$
$$\psi(t) = e^F\Bigl[C_3 + 2a(C_1^2 + C_2^2)\int e^{2F}\,dt\Bigr]^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt.$$

Функция $\varphi = \varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (6.1.3.2), зависящие от x, будут равны константам. Функция $\psi = \psi(t)$ описывается уравнением Бернулли $\psi'_t = af(t)\psi - a(C_1^2 + C_2^2)\psi^3$. ◄

► Пример 6.5. Рассмотрим уравнение с частными производными третьего порядка с квадратичной нелинейностью

$$u_y u_{xx} + a u_x u_{yy} = b u_{xxx} + c u_{yyy}. \tag{6.1.3.4}$$

Будем искать точные решения уравнения (6.1.3.4) с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов

$$u = f(x) + g(y). \tag{6.1.3.5}$$

Подставив (6.1.3.5) в (6.1.3.4), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$g'_y f''_{xx} + a f'_x g''_{yy} = b f'''_{xxx} + c g'''_{yyy}, \tag{6.1.3.6}$$

которое нельзя представить в виде равенства функций разных аргументов.

В данном случае нетрудно догадаться, что функционально-дифференциальному уравнению (6.1.3.6) можно удовлетворить:

$$\text{если } g'_y = C_1 \quad\Longrightarrow\quad g(y) = C_1 y + C_2, \quad f(x) = C_3 e^{C_1 x/b} + C_4 x \quad \text{(случай 1)},$$
$$\text{если } f'_x = C_1 \quad\Longrightarrow\quad f(x) = C_1 x + C_2, \quad g(y) = C_3 e^{aC_1 y/c} + C_4 y \quad \text{(случай 2)},$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные. В указанных случаях два члена из четырех в (6.1.3.6) одновременно обращаются в нуль, что позволяет разделить переменные.

Уравнение (6.1.3.4) имеет также более сложное решение вида (6.1.3.5):

$$u = C_1 e^{-a\lambda x} + \frac{c\lambda}{a} x + C_2 e^{\lambda y} - ab\lambda y + C_3,$$

где λ — произвольная постоянная. Механизм разделения здесь иной: оба нелинейных члена в левой части (6.1.3.6) содержат одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку слагаемые, которые нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. При сложении нелинейных членов указанные слагаемые сокращаются, что в итоге и приводит к разделению переменных:

$$\begin{array}{rl} & g'_y f''_{xx} \;=\; C_1 C_2 a^2 \lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} - C_1 b(a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} \\ + & a f'_x g''_{yy} \;=\; -C_1 C_2 a^2 \lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} + C_2 c\lambda^3 e^{\lambda y} \\ \hline & g'_y f''_{xx} + a f'_x g''_{yy} = -C_1 b(a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} + C_2 c\lambda^3 e^{\lambda y} = b f'''_{xxx} + c g'''_{yyy} \end{array}$$ ◄

Рассмотренные примеры иллюстрируют некоторые характерные особенности решений с мультипликативным и аддитивным разделением переменных, которые не относятся к решениям с простым разделением переменных. Далее будут описаны достаточно общие методы построения таких и более сложных точных решений нелинейных уравнений с частными производными.

6.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных

6.2.1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных дифференциальных уравнений

Для простоты изложения ограничимся здесь описанием случая нелинейных уравнений математической физики с двумя независимыми переменными x, y и зависимой переменной u (одна из независимых переменных может играть роль времени).

Линейные уравнения с частными производными. Линейные уравнения математической физики с постоянными коэффициентами и многие линейные уравнения с переменными коэффициентами имеют точные решения в виде суммы попарных произведений функций разных аргументов:

$$u(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \qquad (6.2.1.1)$$

где $u_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ — соответствующие частные решения. При этом функции $\varphi_i(x)$, как и функции $\psi_i(y)$, при разных значениях i не связаны друг с другом.

Линейные уравнения с частными производными часто допускают также точные решения вида (6.2.1.1), где попарные произведения функций разных аргументов вида $\varphi_i(x)\psi_i(y)$ не являются частными решениями этих уравнений.

► Пример 6.6. Линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = au_{xx}$$

допускает следующие решения:

$$\begin{aligned}
&u = x^2 + 2at,\\
&u = x^3 + 6atx,\\
&u = x^4 + 12atx^2 + 12a^2t^2,\\
&u = e^{-\mu x}\cos(\mu x)\cos(2a\mu^2 t) + e^{-\mu x}\sin(\mu x)\sin(2a\mu^2 t),\\
&u = e^{-\mu x}\sin(\mu x)\cos(2a\mu^2 t) - e^{-\mu x}\cos(\mu x)\sin(2a\mu^2 t),
\end{aligned}$$

где μ — произвольная постоянная. Отдельные слагаемые в этих решениях не являются решениями линейного уравнения теплопроводности. ◄

Нелинейные уравнения с частными производными. Многие нелинейные уравнения математической физики с частными производными с квадратичными и степенны́ми нелинейностями вида

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[u] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[u] + \dots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[u] = 0, \qquad (6.2.1.2)$$

где $\Pi_i[u]$ — дифференциальные формы, представляющие собой произведения целых неотрицательных степеней функции u и ее частных производных u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, ..., также имеют точные решения вида (6.2.1.1). Такие решения будем называть *решениями с обобщенным разделением переменных*. Для нелинейных уравнений, в отличие от линейных, функции $\varphi_i(x)$ при различных значениях i обычно связаны друг с другом [и с функциями $\psi_j(y)$]. В общем случае функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ заранее неизвестны и подлежат определению в ходе исследования. Примеры точных решений нелинейных уравнений вида (6.2.1.1) для наиболее простых случаев $n = 1$ и $n = 2$ (при $\psi_1 = \varphi_2 = 1$) рассмотрены в разд. 6.1.2 и 6.1.3.

Методы поиска точных решений вида (6.2.1.1) нелинейных УрЧП будем называть *методами обобщенного разделения переменных*.

Отметим, что на практике при построении точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики наиболее часто встречаются решения специального вида, содержащие три искомые функции:

$$u(x, y) = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x) \qquad (6.2.1.3)$$

(в правой части независимые переменные можно поменять местами). В частном случае $\psi(x) = 0$ это решение переходит в решение с мультипликативным разделением переменных, а в случае $\varphi(x) = 1$ — в решение с аддитивным разделением переменных.

Замечание 6.1. *Функция $\theta = \theta(y)$ в (6.2.1.3) определяется с точностью до сдвига и растяжения, поскольку линейное преобразование $\theta = C_1\bar{\theta} + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, приводит к соотношению такого же вида $u = \bar{\varphi}(x)\bar{\theta}(y) + \bar{\psi}(x)$, где $\bar{\varphi} = C_1\varphi$, $\bar{\psi} = \psi + C_2\varphi$.*

Замечание 6.2. *Выражения вида (6.2.1.1) часто используются в прикладной и вычислительной математике для построения приближенных аналитических и численных решений дифференциальных уравнений проекционными методами типа Бубнова — Галеркина.*

6.2.2. Функционально-дифференциальные уравнения, возникающие при обобщенном разделении переменных

В общем случае после подстановки выражения (6.2.1.1) в дифференциальное уравнение (6.2.1.2) для определения функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\Phi_1[X]\Psi_1[Y] + \Phi_2[X]\Psi_2[Y] + \cdots + \Phi_k[X]\Psi_k[Y] = 0, \tag{6.2.2.1}$$

где функционалы $\Phi_j[X]$ и $\Psi_j[Y]$ зависят соответственно от переменных x и y:

$$\begin{aligned} \Phi_j[X] &\equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\bigr), \\ \Psi_j[Y] &\equiv \Psi_j\bigl(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\bigr). \end{aligned} \tag{6.2.2.2}$$

Для наглядности формулы выписаны для случая уравнения второго порядка (6.2.1.2); для уравнений старших порядков в правые части формул (6.2.2.2) войдут соответствующие старшие производные функций φ_i и ψ_i.

Далее будут описаны несколько методов решения функционально-дифференциальных уравнений вида (6.2.2.1) — (6.2.2.2).

Замечание 6.3. *В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнения вида (6.2.2.1) — (6.2.2.2) входят несколько функций (и их производных), зависящих от разных аргументов, что приводит к необходимости использовать специальные (нестандартные) методы их решения.*

6.3. Упрощенный метод построения решений с обобщенным разделением переменных

6.3.1. Упрощенный метод, основанный на априорном задании одной системы координатных функций. Описание

Для построения точных решений дифференциальных уравнений вида (6.2.1.2) с квадратичной и степенно́й нелинейностью, которые не зависят явно от y (т. е. все $f_i = \text{const}$), можно использовать следующий упрощенный подход. Решения ищем в виде конечных сумм (6.2.1.1). Предположим, что система координатных функций $\psi_i(y)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений имеют вид

$$\psi_i(y) = y^i, \quad \psi_i(y) = e^{\lambda_i y}, \quad \psi_i(y) = \sin(\alpha_i y), \quad \psi_i(y) = \cos(\beta_i y). \quad (6.3.1.1)$$

Конечные наборы этих функций (в различных комбинациях) можно использовать для поиска точных решений с обобщенным разделением переменных вида (6.2.1.1), где λ_i, α_i, β_i рассматриваются как свободные параметры. Вторая система функций $\varphi_i(x)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных уравнений, получаемых в результате подстановки выражения (6.2.1.1) в рассматриваемое уравнение.

Указанный подход не имеет той общности, которой обладают методы, описанные далее в разд. 6.4 и 6.5. Однако явное задание одной системы координатных функций $\{\psi_i(y)\}$ резко упрощает процедуру построения точных решений; при этом отдельные решения вида (6.2.1.1) могут быть потеряны. Важно отметить, что известные к настоящему времени точные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнений с частными производными с квадратичной нелинейностью в подавляющем большинстве задаются координатными функциями вида (6.3.1.1) (чаще всего при $n = 2$).

Замечание 6.4. *Упрощенный метод построения решений с обобщенным разделением переменных во многом аналогичен методу неопределенных коэффициентов, который широко используется для нахождения частных решений линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений со специальной правой частью, при вычислении интегралов и др.*

6.3.2. Примеры построения точных решений нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными

Рассмотрим конкретные примеры использования упрощенного метода построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений с частными производными второго и третьего порядков с двумя независимыми переменными.

► Пример 6.7. Рассмотрим уравнение Гудерлея

$$u_{xx} = a u_y u_{yy}, \quad (6.3.2.1)$$

которое используется для описания трансзвуковых газовых течений.

Сразу отметим, что уравнение (6.3.2.1) имеет очевидное вырожденное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = (C_1 x + C_2) y + C_3 x + C_4, \quad (6.3.2.2)$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, для которого старшие производные обращаются в нуль $u_{xx} = u_{yy} = 0$.

Будем искать решения с обобщенным разделением переменных в виде

$$u(x,y)=\varphi(x)y^k+\psi(x), \tag{6.3.2.3}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и константа $k\neq 0$ являются искомыми (вырожденное решение (6.3.2.2) является частным случаем решения (6.3.2.3)). Важно отметить, что подобные двучленные решения УрЧП достаточно часто встречаются на практике и являются наиболее простыми решениями с обобщенным разделением переменных (наряду с решениями, в которых вместо степенной функции y^k стоит экспонента $e^{\lambda y}$).

Подставив (6.3.2.3) в (6.3.2.1), после перестановки членов приходим к соотношению

$$\varphi''_{xx}y^k-ak^2(k-1)\varphi^2y^{2k-3}+\psi''_{xx}=0, \tag{6.3.2.4}$$

которое содержит степенные функции y^k и y^{2k-3} и должно удовлетворяться тождественно для любых y.

Рассмотрим два случая: $\psi''_{xx}=0$ и $\psi''_{xx}\neq 0$.

1°. *Первый случай.* При $\psi''_{xx}=0$ получим двучленное уравнение с разделяющимися переменными, которому можно удовлетворить, если положить

$$k=3,\quad \varphi''_{xx}-18a\varphi^2=0. \tag{6.3.2.5}$$

Общее решение автономного уравнения для φ можно представить в неявной форме $x=\pm\int(12a\varphi^3+C_1)^{-1/2}d\varphi+C_2$. Кроме того, ОДУ (6.3.2.5) допускает частное решение степенного вида $\varphi=\frac{1}{3a}(x+C_1)^{-2}$, что приводит к трехпараметрическому точному решению уравнения (6.3.2.1):

$$u=\frac{1}{3a}(x+C_1)^{-2}y^3+C_2x+C_3, \tag{6.3.2.6}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. *Второй случай.* Чтобы сбалансировать функцию $\psi''_{xx}\neq 0$ со вторым членом в равенстве (6.3.2.4), надо положить $k=3/2$. В результате получим двучленное уравнение, которому можно удовлетворить, если положить

$$\varphi''_{xx}=0,\quad \psi''_{xx}=\tfrac{9}{8}a\varphi^2.$$

Эти уравнения легко интегрируются и приводят к четырехпараметрическому точному решению уравнения (6.3.2.1):

$$u=(C_1x+C_2)y^{3/2}+\frac{3a}{32C_1^2}(C_1x+C_2)^4+C_3x+C_4.$$

◄

► Пример 6.8. Установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое продольно обтекаемой тонкой плоской пластины описывается нелинейным уравнением третьего порядка для функции тока:

$$u_yu_{xy}-u_xu_{yy}=\nu u_{yyy}, \tag{6.3.2.7}$$

где x и y — продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Будем искать точное решение с обобщенным разделением переменных уравнения (6.3.2.7) в виде

$$u(x,y) = x^k\varphi(y) + \psi(y), \tag{6.3.2.8}$$

где функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и константа k являются искомыми. Подставив (6.3.2.8) в (6.3.2.7), после перегруппировки членов имеем

$$kx^{2k-1}[(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy}] + kx^{k-1}(\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy}) - \nu x^k\varphi'''_{yyy} - \nu\psi'''_{yyy} = 0. \tag{6.3.2.9}$$

Это соотношение содержит степенные функции x^{2k-1}, x^{k-1}, x^k и должно удовлетворяться тождественно для любых x. Чтобы можно было сбалансировать последний член в (6.3.2.9) при $\psi'''_{yyy} \not\equiv 0$ один из показателей степеней x должен обращаться в нуль. Отбрасывая вырожденный случай $k = 0$, в результате находим два допустимых значения $k = 1$ и $k = 1/2$.

1°. *Первый случай*. Подставив $k = 1$ в (6.3.2.9) и сделав перегруппировку членов, получим

$$x[(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} - \nu\varphi'''_{yyy}] + [\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy}] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству при любых значениях x, надо приравнять нулю оба выражения в квадратных скобках. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$:

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} - \nu\varphi'''_{yyy} = 0,$$
$$\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy} = 0.$$

Эта система имеет, например, точное решение

$$\varphi = \frac{6\nu}{y + C_1}, \qquad \psi = \frac{C_2}{y + C_1} + \frac{C_3}{(y + C_1)^2} + C_4.$$

2°. *Второй случай*. При $k = 1/2$ приходим к вырожденному решению, которое малоинтересно. ◄

► **Пример 6.9.** Рассмотрим нелинейное УрЧП третьего порядка со смешанной производной

$$u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = \nu u_{xxx}, \tag{6.3.2.10}$$

которое встречается в гидродинамике.

Ищем точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \qquad \lambda \neq 0. \tag{6.3.2.11}$$

Подставив (6.3.2.11) в (6.3.2.10), имеем

$$\varphi'_t - \lambda\varphi\psi = \nu\lambda^2\varphi.$$

Разрешим это уравнение относительно ψ и подставим полученное выражение в (6.3.2.11). В результате находим решение уравнения (6.3.2.10) в виде

$$u = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \nu\lambda, \tag{6.3.2.12}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, а λ — произвольная постоянная. ◄

► **Пример 6.10.** Рассмотрим уравнение Буссинеска с квадратичной нелинейностью

$$u_t = a(uu_x)_x, \tag{6.3.2.13}$$

которое описывает нестационарное течение грунтовых вод в пористой среде при наличии свободной поверхности, где u — давление жидкости.

Ищем точное решение уравнения (6.3.2.13) в виде суммы

$$u(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x^k, \tag{6.3.2.14}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и коэффициент k являются искомыми.

Подставив (6.3.2.14) в (6.3.2.13), после элементарных преобразований получим

$$(\varphi'_t - 6a\varphi^2)x^2 + [\psi'_t - a(k+1)(k+2)\varphi\psi]x^k - ak(2k-1)\psi^2 x^{2k-2} = 0. \tag{6.3.2.15}$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при различных степенях x в (6.3.2.15) должны равняться нулю. Таким образом возможны два случая $k = 0$ и $k = 1/2$ (оба соответствуют обращению в нуль коэффициента при x^{2k-2}), которые надо рассмотреть отдельно.

1°. *Первый случай.* При $k=0$ для определения функций $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t - 6a\varphi^2 &= 0, \\ \psi'_t - 2a\varphi\psi &= 0, \end{aligned}$$

общее решение которой определяется формулами

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t+C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}}, \tag{6.3.2.16}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. *Второй случай.* При $k=1/2$ для функций $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ приходим к аналогичной системе уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t - 6a\varphi^2 &= 0, \\ \psi'_t - \tfrac{15}{4}a\varphi\psi &= 0, \end{aligned}$$

общее решение которой записывается так:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t+C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}. \tag{6.3.2.17}$$

Учитывая формулы (6.3.2.14), (6.3.2.16), (6.3.2.17), в итоге получим два решения с обобщенным разделением переменных уравнения (6.3.2.13):

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2 + \frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}}, \\ u &= -\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2 + \frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}(x+C_3)^{1/2}, \end{aligned}$$

где в целях бо́льшей общности дополнительно добавлен произвольный сдвиг по пространственной переменной x (это можно сделать, поскольку уравнение Буссинеска не зависит явно от x). ◄

Замечание 6.5. *Уравнение теплопроводности с линейной зависимостью коэффициента температуропроводности от температуры $v_t = [(av+b)v_x]_x$ с помощью замены $u = v + (b/a)$ сводится к уравнению (6.3.2.13) (для многих металлов линейная аппроксимация коэффициента температуропроводности применима в широком диапазоне изменения температуры).*

Задачи и упражнения к разд. 6.3

1. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$$u_x = yF(x, u_y) + G(x, u_y).$$

Указание. Решение искать в виде $u = \varphi(x)y + \psi(x)$.

2. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$$u_x = u_y^2 - au^2 + f(x)u.$$

Указание. Решение искать в виде $u = \varphi(x) + \psi(x)e^{\lambda y}$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $u_t = a(uu_x)_x + b$,

b) $u_t = a(uu_x)_x + bu$.

c) $u_t = a(uu_x)_x + bu_x$,

d) $u_t = a(uu_x)_x + bu_x + cu$.

e) $u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu + s$.

Указание. Решения искать в виде $u = f(t)x + g(t)$ и $u = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных линейного уравнения

$$u_t + f(t)x^{-1}u_x = au_{xx}.$$

Указание. Решения искать в виде

a) $u = x^2 + \varphi(t)$,

b) $u = x^4 + \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

5. При каком значении параметра a нелинейное уравнение

$$u_t = uu_{xx} + au_x^2 + b$$

имеет решение с обобщенным разделением переменных вида $u = f(t)x^3 + g(t)x^2 + h(t)x + p(t)$?

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 + aw^2.$$

Указание. Решения искать в виде

a) $u = \varphi(t) + \psi(t)e^{\lambda x}$,

b) $u = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}(\lambda x)$,

c) $u = \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x)$,

d) $u = \varphi(t) + \psi(t)\sin(\lambda x + C)$.

7. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений волнового типа:

a) $u_{tt} = a(uu_x)_x$,

b) $u_{tt} = a(uu_x)_x + b$,

c) $u_{tt} = a(uu_x)_x + bu$.

Указание. Решения искать в виде $u = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$ и $u = f(t)x^2 + g(t)x^k$.

8. Найти решение с обобщенным разделением переменных вида $u = \varphi(x) + \psi(x)e^{\lambda y}$ уравнения пограничного слоя (6.3.2.7).

9. Найти решения с обобщенным разделением переменных неоднородного уравнения Монжа — Ампера:

$u_{xy}^2 = u_{xx}u_{yy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $u = \varphi(x)y^k + \psi(x)$.

6.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования

6.4.1. Описание метода дифференцирования

При поиске точных решений с обобщенным разделением переменных часто приходится рассматривать функционально-дифференциальные уравнения вида (6.2.2.1) — (6.2.2.2). В данном разделе описана простая и достаточно общая процедура решения таких уравнений, которая состоит из трех последовательных этапов, описанных ниже.

1°. Предположим, что $\Psi_k \not\equiv 0$. Поделим уравнение (6.2.2.1) на Ψ_k, а затем продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов:

$$\begin{gathered} \widetilde{\Phi}_1[X]\widetilde{\Psi}_1[Y] + \widetilde{\Phi}_2[X]\widetilde{\Psi}_2[Y] + \cdots + \widetilde{\Phi}_{k-1}[X]\widetilde{\Psi}_{k-1}[Y] = 0, \\ \widetilde{\Phi}_j[X] = \Phi_j[X], \quad \widetilde{\Psi}_j[Y] = (\Psi_j[Y]/\Psi_k[Y])'_y. \end{gathered} \tag{6.4.1.1}$$

Повторим аналогичную процедуру еще $(k-3)$ раза. В итоге приходим к двучленному уравнению с разделяющимися переменными

$$\widehat{\Phi}_1[X]\widehat{\Psi}_1[Y] + \widehat{\Phi}_2[X]\widehat{\Psi}_2[Y] = 0. \tag{6.4.1.2}$$

Теперь надо рассмотреть две возможные ситуации.

Невырожденный случай. Пусть $\widehat{\Phi}_2[X] \not\equiv 0$ и $\widehat{\Psi}_1[Y] \not\equiv 0$. Перенесем второе слагаемое уравнения (6.4.1.2) в правую часть, а затем обе части поделим на $\widehat{\Phi}_2[X]\widehat{\Psi}_1[Y]$. В результате получим равенство двух величин, зависящих от разных переменных. Приравнивая, как обычно, эти величины константе C, имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\widehat{\Phi}_1[X] + C\widehat{\Phi}_2[X] = 0, \quad C\widehat{\Psi}_1[Y] - \widehat{\Psi}_2[Y] = 0. \tag{6.4.1.3}$$

Вырожденные случаи. В этих случаях оба слагаемых в сумме (6.4.1.2) одновременно обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} &\widehat{\Phi}_1[X] \equiv 0, \quad \widehat{\Phi}_2[X] \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\Psi}_1[Y] \text{ и } \widehat{\Psi}_2[Y] \text{ — любые;} \\ &\widehat{\Psi}_1[Y] \equiv 0, \quad \widehat{\Psi}_2[Y] \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\Phi}_1[X] \text{ и } \widehat{\Phi}_2[X] \text{ — любые;} \\ &\widehat{\Phi}_1[X] \equiv 0, \quad \widehat{\Psi}_2[Y] \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\Phi}_2[X] \text{ и } \widehat{\Psi}_1[Y] \text{ — любые;} \\ &\widehat{\Phi}_2[X] \equiv 0, \quad \widehat{\Psi}_1[Y] \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\Phi}_1[X] \text{ и } \widehat{\Psi}_2[Y] \text{ — любые.} \end{aligned} \tag{6.4.1.4}$$

Хотя два последних (перекрестных) вырожденных случая $\widehat{\Phi}_1 = 0$, $\widehat{\Psi}_2 = 0$ и $\widehat{\Phi}_2 = 0$, $\widehat{\Psi}_1 = 0$ и являются следствиями уравнений (6.4.1.3) в предельных случаях при $C \to 0$ и $C \to \infty$, их надо рассмотреть отдельно поскольку могут не существовать соответствующие предельные решения уравнений (6.4.1.3).

2°. Полученные решения двучленного уравнения (6.4.1.2) надо подставить в исходное функционально-дифференциальное уравнение (6.2.2.1) – (6.2.2.2), чтобы убрать лишние постоянные интегрирования (которые появляются из-за того, что уравнение (6.4.1.2) получено из (6.2.2.1) путем дифференцирования).

3°. Случай $\Psi_k \equiv 0$ надо рассмотреть отдельно (поскольку уравнение на первом этапе делилось на Ψ_k). Аналогично следует исследовать все другие случаи тождественного обращения в нуль функционалов, на которые делились промежуточные функционально-дифференциальные уравнения.

Замечание 6.6. *Функционально-дифференциальное уравнение (6.2.2.1) – (6.2.2.2) может иметь одно или несколько решений, а может вообще не иметь решений.*

Замечание 6.7. *На каждом этапе число членов рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения можно понижать путем дифференцирования как по переменной y, так и по переменной x. На первом этапе, например, можно предположить, что $\Phi_i \not\equiv 0$ (i – любое, $1 \leqslant i \leqslant k$). Поделив уравнение (6.2.2.1) на Φ_i и продифференцировав по x, получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов.*

При практическом использовании описанного метода путем дифференцирования в первую очередь следует «убирать» члены, содержащие старшие производные или/и наиболее сложные нелинейности. Такой подход позволяет в итоге получить наиболее простые двучленные уравнения вида (6.4.1.2).

6.4.2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных методом дифференцирования

Ниже даны конкретные примеры использования метода дифференцирования для построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных УрЧП.

► Пример 6.11. Рассмотрим опять нелинейное УрЧП третьего порядка

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = \nu u_{yyy}, \tag{6.4.2.1}$$

которое описывает ламинарный пограничный слой на плоской пластине (см. уравнение (6.3.2.7)).

Ищем решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x). \tag{6.4.2.2}$$

Подставляя (6.4.2.2) в (6.4.2.1) и сокращая на φ, приходим у функциональному дифференциальному уравнению

$$\varphi'_x[(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy}] - \psi'_x\theta''_{yy} = \nu\theta'''_{yyy}. \tag{6.4.2.3}$$

Сначала устраним старшую производную. Для этого продифференцируем уравнение (6.4.2.3) по x. В результате получим

$$\varphi''_{xx}[(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy}] = \psi''_{xx}\theta''_{yy}. \qquad (6.4.2.4)$$

Невырожденный случай. Разделяя переменные в (6.4.2.4), имеем

$$\psi''_{xx} = C_1\varphi''_{xx},$$
$$(\theta'_y)^2 - \theta\theta''_{yy} - C_1\theta''_{yy} = 0.$$

Интегрируя, находим неизвестные функции

$$\varphi(x)\,\text{— любая}, \quad \psi(x) = C_1\varphi(x) + C_2x + C_3, \quad \theta(y) = C_4e^{\lambda y} - C_1, \quad (6.4.2.5)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные. Подставив функции (6.4.2.5) в (6.4.2.3), устанавливаем связь между константами: $C_2 = -\nu\lambda$. Наконец, с учетом сказанного и формул (6.4.2.2), (6.4.2.5), получаем решение уравнение (6.4.2.1) вида (6.4.2.2):

$$u = \varphi(x)e^{\lambda y} - \nu\lambda x + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, а C и λ — произвольные постоянные ($C = C_3$, $C_4 = 1$).

Вырожденный случай. Уравнению (6.4.2.4) можно удовлетворить, если положить

$$\varphi''_{xx} = 0, \quad \psi''_{xx} = 0, \quad \theta(y)\,\text{— произвольная функция}. \qquad (6.4.2.6)$$

Дважды интегрируя первые два равенства в (6.4.2.6), получим

$$\varphi(x) = C_1x + C_2, \quad \psi(x) = C_3x + C_4. \qquad (6.4.2.7)$$

Подставляя (6.4.2.7) в (6.4.2.3), приходим к ОДУ для $\theta = \theta(y)$:

$$C_1(\theta'_y)^2 - (C_1\theta + C_3)\theta''_{yy} = \nu\theta'''_{yyy}. \qquad (6.4.2.8)$$

Формулы (6.4.2.2) и (6.4.2.7) совместно с уравнением (6.4.2.8) определяют точное решение уравнения (6.4.2.1). ◄

► Пример 6.12. Двумерные установившиеся движения вязкой несжимаемой жидкости, которые описываются уравнениями Навье — Стокса и уравнением неразрывности, путем введения функции тока u сводятся к одному нелинейному стационарному уравнению четвертого порядка:

$$u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \qquad (6.4.2.9)$$

Отметим свойство уравнения (6.4.2.9): если $u(x, y)$ — решение данного уравнения, то и $-u(y, x)$ — решение этого уравнения (в данном примере будут опускаться решения, которые можно получить из рассматриваемых ниже решений путем использования описанного свойства).

Будем искать точные решения уравнения (6.4.2.9) в виде

$$u = \varphi(x) + \psi(y). \qquad (6.4.2.10)$$

Подставив (6.4.2.10) в (6.4.2.9), имеем

$$\psi'_y \varphi'''_{xxx} - \varphi'_x \psi'''_{yyy} = \nu \varphi''''_{xxxx} + \nu \psi''''_{yyyy}. \tag{6.4.2.11}$$

Продифференцировав обе части (6.4.2.11) по x и y, устраним члены, содержащие старшие производные. В результате получим

$$\psi''_{yy} \varphi''''_{xxxx} - \varphi''_{xx} \psi''''_{yyyy} = 0. \tag{6.4.2.12}$$

Невырожденный случай. При $\varphi''_{xx} \not\equiv 0$ и $\psi''_{yy} \not\equiv 0$, разделяя в (6.4.2.12) переменные, приходим к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi''''_{xxxx} = C\varphi''_{xx}, \tag{6.4.2.13}$$
$$\psi''''_{yyyy} = C\psi''_{yy}, \tag{6.4.2.14}$$

которые имеют решения различного вида в зависимости от величины константы интегрирования C.

1°. Решения уравнений (6.4.2.13), (6.4.2.14) при $C = 0$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3, \end{aligned} \tag{6.4.2.15}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k = 1, 2, 3, 4$). Подставив (6.4.2.15) в (6.4.2.11), находим значения постоянных:

$$\begin{array}{lll} A_4 = B_4 = 0, & A_n, B_n \text{ — любые} & (n = 1, 2, 3); \\ A_k = 0, & B_k \text{ — любые} & (k = 1, 2, 3, 4); \\ B_k = 0, & A_k \text{ — любые} & (k = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

Первые два набора постоянных определяют два известных полиномиальных решения уравнения (6.4.2.9) второй и третьей степени относительно независимых переменных:

$$\begin{aligned} u &= C_1 x^2 + C_2 x + C_3 y^2 + C_4 y + C_5, \\ u &= C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4, \end{aligned} \tag{6.4.2.16}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

2°. Решения уравнений (6.4.2.13), (6.4.2.14) при $C = \lambda^2 > 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 e^{\lambda y} + B_4 e^{-\lambda y}. \end{aligned} \tag{6.4.2.17}$$

Подставим (6.4.2.17) в (6.4.2.11). После сокращения на λ^3 и приведения подобных членов получим

$$A_3(\nu\lambda - B_2)e^{\lambda x} + A_4(\nu\lambda + B_2)e^{-\lambda x} + B_3(\nu\lambda + A_2)e^{\lambda y} + B_4(\nu\lambda - A_2)e^{-\lambda y} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах нулю, находим значения постоянных:

$$
\begin{aligned}
&A_3 = A_4 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda && \text{(случай 1)},\\
&A_3 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda && \text{(случай 2)},\\
&A_3 = B_4 = 0,\ A_2 = -\nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda && \text{(случай 3)}.
\end{aligned}
$$

(Остальные постоянные могут принимать произвольные значения.) Указанные наборы постоянных определяют три разных точных решения уравнения гидродинамики (6.4.2.9) вида (6.4.2.10):

$$
\begin{aligned}
u &= C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y + C_3 + \nu\lambda x,\\
u &= C_1 e^{-\lambda x} + \nu\lambda x + C_2 e^{-\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,\\
u &= C_1 e^{-\lambda x} - \nu\lambda x + C_2 e^{\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные.

3°. Решения уравнений (6.4.2.13), (6.4.2.14) при $C = -\lambda^2 < 0$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 \cos(\lambda x) + A_4 \sin(\lambda x),\\
\psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 \cos(\lambda y) + B_4 \sin(\lambda y).
\end{aligned}
\tag{6.4.2.18}
$$

Подстановка выражений (6.4.2.18) в (6.4.2.11) не дает новых действительных решений.

Вырожденные случаи. В случаях $\varphi''_{xx} \equiv 0$ и $\psi''_{yy} \equiv 0$ уравнение (6.4.2.12) обращается в тождество соответственно для любой функции $\psi = \psi(y)$ и любой функции $\varphi = \varphi(x)$. Эти случаи надо рассматривать отдельно. Например, при $\varphi''_{xx} \equiv 0$ имеем $\varphi(x) = Ax + B$, где A, B — любые. Подставив эту функцию в (6.4.2.11), приходим к уравнению $-A\psi'''_{yyy} = \nu\psi''''_{yyyy}$. Его общее решение описывается формулой $\psi(y) = C_1 \exp(-Ay/\nu) + C_2 y^2 + C_3 y + C_4$. В итоге находим еще одно решение уравнения (6.4.2.9) вида (6.4.2.10):

$$
u = C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 + \nu\lambda x \qquad (A = \nu\lambda,\ B = 0). \qquad ◄
$$

► **Пример 6.13.** Рассмотрим уравнение параболического типа с квадратичной нелинейностью

$$
u_t = a u u_{xx} + b u_x^2 + c. \tag{6.4.2.19}
$$

Будем искать точные решения с разделением переменных вида

$$
u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{6.4.2.20}
$$

Подставляя решение (6.4.2.20) в уравнение (6.4.2.19) и группируя слагаемые, имеем

$$
\psi'_t - c + \varphi'_t\theta = a\varphi\psi\theta''_{xx} + \varphi^2\bigl[a\theta\theta''_{xx} + b(\theta'_x)^2\bigr]. \tag{6.4.2.21}
$$

Сначала устраним наиболее сложную нелинейность, стоящую в квадратных скобках. Разделив соотношение (6.4.2.21) на φ^2 и продифференцировав по t и x, получим двучленное функционально-дифференциальное уравнение

$$
(\varphi'_t/\varphi^2)'_t\theta'_x = a(\psi/\varphi)'_t\theta'''_{xxx}. \tag{6.4.2.22}
$$

Разделяя переменные, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\theta'''_{xxx} = K\theta'_x, \tag{6.4.2.23}$$

$$(\varphi'_t/\varphi^2)'_t = aK(\psi/\varphi)'_t, \tag{6.4.2.24}$$

где K — произвольная постоянная. Общее решение уравнения (6.4.2.23) имеет вид

$$\theta = \begin{cases} A_1x^2 + A_2x + A_3 & \text{при } K = 0, \\ A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x} + A_3 & \text{при } K = \lambda^2 > 0, \\ A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x) + A_3 & \text{при } K = -\lambda^2 < 0, \end{cases} \tag{6.4.2.25}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные. Интегрируя уравнение (6.4.2.24), получим

$$\begin{aligned} &\varphi = \frac{B}{t + C_1}, \quad \psi(t)\text{ — любая} && \text{при } K = 0, \\ &\psi = B\varphi + \frac{1}{aK}\frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad \varphi(t)\text{ — любая} && \text{при } K \neq 0, \end{aligned} \tag{6.4.2.26}$$

где B — произвольная постоянная. Подставив решения (6.4.2.25) и (6.4.2.26) в уравнение (6.4.2.21), можно убрать лишние константы и определить функции ψ и φ. Результаты приводятся ниже.

1°. Решение при $b \neq -a$ и $b \neq -\frac{1}{2}a$:

$$u = \frac{c(a+2b)}{2(a+b)}(t+C_1) + C_2(t+C_1)^{-\frac{a}{a+2b}} - \frac{(x+C_3)^2}{2(a+2b)(t+C_1)} \quad (\text{соответствует } K = 0),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение при $b = -a$:

$$u = \frac{1}{a\lambda^2}\frac{\varphi'_t}{\varphi} + \varphi(A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x}) \quad (\text{соответствует } K = \lambda^2 > 0),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = ac\lambda^2 + 4a^2\lambda^4A_1A_2e^{2Z}, \qquad \varphi = e^Z,$$

решение которого можно получить в неявном виде. В частном случае $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$, легко получаем $\varphi = C_1\exp\bigl(\frac{1}{2}ac\lambda^2t^2 + C_2t\bigr)$.

3°. Решение при $b = -a$:

$$u = -\frac{1}{a\lambda^2}\frac{\varphi'_t}{\varphi} + \varphi[A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x)] \quad (\text{соответствует } K = -\lambda^2 < 0),$$

где функция $\varphi = \varphi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = -ac\lambda^2 + a^2\lambda^4(A_1^2 + A_2^2)e^{2Z}, \qquad \varphi = e^Z,$$

решение которого можно получить в неявном виде.

4°. При $b = -\frac{1}{2}a$ имеется вырожденное решение $u = ct + A_1$.

Вырожденное решение двучленного функционально-дифференциального уравнения (6.4.2.22) ($\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$) приводит к стационарному решению рассматриваемого уравнения. Подобные решения, здесь и далее, не рассматриваются. ◀

Задачи и упражнения к разд. 6.4

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $u_x = au_y^2 + f(x)u$,

b) $u_x = au_y^2 + buu_y + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $u = \varphi(x) + \psi(x)\theta(y)$.

2. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $u_t = a(uu_x)_x$,

b) $u_t = a(uu_x)_x + b$,

c) $u_t = a(uu_x)_x + bu_x$.

Указание. Решения искать в виде $u = f(t)\theta(x) + g(t)$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений волнового типа:

a) $u_{tt} = a(uu_x)_x$,

b) $u_{tt} = a(uu_x)_x + b$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения пограничного слоя с градиентом давления:

$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = \nu u_{yyy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $u = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x)$ (в данном случае f также является искомой функцией).

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений третьего порядка:

a) $u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = au_{xxx}$,

b) $u_t + auu_x + bu_{xtt} = 0$.

Указание. Решения искать в виде $u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $u_t = a\exp(\lambda u_{xx})$,

b) $u_{tt} = a\exp(\lambda u_{xx})$.

Указание. Решения искать в виде $u = f(x)\theta(t) + g(x)$ (обе части уравнений надо предварительно прологарифмировать).

6.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления

6.5.1. Предварительные замечания. Описание метода. Принцип расщепления

При уменьшении числа членов функционально-дифференциального уравнения (6.2.2.1) – (6.2.2.2) с помощью дифференцирования возникают лишние постоянные интегрирования, которые надо убирать на заключительном этапе (см. разд. 6.4). Кроме того, порядок полученного уравнения может быть выше порядка исходного. Чтобы избежать этих трудностей, решение функционально-дифференциального уравнения удобно свести к последовательному решению билинейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. исходная задача расщепляется на две более простые задачи). Ниже дано краткое описание основных этапов этого метода.

1°. На первом этапе рассмотрим уравнение (6.2.2.1) как билинейное функциональное уравнение

$$\sum_{n=1}^{k} \Phi_n \Psi_n = 0, \tag{6.5.1.1}$$

где $\Phi_n = \Phi_n[X]$ и $\Psi_n = \Psi_n[Y]$ — искомые величины ($n = 1, \dots, k$), а X и Y — независимые переменные.

Принцип расщепления. Все решения билинейного функционального уравнения (6.5.1.1) могут быть представлены в виде совокупности линейных комбинаций величин $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ и линейных комбинаций величин $\Psi_1, \dots, \Psi_k$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{k} \alpha_{ni} \Phi_n = 0, \quad i = 1, \dots, l; \\ &\sum_{n=1}^{k} \beta_{nj} \Psi_n = 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{6.5.1.2}$$

где $1 \leqslant l \leqslant k-1$ и $1 \leqslant m \leqslant k-1$. Константы α_{ni} и β_{nj} в (6.5.1.2) выбираются так, чтобы билинейное равенство (6.5.1.1) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать, как показано ниже в разд. 6.5.2). Важно отметить, что соотношения (6.5.1.2) носят чисто алгебраический характер и не зависят от конкретных выражений дифференциальных форм (6.2.2.2).

2°. На втором этапе последовательно подставляем дифференциальные формы $\Phi_i[X]$ и $\Psi_j[Y]$ из (6.2.2.2) в решения (6.5.1.2). В результате получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений (эти системы часто являются переопределенными) для определения искомых функций $\varphi_p(x)$ и $\psi_q(y)$. Решая эти системы, находим решения с обобщенным разделением переменных вида (6.2.1.1).

3°. Вырожденные случаи, когда одна или несколько дифференциальных форм Φ_n и/или Ψ_n обращаются в нуль, необходимо рассматривать отдельно, используя для остальных форм линейные соотношения вида (6.5.1.2).

Замечание 6.8. *Важно подчеркнуть, что используемое в методе расщепления билинейное функциональное уравнение (6.5.1.1) (или (6.2.2.1)) и его решения при фиксированном k являются одними и теми же для разных классов исходных нелинейных уравнений математической физики.*

Замечание 6.9. *Принцип расщепления можно доказать методом математической индукции.*

Для наглядности на рис. 6.1 изображены основные этапы построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления.

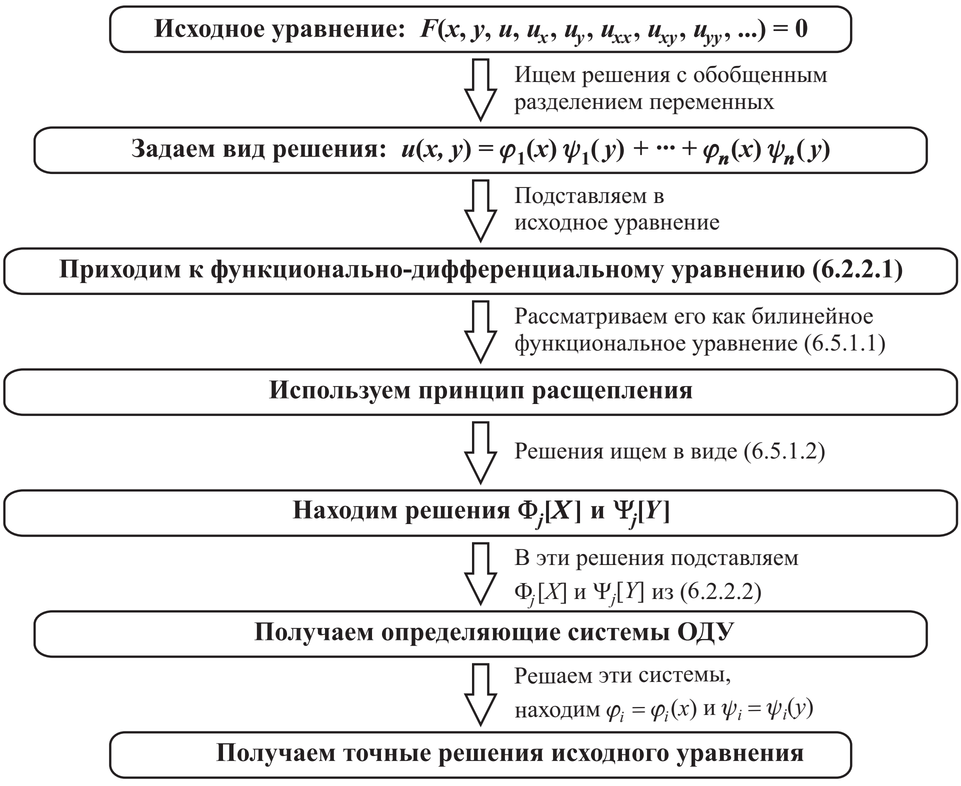

Рис. 6.1. Общая схема построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления.

6.5.2. Решения билинейных функциональных уравнений

Ниже приводятся невырожденные решения нескольких простых функциональных уравнений вида (6.5.1.1) (или (6.2.2.1)), которые понадобятся далее для построения точных решений конкретных нелинейных уравнений с частными производными.

1°. Трехчленное билинейное функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0, \tag{6.5.2.1}$$

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет два решения:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2, \end{aligned} \tag{6.5.2.2}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. Функции в правых частях равенств (6.5.2.2) считаются произвольными. В решениях (6.5.2.2) все функции Φ_i (в первом решении), либо все функции Ψ_i (во втором решении), пропорциональны друг другу. (Прямой подстановкой проверить, что решения (6.5.2.2) удовлетворяют функциональному уравнению (6.5.2.1).)

Функциональное уравнение, содержащее четыре слагаемых

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{6.5.2.3}$$

имеет решение

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \qquad \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4, \\ &\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \end{aligned} \tag{6.5.2.4}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных A_m. Функции в правых частях равенств (6.5.2.4) считаются произвольными.

Уравнение (6.5.2.3) имеет также два более простых решения, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} &\Phi_1=A_1\Phi_4, \quad \Phi_2=A_2\Phi_4, \quad \Phi_3=A_3\Phi_4, \quad \Psi_4=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2-A_3\Psi_3; \\ &\Psi_1=A_1\Psi_4, \quad \Psi_2=A_2\Psi_4, \quad \Psi_3=A_3\Psi_4, \quad \Phi_4=-A_1\Phi_1-A_2\Phi_2-A_3\Phi_3. \end{aligned} \tag{6.5.2.5}$$

В решениях (6.5.2.5) все функции Φ_i, либо все функции Ψ_i, пропорциональны. (Прямой подстановкой проверить, что решения (6.5.2.4) и (6.5.2.5) удовлетворяют функциональному уравнению (6.5.2.3).)

Решение (6.5.2.4) билинейного функционального уравнения (6.5.2.3) чаще, чем решения (6.5.2.5), позволяет найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений с частными производными.

Замечание 6.10. *Ввиду наличия дискретных симметрий билинейных функциональных уравнений относительно различных перестановок искомых величин, символы Φ и Ψ в решениях (6.5.2.2), (6.5.2.4), (6.5.2.5) можно менять местами: $\Phi_p \rightleftarrows \Psi_p$; также можно делать одновременные парные перестановки $\Phi_p \rightleftarrows \Phi_q$ и $\Psi_p \rightleftarrows \Psi_q$.*

3°. На практике для получения решений билинейного функционального уравнения (6.5.1.1) можно поступать следующим образом. Сначала из множества $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ произвольно выбираем несколько первых величин $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$

($p < k$), а затем представляем их в виде линейных комбинаций оставшихся величин этого множества $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_k$ (таким образом задаем первую группу соотношений (6.5.1.2)). Заменив в уравнении (6.5.1.1) выбранные величины $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ линейными комбинациями оставшихся величин, после объединения членов, пропорциональных Φ_q ($q = p+1, \ldots, k$), приходим к соотношению вида

$$\sum_{q=p+1}^{k} \Omega_q \Phi_q = 0, \qquad \Omega_q = \sum_{s=1}^{k} a_{qs} \Psi_s,$$

где a_{qs} — некоторые константы. Приравнивая нулю функциональные коэффициенты Ω_q ($q = p+1, \ldots, k$), получим вторую группу соотношений (6.5.1.2).

В силу симметрии уравнения (6.5.1.1) относительно перестановки функций $\Phi_n \rightleftarrows \Psi_n$ на первом этапе можно выбирать элементы из множества $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$.

► Пример 6.14. Рассмотрим билинейное функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 + \Phi_5\Psi_5 = 0. \tag{6.5.2.6}$$

Будем считать, что первые три функциональных коэффициента Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются линейными комбинациями двух последних коэффициентов Φ_4 и Φ_5:

$$\Phi_1 = A_1\Phi_4 + B_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4 + B_2\Phi_5, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4 + B_3\Phi_5, \tag{6.5.2.7}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Подставим выражения (6.5.2.7) в (6.5.2.6) и соберем члены, пропорциональные Φ_4 и Φ_5:

$$(A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2 + A_3\Psi_3 + \Psi_4)\Phi_4 + (B_1\Psi_1 + B_2\Psi_2 + B_3\Psi_3 + \Psi_5)\Phi_5 = 0.$$

Приравнивая выражения в скобках нулю, получим

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3, \\ \Psi_5 &= -B_1\Psi_1 - B_2\Psi_2 - B_3\Psi_3. \end{aligned} \tag{6.5.2.8}$$

Формулы (6.5.2.7), (6.5.2.8) дают одно из решений уравнения (6.5.2.6). Аналогичным образом находятся и другие решения. ◄

6.5.3. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления

Ниже даны конкретные примеры использования метода расщепления для построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных УрЧП.

► Пример 6.15. Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического типа

$$u_{tt} = a(uu_x)_x + f(t)u + g(t), \tag{6.5.3.1}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции.

Ищем решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{6.5.3.2}$$

Подставив (6.5.3.2) в (6.5.3.1), после элементарных преобразований получим

$$a\varphi^2(\theta\theta'_x)'_x + a\varphi\psi\theta''_{xx} + (f\varphi - \varphi''_{tt})\theta + f\psi + g - \psi''_{tt} = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде билинейного функционального уравнения (6.5.2.3), где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = (\theta\theta'_x)'_x, \quad \Phi_2 = \theta''_{xx}, \quad \Phi_3 = \theta; \qquad\quad \Phi_4 = 1,\\ &\Psi_1 = a\varphi^2, \qquad \Psi_2 = a\varphi\psi, \quad \Psi_3 = f\varphi - \varphi''_{tt}, \quad \Psi_4 = f\psi + g - \psi''_{tt}. \end{aligned} \tag{6.5.3.3}$$

Подставив в решение (6.5.2.4) выражения (6.5.3.3), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $\theta = \theta(x)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$:

$$\begin{aligned} (\theta\theta'_x)'_x &= A_1\theta + A_2, & \theta''_{xx} &= A_3\theta + A_4;\\ f\varphi - \varphi''_{tt} &= -A_1 a\varphi^2 - A_3 a\varphi\psi, & f\psi + g - \psi''_{tt} &= -A_2 a\varphi^2 - A_4 a\varphi\psi, \end{aligned} \tag{6.5.3.4}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные. Первые два уравнения (6.5.3.4) представляют собой переопределенную систему ОДУ для одной функции θ. Второе уравнение является линейным и легко интегрируется; его решение в зависимости от значения постоянной A_3 выражается либо через тригонометрические функции (при $A_3 < 0$), либо через гиперболические функции (при $A_3 > 0$), либо имеет вид квадратичного многочлена (при $A_3 = 0$). Подставляя последовательно решения второго уравнения в первое уравнение, приходим к выводу, что совместное решение этих ОДУ представляет собой квадратичный многочлен

$$\theta(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0, \tag{6.5.3.5}$$

в котором константы B_0, B_1, B_2 следующим образом выражаются через постоянные A_n, входящие в систему (6.5.3.4):

$$A_1 = 6B_2, \quad A_2 = B_1^2 - 4B_0B_2, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 2B_2, \tag{6.5.3.6}$$

Подставив выражения для коэффициентов (6.5.3.6) в два последних уравнения (6.5.3.4), получим систему ОДУ для определения функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= 6aB_2\varphi^2 + f(t)\varphi,\\ \psi''_{tt} &= [2aB_2\varphi + f(t)]\psi + a(B_1^2 - 4B_0B_2)\varphi^2 + g(t). \end{aligned} \tag{6.5.3.7}$$

Формулы (6.5.3.2), (6.5.3.5) и система (6.5.3.7) определяют точное решение уравнения (6.5.3.1) с обобщенным разделением переменных. Первое уравнение (6.5.3.7) решается независимо; оно линейно в случае $B_2 = 0$ и интегрируется в квадратурах в случае $f(t) = \text{const}$. Второе уравнение (6.5.3.7) линейно относительно ψ (при известном φ).

При $\theta \not\equiv 0$, $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$ и произвольных f и g уравнение (6.5.3.1) не имеет других решений вида (6.5.3.2). ◄

Замечание 6.11. *Уравнение (6.5.3.1) имеет более общее решение квадратичного вида по пространственной переменной:* $u = x^2\psi_1(t) + x\psi_2(t) + \psi_3(t)$.

► Пример 6.16. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка гидродинамического типа

$$u_{xt} + u_x^2 - uu_{xx} = \nu u_{xxx}. \tag{6.5.3.8}$$

Ищем точные решения уравнения (6.5.3.8) вида

$$u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{6.5.3.9}$$

Подставив (6.5.3.9) в (6.5.3.8), имеем

$$\varphi_t'\theta_x' - \varphi\psi\theta_{xx}'' + \varphi^2\big[(\theta_x')^2 - \theta\theta_{xx}''\big] - \nu\varphi\theta_{xxx}''' = 0. \tag{6.5.3.10}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно свести к билинейному функциональному уравнению (6.5.2.3), положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \varphi_t', \quad \Phi_2 = \varphi\psi, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \quad \Phi_4 = \nu\varphi;\\ &\Psi_1 = \theta_x', \quad \Psi_2 = -\theta_{xx}'', \quad \Psi_3 = (\theta_x')^2 - \theta\theta_{xx}'', \quad \Psi_4 = -\theta_{xxx}'''. \end{aligned} \tag{6.5.3.11}$$

Первая группа решений. Подставив выражения (6.5.3.11) в (6.5.2.4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi_t' = A_1\varphi^2 + A_2\nu\varphi, && \varphi\psi = A_3\varphi^2 + A_4\nu\varphi;\\ &(\theta_x')^2 - \theta\theta_{xx}'' = -A_1\theta_x' + A_3\theta_{xx}'', && \theta_{xxx}''' = A_2\theta_x' - A_4\theta_{xx}''. \end{aligned} \tag{6.5.3.12}$$

Два последних уравнения в (6.5.3.12) образуют переопределенную систему ОДУ для одной функции θ (последнее уравнение является линейным уравнением с постоянными коэффициентами и легко интегрируется). Можно показать, что эти уравнения имеют совместные решения только при наличии линейной связи между функцией θ и ее производной:

$$\theta_x' = B_1\theta + B_2. \tag{6.5.3.13}$$

Исключив производные в двух последних уравнениях (6.5.3.12) при помощи соотношения (6.5.3.13) (и его следствий, полученных путем дифференцирования), приходим к выводу, что шесть постоянных B_1, B_2, A_1, A_2, A_3, A_4 должны удовлетворять трем условиям:

$$\begin{aligned} B_1(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0,\\ B_2(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0,\\ B_1^2 + A_4B_1 - A_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6.5.3.14}$$

Интегрируя уравнение (6.5.3.13), получим

$$\theta = \begin{cases} B_3\exp(B_1x) - \dfrac{B_2}{B_1} & \text{при } B_1 \neq 0,\\ B_2x + B_3 & \text{при } B_1 = 0, \end{cases} \tag{6.5.3.15}$$

где B_3 — произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (6.5.3.12) находим функции φ и ψ:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{A_2\nu}{C\exp(-A_2\nu t) - A_1} & \text{при } A_2 \neq 0,\\ -\dfrac{1}{A_1t + C} & \text{при } A_2 = 0, \end{cases} \qquad \psi = A_3\varphi + A_4\nu. \tag{6.5.3.16}$$

Формулы (6.5.3.15), (6.5.3.16) и соотношения (6.5.3.14) позволяют найти следующие точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (6.5.3.8):

$$
\begin{aligned}
&u = \frac{C_1 e^{-\lambda x} + 1}{\lambda t + C_2} + \nu\lambda && \text{при}\quad A_2 = 0,\ B_1 = -A_4,\ B_2 = -A_1 - A_3A_4;\\
&u = C_1 e^{-\lambda(x+\beta\nu t)} + \nu(\lambda+\beta) && \text{при}\quad A_1 = A_3 = B_2 = 0,\ A_2 = B_1^2 + A_4B_1;\\
&u = \frac{\nu\beta + C_1 e^{-\lambda x}}{1 + C_2 e^{-\nu\lambda\beta t}} + \nu(\lambda-\beta) && \text{при}\quad A_1 = A_3B_1 - B_2,\ A_2 = B_1^2 + A_4B_1;\\
&u = \frac{x + C_1}{t + C_2} + C_3 && \text{при}\quad A_2 = B_1 = 0,\ B_2 = -A_1,
\end{aligned}
$$

где C_1, C_2, C_3, β, λ — произвольные постоянные (их можно выразить через A_k, B_k).

Вторая группа решений. Пусть в уравнении (6.5.3.10) все члены, зависящие от x, пропорциональны θ'_x. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\theta'''_{xxx} = A_1\theta'_x, \quad \theta''_{xx} = A_2\theta'_x, \quad (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx} = A_3\theta'_x;\\
&\varphi'_t - A_2\varphi\psi + A_3\varphi^2 - A_1\nu\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{6.5.3.17}
$$

Переопределенная подсистема, состоящая из первых трех уравнений (6.5.3.17), допускает два совместных решения:

$$
\begin{aligned}
&\textit{решение 1}: \quad \theta = e^{-\lambda x} \quad \text{при}\quad A_1 = \lambda^2,\ A_2 = -\lambda,\ A_3 = 0;\\
&\textit{решение 2}: \quad \theta = x \quad\quad\ \ \text{при}\quad A_1 = A_2 = 0,\ A_3 = 1.
\end{aligned}
\tag{6.5.3.18}
$$

Решения (6.5.3.18) вместе с решениями последнего уравнения (6.5.3.17), которые находятся элементарно, в итоге приводят к двум решениям исходного нелинейного дифференциального уравнения (6.5.3.8):

$$
\begin{aligned}
u &= \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi'_t(t)}{\lambda\varphi(t)} + \nu\lambda,\\
u &= \frac{x}{t + C} + \psi(t),
\end{aligned}
$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, а λ — произвольная постоянная. ◄

► **Пример 6.17.** Рассмотрим уравнение с экспоненциальной нелинейностью относительно старшей производной:

$$
u_t = f(x)\exp(au_{xx}). \tag{6.5.3.19}
$$

Ищем точные решения вида

$$
u = \varphi(x)\theta(t) + \psi(x). \tag{6.5.3.20}
$$

Подставим (6.5.3.20) в (6.5.3.19), поделим обе части полученного выражения на $f(x)$, а затем прологарифмируем. Считая $\varphi/f > 0$, после элементарных преобразований имеем

$$
a\psi''_{xx} - \ln(\varphi/f) + a\theta\varphi''_{xx} - \ln\theta'_t = 0.
$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно записать в билинейной форме (6.5.2.1), положив

$$\Phi_1 = a\psi''_{xx} - \ln(\varphi/f), \quad \Phi_2 = \varphi''_{xx}, \quad \Phi_3 = 1; \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = a\theta, \quad \Psi_3 = -\ln\theta'_t.$$

Подставив эти выражения в первое решение (6.5.2.2), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$a\psi''_{xx} - \ln(\varphi/f) = A_1, \quad \varphi''_{xx} = A_2, \quad \ln\theta'_t = A_1 + A_2 a\theta.$$

Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}A_2x^2 + C_1x + C_2, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2a}A_1x^2 + C_3x + C_4 + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)\ln\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi, \\ \theta(t) &= -\frac{1}{A_2a}\ln\bigl(C_5 - A_2ae^{A_1}t\bigr). \end{aligned} \tag{6.5.3.21}$$

Формулы (6.5.3.20) и (6.5.3.21) описывают точное решение с обобщенным разделением переменных уравнения (6.5.3.19). ◄

Задачи и упражнения к разд. 6.5

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $u_t = au_x^2 + f(t)u$,

b) $u_t = au_x^2 + buu_x + f(t)$.

Указание. Решения искать в виде $u = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

2. Найти функции $f(y)$, для которых нелинейные уравнения

a) $u_{xy} + ku_xu_y = f(y)$,

b) $u_{xy}^2 + ku_{xx}u_{yy} = f(y)$,

допускают решения с обобщенным разделением переменных вида $u = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x)$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения n-го порядка

$$u_yu_{xy} - u_xu_{yy} = f(x)u_y^{(n)}.$$

Указание. Решения искать в виде $u = \varphi(x)\theta(y) + \psi(x)$.

См. также задачи и упражнения к разд. 6.4.

6.6. Метод инвариантных подпространств

6.6.1. Подпространства, инвариантные относительно нелинейного дифференциального оператора. Описание метода

Данный раздел посвящен описанию *метода инвариантных подпространств**, который не связан с анализом функционально-дифференциальных уравнений

* Этот метод иногда называется *методом Титова—Галактионова*.

и существенно отличается от методов, которые обсуждались ранее в разд. 6.4 и 6.5.

Рассмотрим уравнение с частными производными

$$u_t = F[u], \tag{6.6.1.1}$$

где $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор вида

$$F[u] \equiv F(x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)}). \tag{6.6.1.2}$$

Определение. Конечномерное линейное подпространство

$$\mathscr{L}_k = \bigl\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\bigr\}, \tag{6.6.1.3}$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации линейно-независимых функций $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$, называется *инвариантным относительно дифференциального оператора* F, если существуют функции $f_1, \ldots, f_k$ такие, что

$$F\Bigl[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\Bigr] = \sum_{i=1}^{k} f_i(C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x), \tag{6.6.1.4}$$

где C_1, ..., C_k — произвольные постоянные*. Отметим, что функции $\varphi_i(x)$, входящие в (6.6.1.4), не должны зависеть от C_1, ..., C_k.

Утверждение 1. Пусть линейное подпространство (6.6.1.3) инвариантно относительно дифференциального оператора F. Тогда уравнение (6.6.1.1) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{6.6.1.5}$$

где функции $\psi_1(t)$, ..., $\psi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_i' = f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{6.6.1.6}$$

Здесь штрих обозначает производную по t.

Это утверждение доказывается следующим образом. Сначала выражение (6.6.1.5) подставляется в уравнение (6.6.1.1). Затем используется соотношение (6.6.1.4), в котором константы C_i заменены на функции $\psi_i = \psi_i(t)$. После объединения членов, пропорциональных $\varphi_i = \varphi_i(x)$, получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{k}[\psi_i' - f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k)]\varphi_i(x) = 0.$$

Поскольку функции φ_i линейно независимы, то все выражения в квадратных скобках надо приравнять нулю. В результате приходим к системе ОДУ (6.6.1.6).

Следующий пример иллюстрирует описанный метод построения решений с обобщенным разделением переменных.

---

* Функция $\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)$ под действием оператора F преобразуется в функцию такого же вида $\sum_{i=1}^{k} B_i\varphi_i(x)$, но с другими коэффициентами, где $B_i = f_i(C_1, \ldots, C_k)$.

► Пример 6.18. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с линейным источником

$$u_t = (uu_x)_x + bu. \tag{6.6.1.7}$$

1°. Докажем, что трехмерное линейное подпространство степенных функций вида $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$ инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора

$$F[u] = (uu_x)_x + bu, \tag{6.6.1.8}$$

определяющего правую часть уравнения (6.6.1.7).

Действительно, заменяя в (6.6.1.8) u на $C_1 + C_2x + C_3x^2$, где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, получим соотношение (промежуточные выкладки элементарны, проделать их самостоятельно):

$$F\big[C_1 + C_2x + C_3x^2\big] = 2C_1C_3 + C_2^2 + bC_1 + (6C_2C_3 + bC_2)x + (6C_3^2 + bC_3)x^2,$$

которое показывает, что любой квадратичный многочлен под действием оператора (6.6.1.8) преобразуется в квадратичный многочлен. Из приведенного выше утверждения 1 следует, что нелинейное уравнение теплопроводности (6.6.1.7) имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2, \tag{6.6.1.9}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= 2\psi_1\psi_3 + \psi_2^2 + b\psi_1,\\
\psi_2' &= 6\psi_2\psi_3 + b\psi_2,\\
\psi_3' &= 6\psi_3^2 + b\psi_3.
\end{aligned}$$

Эту систему можно последовательно проинтегрировать, начиная с последнего уравнения, которое является уравнением Бернулли. В результате можно получить точные решения, которые выражаются через элементарные функции (здесь не приводятся).

2°. Покажем, что двумерное линейное подпространство степенных функций вида $\mathscr{L}_2 = \{\sqrt{x}, x^2\}$ также инвариантно относительно дифференциального оператора (6.6.1.8). Действительно, для произвольных C_1 и C_2 имеет место следующее соотношение (проделать выкладки самостоятельно):

$$F\big[C_1\sqrt{x} + C_2x^2\big] = (\tfrac{15}{4}C_1C_2 + bC_1)\sqrt{x} + (6C_2^2 + bC_2)x^2.$$

Поэтому, используя утверждение 1, приходим к выводу, что нелинейное уравнение (6.6.1.7) имеет отличное от (6.6.1.9) решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t)\sqrt{x} + \psi_2(t)x^2,$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\ 2)$ описываются системой ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= \tfrac{15}{4}\psi_1\psi_2 + b\psi_1,\\
\psi_2' &= 6\psi_2^2 + b\psi_2.
\end{aligned}$$

Эту систему можно последовательно проинтегрировать, начиная со второго уравнения, которое является уравнением Бернулли. ◀

► **Пример 6.19.** Рассмотрим теперь нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = au_{xx} + u_x^2 + ku^2 + bu + c. \tag{6.6.1.10}$$

Покажем, что при $k > 0$ дифференциальный оператор

$$F[u] = au_{xx} + u_x^2 + ku^2 + bu + c, \tag{6.6.1.11}$$

определяющий правую часть уравнения (6.6.1.10), имеет двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \{1, \cos(x\sqrt{k}\,)\}$. Действительно, для произвольных C_1 и C_2 справедливо равенство

$$F\big[C_1 + C_2\cos(x\sqrt{k}\,)\big] = k(C_1^2 + C_2^2) + bC_1 + c + C_2(2kC_1 - ak + b)\cos(x\sqrt{k}\,)$$

(проделать выкладки самостоятельно, использовав основное тригонометрическое тождество $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$). Поэтому уравнение (6.6.1.10) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(x\sqrt{k}\,), \tag{6.6.1.12}$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1' &= k(\psi_1^2 + \psi_2^2) + b\psi_1 + c, \\ \psi_2' &= \psi_2(2k\psi_1 - ak + b). \end{aligned} \tag{6.6.1.13}$$

◀

Замечание 6.12. *При $k > 0$ нелинейный дифференциальный оператор $F[u]$ в (6.6.1.11) допускает трехмерное инвариантное подпространство, содержащее тригонометрические функции $\mathscr{L}_3 = \big\{1, \sin(x\sqrt{k}\,), \cos(x\sqrt{k}\,)\big\}$.*

При $k < 0$ нелинейный дифференциальный оператор $F[u]$ в (6.6.1.11) допускает трехмерное инвариантное подпространство, содержащее гиперболические функции $\mathscr{L}_3 = \big\{1, \operatorname{sh}(-x\sqrt{-k}\,), \operatorname{ch}(-x\sqrt{-k}\,)\big\}$ или эквивалентное ему подпространство, содержащее экспоненты $\mathscr{L}_3 = \big\{1, \exp(-x\sqrt{-k}\,), \exp(x\sqrt{-k}\,)\big\}$.

При $k = 0$ нелинейный оператор (6.6.1.11) допускает трехмерное инвариантное подпространство, содержащее степенные функции $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$.

В табл. 6.2 приведены некоторые нелинейные дифференциальные операторы и линейные подпространства, инвариантные относительно этих операторов. Добавление линейного оператора $L[u] = \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma u + \delta$ к первым семи нелинейным операторам не меняет инвариантных подпространств (за исключением $\mathscr{L}_2$ для третьего оператора).

6.6.2. Некоторые обобщения

Будем рассматривать уравнения более общего вида

$$L_1[u] = L_2[w], \quad w = F[u], \tag{6.6.2.1}$$

Таблица 6.2. Некоторые нелинейные дифференциальные операторы и линейные подпространства, инвариантные относительно этих операторов (a, b, c — константы).

№	Нелинейный оператор $F[u]$	Подпространства, инвариантные относительно $F[u]$
1	$au_{xx}+bu_x^2$	$\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$
2	$au_{xx}+u_x^2+bu^2$	$\mathscr{L}_3=\{1,\sin(x\sqrt{b}\,),\cos(x\sqrt{b}\,)\}$ при $b>0$, $\mathscr{L}_3=\{1,\mathrm{sh}(x\sqrt{\lvert b\rvert}\,),\mathrm{ch}(x\sqrt{\lvert b\rvert}\,)\}$ при $b<0$
3	$auu_{xx}+bu_x^2+cu^2$	$\mathscr{L}_3=\{1,\sin(\lambda x),\cos(\lambda x)\}$ при $c/(a+b)=\lambda^2>0$, $\mathscr{L}_3=\{1,\mathrm{sh}(\lambda x),\mathrm{ch}(\lambda x)\}$ при $c/(a+b)=-\lambda^2<0$, $\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$ при $c=0$, $\mathscr{L}_2=\{x^2,x^\beta\}$, $\beta=a/(a+b)$ при $c=0$, $a\neq-b$
4	$uu_{xx}-u_x^2$ (частный случай 3-го оператора)	$\mathscr{L}_3=\{1,\sin(\lambda x),\cos(\lambda x)\}$, λ — произвольная постоянная, $\mathscr{L}_3=\{1,\mathrm{sh}(\lambda x),\mathrm{ch}(\lambda x)\}$, λ — произвольная постоянная, $\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$
5	$uu_{xx}-\frac{2}{3}u_x^2$ (частный случай 3-го оператора)	$\mathscr{L}_4=\{1,x,x^2,x^3\}$
6	$uu_{xx}-\frac{3}{4}u_x^2+au^2$ (частный случай 3-го оператора)	$\mathscr{L}_5=\{1,\cos(kx),\sin(kx),\cos(2kx),\sin(2kx)\}$ при $a=k^2>0$, $\mathscr{L}_5=\{1,\mathrm{ch}(kx),\mathrm{sh}(kx),\mathrm{ch}(2kx),\mathrm{sh}(2kx)\}$ при $a=-k^2<0$, $\mathscr{L}_5=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ при $a=0$
7	$[(au^2+bu+c)u_x]_x$	$\mathscr{L}_2=\{1,x\}$
8	$u^2u_{xx}-\frac{1}{2}uu_x^2+au^3$	$\mathscr{L}_3=\{1,\cos(\sqrt{2a}\,x),\sin(\sqrt{2a}\,x)\}$ при $a>0$, $\mathscr{L}_3=\{1,\mathrm{ch}(\sqrt{2\lvert a\rvert}\,x),\mathrm{sh}(\sqrt{2\lvert a\rvert}\,x)\}$ при $a<0$, $\mathscr{L}_3=\{1,x,x^2\}$ при $a=0$
9	u_xu_{xx}	$\mathscr{L}_4=\{1,x,x^2,x^3\}$, $\mathscr{L}_3=\{1,x^{3/2},x^3\}$, $\mathscr{L}_2=\{1,\varphi(x)\}$, $\varphi'_x\varphi''_{xx}=p_1+p_2\varphi$, p_1, p_2 — константы
10	$(u^2)_{xxxx}$	$\mathscr{L}_5=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$, $\mathscr{L}_3=\{x^{1/2},x^{3/2},x^4\}$
11	$(u^2)_x^{(n)}$	$\mathscr{L}_{n+1}=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$, $\mathscr{L}_3=\{x^{k/2},x^{m/2},x^n\}$, где $k<n$ и $m<n$; k, m, $\frac{1}{2}(k+m)$ — неотрицательные целые числа
12	$u_x^{(m)}u_x^{(n)}$	$\mathscr{L}_{m+n+1}=\{1,x,x^2,\dots,x^{m+n}\}$, $\mathscr{L}_3=\{1,x^{(m+n)/2},x^{n+m}\}$

где $L_1[u]$ и $L_2[w]$ — линейные дифференциальные операторы по переменной t:

$$L_1[u]\equiv\sum_{i=0}^{m_1}a_i(t)u_t^{(i)},\quad L_2[w]\equiv\sum_{j=0}^{m_2}b_j(t)w_t^{(j)}, \tag{6.6.2.2}$$

а $F[u]$ — нелинейный дифференциальный оператор по переменной x:

$$F[u] \equiv F(t, x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)}), \tag{6.6.2.3}$$

который параметрическим образом может зависеть от t.

Утверждение 2. Пусть линейное подпространство (6.6.1.3) инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора F в том смысле, что для произвольных постоянных C_1, ..., C_k имеет место равенство

$$F\Bigl[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\Bigr] = \sum_{i=1}^{k} f_i(t, C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x), \tag{6.6.2.4}$$

где функции $\varphi_i(x)$ не зависят от t и постоянных C_1, ..., C_k. Тогда уравнение (6.6.2.1) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида (6.6.1.5), где функции $\psi_1(t)$, ..., $\psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_1\bigl[\psi_i(t)\bigr] = L_2\bigl[f_i(t, \psi_1, \ldots, \psi_k)\bigr], \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{6.6.2.5}$$

► **Пример 6.20.** Рассмотрим обобщенное уравнение Гудерлея

$$u_{tt} + a_1(t)u_t = a_2(t)u_x u_{xx}, \tag{6.6.2.6}$$

которое при $a_1(t) = 0$ и $a_2(t) = a$, а также при $a_1(t) = 1/t$ и $a_2(t) = a$, используется для описания трансзвуковых газовых течений, где t играет роль пространственной переменной, а $\gamma = a - 1$ — показатель адиабаты.

Уравнение (6.6.2.6) является частным случаем уравнения (6.6.2.1), где

$$L_1[u] = u_{tt} + a_1(t)u_t, \quad L_2[w] = a_2(t)w, \quad F[u] = u_x u_{xx}.$$

1°. Прямой проверкой нетрудно убедиться, что нелинейный дифференциальный оператор $F[u] = u_x u_{xx}$ допускает трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$. Из приведенного выше утверждения 2 следует, что уравнение (6.6.2.6) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x^{3/2} + \psi_3(t)x^3, \tag{6.6.2.7}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' = \tfrac{9}{8}a_2(t)\psi_2^2,\\
&\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' = \tfrac{45}{4}a_2(t)\psi_2\psi_3,\\
&\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' = 18a_2(t)\psi_3^2.
\end{aligned}$$

2°. Оператор $F[u] = u_x u_{xx}$ допускает также четырехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$. Поэтому уравнение (6.6.2.6) имеет также решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3, \tag{6.6.2.8}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' = 2a_2(t)\psi_2\psi_3,\\
&\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' = 2a_2(t)(3\psi_2\psi_4 + 2\psi_3^2),\\
&\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' = 18a_2(t)\psi_3\psi_4,\\
&\psi_4'' + a_1(t)\psi_4' = 18a_2(t)\psi_4^2.
\end{aligned}$$

Эта система для произвольных функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ допускает точные решения в явном виде при $\psi_3 = \mathrm{const}$, $\psi_4 = 0$ и сводится к одному линейному ОДУ второго порядка для функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ при $\psi_3 \neq \mathrm{const}$, $\psi_4 = 0$.

3°. Нетрудно показать, что оператор $F[u] = u_x u_{xx}$ допускает еще двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет автономному обыкновенному дифференциальному уравнению (для вывода этого уравнения использован метод, описанный далее в разд. 6.6.3):

$$\varphi_x' \varphi_{xx}'' = p_1 + p_2\varphi, \tag{6.6.2.9}$$

где p_1 и p_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (6.6.2.9) можно представить в неявной форме

$$x = \int \left(\tfrac{3}{2}p_2\varphi^2 + 3p_1\varphi + p_0\right)^{-1/3} d\varphi + p_3, \tag{6.6.2.10}$$

где p_0 и p_3 — произвольные постоянные. Таким образом уравнение (6.6.2.6) имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ задается неявно выражением (6.6.2.10), а функции $\psi_i = \psi_i(t)$ $(i = 1,\ 2)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' = p_1 a_2(t)\psi_2^2,\\
&\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' = p_2 a_2(t)\psi_2^2.
\end{aligned}$$

◄

6.6.3. Нахождение линейных подпространств, инвариантных относительно заданного нелинейного оператора

Предварительные замечания. Основные трудности, возникающие при использовании метода инвариантных подпространств для построения точных решений конкретных уравнений, состоят в отыскании линейных подпространств, инвариантных относительно заданного нелинейного оператора. До сих пор эта проблема не обсуждалась и неявно предполагалось, что исследователь заранее знает или из каких-то соображений (например, интуитивных) догадался, какое множество линейно независимых функций следует использовать при поиске точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Поэтому сформулированные в разд. 6.6.1 и 6.6.2 утверждения 1 и 2 на практике эквиваленты поиску точных решений в виде билинейной суммы (6.6.1.5), в которой функции $\varphi_i(x)$ заданы априорно (такой подход соответствует упрощенному методу построения решений с обобщенным разделением переменных, описанному ранее в разд. 6.3). Ниже описан метод, который теоретически позволяет найти функции $\varphi_i(x)$.

Описание метода. Чтобы определить независимые базисные функции $\varphi_i = \varphi_i(x)$, подставим линейную комбинацию $\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)$ в нелинейный дифференциальный оператор (6.6.1.2). В результате получим выражение

$$F\Bigl[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\Bigr] = A_1(\mathbf{C})\Phi_1[X] + A_2(\mathbf{C})\Phi_2[X] + \dots + A_m(\mathbf{C})\Phi_m[X] + \\ + B_1(\mathbf{C})\varphi_1(x) + B_2(\mathbf{C})\varphi_2(x) + \dots + B_k(\mathbf{C})\varphi_k(x), \quad (6.6.3.1)$$

где $A_j(\mathbf{C})$ и $B_i(\mathbf{C})$ зависят только от C_1, …, C_k, а функционалы $\Phi_j[X]$ зависят от x и не зависят от C_1, …, C_k:

$$\begin{aligned} &A_j(\mathbf{C}) \equiv A_j(C_1, \dots, C_k), \quad j = 1, \dots, m;\\ &B_i(\mathbf{C}) \equiv B_i(C_1, \dots, C_k), \quad i = 1, \dots, k;\\ &\Phi_j[X] \equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_k, \varphi_k', \varphi_k''\bigr). \end{aligned} \quad (6.6.3.2)$$

Для простоты формулы записаны для случая дифференциального оператора второго порядка. Для оператора более высокого порядка правые части последних соотношений в (6.6.3.2) будут содержать производные φ_i более высокого порядка. Функционалы $\Phi_1[X]$, …, $\Phi_m[X]$ предполагаются линейно независимыми, а $A_j(\mathbf{C})$ — линейно независимые функции C_1, …, C_k.

Конечномерное линейное подпространство (6.6.1.3) будет инвариантным относительно нелинейного дифференциального оператора F (6.6.1.2), если все функционалы $\Phi_j[X]$ ($j = 1, \dots, m$) в (6.6.3.1) будут линейными комбинациями базисных функций $\varphi_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$). Таким образом для определения базисных функций приходим к системе (обычно переопределенной) обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_k, \varphi_k', \varphi_k''\bigr) = p_{j,1}\varphi_1 + p_{j,2}\varphi_2 + \dots + p_{j,k}\varphi_k, \quad j = 1, \dots, m, \quad (6.6.3.3)$$

где $p_{j,i}$ — некоторые константы не зависящие от параметров C_1, …, C_k. Если для некоторого набора констант $p_{i,j}$ система (6.6.3.3) разрешима (на практике достаточно найти какое-нибудь частное решение), то функции $\varphi_i = \varphi_i(x)$ определяют линейное подпространство относительно нелинейного дифференциального оператора (6.6.1.2). В этом случае функции, входящие в правую часть уравнения (6.6.1.4) имеют вид

$$f_i(\mathbf{C}) = p_{1,i}A_1(\mathbf{C}) + p_{2,i}A_2(\mathbf{C}) + \dots + p_{m,i}A_m(\mathbf{C}) + B_i(\mathbf{C}), \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.6.3.4)$$

Замечание 6.13. *Анализ нелинейных дифференциальных операторов полезно начинать с поиска двумерных инвариантных подпространств вида $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$.*

Утверждение 1. Пусть нелинейный дифференциальный оператор $F[u]$ допускает двумерное инвариантное подпространство вида $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, где $\varphi(x) = p\varphi_1(x) + q\varphi_2(x)$, p, q — произвольные постоянные, а функции 1, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ линейно независимы. Тогда оператор $F[u]$ также допускает трёхмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, \varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$.

Утверждение 2. Пусть нелинейные дифференциальные операторы $F_1[u]$ и $F_2[u]$ допускают инвариантное подпространство $\mathscr{L}_n = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$. Тогда нелинейный оператор $pF_1[u] + qF_2[u]$, где p и q — произвольные постоянные, также допускает то же самое инвариантное подпространство.

В частности, операторы $F[u]$ и $aF[u] + bu$ для любых постоянных a и b имеют одинаковые инвариантные подпространства.

► **Пример 6.21.** Рассмотрим дифференциальный оператор (6.6.1.11):

$$F[u] = au_{xx} + u_x^2 + ku^2 + bu + c,$$

Будем искать его инвариантные подпространства вида $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$. Имеем

$$F[C_1 + C_2\varphi(x)] = C_2^2[(\varphi'_x)^2 + k\varphi^2] + C_2 a\varphi''_{xx} + kC_1^2 + bC_1 + c + (bC_2 + 2kC_1C_2)\varphi.$$

В данном случае

$$\Phi_1[X] = (\varphi'_x)^2 + k\varphi^2, \qquad \Phi_2[X] = a\varphi''_{xx}.$$

Следовательно, базисная функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\varphi'_x)^2 + k\varphi^2 &= p_1 + p_2\varphi, \\ \varphi''_{xx} &= p_3 + p_4\varphi, \end{aligned} \tag{6.6.3.5}$$

где $p_1 = p_{1,1}$, $p_2 = p_{1,2}$, $p_3 = p_{2,1}/a$, $p_4 = p_{2,2}/a$.

Исследуем систему (6.6.3.5) на совместность. Для этого продифференцируем первое уравнение по x и разделим на φ'_x. Имеем $\varphi''_{xx} = -k\varphi + p_2/2$. Используем это соотношение для исключения второй производной из второго уравнения в (6.6.3.5). В результате получим

$$(p_4 + k)\varphi + p_3 - \tfrac{1}{2}p_2 = 0.$$

Чтобы это соотношение тождественно удовлетворялось, надо положить

$$p_4 = -k, \quad p_3 = \tfrac{1}{2}p_2. \tag{6.6.3.6}$$

Решение системы (6.6.3.5) при условии (6.6.3.6) имеет вид

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = px^2 + qx && \text{при } k = 0 \quad (p_1 = q^2,\ p_2 = 4p), \\ &\varphi(x) = p\sin\bigl(x\sqrt{k}\bigr) + q\cos\bigl(x\sqrt{k}\bigr) && \text{при } k > 0 \quad (p_1 = kp^2 + kq^2,\ p_2 = 0), \\ &\varphi(x) = p\,\mathrm{sh}\bigl(x\sqrt{-k}\bigr) + q\,\mathrm{ch}\bigl(x\sqrt{-k}\bigr) && \text{при } k < 0 \quad (p_1 = -kp^2 + kq^2,\ p_2 = 0), \end{aligned} \tag{6.6.3.7}$$

где p и q — произвольные постоянные.

Поскольку формулы (6.6.3.7) содержат два произвольных параметра p и q, из утверждения 1 следует, что нелинейный дифференциальный оператор (6.6.1.11) допускает следующие инвариантные подпространства:

$$\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\} \quad \text{при} \quad k = 0,$$
$$\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(x\sqrt{k}\,), \cos(x\sqrt{k}\,)\} \quad \text{при} \quad k > 0,$$
$$\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(x\sqrt{-k}\,), \operatorname{ch}(x\sqrt{-k}\,)\} \quad \text{при} \quad k < 0.$$ ◀

▶ Пример 6.22. Рассмотрим уравнение теплопроводности с квадратичной нелинейностью

$$u_t = f(x)(uu_x)_x, \tag{6.6.3.8}$$

где нелинейный дифференциальный оператор явно зависит от пространственной переменной x. Имеем

$$F[u] = f(x)(uu_x)_x.$$

Будем искать инвариантные подпространства вида $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$ оператора F. Получим

$$F[C_1 + C_2\varphi(x)] = C_2^2 f(x)[\varphi\varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2] + C_1C_2 f(x)\varphi''_{xx}. \tag{6.6.3.9}$$

Следовательно,

$$\Phi_1[X] = f(x)[\varphi\varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2], \qquad \Phi_2[X] = f(x)\varphi''_{xx},$$

а базисная функция $\varphi(x)$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f(x)[\varphi\varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2] &= p_1 + p_2\varphi, \\ f(x)\varphi''_{xx} &= p_3 + p_4\varphi. \end{aligned} \tag{6.6.3.10}$$

Найдём вид допустимых функций $f(x)$, для которых переопределенная система (6.6.3.10) совместна.

В невырожденном случае $\varphi''_{xx} \neq 0$ исключение $f(x)$ из (6.6.3.10) приводит к уравнению относительно φ:

$$(p_3 + p_4\varphi)[\varphi\varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2] = (p_1 + p_2\varphi)\varphi''_{xx}. \tag{6.6.3.11}$$

Любое решение этого уравнения порождает функцию $f(x)$ такую, что

$$f(x) = \frac{p_3 + p_4\varphi}{\varphi''_{xx}}. \tag{6.6.3.12}$$

Подстановка $(\varphi'_x)^2 = 2w(\varphi)$ приводит (6.6.3.11) к линейному уравнению первого порядка с разделяющими переменными

$$[p_4\varphi^2 + (p_3 - p_2)\varphi - p_1]w'_\varphi = -2(p_3 + p_4\varphi)w,$$

которое легко интегрируется. Некоторые случаи, когда $\varphi(x)$ выражается явно через элементарные функции, описаны в табл. 6.3.

Соотношение (6.6.3.9) с учетом (6.6.3.10) записывается так:

$$F[C_1 + C_2\varphi(x)] = C_2^2 p_1 + C_1C_2p_3 + (C_2^2 p_2 + C_1C_2p_4)\varphi(x),$$

Таблица 6.3. Определяющие функции $f(x)$, входящие в уравнение (6.6.3.8), и соответствующие им базисные функции $\varphi(x)$; a, b, n, λ — произвольные постоянные ($n \neq 2$, $\lambda \neq 0$).

№	Функция $f(x)$	Функция $\varphi(x)$	Параметры p_1, p_2, p_3, p_4
1	a	$\dfrac{1}{2a}x^2 + bx$	$p_1 = ab^2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$, $p_4 = 0$
2	ax^n	x^{2-n}	$p_1 = p_4 = 0$, $p_2 = a(2-n)(3-2n)$, $p_3 = a(1-n)(2-n)$
3	ax^2	$\ln x$	$p_1 = a$, $p_2 = p_3 = -a$, $p_4 = 0$
4	$ae^{\lambda x}$	$e^{-\lambda x}$	$p_1 = p_4 = 0$, $p_2 = 2a\lambda^2$, $p_3 = a\lambda^2$

а соответствующие точные решения уравнения (6.6.3.8) имеют вид

$$u = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x),$$

где функции $\psi_m = \psi_m(t)$ определяются путем решения автономной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_1' = p_1\psi_2^2 + p_3\psi_1\psi_2,$$
$$\psi_2' = p_2\psi_2^2 + p_4\psi_1\psi_2,$$

штрих обозначает производную по t. Разделив первое уравнение на второе, можно преобразовать эту систему к одному однородному уравнению первого порядка, которое легко интегрируется. ◀

Задачи и упражнения к разд. 6.6

1. Показать, что нелинейный дифференциальный оператор

$F[u] = (a_1u_x + a_2u + a_3)u_{xx} + a_4u_x^2 + a_5u_x + a_6u + a_7$

допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$. Используя это обстоятельство, найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $u_t = auu_{xx} + bu$,
b) $u_t = auu_{xx} + bu_x$,
c) $u_{tt} = a(uu_x)_x + bu + c$.
d) $u_{tt} = a(uu_x)_x + bu_x + cu$,

2. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$F[u] = (a_1u_x + a_2u + a_3)u_{xx} + a_4u_x^2 + a_5u_x + a_6u^2 + a_7u + a_8$

допускает инвариантные линейные подпространства:

a) $\mathscr{L}_2 = \{1, x\}$,
b) $\mathscr{L}_2 = \{x^2, x^\beta\}$,
c) $\mathscr{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,
d) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,
e) $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$?

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $u_t = u_{xx} + au_x^2 + bu^2$,

b) $u_t = uu_{xx} + bu^2 + c$,

c) $u_t = uu_{xx} + bu_x^2 + c$,

d) $u_t = auu_{xx} + bu_x^2$,

e) $u_{tt} = (uu_x)_x + au^2 + b$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи.

4. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$$F[u] = a_1u_{xx}^2 + a_2u_xu_{xx} + a_3uu_{xx} + a_4u_x^2 + a_5uu_x + a_6u^2 + a_7u_x + a_8u + a_9$$

допускает инвариантные линейные подпространства:

a) $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$,

b) $\mathscr{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$,

c) $\mathscr{L}_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$,

d) $\mathscr{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,

e) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,

f) $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$?

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $u_t = au_{xx}^2$,

b) $u_{tt} = au_{xx}^2 + b$,

c) $u_t = u_{xx}^2 + u^2$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнений с кубической нелинейностью:

a) $u_t = 2u^2u_{xx} - uu_x^2$,

b) $u_{tt} = 2u^2u_{xx} - uu_x^2 + a$.

Указание. Показать, что нелинейный оператор $F[u] = 2u^2u_{xx} - uu_x^2$ допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$.

7. Показать, что нелинейный оператор $F[u] = (u^2)_{xxxx}$ допускает линейные инвариантные подпространства:

a) $\mathscr{L}_5 = \bigl\{1, x, x^2, x^3, x^4\bigr\}$,

b) $\mathscr{L}_3 = \bigl\{x^{1/2}, x^{3/2}, x^4\bigr\}$.

8. Показать, что уравнение вида (6.6.1.10) с переменными коэффициентами, где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — произвольные функции и $k = \text{const} > 0$, также имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (6.6.1.12), где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (6.6.1.13) при $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$.

Литература к главе 6

Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020.

Титов С.С. О решениях нелинейных уравнений в частных производных в виде многочленов по одной из переменных. *Численные методы механики сплошной среды*, Новосибирск, 1977, т. 8, № 1, с. 144–149.

Титов С.С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики. *Аэродинамика* (ред. Т.П. Иванова), Саратовский ун-т, 1988, с. 104–110.

Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 1995, Vol. 125, No. 2, pp. 225–246.

Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton—London: CRC Press, 2012.

7. Методы функционального разделения переменных

7.1. Предварительные замечания

7.1.1. Структура решений с функциональным разделением переменных

1°. Многие линейные уравнения математической физики допускают точные решения в виде суммы произведений функций разных аргументов. Нелинейные УрЧП, полученные из таких УрЧП заменой $u = U(z)$, будут иметь точные решения вида

$$u(x,t) = U(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(t). \tag{7.1.1.1}$$

где z — решение исходного линейного уравнения.

Многие нелинейные уравнения с частными производными, которые не сводятся к линейным, также имеют точные решения вида (7.1.1.1). Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных*. В общем случае функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(t)$, $U(z)$ в (7.1.1.1) заранее неизвестны и подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Функцию U будем называть *внешней функцией*, а φ_m и ψ_m — *внутренними функциями*.

Замечание 7.1. *Решение с обобщенным разделением переменных (см. главу 6) является решением с функциональным разделением переменных частного вида, соответствующим случаю $U(z) = z$. Наличие внешней функции U в (7.1.1.1), которую требуется найти, является существенным осложняющим фактором при построении точных решений с функциональным разделением переменных.*

Основная идея, которая лежит в основе метода функционального разделения переменных, заключается в следующем: дифференциально-функциональное уравнение, полученное в результате подстановки выражения (7.1.1.1) в рассматриваемое уравнение с частными производными, надо постараться свести к стандартному билинейному функциональному уравнению (6.5.1.1) из разд. 6.5.1 (или к дифференциально-функциональному уравнению (6.2.2.1) — (6.2.2.2) из разд. 6.2.2).

2°. Часто (в узком смысле) термин *уравнение с функциональным разделением переменных* используется для более простых точных решений вида

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(t), \tag{7.1.1.2}$$

где все три функции $U(z)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ являются искомыми. При построении решений (7.1.1.2) считается, что $\varphi \neq \text{const}$ и $\psi \neq \text{const}$.

Замечание 7.2. *При функциональном разделении переменных поиск решений простейшего вида* $u = U(\varphi(x) + \psi(t))$ *и* $u = U(\varphi(x)\psi(t))$ *приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление* $U(\varphi(x)\psi(t)) = U_1(\varphi_1(x) + \psi_1(t))$, *где* $U_1(z) = U(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(t) = \ln\psi(t)$.

Замечание 7.3. *Иногда используется неявное представление решений с функциональным разделением переменных (см. раздел 7.5).*

7.2. Упрощенный метод построения решений с функциональным разделением переменных

7.2.1. Описание упрощенного метода, основанного на преобразованиях искомой функции

В ряде случаев поиск решения в виде (7.1.1.1) удается провести в два этапа. Сначала используется преобразование, сводящее исходное уравнение к уравнению с квадратичной (иногда степенно́й) нелинейностью. Затем решение полученного уравнения ищется любым из методов, которые описаны в разд. 6.3 — 6.6.

К сожалению, нет регулярных методов сведения нелинейных УрЧП заданного вида к УрЧП с квадратичной нелинейностью. Уравнения с квадратичной нелинейностью иногда удается получить с помощью преобразований искомой функции вида $u = U(z)$. Наиболее распространенные преобразования этого типа приведены ниже:

$u = z^\lambda$ (для уравнений со степенной нелинейностью),

$u = \lambda \ln z$ (для уравнений с экспоненциальной нелинейностью),

$u = e^{\lambda z}$ (для уравнений с логарифмической нелинейностью),

где λ — постоянная, подлежащая определению. Указанный подход эквивалентен априорному заданию вида внешней функции $U(z)$ в выражении (7.1.1.1); успех его реализации в основном зависит от опыта и интуиции исследователя.

7.2.2. Примеры построения точных решений нелинейных уравнений

Ниже приведены примеры использования упрощенного метода построения точных решений с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений с частными производными второго порядка.

► Пример 7.1. Рассмотрим трехпараметрическое семейство нелинейных уравнений диффузионного типа с источником степенного вида

$$u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{k+1}, \tag{7.2.2.1}$$

где a, b, k — свободные параметры. Подстановка $z = u^k$ преобразует (7.2.2.1) к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = azz_{xx} + \frac{a}{k}z_x^2 + bkz^2. \tag{7.2.2.2}$$

Это уравнение допускает различные решения с обобщенным разделением переменных, вид которых зависит от коэффициентов нелинейных слагаемых в правой части (7.2.2.2). Решения уравнения (7.2.2.2) нетрудно найти, используя табл. 6.2 (см. строку 3). Видно, что при выполнении неравенства $ab(k+1) > 0$ будут решения с тригонометрическими функциями, а при $ab(k+1) < 0$ — решения с экспоненциальными функциями.

В результате получим следующие решения нелинейного УрЧП (7.2.2.1):

$$\begin{aligned} u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/k} \quad \text{при} \ ab(k+1) > 0,\\ u &= \bigl\{\varphi(t)\bigl[C_1\operatorname{ch}(\beta x) + C_2\operatorname{sh}(\beta x)\bigr] + \psi(t)\bigr\}^{1/k} \quad \text{при} \ ab(k+1) < 0. \end{aligned} \tag{7.2.2.3}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$\beta = \sqrt{\frac{|b|k^2}{|a(k+1)|}},$$

а функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= \frac{bk(k+2)}{k+1}\varphi\psi,\\ \psi'_t &= bk\psi^2 + \frac{bk}{k+1}(C_1^2 \pm C_2^2)\varphi^2. \end{aligned} \tag{7.2.2.4}$$

Верхний знак во втором уравнении соответствует первому решению (7.2.2.3), а нижний знак — второму решению (7.2.2.3).

При $C_1 = C_2$ общее решение уравнений (7.2.2.4) (с нижним знаком) имеет вид

$$\varphi = C_3(t + C_4)^{-\frac{k+2}{k+1}}, \qquad \psi = -\frac{1}{bk(t + C_4)},$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные. ◀

► **Пример 7.2.** Рассмотрим теперь четырехпараметрическое семейство нелинейных уравнений диффузионного типа с источником экспоненциального вида

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{\lambda u} + c. \tag{7.2.2.5}$$

Замена $z = e^{\lambda u}$ приводит (7.2.2.5) к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = azz_{xx} + b\lambda z^2 + c\lambda z. \tag{7.2.2.6}$$

Решения уравнения (7.2.2.6) можно найти с помощью табл. 6.2 (см. строку 3), при использовании которой надо учесть, что последний член в правой части (7.2.2.6) не влияет на структуру решения. Видно, что при выполнении неравенства $ab\lambda > 0$ уравнение (7.2.2.6) имеет решение с тригонометрическими функциями, при $ab\lambda < 0$ — решение с экспоненциальными функциями, а при $b = 0$ решение представляет собой квадратичный многочлен по переменной x.

Указанной заменой, в частности, можно найти следующие точные решения с функциональным разделением переменных уравнения (7.2.2.1):

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{c\lambda t}\bigl[C_1\cos\bigl(x\sqrt{b\lambda/a}\,\bigr) + C_2\sin\bigl(x\sqrt{b\lambda/a}\,\bigr)\bigr]\bigr\} \qquad \text{при} \ \ ab\lambda > 0,$$
$$u = \frac{1}{\lambda}\ln\bigl\{e^{c\lambda t}\bigl[C_1\operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-b\lambda/a}\,\bigr) + C_2\operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-b\lambda/a}\,\bigr)\bigr]\bigr\} \quad \text{при} \ \ ab\lambda < 0,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ◄

► Пример 7.3. Нелинейное двухпараметрическое уравнение диффузионного типа с источником логарифмического вида

$$u_t = au_{xx} + bu\ln u \tag{7.2.2.7}$$

заменой $u = e^z$ сводится к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$z_t = az_{xx} + az_x^2 + bz. \tag{7.2.2.8}$$

Уравнение (7.2.2.8) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных в виде квадратичного многочлена по пространственной переменной (см. строку 1 в табл. 6.2). Соответствующее точное решение исходного уравнения (7.2.2.7) имеет вид

$$u = \exp[\psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)x + \psi_3(t)],$$

где функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= 4a\psi_1^2 + b\psi_1,\\
\psi_2' &= 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_2,\\
\psi_3' &= b\psi_3 + 2a\psi_1 + a\psi_2^2.
\end{aligned}$$

Эти уравнения последовательно легко интегрируются. Первое уравнение интегрируется, поскольку является уравнением Бернулли. Из сопоставления первого и второго уравнения следует, что $\psi_2 = C_1\psi_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Последнее уравнение является линейным уравнением относительно ψ_3 с известным (из решения первых двух уравнений) неоднородным членом. ◄

В табл. 7.1 приведены примеры более сложных уравнений диффузионного и волнового типов со степенной, экспоненциальной и логарифмической нелинейностью, которые простой подстановкой вида $u = F(z)$ приводятся к уравнениям с квадратичной или кубической нелинейностью. Последнее УрЧП в таблице — нелинейное телеграфное уравнение, которое в приложениях иногда называется также уравнением диффузии (теплопроводности) гиперболического типа.

Таблица 7.1. Некоторые нелинейные УрЧП, приводимые к УрЧП с квадратичной или кубической нелинейностью с помощью преобразований вида $u = F(z)$.

№	Исходное уравнение	Преобразование	Преобразованное уравнение	Вид решений для функции z
1	$u_t=a(u^{2k}u_x)_x+bu^{1-k}$	$u=z^{1/k}$	$z_t=az^2z_{xx}+$ $+a(1+k^{-1})zz_x^2+bk$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
2	$u_t=a(u^k u_x)_x+(bu^k+c)u_x$	$u=z^{1/k}$	$z_t=azz_{xx}+ak^{-1}z_x^2+$ $+(bz+c)z_x$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
3	$u_t=a(u^{2k}u_x)_x+bu^k u_x$	$u=z^{1/k}$	$z_t=az^2z_{xx}+$ $+a(1+k^{-1})zz_x^2+bzz_x$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
4	$u_t=a(e^{2\lambda u}u_x)_x+b+ce^{-\lambda u}$	$u=\lambda^{-1}\ln z$	$z_t=az^2z_{xx}+azz_x^2+$ $+b\lambda z+c\lambda$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
5	$u_t=au_{xx}+b(\ln u)u_x+cu$	$u=e^z$	$z_t=az_{xx}+az_x^2+$ $+bzz_x+c$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
6	$u_t=[(a\ln u+b)u_x]_x+cu$	$u=e^z$	$z_t=(az+b)z_{xx}+$ $+(az+a+b)z_x^2+c$	$z=\varphi(t)x+\psi(t)$
7	$u_{tt}=a(u^{-1/2}u_x)_x+bu^{1/2}$	$u=z^2$	$zz_{tt}+z_t^2=az_{xx}+$ $+\frac{1}{2}bz$	$z=\varphi(x)t^2+\psi(x)t+\chi(x)$
8	$u_{tt}=a(u^{-2/3}u_x)_x+bu^{1/3}$	$u=z^3$	$z^2z_{tt}+2zz_t^2=az_{xx}+$ $+\frac{1}{3}bz$	$z=\varphi(x)t+\psi(x)$
9	$u_{tt}+cu_t=au_{xx}+bu\ln u$	$u=e^z$	$z_{tt}+z_t^2+cz_t=az_{xx}+$ $+az_x^2+bz$	$z=\varphi(x)+\psi(t)$

Задачи и упражнения к разд. 7.2

1. Найти точные решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности со степеннóй нелинейностью

a) $u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{1-k}$,

b) $u_t = a(u^k u_x)_x + bu + cu^{1-k}$,

c) $u_t = a(u^k u_x)_x + bu^{1+k} + c + du^{1-k}$.

2. Найти точные решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с экспоненциальной нелинейностью

a) $u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + b$,

b) $u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + b + ce^{-\lambda u}$,

c) $u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + be^{\lambda u} + c + de^{-\lambda u}$.

3. Найти точные решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с логарифмической нелинейностью

a) $u_t = au_{xx} + bu\ln u + cu$,

b) $u_t = au_{xx} + bu\ln^2 u$,

c) $u_t = au_{xx} + bu\ln^2 u + cu\ln u + du$.

7.3. Решения типа обобщенной бегущей волны

7.3.1. Решения типа обобщенной бегущей волны и другие решения специального вида. Алгоритм построения решений

Для упрощения анализа некоторые внутренние функции в (7.1.1.1) можно задавать априорно, а другие, включая внешнюю функцию U, определять в процессе решения. Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных специального вида*.

Наиболее простым и достаточно часто встречающимся решением с функциональным разделением переменных специального вида является *решение типа обобщенной бегущей волны*, которое допускает представление

$$u = U(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t) \quad (\text{аргумент } z \text{ линеен по } x), \tag{7.3.1.1}$$

где x и t можно поменять местами. При $\varphi(t) = k_1$, $\psi(t) = k_2 t$, где k_1 и k_2 — произвольные константы, это решение переходит в обычное *решение типа бегущей волны*.

После подстановки выражения (7.3.1.1) в рассматриваемое УрЧП надо исключить переменную x с помощью выражения для z, т. е. сделать замену $x = (z - \psi)/\varphi$. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами t и z. Его решение ищется с помощью методов, описанных в главе 6.

Для наглядности общая схема построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений изображена на рис. 7.1.

Замечание 7.4. *Алгоритм, изображенный на рис. 7.1, может использоваться также для построения точных решений более общего вида** $u = \sigma(t)F(z) + \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$, *где* $z = \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$. *Пример подобного решения рассмотрен далее в разд. 8.1.1 (см. пример 8.3).*

Ниже указаны два более сложных решения с функциональным разделением переменных специального вида:

$$u = U(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t) \quad (\text{аргумент } z \text{ квадратичен по } x); \tag{7.3.1.2}$$

$$u = U(z), \quad z = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t) \quad (\text{аргумент } z \text{ экспоненциален по } x). \tag{7.3.1.3}$$

После подстановки выражения (7.3.1.2) или (7.3.1.3) в рассматриваемое УрЧП надо исключить переменную x с помощью выражения для z. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами t и z, решение которого ищется с помощью методов, описанных в главе 6.

Отметим, что в формуле (7.3.1.3) вместо $e^{\lambda x}$ могут стоять также простейшие гиперболические и тригонометрические функции.

*Указанный класс решений содержит в себе как частные случаи все наиболее распространенные решения: решения типа бегущей волны, автомодельные решения, обобщенные автомодельные решения, решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (а также многие инвариантные решения).

Рис. 7.1. Алгоритм построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений.

7.3.2. Примеры построения точных решений типа обобщенной бегущей волны

Некоторые нелинейные УрЧП, которые имеют решения типа обобщенной бегущей волны, приведены в табл. 7.1 (см. строки 1–6 и 8).

Рассмотрим более сложные примеры нелинейных уравнений математической физики, допускающих точные решения типа обобщенной бегущей волны вида (7.3.1.1).

► Пример 7.4. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a(u_{yy})^{n-1} u_{yyy}, \qquad (7.3.2.1)$$

которое описывает пограничный слой степенно́й жидкости на плоской пластине. Здесь u — функция тока, x и y — декартовы координаты (x отсчитывается вдоль пластины), n — реологический параметр (значение $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости).

Точные решения этого уравнения ищем в виде обобщенной бегущей волны

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x)y + \psi(x). \qquad (7.3.2.2)$$

Подставив (7.3.2.2) в (7.3.2.1) и исключив переменную y с помощью замены $y = (z - \psi)/\varphi$, приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$\varphi'_x (U'_z)^2 = a\varphi^{2n} (U''_{zz})^{n-1} U'''_{zzz}, \tag{7.3.2.3}$$

которое не зависит от функции ψ. Разделяя в (7.3.2.3) переменные и интегрируя, находим

$$\varphi(x) = \begin{cases} (ax + C)^{1/(1-2n)} & \text{при } n \neq 1/2, \\ C\exp(ax/\lambda) & \text{при } n = 1/2, \end{cases} \qquad \psi(x) \text{ — произвольная функция,}$$

где C и λ — произвольные постоянные. Функция $U(z)$ удовлетворяет обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &(U'_z)^2 = (1-2n)(U''_{zz})^{n-1} U'''_{zzz} && \text{при } n \neq 1/2, \\ &(U'_z)^2 = \lambda (U''_{zz})^{-1/2} U'''_{zzz} && \text{при } n = 1/2. \end{aligned}$$

Первое уравнение при $\frac{1}{2} < n < 2$ допускает точное решение степенного вида

$$U(z) = Az^{\frac{2n-1}{n-2}}, \quad A = \left[\frac{3(2-n)}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2-n}} \left[\frac{(2n-1)(n+1)}{(2-n)^2}\right]^{\frac{n}{2-n}}.$$

◀

▶ Пример 7.5. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$u_t = u_{xx} + f(u). \tag{7.3.2.4}$$

Ищем точные решения уравнения (7.3.2.4) в виде обобщенной бегущей волны*

$$u = u(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{7.3.2.5}$$

Требуется найти функции $u(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, а также последний член $f(u)$ в правой части уравнения.

Подставив выражение (7.3.2.5) в (7.3.2.4) и поделив на u'_z, имеем

$$\varphi'_t x + \psi'_t = \varphi^2 \frac{u''_{zz}}{u'_z} + \frac{f(u)}{u'_z}. \tag{7.3.2.6}$$

Выразив в (7.3.2.5) x через z, получим $x = (z - \psi)/\varphi$. Исключим с помощью этого выражения x в (7.3.2.6). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными t и z:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi} z + \varphi^2 \frac{u''_{zz}}{u'_z} + \frac{f(u)}{u'_z} = 0,$$

которое удобно представить в билинейном виде

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{7.3.2.7}$$

*Здесь и далее, когда в рассматриваемое уравнение входит функция $f(u)$, которая ищется вместе с решением методом функционального разделения переменных, вместо $u = U(z)$ решение будем обозначать $u = u(z)$. Вид аргумента $z = z(x,t)$ может выбираться по-разному, см. разд. 7.1.1.

где

$$\Phi_1 = -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, \quad \Phi_2 = -\frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \quad \Phi_4 = 1,$$
$$\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = z, \quad \Psi_3 = \frac{u''_{zz}}{u'_z}, \quad \Psi_4 = \frac{f(u)}{u'_z}. \tag{7.3.2.8}$$

Подставив выражения (7.3.2.8) в формулы (см. решения (6.5.2.4))

$$\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \qquad \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4,$$
$$\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \tag{7.3.2.9}$$

которые тождественно удовлетворяют соотношению (7.3.2.7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2, \quad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^2 + A_4,$$
$$\frac{u''_{zz}}{u'_z} = -A_1 - A_3 z, \quad \frac{f(u)}{u'_z} = -A_2 - A_4 z, \tag{7.3.2.10}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Случай 1. При $A_4 \neq 0$ решение системы (7.3.2.10) имеет вид

$$\varphi(t) = \pm\Big(C_1 e^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\Big)^{-1/2},$$
$$\psi(t) = -\varphi(t)\Big[A_1\int\varphi(t)\,dt + A_2\int\frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\Big],$$
$$u(z) = C_3\int\exp\big(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\big)\,dz + C_4,$$
$$f(u) = -C_3(A_4 z + A_2)\exp\big(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\big), \tag{7.3.2.11}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Зависимость $f = f(u)$ задается двумя последними выражениями в параметрическом виде (z играет роль параметра). При $A_3 \neq 0$ функцию источника $f(u)$ в (7.3.2.11) можно выразить через элементарные функции и функцию, обратную интегралу вероятностей.

В частном случае $A_3 = C_4 = 0$, $A_1 = -1$, $C_3 = 1$ функцию источника можно представить в явном виде:

$$f(u) = -u(A_4\ln u + A_2). \tag{7.3.2.12}$$

Случай 2. При $A_4 = 0$, $A_3 \neq 0$ решения первых двух уравнений (7.3.2.10) имеют вид

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2A_3 t + C_1}}, \qquad \psi(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2A_3 t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3 t + C_1), \tag{7.3.2.13}$$

а решения остальных уравнений описываются двумя последними формулами (7.3.2.11) при $A_4 = 0$.

При $A_4 = A_3 = 0$ решения первых двух уравнений (7.3.2.10) даются формулами

$$\varphi = C_1, \qquad \psi(t) = -(A_1 C_1^2 + A_2)t + C_2, \tag{7.3.2.14}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. ◄

► Пример 7.6. Рассмотрим нелинейное уравнение конвективной теплопроводности с переменными коэффициентами и источником

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)f(u), \tag{7.3.2.15}$$

где $a=a(t)$, $b=b(t)$, $c=c(t)$ — произвольные функции. Это уравнение переходит в уравнение (7.3.2.4) при $a = c = 1$, $b = 0$.

Решения ищем в виде (7.3.2.5). Рассуждая аналогично тому, как это делалось в примере 7.5, приходим с системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} -\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' + b\varphi = A_1 a\varphi^2 + A_2 c, \quad -\frac{\varphi_t'}{\varphi} = A_3 a\varphi^2 + A_4 c,\\ \frac{u_{zz}''}{u_z'} = -A_1 - A_3 z, \qquad \frac{f(u)}{u_z'} = -A_2 - A_4 z. \end{gathered} \tag{7.3.2.16}$$

Видно, что по сравнению с системой (7.3.2.10) в системе (7.3.2.16) изменились только первые два уравнения для функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$. Несмотря на некоторое усложнение эти уравнения можно полностью проинтегрировать, поскольку второе ОДУ после умножения на φ приводится к уравнению Бернулли, а первое ОДУ линейно относительно функции ψ. В результате получим

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = \pm\Big[C_1 E(t) + 2A_3 E(t)\int \frac{a(t)}{E(t)}\,dt\Big]^{-1/2}, \qquad E(t) = \exp\Big(2A_4\int c(t)\,dt\Big),\\ &\psi(t) = -\varphi(t)\Big[A_1\int a(t)\varphi(t)\,dt + A_2\int \frac{c(t)}{\varphi(t)}\,dt - \int b(t)\,dt + C_2\Big]. \end{aligned}$$

Функции $u(z)$ и $f(u)$, как и ранее, будут описываться двумя последними формулами (7.3.2.11). ◄

► Пример 7.7. Нелинейное уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом переноса и источником

$$u_t = [g(u)u_x]_x + f(u) \tag{7.3.2.17}$$

также имеет решения вида (7.3.2.5). Искомые величины в этом случае описываются системой ОДУ:

$$\begin{gathered} -\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' = A_1\varphi^2 + A_2, \quad -\frac{\varphi_t'}{\varphi} = A_3\varphi^2 + A_4,\\ \frac{[g(u)u_z']_z'}{u_z'} = -A_1 - A_3 z, \quad \frac{f(u)}{u_z'} = -A_2 - A_4 z. \end{gathered} \tag{7.3.2.18}$$

Видно, что по сравнению с системой (7.3.2.10) в системе (7.3.2.18) изменились только третье уравнение. Поэтому функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (7.3.2.11). Одна из двух функций $g(u)$ или $f(u)$ в уравнении (7.3.2.17) может быть задана произвольно, а другая находится из последних двух ОДУ (7.3.2.18).

В последние два уравнения (7.3.2.18) входят три неизвестные функции $f = f(u)$, $g = g(u)$, $u = u(z)$, поэтому одну из них можно задать произвольно. В дальнейшем будем считать, что зависимость $u = u(z)$ задана в неявном виде

$z = Z(u)$, где функция $Z(u)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Используя соотношение $u'_z = 1/Z'_u$, из последних двух уравнений (7.3.2.18) можно получить формулы

$$\begin{aligned} f(u) &= -[A_2 + A_4 Z(u)]\frac{1}{Z'_u(u)}, \\ g(u) &= -\Big[A_1 u + A_3 \int Z(u)\,du + C\Big] Z'_u(u), \end{aligned} \qquad (7.3.2.19)$$

которые задают допустимый вид функций $f = f(u)$ и $g = g(u)$, входящих в уравнение (7.3.2.17). Это уравнение имеет решение вида (7.3.2.5), где функция $u = u(z)$ задается неявно $z = Z(u)$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (7.3.2.11) (при $A_4 \neq 0$) или формулами (7.3.2.13) (при $A_4 = 0$, $A_3 \neq 0$) и (7.3.2.14) (при $A_4 = A_3 = 0$). Рассмотрим примеры использования формул (7.3.2.19).

1°. Положив в (7.3.2.19)

$$Z(u) = u^k, \;\; A_1 = -\frac{a_1}{k}, \;\; A_2 = -b_2 k, \;\; A_3 = -\frac{a_2(k+1)}{k}, \;\; A_4 = -b_1 k, \;\; C = 0,$$

приходим к уравнению вида (7.3.2.17) со степенными нелинейностями

$$u_t = [(a_1 u^k + a_2 u^{2k}) u_x]_x + b_1 u + b_2 u^{1-k},$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны (7.3.2.5) при $u(z) = z^{1/k}$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (7.3.2.11) (при $b_1 \neq 0$) или формулами (7.3.2.13) (при $b_1 = 0$, $a_2 \neq 0$) и (7.3.2.14) (при $b_1 = a_2 = 0$).

2°. Положив в (7.3.2.19)

$$Z(u) = e^{\lambda u}, \;\; A_1 = -\frac{a_1}{\lambda}, \;\; A_2 = -b_2\lambda, \;\; A_3 = -a_2, \;\; A_4 = -b_1\lambda, \;\; C = 0,$$

получим уравнение вида (7.3.2.17) с экспоненциальными и экспоненциально-степенной нелинейностями

$$u_t = [(a_1 u e^{\lambda u} + a_2 e^{2\lambda u}) u_x]_x + b_1 + b_2 e^{-\lambda u},$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны (7.3.2.5) при $u(z) = (\ln u)/\lambda$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (7.3.2.11) (при $b_1 \neq 0$) или формулами (7.3.2.13) (при $b_1 = 0$, $a_2 \neq 0$) и (7.3.2.14) (при $b_1 = a_2 = 0$). ◄

► Пример 7.8. Аналогичным образом рассматривается нелинейное УрЧП n-го порядка

$$u_t = u_x^{(n)} + f(u). \qquad (7.3.2.20)$$

Как и ранее, решения ищем в виде обобщенной бегущей волны (7.3.2.5). Рассуждая также, как и в примере 7.5, приходим с системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t &= A_1\varphi^n + A_2, \quad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4, \\ \frac{u_z^{(n)}}{u'_z} &= -A_1 - A_3 z, \quad \frac{f(u)}{u'_z} = -A_2 - A_4 z, \end{aligned} \qquad (7.3.2.21)$$

При $A_4 \neq 0$ общее решение первых двух уравнений системы (7.3.2.21) имеет вид

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = \Bigl(C_1 e^{A_4 nt} - \frac{A_3}{A_4}\Bigr)^{-1/n}, \\ &\psi(t) = -\varphi(t)\Bigl[A_1 \int \varphi^{n-1}(t)\,dt + A_2 \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\Bigr], \end{aligned} \qquad (7.3.2.22)$$

При $A_4 = 0$ решение второго уравнения (7.3.2.21) дается формулой

$$\varphi(t) = (A_3 nt + C_1)^{-1/n};$$

подставив ее во вторую формулу (7.3.2.22) можно найти функцию $\psi(t)$. Рассмотрим некоторые уравнения вида (7.3.2.20) и их решения.

1°. Положив в последних двух ОДУ (7.3.2.21) $A_1 = -1$, $A_3 = 0$ и $u(z) = e^z$, приходим к уравнению с логарифмической нелинейностью

$$u_t = u_x^{(n)} - A_4 u \ln u - A_2 u,$$

которое имеет решение вида (7.3.2.5) при $u(z) = e^z$.

2°. Для нечетных $n = 2m+1$ ($m = 1, 2, \ldots$), положив $A_1 = (-1)^{m+1}$, $A_3 = 0$ и $u(z) = \sin z$, приходим к уравнению

$$u_t = u_x^{(2m+1)} - (A_2 + A_4 \arcsin u)\sqrt{1-u^2},$$

которое имеет решение вида (7.3.2.5) при $u(z) = \sin z$. ◄

► Пример 7.9. Для обобщенного уравнения Кортевега — де Фриза n-го порядка

$$u_t = u_x^{(n)} + f(u) u_x, \qquad (7.3.2.23)$$

поиск точного решения вида (7.3.2.5) приводит к следующей системе уравнений для определения функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $u(z)$, $f(u)$:

$$\begin{aligned} &-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^n + A_2\varphi, \quad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4\varphi, \\ &\frac{u_z^{(n)}}{u'_z} = -A_1 - A_3 z, \qquad f(u) = -A_2 - A_4 z. \end{aligned} \qquad (7.3.2.24)$$

По сравнению с (7.3.2.21) в системе (7.3.2.24) изменились первые два уравнения и последнее уравнение. Первые два уравнения можно полностью проинтегрировать, поскольку второе уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, а первое уравнение линейно относительно функции ψ.

Далее рассмотрим случай $A_3 = 0$, когда можно представить в явном виде функцию $f(u)$. При $A_3 = 0$ общие решения первых двух уравнений (7.3.2.24) записываются так:

$$\varphi(t) = \frac{1}{A_4 t + C_1}, \qquad \psi(t) = \frac{A_1}{A_4(n-2)}(A_4 t + C_1)^{1-n} - \frac{A_2 t + C_2}{A_4 t + C_1}.$$

Приведем некоторые уравнения вида (7.3.2.23) и их решения.

1°. Положив в последних двух ОДУ (7.3.2.24) $A_1 = -1$, $A_3 = 0$ и $u(z) = e^z$, приходим к уравнению с логарифмической нелинейностью

$$u_t = u_x^{(n)} - (A_4 \ln u + A_2) u_x,$$

которое имеет решение вида (7.3.2.5) при $u(z) = e^z$.

2°. Для нечетных $n = 2m + 1$ ($m = 1, 2, \ldots$), положив $A_1 = (-1)^{m+1}$, $A_3 = 0$ и $u(z) = \sin z$, приходим к уравнению

$$u_t = u_x^{(2m+1)} - (A_2 + A_4 \arcsin u)u_x,$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны (7.3.2.5) при $u(z) = \sin z$. ◀

▶ **Пример 7.10.** Рассмотрим нелинейное УрЧП со смешанной производной $(n+1)$-го порядка

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^n \partial y} = f(u). \tag{7.3.2.25}$$

Ищем решение типа обобщенной бегущей волны

$$u = u(z), \qquad z = \varphi(y)x + \psi(y). \tag{7.3.2.26}$$

Подставим (7.3.2.26) в (7.3.2.25), а затем исключим x с помощью выражения для z. В результате после деления на $u_z^{(n+1)}$ и перегруппировки членов получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами:

$$\varphi^n \psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y + \varphi^{n-1}\varphi'_y\Big(z + n\frac{u_z^{(n)}}{u_z^{(n+1)}}\Big) - \frac{f(u)}{u_z^{(n+1)}} = 0. \tag{7.3.2.27}$$

Оно сводится к трехчленному билинейному функциональному уравнению вида (6.5.2.1), которое имеет два решения (6.5.2.2). В соответствии с этим рассмотрим два случая.

1°. В первом случае выражение в круглых скобках и последнюю дробь в (7.3.2.27) приравниваем к константам. В результате после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} (z - C_1)u_z^{(n+1)} + nu_z^{(n)} &= 0,\\ C_2 u_z^{(n+1)} - f(u) &= 0,\\ \varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y + C_1\varphi^{n-1}\varphi'_y - C_2 &= 0, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 0$ (это соответствует сдвигу по z и переобозначению функции ψ) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} u &= A\ln|z| + B_{n-1}z^{n-1} + \cdots + B_1 z + B_0,\\ f(u) &= AC_2 n!\,(-1)^n z^{-n-1},\\ \psi(y) &= C_2\varphi(y)\int\frac{dy}{[\varphi(y)]^{n+1}} + C_3\varphi(y), \end{aligned} \tag{7.3.2.28}$$

где A, B_m, C_3 — произвольные постоянные, $\varphi(y)$ — произвольная функция.

Первые две формулы в (7.3.2.28) дают параметрическое представление для функции $f(u)$. В частном случае при $B_{n-1} = \cdots = B_0 = 0$ после исключения z приходим к экспоненциальной зависимости

$$f(u) = \alpha e^{\beta u}, \qquad \alpha = AC_2 n!\,(-1)^n, \quad \beta = -(n+1)/A.$$

В силу (7.3.2.28) соответствующее точное решение уравнения (7.3.2.25) с экспоненциальной правой частью будет иметь функциональный произвол.

2°. Во втором случае в (7.3.2.27) приравниваем к константам разность первых двух членов и функциональный множитель, стоящий перед выражением в круглых скобках. В результате приходим к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered} \varphi^{n-1}\varphi'_y = C_1, \\ \varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y = C_2, \\ (C_1z + C_2)u_z^{(n+1)} + C_1nu_z^{(n)} - f(u) = 0, \end{gathered} \tag{7.3.2.29}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решения двух первых уравнений имеют вид

$$\varphi = (C_1nt + C_3)^{1/n}, \qquad \psi = C_4(C_1nt + C_3)^{1/n} - \frac{C_2}{C_1}.$$

Эти формулы вместе с последним ОДУ (7.3.2.29) дают решение типа обобщенной бегущей волны вида (7.3.2.26) нелинейного уравнения (7.3.2.25) с произвольной функцией $f(u)$. ◄

Задачи и упражнения к разд. 7.3

Ниже функции f, g, h подлежат определению.

1. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:

$u_t = f(u)u_x + g(u)$.

Указание. Решения искать в виде

a) $u = u(z)$, $z = \varphi(t)x + \psi(t)$,

b) $u = u(z)$, $z = \varphi(x)t + \psi(x)$.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:

$u_t = f(u)u_x^2 + g(u)$.

Указание. Решения искать в виде

a) $u = u(z)$, $z = \varphi(t)x + \psi(t)$,

b) $u = u(z)$, $z = \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

3. Подробно рассмотреть и проделать все необходимые выкладки в примерах 7.8–7.10.

4. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений:

a) $u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)u_x$,

b) $u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)u_x + h(u)$.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = \varphi(t)x + \psi(t)$.

5. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:

$u_t = [f(u)u_x^n]_x + g(u)$.

Указание. Решение искать в виде $u = u(z)$, где $z = \varphi(t)x + \psi(t)$.

6. Найти решения типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений третьего порядка:

a) $u_t = f(u)u_{xxx} + g(u)$,

b) $u_t = f(u)u_{xxx} + g(u)u_x$,

c) $u_t = [f(u)u_{xx}]_x + g(u)$,

d) $u_t = [f(u)u_{xx}]_x + g(u)u_x$.

7. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)$,

b) $u_t = x^{-n}[x^n f(u)u_x]_x + g(u)$,

c) $u_t = au_{xx} + bxu_x + f(u)$.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

8. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного реакционно-диффузионного уравнения

$$u_t = u_{xx} + x^2 f(u),$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = t + \int \theta(x)\,dx$.

9. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного реакционно-диффузионного уравнения

$$u_t = [a(x)u_x]_x + \frac{x^2}{a(x)} f(u),$$

где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = t + \int \theta(x)\,dx$.

10. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного реакционно-диффузионного уравнения

$$u_t = u_{xx} + \operatorname{th}^2 x f(u),$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = t + \int \theta(x)\,dx$.

11. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного конвективно-диффузионного уравнения

$$u_t = u_{xx} + xf(u)u_x,$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = t + \int \theta(x)\,dx$.

12. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного конвективно-диффузионного уравнения

$$u_t = u_{xx} + \operatorname{th} x f(u)u_x,$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = t + \int \theta(x)\,dx$.

13. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного конвективно-диффузионного уравнения

$$u_t = [a(x)u_x]_x + xf(u)u_x,$$

где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции.

14. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного уравнения типа Клейна — Гордона
$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{k}{a(x)} - 1\right] f(u),$$
где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции.

Указание. Решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = t + \int \theta(x)\,dx$.

7.4. Метод дифференцирования

7.4.1. Краткое описание метода. Редукция к функционально-дифференциальному уравнению стандартного вида

Обычно процедура построения точных решений с функциональным разделением переменных, основанная на методе дифференцирования, состоит из нескольких последовательных этапов, кратко описанных ниже.

1°. Выражение (7.1.1.2) подставляется в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными. В результате получается функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами (первые два аргумента — x и t — обычные, а третий аргумент — z — сложный).

2°. Функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами путем умножения на подходящие функции и дифференцирования по x или/и t сводится к функционально-дифференциальному уравнению с двумя аргументами стандартного вида (исключается переменная x или t), которое рассматривалось в разд. 6.2.

3°. Методом расщепления строится решение функционально-дифференциального уравнения с двумя аргументами из п. 2° (используются формулы, приведенные в разд. 6.5).

4°. Решение из п. 3° подставляется в функционально-дифференциальное уравнение, полученное в п. 1°. В результате определяются связи между постоянными интегрирования, устраняются лишние константы (которые могут появиться из-за дифференцирования в п. 2°) и находятся все искомые величины.

5°. Отдельно рассматриваются возможные вырожденные случаи (возникающие при нарушении использованных при решении предположений).

Замечание 7.5. *Наиболее сложной является вторая стадия, которую не всегда удается реализовать.*

7.4.2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных методом дифференцирования

Ниже приведены примеры применения метода дифференцирования для построения точных решений с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений диффузионного и волнового типов. Основное внимание уделяется методическим аспектам получения билинейного функционального уравнения стандартного вида и его использования, поэтому некоторые решения детально не исследуются или опускаются.

► Пример 7.11. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = [f(u)u_x]_x. \tag{7.4.2.1}$$

В общем случае уравнение (7.4.2.1) допускает решение типа бегущей волны $u = U_1(kx - \lambda t)$, а также автомодельное решение $u = U_2(xt^{-1/2})$.

Ищем точные решения с функциональным разделением переменных уравнения (7.4.2.1) в следующем виде:

$$u = u(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{7.4.2.2}$$

Подставим (7.4.2.2) в (7.4.2.1). После деления на u'_z получим функционально-дифференциальное уравнение с тремя переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} f(u) + (\varphi'_x)^2 H(z), \tag{7.4.2.3}$$

где

$$H(z) = f(u)\frac{u''_{zz}}{u'_z} + f'_z(u), \qquad u = u(z). \tag{7.4.2.4}$$

Дифференцируя (7.4.2.3) по x, имеем

$$\varphi'''_{xxx} f(u) + \varphi'_x\varphi''_{xx}[f'_z(u) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z = 0. \tag{7.4.2.5}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными можно рассматривать как трехчленное билинейное функциональное уравнение (6.5.2.1) из разд. 6.5, которое имеет два различных решения. Поэтому надо рассмотреть два случая.

Случай 1. Решения функционально-дифференциального уравнения (7.4.2.5) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} f'_z + 2H = 2A_1 f, \qquad H'_z = A_2 f, \\ \varphi'''_{xxx} + 2A_1\varphi'_x\varphi''_{xx} + A_2(\varphi'_x)^3 = 0, \end{gathered} \tag{7.4.2.6}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Первые два уравнения (7.4.2.6) линейны и не зависят от третьего уравнения. Их общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &f = \begin{cases} e^{A_1 z}(B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) & \text{при } A_1^2 > 2A_2, \\ e^{A_1 z}(B_1 + B_2 z) & \text{при } A_1^2 = 2A_2, \\ e^{A_1 z}[B_1\sin(kz) + B_2\cos(kz)] & \text{при } A_1^2 < 2A_2, \end{cases} \qquad k = |A_1^2 - 2A_2|^{1/2}, \\ &H = A_1 f - \tfrac{1}{2} f'_z, \end{aligned} \tag{7.4.2.7}$$

где B_1 и B_2 — постоянные интегрирования.

Подставим выражение для H из (7.4.2.7) в (7.4.2.4). Получим дифференциальное уравнение для определения функции $u = u(z)$. В результате интегрирования имеем

$$u = C_1 \int e^{A_1 z}|f(z)|^{-3/2} dz + C_2, \tag{7.4.2.8}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формула (7.4.2.7) для f вместе с выражением (7.4.2.8) задают зависимость $f = f(u)$ в параметрической форме.

Рассмотрим подробнее случай $A_2 = 0$ и $A_1 \neq 0$ $(k = |A_1|)$. Из формул (7.4.2.7) и (7.4.2.8) получим

$$\begin{aligned} &f(z) = B_1 e^{2A_1 z} + B_2, \quad H = A_1 B_2, \\ &u(z) = C_3 (B_1 + B_2 e^{-2A_1 z})^{-1/2} + C_2 \quad (C_1 = A_1 B_2 C_3). \end{aligned} \tag{7.4.2.9}$$

Исключая z, имеем

$$f(u) = \frac{B_2 C_3^2}{C_3^2 - B_1 u^2}. \tag{7.4.2.10}$$

Первый интеграл последнего уравнения (7.4.2.6) при $A_2 = 0$ имеет вид

$$\varphi''_{xx} + A_1 (\varphi'_x)^2 = \text{const},$$

а его общее решение описывается формулами

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\operatorname{sh}^2\bigl(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3\bigr)}\right] && \text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 > 0; \\ &\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[-\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\cos^2\bigl(A_1\sqrt{-D_2}\,x + D_3\bigr)}\right] && \text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 < 0; \\ &\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[-\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\bigl(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3\bigr)}\right] && \text{при} \quad D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \end{aligned} \tag{7.4.2.11}$$

где D_1, D_2, D_3 — постоянные интегрирования. Во всех трех случаях выполняются соотношения

$$(\varphi'_x)^2 = D_1 e^{-2A_1\varphi} + D_2, \qquad \varphi''_{xx} = -A_1 D_1 e^{-2A_1\varphi}. \tag{7.4.2.12}$$

Подставим выражения (7.4.2.9) и (7.4.2.12) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (7.4.2.3). Учитывая вид переменной z (7.4.2.2), получим уравнение для функции $\psi = \psi(t)$:

$$\psi'_t = -A_1 B_1 D_1 e^{2A_1\psi} + A_1 B_2 D_2.$$

Интегрируя, находим решение

$$\psi(t) = \frac{1}{2A_1} \ln \frac{B_2 D_2}{D_4 \exp(-2A_1^2 B_2 D_2 t) + B_1 D_1}, \tag{7.4.2.13}$$

где D_4 — произвольная постоянная.

Формулы (7.4.2.2), (7.4.2.9) (для u), (7.4.2.11), (7.4.2.13) определяют три решения нелинейного уравнения (7.4.2.1) с функцией $f(u)$ вида (7.4.2.10) (напомним, что эти решения соответствуют частному случаю $A_2 = 0$ в (7.4.2.7) и (7.4.2.8)).

Случай 2. Решения функционально-дифференциального уравнения (7.4.2.5) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'''_{xxx} = A_1 (\varphi'_x)^3, \qquad \varphi'_x \varphi''_{xx} = A_2 (\varphi'_x)^3, \\ &A_1 f + A_2 (f'_z + 2H) + H'_z = 0. \end{aligned} \tag{7.4.2.14}$$

Первые два уравнения (7.4.2.14) совместны в двух случаях:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x) = B_1 x + B_2, \\ A_1 = 2A_2^2 \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x) = -\frac{1}{A_2}\ln|B_1 x + B_2|. \end{aligned} \tag{7.4.2.15}$$

Первое решение в (7.4.2.15) в конечном итоге приводит к решению уравнения (7.4.2.1) типа бегущей волны $u = u(B_1 x + B_2 t)$, а второе решение — к автомодельному решению вида $u = \widetilde{u}(x^2/t)$. В этих случаях функция $f(u)$ в уравнении (7.4.2.1) произвольна. ◄

Замечание 7.6. *Более общее нелинейное уравнение теплопроводности*

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u) \tag{7.4.2.16}$$

также имеет решение вида (7.4.2.2). Для искомых функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с тремя независимыми переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} f(u) + (\varphi'_x)^2 H(z) + g(u)/u'_z,$$

где функция $H(z)$ определяется по формуле (7.4.2.4). Дифференцируя последнее равенство по x, получим

$$\varphi'''_{xxx} f(u) + \varphi'_x \varphi''_{xx}[f'_z(u) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z + \varphi'_x [g(u)/u'_z]'_z = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными можно трактовать как билинейное функциональное уравнение (6.5.2.3) из разд. 6.5 с $\Phi_1 = \varphi'''_{xxx}$, $\Phi_2 = \varphi'_x \varphi''_{xx}$, $\Phi_3 = (\varphi'_x)^3$, $\Phi_4 = \varphi'_x$.

► Пример 7.12. Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = f(u). \tag{7.4.2.17}$$

Ищем точные решения в виде

$$u = u(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{7.4.2.18}$$

Подставив выражение (7.4.2.18) в (7.4.2.17), получим

$$\psi''_{tt} - \varphi''_{xx} + \bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr]\, g(z) = h(z), \tag{7.4.2.19}$$

где

$$g(z) = u''_{zz}/u'_z, \quad h(z) = f\bigl(u(z)\bigr)/u'_z. \tag{7.4.2.20}$$

Продифференцировав уравнение (7.4.2.19) сначала по t, а затем по x, после деления на $\psi'_t \varphi'_x$ имеем

$$2(\psi''_{tt} - \varphi''_{xx})\, g'_z + \bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr]\, g''_{zz} = h''_{zz}.$$

Исключив разность $\psi''_{tt} - \varphi''_{xx}$ из этого уравнения с помощью (7.4.2.19), получим

$$\bigl[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\bigr](g''_{zz} - 2gg'_z) = h''_{zz} - 2g'_z h. \tag{7.4.2.21}$$

Это равенство может выполняться только в двух случаях:

$$\begin{aligned} &1) \quad g''_{zz} - 2gg'_z = 0, \quad h''_{zz} - 2g'_z h = 0; \\ &2) \quad (\psi'_t)^2 = A\psi + B, \quad (\varphi'_x)^2 = -A\varphi + B - C, \\ &\quad\ \ h''_{zz} - 2g'_z h = (Az + C)(g''_{zz} - 2gg'_z), \end{aligned} \tag{7.4.2.22}$$

где A, B, C — произвольные постоянные*. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай 1. Первые два уравнения (7.4.2.22) позволяют найти $g(z)$ и $h(z)$. Интегрируя, из первого уравнения имеем $g'_z = g^2 + \mathrm{const}$. Интегрируя далее, получим

$$g = k, \tag{7.4.2.23}$$

$$g = -1/(z + C_1), \tag{7.4.2.24}$$

$$g = -k\,\mathrm{th}(kz + C_1), \tag{7.4.2.25}$$

$$g = -k\,\mathrm{cth}(kz + C_1), \tag{7.4.2.26}$$

$$g = k\,\mathrm{tg}(kz + C_1), \tag{7.4.2.27}$$

где C_1 и k — произвольные постоянные.

Второе уравнение в (7.4.2.22) является линейным ОДУ относительно функции h и имеет частное решение $h = g(z)$ (поскольку при $h = g$ оно совпадает с первым уравнением). Его общее решение можно найти по формуле (докажите это самостоятельно):

$$h = C_2 g(z) + C_3 g(z) \int \frac{dz}{g^2(z)}, \tag{7.4.2.28}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Из соотношений (7.4.2.20) определяются функции $u(z)$ и $f(u)$ в виде

$$u(z) = B_1 \int G(z)\,dz + B_2, \quad f(u) = B_1 h(z) G(z), \quad G(z) = \exp\Bigl[\int g(z)\,dz\Bigr], \tag{7.4.2.29}$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные (функция f задана в параметрической форме).

Исследуем подробнее случай (7.4.2.24). Используя формулу (7.4.2.28), находим

$$h = A_1 (z + C_1)^2 + \frac{A_2}{z + C_1}, \tag{7.4.2.30}$$

где $A_1 = -C_3/3$, $A_2 = -C_2$ — любые. Подставляя выражения (7.4.2.24) и (7.4.2.30) в (7.4.2.29), получим

$$u = B_1 \ln|z + C_1| + B_2, \quad f = A_1 B_1 (z + C_1) + \frac{A_2 B_1}{(z + C_1)^2}.$$

Исключая из этих соотношений z, находим явный вид правой части уравнения (7.4.2.17):

$$f(u) = A_1 B_1 e^{w} + A_2 B_1 e^{-2w}, \quad \text{где} \quad w = \frac{u - B_2}{B_1}. \tag{7.4.2.31}$$

Для наглядности далее полагаем $C_1 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$ и введем обозначения $A_1 = a$, $A_2 = b$. Таким образом, имеем

$$u(z) = \ln|z|, \quad f(u) = ae^{u} + be^{-2u}, \quad g(z) = -1/z, \quad h(z) = az^2 + b/z. \tag{7.4.2.32}$$

*Первые два ОДУ в случае 2) появляются в результате дифференцирования по x и t функционально-дифференциального уравнения $(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2 = R(z)$, к которому сводится уравнение (7.4.2.21) после деления на $(g''_{zz} - 2gg'_z)$. В итоге имеем $R''_{zz} = 0$ и $R(z) = Az + C$. Последнее соотношение с учетом выражения $z = \varphi(x) + \psi(t)$ и уравнения $(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2 = R(z)$ и приводит к указанным ОДУ.

Осталось определить функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$. Подставим выражения (7.4.2.32) в функционально-дифференциальное уравнение (7.4.2.19). Учитывая зависимость (7.4.2.18), после элементарных преобразований получим

$$[\psi\psi''_{tt}-(\psi'_t)^2-a\psi^3-b]-[\varphi\varphi''_{xx}-(\varphi'_x)^2+a\varphi^3]+(\psi''_{tt}-3a\psi^2)\varphi-\psi(\varphi''_{xx}+3a\varphi^2)=0. \tag{7.4.2.33}$$

Дифференцируя (7.4.2.33) по t и x, уничтожаем члены в квадратных скобках. В результате приходим к уравнению с разделяющимися переменными*

$$(\psi'''_{ttt}-6a\psi\psi'_t)\varphi'_x-(\varphi'''_{xxx}+6a\varphi\varphi'_x)\psi'_t=0,$$

решение которого описывается автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\psi'''_{ttt}-6a\psi\psi'_t&=A\psi'_t,\\ \varphi'''_{xxx}+6a\varphi\varphi'_x&=A\varphi'_x,\end{aligned}$$

где A — константа разделения. Каждое из этих уравнений можно два раза проинтегрировать:

$$\begin{aligned}(\psi'_t)^2&=2a\psi^3+A\psi^2+C_1\psi+C_2,\\ (\varphi'_x)^2&=-2a\varphi^3+A\varphi^2+C_3\varphi+C_4,\end{aligned} \tag{7.4.2.34}$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные. Исключая с помощью (7.4.2.34) производные из уравнения (7.4.2.33), находим следующие связи между константами: $C_3=-C_1$, $C_4=C_2+b$. Таким образом, функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ описываются автономными ОДУ первого порядка с кубической нелинейностью

$$\begin{aligned}(\psi'_t)^2&=2a\psi^3+A\psi^2+C_1\psi+C_2,\\ (\varphi'_x)^2&=-2a\varphi^3+A\varphi^2-C_1\varphi+C_2+b.\end{aligned}$$

Решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции.

Для остальных случаев в (7.4.2.23) — (7.4.2.27) исследование проводится аналогичным образом. Результаты анализа для случаев (7.4.2.23) — (7.4.2.27) сведены в итоговой табл. 7.2.

Случай 2. Интегрируя первые два уравнения (7.4.2.22) (для второго случая), имеем два решения:

$$\begin{aligned}&\psi=\pm\sqrt{B}\,t+D_1, &&\varphi=\pm\sqrt{B-C}\,t+D_2 &&\text{при}\quad A=0;\\ &\psi=\frac{1}{4A}(At+D_1)^2-\frac{B}{A}, &&\varphi=-\frac{1}{4A}(Ax+D_2)^2+\frac{B-C}{A} &&\text{при}\quad A\neq0;\end{aligned} \tag{7.4.2.35}$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные. В обоих случаях функция $f(u)$ в уравнении (7.4.2.17) является произвольной. Первое решение (7.4.2.35) соответствует решению типа бегущей волны $u=u(kx+\lambda t)$, а второе приводит к решению вида $u=u(x^2-t^2)$. ◀

*Для решения уравнения (7.4.2.33) проще всего использовать результаты решения функционального уравнения (6.5.2.3) из разд. 6.5 (см. формулы (6.5.2.4) и (6.5.2.5)).

Таблица 7.2. Нелинейные уравнения $u_{tt}-u_{xx}=f(u)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $u=u(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(t)$.

№	Правая часть уравнения $f(u)$	Решение $u(z)$	Уравнения для $\psi(t)$ и $\varphi(x)$
1	$au\ln u+bu$	e^z	$(\psi_t')^2=C_1e^{-2\psi}+a\psi-\frac{1}{2}a+b+A$, $(\varphi_x')^2=C_2e^{-2\varphi}-a\varphi+\frac{1}{2}a+A$
2	ae^u+be^{-2u}	$\ln\lvert z\rvert$	$(\psi_t')^2=2a\psi^3+A\psi^2+C_1\psi+C_2$, $(\varphi_x')^2=-2a\varphi^3+A\varphi^2-C_1\varphi+C_2+b$
3	$a\sin u+b\Bigl(\sin u\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{4}+2\sin\dfrac{u}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg}e^z$	$(\psi_t')^2=C_1e^{2\psi}+C_2e^{-2\psi}+b\psi+a+A$, $(\varphi_x')^2=-C_2e^{2\varphi}-C_1e^{-2\varphi}-b\varphi+A$
4	$a\operatorname{sh}u+b\Bigl(\operatorname{sh}u\ln\operatorname{th}\dfrac{u}{4}+2\operatorname{sh}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi_t')^2=C_1e^{2\psi}+C_2e^{-2\psi}-\sigma b\psi+a+A$, $(\varphi_x')^2=C_2e^{2\varphi}+C_1e^{-2\varphi}+\sigma b\varphi+A$
5	$a\operatorname{sh}u+2b\Bigl(\operatorname{sh}u\operatorname{arctg}e^{u/2}+\operatorname{ch}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi_t')^2=C_1\sin 2\psi+C_2\cos 2\psi+\sigma b\psi+a+A$, $(\varphi_x')^2=-C_1\sin 2\varphi+C_2\cos 2\varphi-\sigma b\varphi+A$
Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma=1$ при $z>0$, $\sigma=-1$ при $z<0$			

► Пример 7.13. Нелинейное уравнение стационарной теплопроводности (диффузии) с источником

$$u_{xx}+u_{yy}=f(u)$$

исследуется точно так же, как и нелинейное уравнение Клейна — Гордона (см. пример 7.12). Основные результаты приведены в итоговой табл. 7.3. Для произвольной функции $f(u)$ имеется также решение типа бегущей волны $u=u(k_1x+k_2y)$ и решение с радиальной симметрией вида $u=u(x^2+y^2)$. ◄

► Пример 7.14. Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником

$$[a(x)u_x]_x+[b(y)u_y]_y=f(u). \tag{7.4.2.36}$$

Поиск точных решений уравнения (7.4.2.36) вида $u=u(z)$, $z=\varphi(x)+\psi(y)$ приводит к функциональному уравнению

$$p_1(x)+p_2(y)+[q_1(x)+q_2(y)]R(z)+S(z)=0, \tag{7.4.2.37}$$

где

$$p_1(x)=[a(x)\varphi_x']_x', \quad p_2(y)=[b(y)\psi_y']_y', \quad q_1(x)=a(x)(\varphi_x')^2,$$
$$q_2(y)=b(y)(\psi_y')^2, \quad R(z)=u_{zz}''/u_z', \quad S(z)=-f(u)/u_z', \quad u=u(z).$$

Дифференцируем (7.4.2.37) по y. Полученное выражение делим на $\psi_y'R_z'$ и дифференцируем по y. В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя аргументами y и z, которое может быть сведено

Таблица 7.3. Нелинейные уравнения $u_{xx}+u_{yy}=f(u)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $u=u(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

№	Правая часть уравнения $f(u)$	Решение $u(z)$	Уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(y)$
1	$au\ln u+bu$	e^z	$(\varphi'_x)^2=C_1e^{-2\varphi}+a\varphi-\frac{1}{2}a+b+A$, $(\psi'_y)^2=C_2e^{-2\psi}+a\psi-\frac{1}{2}a-A$
2	ae^u+be^{-2u}	$\ln\lvert z\rvert$	$(\varphi'_x)^2=2a\varphi^3+A\varphi^2+C_1\varphi+C_2$, $(\psi'_y)^2=2a\psi^3-A\psi^2+C_1\psi-C_2-b$
3	$a\sin u+b\Bigl(\sin u\ln\operatorname{tg}\dfrac{u}{4}+2\sin\dfrac{u}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg}e^z$	$(\varphi'_x)^2=C_1e^{2\varphi}+C_2e^{-2\varphi}+b\varphi+a+A$, $(\psi'_y)^2=C_2e^{2\psi}+C_1e^{-2\psi}+b\psi-A$
4	$a\operatorname{sh}u+b\Bigl(\operatorname{sh}u\ln\operatorname{th}\dfrac{u}{4}+2\operatorname{sh}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi'_x)^2=C_1e^{2\varphi}+C_2e^{-2\varphi}-\sigma b\varphi+a+A$, $(\psi'_y)^2=-C_2e^{2\psi}-C_1e^{-2\psi}-\sigma b\psi-A$
5	$a\operatorname{sh}u+2b\Bigl(\operatorname{sh}u\operatorname{arctg}e^{u/2}+\operatorname{ch}\dfrac{u}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi'_x)^2=C_1\sin 2\varphi+C_2\cos 2\varphi+\sigma b\varphi+a+A$, $(\psi'_y)^2=C_1\sin 2\psi-C_2\cos 2\psi+\sigma b\psi-A$
Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma=1$ при $z>0$, $\sigma=-1$ при $z<0$			

к билинейному функциональному уравнению стандартного вида (его решения можно найти методом, описанным в разд. 6.5.2).

Не проводя полного анализа уравнения (7.4.2.36), ограничимся здесь изучением решений с обобщенным разделением переменных, которые существуют при произвольной кинетической функции $f(u)$.

Сделав замену $z=\zeta^2$, ищем решения уравнения (7.4.2.36) вида

$$u=u(\zeta),\qquad \zeta^2=\varphi(x)+\psi(y). \tag{7.4.2.38}$$

Учитывая соотношения $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=\dfrac{\varphi'_x}{2\zeta}$ и $\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}=\dfrac{\psi'_y}{2\zeta}$, из (7.4.2.36) получим

$$\bigl[(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y\bigr]\frac{u'_\zeta}{2\zeta}+\bigl[a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2\bigr]\frac{\zeta u''_{\zeta\zeta}-u'_\zeta}{4\zeta^3}=f(u),\qquad f(u)=f\bigl(u(\zeta)\bigr). \tag{7.4.2.39}$$

Для разрешимости этого функционального уравнения потребуем, чтобы выражения в квадратных скобках были функциями от ζ:

$$(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y=M(\zeta),\qquad a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2=N(\zeta).$$

Продифференцировав первое из этих равенств по x и по y, приходим к уравнению $(M'_\zeta/\zeta)'_\zeta=0$, общее решение которого имеет вид $M(\zeta)=C_1\zeta^2+C_2$. Аналогично находим $N(\zeta)=C_3\zeta^2+C_4$. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В итоге получим

$$(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y=C_1(\varphi+\psi)+C_2,\qquad a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2=C_3(\varphi+\psi)+C_4.$$

Разделение переменных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $\varphi(x)$, $a(x)$, $\psi(y)$, $b(y)$:

$$(a\varphi'_x)'_x - C_1\varphi - C_2 = k_1, \qquad (b\psi'_y)'_y - C_1\psi = -k_1,$$
$$a(\varphi'_x)^2 - C_3\varphi - C_4 = k_2, \qquad b(\psi'_y)^2 - C_3\psi = -k_2.$$

Эта система всегда интегрируется в квадратурах и может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}
&(C_3\varphi + C_4 + k_2)\varphi''_{xx} + (C_1\varphi + C_2 + k_1 - C_3)(\varphi'_x)^2 = 0,\\
&(C_3\psi - k_2)\psi''_{yy} + (C_1\psi - k_1 - C_3)(\psi'_y)^2 = 0;\\
&a = (C_3\varphi + C_4 + k_2)(\varphi'_x)^{-2},\\
&b = (C_3\psi - k_2)(\psi'_y)^{-2},
\end{aligned} \qquad (7.4.2.40)$$

где уравнения для функций φ и ψ не зависят от a и b и могут решаться независимо. Не проводя полного исследования системы (7.4.2.40), отметим простой частный случай, когда она интегрируется в явном виде.

При $C_1 = C_2 = C_4 = k_1 = k_2 = 0$, $C_3 = C \neq 0$ имеем

$$a(x) = \alpha e^{\mu x}, \quad b(y) = \beta e^{\nu y}, \quad \varphi(x) = \frac{Ce^{-\mu x}}{\alpha\mu^2}, \quad \psi(y) = \frac{Ce^{-\nu y}}{\beta\nu^2},$$

где α, β, μ, ν — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в (7.4.2.39) и учитывая вид переменной ζ (7.4.2.38), получим уравнение для функции $u(\zeta)$:

$$u''_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\zeta}u'_\zeta = \frac{4}{C}f(u).$$

Система (7.4.2.40) имеет также другие решения, приводящие к различным выражениям для функций $a(x)$ и $b(y)$. В табл. 7.4 указаны случаи, когда эти функции могут быть выражены в явном виде (опущено решение типа бегущей волны, соответствующее $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$). ◄

Замечание 7.7. *Результаты, описанные в примере 7.14, применимы также для нелинейных уравнений гиперболического типа, когда переменная $y = t$ играет роль времени и функциональные коэффициенты $a(x)$ и $b(y)$ имеют разные знаки, т. е. $a(x)b(y) < 0$. В этом случае функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, приведенные для первых трех уравнений в табл. 7.4, также имеют разные знаки и $\varphi(x)\psi(y) < 0$. Знак параметра C выбирается так, чтобы рассматриваемой области выполнялось условие $\varphi(x)+\psi(y) \geqslant 0$.*

Задачи и упражнения к разд. 7.4

Во всех задачах, приведенных ниже, точные решения искать в виде $u = u(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$. Функциональные коэффициенты, входящие в уравнения, также подлежат определению.

1. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $u_t = f(u)u_x + g(u)$,
b) $u_t = f(u)u_x^2 + g(u)$,
c) $u_t = f(u)u_x^2 + g(x)$.

Таблица 7.4. Решения с функциональным разделением переменных вида $u = u(\zeta)$, где $\zeta^2 = \varphi(x) + \psi(y)$, для уравнений теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником произвольного вида.

Уравнение теплопроводности	Функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$	Уравнение для $u{=}u(\zeta)$
$(\alpha x^n u_x)_x + (\beta y^k u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \dfrac{Cx^{2-n}}{\alpha(2-n)^2}$, $\psi(y) = \dfrac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$u''_{\zeta\zeta} + \dfrac{4-nk}{(2-n)(2-k)}\dfrac{1}{\zeta}u'_\zeta = \dfrac{4}{C}f(u)$
$(\alpha e^{\mu x} u_x)_x + (\beta e^{\nu y} u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \dfrac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi(y) = \dfrac{C}{\beta\nu^2}e^{-\nu y}$	$u''_{\zeta\zeta} - \dfrac{1}{\zeta}u'_\zeta = \dfrac{4}{C}f(u)$
$(\alpha e^{\mu x} u_x)_x + (\beta y^k u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \dfrac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x}$, $\psi(y) = \dfrac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$u''_{\zeta\zeta} + \dfrac{k}{2-k}\dfrac{1}{\zeta}u'_\zeta = \dfrac{4}{C}f(u)$
$(\alpha x^2 u_x)_x + (\beta y^2 u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \mu\ln\lvert x\rvert$, $\psi(y) = \nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (7.4.2.39), оба выражения в квадратных скобках — константы
$\alpha u_{xx} + (\beta y^2 u_y)_y = f(u)$	$\varphi(x) = \mu x$, $\psi(y) = \nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (7.4.2.39), оба выражения в квадратных скобках — константы
Обозначения: C, α, β, μ, ν, n, k — свободные параметры ($C\neq0$, $\mu\neq0$, $\nu\neq0$, $n\neq2$, $k\neq2$)		

2. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $u_t = u_{xx} + f(u)$,

b) $u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + f(u)$,

c) $u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)$,

d) $u_t = [f(u)u_x]_x + g(u)u_x$.

3. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $u_t = x^{-n}[x^n f(u)u_x]_x$,

b) $u_t = x^{-n}[x^n f(u)u_x]_x + g(u)$.

4. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений параболического типа:

a) $u_t = [f(u)u_x^n]_x$,

b) $u_t = [f(u)u_x^n]_x + g(u)$.

5. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений гиперболического типа:

a) $u_{xt} = f(u)$,

b) $u_{xt} = u_x u_t f(u)$,

c) $u_{xt} = u_x^n f(u)$,

7.5. Построение решений с функциональным разделением переменных в неявной форме

7.5.1. Предварительные замечания. Решения типа бегущей волны в неявном виде

Метод построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявной форме основан на обобщении решений типа бегущей волны различных нелинейных уравнений в частных производных. Прежде, чем описывать этот метод, приведем сначала два простых примера, иллюстрирующих существование решений, задаваемых в неявном виде, у нелинейных уравнений диффузионного и волнового типа.

► Пример 7.15. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \tag{7.5.1.1}$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$. Уравнение не зависит явно от x и t и имеет решение типа бегущей волны

$$u = u(z), \qquad z = \lambda t + \kappa x, \tag{7.5.1.2}$$

где κ и λ — произвольные постоянные. Подставив (7.5.1.2) в (7.5.1.1), приходим к ОДУ $\lambda u'_z = \kappa^2[f(u)u'_z]'_z$. Интегрируя, получим его решение в неявном виде

$$\kappa^2 \int \frac{f(u)\,du}{\lambda u + C_1} = \lambda t + \kappa x + C_2, \tag{7.5.1.3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В правой части решения (7.5.1.3) переменная z была заменена на исходные переменные с помощью (7.5.1.2).

Видно, что даже для простейших функций, таких как $f(u) = u$, $f(u) = e^u$, $f(u) = \sin u$, $f(u) = \cos u$, решение (7.5.1.3) уравнения (7.5.1.1) нельзя выразить через элементарные функции. Поэтому поиск точных решений более сложных уравнений диффузионного типа в явном виде представляется малоэффективным. ◄

► Пример 7.16. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$u_{tt} = u_{xx} + f(u), \tag{7.5.1.4}$$

где $f(u)$ — произвольная функция, также допускает решения типа бегущей волны $u = u(z)$, $z = \lambda t + \kappa x$ (при $\lambda \neq \pm\kappa$), которые можно представить в неявном виде

$$\int \left[C_1 + \frac{2}{\lambda^2 - \kappa^2} F(u)\right]^{-1/2} du = C_2 \pm (\lambda t + \kappa x), \qquad F(u) = \int f(u)\,du. \tag{7.5.1.5}$$

◄

Примеры 7.15 и 7.16 показывают, что нелинейные уравнения (7.5.1.1) и (7.5.1.4), часто встречающиеся в приложениях, имеют решения типа бегущей волны, которые можно представить в неявном виде. Важно отметить, что в общем случае для произвольной функции $f(u)$ эти решения нельзя записать в явном виде.

Замечание 7.8. *На практике для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными нередко используются методы, основанные априорном задании явного вида решений (метод tanh-функций, метод exp-функций, методы sin- и cos-функций и некоторые другие методы), в которые включают свободные параметры. Значения этих параметров определяются далее методом неопределенных коэффициентов обычно с привлечением методов компьютерной алгебры. Подобные прямые методы имеют весьма узкую область применимости, поскольку вид решения задается заранее («вслепую») без учета свойств рассматриваемых нелинейных уравнений. Сказанное хорошо иллюстрируют примеры 7.15 и 7.16, где в случае общего положения точные решения вообще не могут быть представлены в явной форме.*

В разд. 7.5.2 будет описан метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, основанный на существенном обобщении решений типа бегущей волны, рассмотренных в примерах 7.15 — 7.16.

7.5.2. Прямой метод построения решений с функциональным разделением переменных в неявном виде. Описание

Будем рассматривать нелинейные уравнения в частных производных

$$G(x, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0. \tag{7.5.2.1}$$

Точные решения ищем в неявном виде

$$\int h(u)\,du = \xi(x)\omega(t) + \eta(x), \tag{7.5.2.2}$$

где функции $h = h(u)$, $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x)$, $\omega = \omega(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Замечание 7.9. *Представление решения в неявном виде (7.5.2.2) представляет собой существенное обобщение решений типа бегущей волны (7.5.1.3) и (7.5.1.5) нелинейных УрЧП (7.5.1.1) и (7.5.1.4), рассмотренных ранее. Например, представление решения в виде (7.5.2.2) основано на обобщении решения (7.5.1.3) уравнения (7.5.1.1), которое осуществляется следующим образом:*

$$\frac{\kappa^2 f(u)}{\lambda u + C_1} \implies h(u), \quad \lambda \implies \xi(x), \quad t \implies \omega(t), \quad \kappa x + C_2 \implies \eta(x).$$

Перейдем к описанию процедуры построения точных решений в неявном виде (7.5.2.2). Сначала с помощью (7.5.2.2) вычисляются частные производные u_x, u_t, u_{xx}, $\dots$, которые выражаются через функции h, ξ, η, ω и их производные. Затем эти частные производные поставляются в уравнение (7.5.2.1), после чего помощью выражения (7.5.2.2) исключается переменная t. В результате (путем подходящего выбора ω) приходят к билинейному функционально-дифференциальному уравнению вида

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{N} \Phi_j[x]\Psi_j[u] = 0,\\ \Phi_j[x] \equiv \Phi_j(x, \xi, \eta, \xi'_x, \eta'_x, \xi''_{xx}, \eta''_{xx} \dots),\\ \Psi_j[u] \equiv \Psi_j(u, h, h'_u, h''_{uu}, \dots).\end{gathered} \tag{7.5.2.3}$$

Здесь $\Phi_j[x]$ и $\Psi_j[u]$ — дифференциальные формы (в некоторых случаях функциональные коэффициенты), которые зависят соответственно только от x и u. Справедливо следующее утверждение.

Принцип расщепления. Функционально-дифференциальные уравнения вида (7.5.2.3) могут иметь решения, только если формы $\Psi_j[u]$ ($j=1,\ldots,N$) связаны линейными соотношениями

$$\sum_{j=1}^{m_i} k_{ij}\Psi_j[u]=0, \qquad i=1,\ldots,n, \tag{7.5.2.4}$$

где k_{ij} — некоторые константы, $1\leqslant m_i\leqslant N-1$, $1\leqslant n\leqslant N-1$. Необходимо также рассмотреть вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений отдельные дифференциальные формы $\Psi_j[u]$ обращаются в нуль.

Принцип расщепления также справедлив и для форм $\Phi_j[x]$.

Более подробное описание принципа расщепления см. в разд. 6.5.1 — 6.5.2.

Принцип расщепления будет использоваться далее для построения решений некоторых функционально-дифференциальных уравнений вида (7.5.2.3), которые возникают при поиске точных решений нелинейных уравнений диффузионного типа.

Замечание 7.10. *Построение решения в неявном виде с интегральным членом в левой части равенства (7.5.2.2) часто приводит дифференциальным уравнениям более низкого порядка относительно функции h, чем при поиске точных решений в явном виде. Кроме того, неявное представление решения обычно приводит к более простым явным выражениям функций f и g через h (при поиске точных решений в явном виде функции f и g часто выражаются через u в параметрической форме). Отметим также, что в случае общего положения различные линейные соотношения вида (7.5.2.4) соответствуют различным решениям рассматриваемого УрЧП.*

7.5.3. Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами

Класс рассматриваемых нелинейных реакционно-диффузионных УрЧП. Будем рассматривать одномерные нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$c(x)u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+b(x)g(u). \tag{7.5.3.1}$$

Отметим, что уравнение (7.5.3.1) при $a(x)=b(x)=c(x)=x^n$, где x — радиальная координата, описывает реакционно-диффузионные процессы с радиальной симметрией в двумерном (при $n=1$) и трехмерном (при $n=2$) случаях.

Аргументы функций $a=a(x)$, $b=b(x)$, $c=c(x)$, $f=f(u)$, $g=g(u)$, $h=h(u)$, $\xi=\xi(x)$, $\eta=\eta(x)$, $\omega=\omega(t)$, входящих в уравнение (7.5.3.1) и решение (7.5.2.2), ниже будут часто опускаться.

Далее основное внимание будет уделено построению точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений довольно общего вида (7.5.3.1), которые зависят от одной или двух произвольных функций. Важно отметить, что точные решения уравнений математической физики, которые содержат произвольные функции и обладают значительной общностью, представляют большой практический интерес, позволяя оценивать точность различных численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих начально-краевых задач.

Вывод функционально-дифференциального уравнения. Точные решения класса реакционно-диффузионных уравнений (7.5.3.1) ищем в неявном виде (7.5.2.2). Дифференцируя соотношение (7.5.2.2) по t и x, получим

$$\begin{aligned}
hu_t &= \xi\omega'_t \quad\Longrightarrow\quad u_t = \frac{\xi\omega'_t}{h};\\
hu_x &= \xi'_x\omega + \eta'_x \quad\Longrightarrow\quad u_x = \frac{\xi'_x\omega + \eta'_x}{h};\\
(afu_x)_x &= \Big[(a\xi'_x\omega + a\eta'_x)\frac{f}{h}\Big]_x =\\
&= [(a\xi'_x)'_x\omega + (a\eta'_x)'_x]\frac{f}{h} + a(\xi'_x\omega + \eta'_x)^2\frac{1}{h}\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u.
\end{aligned} \tag{7.5.3.2}$$

Подставив эти выражения в (7.5.3.1), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$\omega'_t = Q_1(x,u)\omega^2 + Q_2(x,u)\omega + Q_3(x,u), \tag{7.5.3.3}$$

где функции Q_n не зависят явно от t и определяются формулами

$$\begin{aligned}
Q_1(x,u) &= \frac{a(\xi'_x)^2}{c\xi}\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u,\\
Q_2(x,u) &= \frac{1}{c\xi}\Big[(a\xi'_x)'_x f + 2a\xi'_x\eta'_x\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u\Big],\\
Q_3(x,u) &= \frac{1}{c\xi}\Big[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u + bgh\Big].
\end{aligned} \tag{7.5.3.4}$$

Уравнение (7.5.3.3)—(7.5.3.4) зависит от трех переменных t, x, u и содержит неизвестные функции (и их производные) различных аргументов, которые связаны одним дополнительным соотношением (7.5.2.2). Это уравнение является более сложным, чем уравнения вида (7.5.2.3).

Функционально-дифференциальное уравнение (7.5.3.3) — (7.5.3.4) существенно упрощается в следующих двух случаях:

$$\text{(i) } \xi'_x = 0, \qquad \text{(ii) } (f/h)'_u = 0. \tag{7.5.3.5}$$

Рассмотрим подробнее первый случай.

Решения типа обобщенной бегущей волны при $\omega(t) = kt$. В случае (i) при $\xi'_x = 0$ без ограничения общности можно положить $\xi = 1$. Подставив $\xi = 1$

в формулы (7.5.3.4), получим $Q_1(x,u)=Q_2(x,u)=0$. В результате уравнение (7.5.3.3) приводится к виду

$$\omega'_t=\frac{1}{c}\Big[(a\eta'_x)'_x f+a(\eta'_x)^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u+bgh\Big]. \tag{7.5.3.6}$$

Функционально-дифференциальное уравнение (7.5.3.6) является уравнением с разделенными переменными (левая часть зависит только от t, а правая зависит от x и u). Поэтому можно положить $\omega'_t=k=\text{const}$, что дает $\omega(t)=kt$. Подставив эту функцию и $\xi(x)=1$ в (7.5.2.2), приходим к решению типа обобщенной бегущей волны, заданному в неявном виде

$$\int h(u)\,du=kt+\int\theta(x)\,dx. \tag{7.5.3.7}$$

Функции $h(u)$ и $\theta(x)=\eta'_x(x)$ будут определяться в ходе дальнейшего анализа из функционально-дифференциального уравнения

$$(a\theta)'_x f+a\theta^2\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u+bgh-kc=0, \tag{7.5.3.8}$$

которое получается подстановкой функций $\omega(t)=kt$ и $\theta(x)=\eta'_x(x)$ в равенство (7.5.3.6). Уравнение (7.5.3.8) представляет собой функционально-дифференциальное уравнение билинейного вида (7.5.2.3) при $N=4$, которое сводится к функциональному уравнению (6.5.2.3) (его решения определяются формулами (6.5.2.4)–(6.5.2.5)).

Решение 1. Рассмотрим сначала вырожденный случай, в котором дифференциальная форма $(f/h)'_u$ в (7.5.3.8) равна нулю. В этом случае согласно принципу расщепления (в дальнейшем он упоминаться не будет), уравнение (7.5.3.8) имеет решения при выполнении условий

$$h=f,\quad g=A+\frac{B}{f},\quad (a\theta)'_x+Ab=0,\quad Bb-kc=0, \tag{7.5.3.9}$$

где A и B — произвольные постоянные. Из соотношений (7.5.3.9) при $b(x)=$ $=c(x)=1$ следует, что уравнение

$$u_t=[a(x)f(u)u_x]_x+A+\frac{k}{f(u)}, \tag{7.5.3.10}$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\int f(u)\,du=kt-A\int\frac{x\,dx}{a(x)}+C_1\int\frac{dx}{a(x)}+C_2, \tag{7.5.3.11}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение 2. Уравнение (7.5.3.8) тождественно удовлетворяется, если положить

$$f=A,\quad g=\frac{1}{h}\Big(\frac{f}{h}\Big)'_u,\quad A(a\theta)'_x-kc=0,\quad b=-a\theta^2, \tag{7.5.3.12}$$

где A — произвольная постоянная.

С помощью соотношений (7.5.3.12) при $c(x) = 1$ и $A = k = 1$ можно получить нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x - \frac{x^2}{a(x)} g(u), \tag{7.5.3.13}$$

где $a(x)$ — произвольная функция. Функция $g(u)$ выражается через произвольную функцию $h = h(u)$ по формуле

$$g(u) = -h^{-3} h'_u. \tag{7.5.3.14}$$

Уравнение (7.5.3.13) при условии (7.5.3.14) допускает точное решение

$$\int h(u)\, du = t + \int \frac{x\, dx}{a(x)} + C_1. \tag{7.5.3.15}$$

Разрешая равенство (7.5.3.14) относительно h, получим две функции

$$h(u) = \pm\Bigl(2\int g(u)\, du + C_2\Bigr)^{-1/2}.$$

Исключая h из (7.5.3.15) с помощью полученного выражения, запишем решения уравнения (7.5.3.13) в неявном виде

$$\pm\int\Bigl(2\int g(u)\, du + C_2\Bigr)^{-1/2} du = t + \int \frac{x\, dx}{a(x)} + C_1. \tag{7.5.3.16}$$

Здесь $a(x)$ и $g(u)$ — произвольные функции, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение 3. Уравнению (7.5.3.8) можно удовлетворить, положив

$$\Bigl(\frac{f}{h}\Bigr)'_u = A, \quad g = -\frac{f}{h}, \quad Aa\theta^2 = kc, \quad (a\theta)'_x = b, \tag{7.5.3.17}$$

где A — произвольная постоянная. Если взять $c(x) = 1$, $A = 4k$, $h(u) = f(u)/(4ku)$, то можно получить два нелинейных реакционно-диффузионных уравнения

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x \mp k\frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} u, \tag{7.5.3.18}$$

которые содержат две произвольных функции $a(x)$ и $f(u)$, а также одну произвольную постоянную k. Учитывая соотношение $h(u) = f(u)/(4ku)$, точные решения этих уравнений можно представить в неявном виде

$$\int \frac{f(u)}{u}\, du = 4k^2 t \pm 2k\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_1, \tag{7.5.3.19}$$

где $C_1 = 4Ck$ — произвольная постоянная.

► Пример 7.17. Подставив $a(x) = x^{2\beta}$ и $k = \mp\alpha/(2\beta)$ в (7.5.3.18) и (7.5.3.19), приходим к уравнению

$$u_t = [x^{2\beta} f(u)u_x]_x + \alpha x^{\beta-1} u, \qquad \beta \neq 0,$$

которое зависит от произвольной функции $f(u)$ и допускает точные решения в неявной форме

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}t - \dfrac{\alpha}{\beta(1-\beta)}x^{1-\beta} + C_1 & \text{при } \beta \neq 1, \\ \alpha^2 t - \alpha \ln|x| + C_1 & \text{при } \beta = 1. \end{cases}$$

◄

► **Пример 7.18.** Подставив $a(x) = e^{2\beta x}$ и $k = \mp\alpha/(2\beta)$ в (7.5.3.18) и (7.5.3.19), приходим к уравнению

$$u_t = [e^{2\beta x} f(u) u_x]_x + \alpha e^{\beta x} u, \qquad \beta \neq 0,$$

которое зависит от произвольной функции $f(u)$ и допускает точные решения в неявной форме

$$\int \frac{f(u)}{u}\,du = \frac{\alpha^2}{\beta^2}t + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta x} + C_1.$$

◄

Другие решения вида (7.5.3.7) уравнения диффузионного типа (7.5.3.1). Нелинейное реакционно-диффузионное уравнение (7.5.3.1) имеет некоторые другие точные решения типа обобщенной бегущей волны вида (7.5.3.7), что соответствует случаю (i) в (7.5.3.5). Эти решения приведены в работах Polyanin (2019) и Полянин & Журов (2020), где описаны также более сложные решения вида (7.5.2.2) при $\xi(x) = 1$ с функциями $\omega(t) = ke^{\lambda t}$ и $\omega(t) = k\ln t$.

Реакционно-диффузионное уравнение (7.5.3.1) допускает также точные решения вида (7.5.2.2) при $h(u) = f(u)$, что соответствует случаю (ii) в (7.5.3.5). В частности, в цитируемых выше работах были построены решения (7.5.2.2) при $h(u) = f(u)$ с функциями $\omega(t) = t$, $\omega(t) = ke^{\lambda t}$ и $\omega(t) = kt^{\beta}$.

Задачи и упражнения к разд. 7.5

1. Вывести ОДУ, описывающее решение типа бегущей волны обобщенного уравнения Бюргерса

$$u_t = u_{xx} - f(u)u_x,$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Показать, что общее решение полученного ОДУ можно представить в неявном виде. Посмотреть для каких простейших элементарных функций $f(u)$ это решение можно записать в явной форме.

2. Вывести ОДУ, описывающее решение типа бегущей волны нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} = [f(u)u_x]_x,$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Показать, что общее решение полученного ОДУ можно представить в неявном виде. Посмотреть для каких простейших элементарных функций $f(u)$ это решение можно записать в явной форме.

3. Проделать самостоятельно подробные выкладки в решениях 1–3 уравнения (7.5.3.1).

4. Рассмотрим нелинейное конвективно-диффузионное уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x.$$

Вывести функционально-дифференциальное уравнение, которое возникает при поиске его точных решений типа обобщенной бегущей волны в неявном виде (7.5.3.7).

5. Найти какие-нибудь решения выведенного в предыдущей задаче функционально-дифференциального уравнения. Построить соответствующие точные решения рассматриваемого выше конвективно-диффузионного уравнения.

6. Рассмотрим нелинейное уравнение волнового типа

$$c(x)u_{tt} = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x.$$

Вывести функционально-дифференциальное уравнение, которое возникает при поиске его точных решений типа обобщенной бегущей волны в неявном виде (7.5.3.7).

7. Найти решение выведенного в предыдущей задаче функционально-дифференциального уравнения при $h(u) = f(u)$. Построить соответствующие точные решения рассматриваемого выше уравнение типа Клейна — Гордона.

Литература к главе 7

Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. *Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике*. Новосибирск: Наука, 1994.

Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Doyle P.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, Vol. 33, No. 2, pp. 315–326.

Estévez P.G., Qu C.Z., Zhang S.L. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, Vol. 275, pp. 44–59.

Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

Grundland A.M., Infeld E. A family of non-linear Klein-Gordon equations and their solutions. *J. Math. Phys.*, 1992, Vol. 33, pp. 2498–2503.

Miller W. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. *J. Phys. A.*, 1993, Vol. 26, pp. 1901–1913.

Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, Vol. 111, pp. 95–105.

Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2019, Vol. 114, pp. 29–40.

Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 1, 90.

Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2019, Vol. 73, pp. 379–390.

Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Applied Math. & Comput.*, 2019, Vol. 347, pp. 282–292.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton — London, 2012.

Zhdanov R.Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. *J. Phys. A*, 1994, Vol. 27, pp. L291–L297.

Zhurov A.I., Polyanin A.D. Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2020, Vol. 27, pp. 1–16.

8. Прямой метод построения редукций. Слабые симметрии

8.1. Прямой метод построения редукций

8.1.1. Упрощенная схема. Уравнения Кортевега — де Фриза и Буссинеска

Прежде чем перейти к описанию *прямого метода построения редукций** (называемого также *прямым методом Кларксона — Крускала*) в общем случае, рассмотрим сначала упрощенную схему.

Основная идея упрощенной схемы заключается в следующем: точные решения уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t ищутся в виде

$$u = f(t)w(z) + g(x,t), \qquad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{8.1.1.1}$$

Функции $f(t)$, $g(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются в процессе решения; они выбираются таким образом, чтобы в итоге искомая функция $w(z)$ удовлетворяла *одному обыкновенному дифференциальному уравнению*.

Ниже рассматриваются конкретные примеры построения точных решений вида (8.1.1.1) нелинейных уравнений математической физики.

► Пример 8.1. Рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = au_{xxx} + buu_x. \tag{8.1.1.2}$$

Будем искать его точное решение в виде (8.1.1.1). Подстановка (8.1.1.1) в уравнение (8.1.1.2) дает

$$\begin{aligned} af\varphi^3 w'''_{zzz} + bf^2\varphi w w'_z + f(bg\varphi - \varphi'_t x - \psi'_t)w'_z &+ \\ + (bfg_x - f'_t)w + ag_{xxx} + bgg_x - g_t &= 0. \end{aligned} \tag{8.1.1.3}$$

Приравнивая функциональные коэффициенты при w_{zzz} и ww'_z в (8.1.1.3), получим

$$f = \varphi^2. \tag{8.1.1.4}$$

Далее, приравнивая нулю коэффициент при w'_z, имеем

$$g = \frac{1}{b\varphi}(\varphi'_t x + \psi'_t). \tag{8.1.1.5}$$

*В книге иногда будет использоваться также краткое название — *прямой метод редукций*.

Подставив выражения (8.1.1.4) и (8.1.1.5) в (8.1.1.3), приходим к соотношению

$$\varphi^5(aw'''_{zzz} + bww'_z) - \varphi\varphi'_t w + \frac{1}{b\varphi^2}\bigl\{\bigl[2(\varphi'_t)^2 - \varphi\varphi''_{tt}\bigr]x + 2\varphi'_t\psi'_t - \varphi\psi''_{tt}\bigr\} = 0.$$

Разделив на φ^5 и исключив x с помощью формулы $x = (z - \psi)/\varphi$, которая следует из второго соотношения (8.1.1.1), получим

$$\begin{aligned} &aw'''_{zzz} + bww'_z - \varphi^{-4}\varphi'_t w + \frac{1}{b}\varphi^{-8}\bigl[2(\varphi'_t)^2 - \varphi\varphi''_{tt}\bigr]z + \\ &\qquad + \frac{1}{b}\varphi^{-8}[\varphi\psi\varphi''_{tt} - \varphi^2\psi''_{tt} + 2\varphi\varphi'_t\psi'_t - 2\psi(\varphi'_t)^2] = 0. \end{aligned} \tag{8.1.1.6}$$

Потребуем, чтобы функциональный коэффициент при w и последнее слагаемое были константами:

$$\varphi^{-4}\varphi'_t = -A, \qquad \varphi^{-8}\bigl[\varphi\psi\varphi''_{tt} - \varphi^2\psi''_{tt} + 2\varphi\varphi'_t\psi'_t - 2\psi(\varphi'_t)^2\bigr] = B,$$

где A и B — произвольные постоянные. В результате приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для φ и ψ:

$$\begin{aligned} \varphi'_t &= -A\varphi^4, \\ \psi''_{tt} + 2A\varphi^3\psi'_t - 2A^2\varphi^6\psi &= -B\varphi^6. \end{aligned} \tag{8.1.1.7}$$

Используя (8.1.1.6) и (8.1.1.7), получим уравнение для функции $w(z)$:

$$aw_{zzz} + bww'_z - Aw - \frac{2A^2}{b}z + \frac{B}{b} = 0. \tag{8.1.1.8}$$

При $A \neq 0$ общее решение уравнений (8.1.1.7) имеет вид

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = (3At + C_1)^{-1/3}, \\ &\psi(t) = C_2(3At + C_1)^{2/3} + C_3(3At + C_1)^{-1/3} + \frac{B}{2A^2}, \end{aligned} \tag{8.1.1.9}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Формулы (8.1.1.1), (8.1.1.4), (8.1.1.5), (8.1.1.9) вместе с уравнением (8.1.1.8) описывают точное решение уравнения Кортевега — де Фриза (8.1.1.2). ◄

► Пример 8.2. Рассмотрим теперь уравнение Буссинеска

$$u_{tt} + (uu_x)_x + au_{xxxx} = 0. \tag{8.1.1.10}$$

Как и в примере 8.1, решение ищем в виде (8.1.1.1), где функции $f(t)$, $g(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ будут определяться в процессе решения. Подставив (8.1.1.1) в (8.1.1.10), имеем

$$\begin{aligned} &af\varphi^4 w''''_{zzzz} + f^2\varphi^2 ww''_{zz} + f(z_t^2 + g\varphi^2)w''_{zz} + \\ &\qquad + f^2\varphi^2(w'_z)^2 + (fz_{tt} + 2fg_x\varphi + 2f'_t z_t)w'_z + \\ &\qquad + (fg_{xx} + f''_{tt})w + g_{tt} + gg_{xx} + g_x^2 + ag_{xxxx} = 0. \end{aligned} \tag{8.1.1.11}$$

Приравнивая функциональные множители при w''''_{zzzz} и ww''_{zz}, получим

$$f = \varphi^2. \tag{8.1.1.12}$$

Приравнивая функциональный множитель при w''_{zz} нулю, с учетом (8.1.1.12) имеем

$$g = -\frac{1}{\varphi^2}(\varphi'_t x + \psi'_t)^2. \tag{8.1.1.13}$$

Подставив выражения (8.1.1.12) и (8.1.1.13) в (8.1.1.11), приходим к равенству

$$\varphi^6[aw''''_{zzzz} + ww''_{zz} + (w'_z)^2] + \varphi^2(x\varphi''_{tt} + \psi''_{tt})w'_z + 2\varphi\varphi''_{tt}w - \\ - \left[\varphi^{-2}(\varphi'_t x + \psi'_t)^2\right]_{tt} + 6\varphi^{-4}(\varphi'_t)^2(\varphi'_t x + \psi'_t)^2 = 0.$$

Выполним двукратное дифференцирование выражения, стоящего в квадратных скобках второй строки, а затем поделим все члены на φ^6. Исключив x с помощью равенства $x = (z - \psi)/\varphi$, получим

$$aw''''_{zzzz} + ww''_{zz} + (w'_z)^2 + \varphi^{-5}(\varphi''_{tt}z + \varphi\psi''_{tt} - \psi\varphi''_{tt})w'_z + 2\varphi^{-5}\varphi''_{tt}w + \cdots = 0. \tag{8.1.1.14}$$

Потребуем, чтобы функциональный коэффициент при w'_z был функцией одной переменной z, т. е.

$$\varphi^{-5}(\varphi''_{tt}z + \varphi\psi''_{tt} - \psi\varphi''_{tt}) = \varphi^{-5}\varphi''_{tt}z + \varphi^{-5}(\varphi\psi''_{tt} - \psi\varphi''_{tt}) \equiv Az + B,$$

где A и B — произвольные постоянные. Приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций φ и ψ:

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= A\varphi^5, \\ \psi''_{tt} &= (A\psi + B)\varphi^4. \end{aligned} \tag{8.1.1.15}$$

Используя (8.1.1.15), исключим в (8.1.1.14) вторые и третьи производные функций φ и ψ. В итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(z)$:

$$aw''''_{zzzz} + ww''_{zz} + (w'_z)^2 + (Az + B)w'_z + 2Aw - 2(Az + B)^2 = 0. \tag{8.1.1.16}$$

Формулы (8.1.1.1), (8.1.1.12), (8.1.1.13) вместе с уравнениями (8.1.1.15) и (8.1.1.16) описывают точное решение уравнения Буссинеска (8.1.1.10). ◄

► Пример 8.3. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка со смешанной производной

$$u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2 = \nu u_{xxx} + q(t)u_x + p(t), \tag{8.1.1.17}$$

которое описывает широкий класс точных решений трехмерных уравнений Навье — Стокса, где ν — кинематическая вязкость жидкости. Функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$, которые входят в уравнение (8.1.1.17), можно выбрать произвольно.

Ищем точные решения в виде

$$u = f(t)w(z) + g(t)x + h(t), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t), \tag{8.1.1.18}$$

где функции $f = f(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Подставив (8.1.1.18) в (8.1.1.17), имеем

$$[a(t)w + b(t)z + c(t)]w''_{zz} - a(t)(w'_z)^2 = \nu w'''_{zzz} + \widetilde{q}(t)w'_z + \widetilde{p}(t), \tag{8.1.1.19}$$

где

$$\begin{aligned} &a = \frac{f}{\varphi}, \quad b = \frac{1}{\varphi^3}(g\varphi + \varphi'_t), \quad c = \frac{1}{\varphi^3}(h\varphi^2 - g\varphi\psi + \varphi\psi'_t - \psi\varphi'_t), \\ &\widetilde{q} = \frac{1}{f\varphi^3}[fq\varphi + 2fg\varphi - (f\varphi)'_t], \quad \widetilde{p} = \frac{1}{f\varphi^3}(p + gq + g^2 - g'_t). \end{aligned} \tag{8.1.1.20}$$

Полагая теперь

$$a = \nu C_1, \quad b = \nu C_2, \quad c = \nu C_3, \quad \widetilde{q} = \nu C_4, \quad \widetilde{p} = \nu C_5, \tag{8.1.1.21}$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные, получим из (8.1.1.19) обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(z)$:

$$(\widetilde{C}_1 w + C_2 z + C_3)w''_{zz} - C_1(w'_z)^2 = w'''_{zzz} + C_4 w'_z + C_5.$$

В этом случае соотношения (8.1.1.20) при условиях (8.1.1.21) образуют смешанную систему алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений для функциональных параметров решения (8.1.1.18) и функциональных коэффициентов $p = p(t)$ и $q = q(t)$ уравнения (8.1.1.17). Две функции $f = f(t)$ и $\psi = \psi(t)$, входящие в эту систему, можно считать произвольными, а другие величины $\varphi = \varphi(t)$, $g = g(t)$, $h = h(t)$, $p = p(t)$, $q = q(t)$ выражаются через $f(t)$ и $\psi(t)$ без квадратур. ◄

8.1.2. Специальный вид редукций. Уравнение Буссинеска и волновое уравнение с пространственной анизотропией

Процедура поиска точных решений нелинейных УрЧП прямым методом редукций специального вида состоит из нескольких последовательных этапов, которые описаны ниже.

1°. Точные решения уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t ищутся в виде

$$u(x,t) = f(x,t)w(z) + g(x,t), \qquad z = z(x,t). \tag{8.1.2.1}$$

Здесь функции $f(x,t)$, $g(x,t)$, $z(x,t)$ должны определяться в процессе решения таким образом, чтобы в итоге для функции $w(z)$ было получено *одно обыкновенное дифференциальное уравнение*.

Важно отметить, что связь между функциями u и w в формулах (8.1.1.1) и (8.1.2.1) линейна.

2°. Подставив выражение (8.1.2.1) в рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных с квадратичной или степенно́й нелинейностью, получим

$$\Phi_1[x,t]\Psi_1[w] + \Phi_2[x,t]\Psi_2[w] + \cdots + \Phi_m[x,t]\Psi_m[w] = 0. \tag{8.1.2.2}$$

Здесь $\Psi_k[w]$ — дифференциальные формы, представляющие собой произведения неотрицательных целых степеней функции w и ее производных w'_z, w''_{zz} и т. д., а $\Phi_k[x,t]$ зависят от функций $f(x,t)$, $g(x,t)$, $z(x,t)$ и их частных производных по x и t. Пусть дифференциальная форма $\Psi_1[w]$ содержит старшую производную по z. Тогда форма $\Phi_1[x,t]$ используется как нормирующий множитель. Это означает, что должны выполняться соотношения:

$$\Phi_k[x,t] = \Gamma_k(z)\,\Phi_1[x,t], \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{8.1.2.3}$$

где $\Gamma_k(z)$ — функции, подлежащие определению; $\Gamma_1(z) \equiv 1$.

3°. На практике для упрощения выкладок при определении функций f, g, z, u, Γ_k можно воспользоваться следующими свойствами:

a) если $f=f(x,t)$ имеет вид $f=f_0(x,t)\Omega(z)$, то можно считать $\Omega\equiv 1$ [это соответствует замене $w(z)\Rightarrow w(z)/\Omega(z)$];

b) если $g=g(x,t)$ имеет вид $g=g_0(x,t)+f(x,t)\Omega(z)$, то можно положить $\Omega\equiv 0$ [это соответствует замене $w(z)\Rightarrow w(z)-\Omega(z)$];

c) если $z=z(x,t)$ задается неявно алгебраическим уравнением вида $\Omega(z)=$ $=h(x,y)$, где $\Omega(z)$ — любая обратимая функция, то можно взять $\Omega(z)=z$ [это соответствует замене $z\Rightarrow\Omega^{-1}(z)$].

4°. После определения функций $\Gamma_k(z)$, подставив выражения (8.1.2.3) в (8.1.2.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w=w(z)$:

$$\Psi_1[w]+\Gamma_2(z)\Psi_2[w]+\cdots+\Gamma_m(z)\Psi_m[w]=0. \tag{8.1.2.4}$$

Проиллюстрируем характерные особенности применения прямого метода редукций на конкретном примере.

► **Пример 8.4.** Будем искать решение уравнения Буссинеска (8.1.1.10) в виде (8.1.2.1). Имеем

$$afz_x^4w''''_{zzzz}+a(6fz_x^2z_{xx}+4f_xz_x^3)w'''_{zzz}+f^2z_x^2ww''_{zz}+\cdots=0. \tag{8.1.2.5}$$

Здесь выписаны только три первых члена и опущены аргументы у функций f и z. Функциональные коэффициенты при w''''_{zzzz} и ww''_{zz} должны удовлетворять условию [см. (8.1.2.3)]:

$$f^2z_x^2=afz_x^4\,\Gamma_3(z),$$

где $\Gamma_3(z)$ — функция, подлежащая определению. Тогда, воспользовавшись свойством *a*) из п. 3°, выбираем

$$f=z_x^2,\qquad \Gamma_3(z)=1/a. \tag{8.1.2.6}$$

Аналогично функциональные коэффициенты при w''''_{zzzz} и w'''_{zz} должны удовлетворять условию

$$6fz_x^2z_{xx}+4f_xz_x^3=fz_x^4\,\Gamma_2(z), \tag{8.1.2.7}$$

где $\Gamma_2(z)$ — новая функция, подлежащая определению. Тогда с учетом (8.1.2.6) имеем

$$14\,z_{xx}/z_x=\Gamma_2(z)z_x.$$

Интегрируя по x, получим

$$\ln z_x=I(z)+\ln\tilde\varphi(t),\qquad I(z)=\frac{1}{14}\int\Gamma_2(z)\,dz,$$

где $\widetilde\varphi(t)$ — произвольная функция. Повторное интегрирование приводит к выражению

$$\int e^{-I(z)}\,dz=\widetilde\varphi(t)x+\widetilde\psi(t),$$

где $\widetilde{\psi}(t)$ — произвольная функция. Слева стоит функция z, а следовательно, воспользовавшись свойством c) из п. 3°, имеем

$$z = x\varphi(t) + \psi(t), \tag{8.1.2.8}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ подлежат определению.

Из формул (8.1.2.6) — (8.1.2.8) следует, что

$$f = \varphi^2(t), \qquad \Gamma_2(z) = 0. \tag{8.1.2.9}$$

Подставив выражения (8.1.2.8) и (8.1.2.9) в (8.1.2.1), получим решение в виде (8.1.1.1), где функция f задается формулой (8.1.1.12). Отсюда следует, что использование общего подхода, основанного на представлении решения в виде (8.1.2.1), в конечном итоге приводит к точно такому же результату, что и использование более простой формулы (8.1.1.1). ◄

Замечание 8.1. *Аналогичным образом можно показать, что построение точного решения уравнения Кортевега — де Фриза (8.1.1.2) на основе формул (8.1.1.1) и (8.1.2.1) приводит к одинаковым результатам.*

► Пример 8.5. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение с двумя пространственными переменными, анизотропное по одному из направлений:

$$u_{tt} = au_{xx} + [(bu + c)u_y]_y. \tag{8.1.2.10}$$

Отметим, что в частном случае $a=1$, $b<0$, $c>0$ уравнение (8.1.2.10) описывает пространственные околозвуковые течения идеального политропного газа.

Точное решение уравнения (8.1.2.10) ищем в виде

$$u = w(z) + g(x,t), \qquad z = y + h(x,t). \tag{8.1.2.11}$$

Подставив (8.1.2.11) в уравнение (8.1.2.10), имеем

$$[(bw + ah_x^2 - h_t^2 + bg + c)w'_z]'_z + (ah_{xx} - h_{tt})w'_z + ag_{xx} - g_{tt} = 0.$$

Пусть функции g и h удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$ag_{xx} - g_{tt} = C_1, \tag{8.1.2.12}$$

$$ah_{xx} - h_{tt} = C_2, \tag{8.1.2.13}$$

$$ah_x^2 - h_t^2 + bg = C_3, \tag{8.1.2.14}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Тогда функция $w = w(z)$ описывается автономным ОДУ

$$[(bw + c + C_3)w'_z]'_z + C_2 w'_z + C_1 = 0. \tag{8.1.2.15}$$

Общие решения УрЧП (8.1.2.12) и (8.1.2.13) имеют вид

$$\begin{gathered} g = \varphi_1(\xi) + \psi_1(\eta) - \tfrac{1}{2}C_1 t^2, \\ h = \varphi_2(\xi) + \psi_2(\eta) - \tfrac{1}{2}C_2 t^2, \\ \xi = x + t\sqrt{a}, \quad \eta = x - t\sqrt{a}. \end{gathered}$$

Подставим эти выражения в уравнение (8.1.2.14), а затем исключим t с помощью формулы $t = \frac{\xi - \eta}{2\sqrt{a}}$. После несложных преобразований получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами

$$b\varphi_1(\xi) + C_2\xi\varphi_2'(\xi) - k\xi^2 - C_3 + b\psi_1(\eta) + C_2\eta\psi_2'(\eta) - k\eta^2 + \\ + \psi_2'(\eta)[4a\varphi_2'(\xi) - C_2\xi] + \eta[2k\xi - C_2\varphi_2'(\xi)] = 0, \qquad (8.1.2.16)$$

где

$$k = \frac{1}{8a}(bC_1 + 2C_2^2).$$

Уравнение (8.1.2.16) можно решить методом расщепления (см. разд. 6.5), положив

$$\begin{aligned} b\varphi_1(\xi) + C_2\xi\varphi_2'(\xi) - k\xi^2 - C_3 &= A_1, \\ 4a\varphi_2'(\xi) - C_2\xi &= A_2, \\ 2k\xi - C_2\varphi_2'(\xi) &= A_3, \end{aligned} \qquad (8.1.2.17)$$

где A_1, A_2, A_3 — некоторые постоянные. Совместное решение переопределенной системы (8.1.2.17) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= -\frac{C_2^2}{8ab}\xi^2 - \frac{BC_2}{b}\xi + \frac{A_1 + C_3}{b}, \\ \varphi_2(\xi) &= \frac{C_2}{8a}\xi^2 + B\xi \end{aligned} \qquad (8.1.2.18)$$

и соответствует следующим значениям постоянных:

$$\begin{gathered} A_1 \text{ — любая}, \quad A_2 = 4aB, \quad A_3 = -BC_2, \quad B \text{ — любая}, \\ C_1 = -\frac{C_2^2}{b}, \quad C_2, C_3 \text{ — любые}, \quad k = \frac{C_2^2}{8a}. \end{gathered} \qquad (8.1.2.19)$$

Из равенств (8.1.2.16) и (8.1.2.17) получим уравнение, связывающее две функции ψ_1 и ψ_2:

$$A_1 + b\psi_1(\eta) + C_2\eta\psi_2'(\eta) - k\eta^2 + A_2\psi_2'(\eta) + A_3\eta = 0.$$

Учитывая (8.1.2.19), отсюда имеем

$$\begin{aligned} &\psi_1(\eta) = -\frac{1}{b}(C_2\eta + 4aB)\psi_2'(\eta) + \frac{1}{b}\Big(\frac{C_2^2}{8a}\eta^2 + BC_2\eta - A_1\Big), \\ &\psi_2(\eta) \text{ — произвольная функция.} \end{aligned}$$

В итоге находим функции, определяющие решение (8.1.2.11):

$$\begin{aligned} g(x,t) &= -\frac{C_2^2}{2\sqrt{a}\,b}xt + \frac{C_2^2}{2b}t^2 - \frac{2\sqrt{a}\,BC_2}{b}t + \frac{C_3}{b} - \frac{1}{b}(C_2\eta + 4aB)\psi_2'(\eta), \\ h(x,t) &= \frac{C_2}{8a}\big(x^2 + 2\sqrt{a}\,xt - 3at^2\big) + B(x + \sqrt{a}\,t) + \psi_2(\eta), \end{aligned}$$

где $\eta = x - t\sqrt{a}$ и $\psi_2(\eta)$ — произвольная функция. ◀

8.1.3. Специальный вид редукций. Нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа

Класс рассматриваемых нелинейных УрЧП. Будем рассматривать реакционно-диффузионные уравнения с нелинейным источником и переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)u_x]_x + p(x)f(u), \qquad (8.1.3.1)$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Два из трех функциональных коэффициентов $a = a(x) > 0$, $c = c(x) > 0$, $p = p(x)$ можно считать свободными, а оставшийся можно выразить через них (это можно сделать по-разному, см. ниже). Без ограничения общности будем полагать, что $p > 0$ (при $p < 0$ функции p и f необходимо переопределить, переобозначив их на $-p$ и $-f$).

Редукция реакционно-диффузионного уравнения к ОДУ. Учитывая произвольность $f(u)$, точные решения уравнения (8.1.3.1) будем искать в виде суперпозиции функций

$$u = U(z), \qquad z = \varphi(x,t). \tag{8.1.3.2}$$

Формулы (8.1.3.2) можно получить из (8.1.2.1), полагая $f(x,t) = 1$, $g(x,t) = 0$ и переобозначая $w = U$, $z(x,t) = \varphi(x,t)$. Подставив (8.1.3.2) в (8.1.3.1), имеем

$$a(x)\varphi_x^2 U''_{zz} + \bigl\{[a(x)\varphi_x]_x - c(x)\varphi_t\bigr\}U'_z + p(x)f(U) = 0. \tag{8.1.3.3}$$

Пусть коэффициенты уравнения (8.1.3.1) удовлетворяют соотношениям

$$p(x) = a(x)s(\varphi)\varphi_x^2, \tag{8.1.3.4}$$

$$c(x)\varphi_t = [a(x)\varphi_x]_x + a(x)k(\varphi)\varphi_x^2, \tag{8.1.3.5}$$

где $s(\varphi)$ и $k(\varphi)$ — некоторые функции ($s \not\equiv 0$). Тогда уравнение (8.1.3.3) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U''_{zz} - k(z)U'_z + s(z)f(U) = 0. \tag{8.1.3.6}$$

В частном случае $k(z) \equiv 0$, который соответствует линейному уравнению (8.1.3.5), общее решение уравнения (8.1.3.6) при $s(z) = 1$ и произвольной функции $f(U)$ можно записать в неявном виде

$$\int \Bigl[C_1 - 2\int f(U)\,dU\Bigr]^{-1/2} dU = C_2 \pm z, \tag{8.1.3.7}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Уравнения (8.1.3.4)—(8.1.3.6) позволяют строить точные решения широкого класса нелинейных реакционно-диффузионных уравнений вида (8.1.3.1).

Анализ и решения определяющей системы уравнений. Прямая процедура построения точных решений нелинейного уравнения вида (8.1.3.1) предполагает, что функции $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — заданные, а функции $u = u(x,t)$ и $p = p(x)$ — искомые. В этом случае при заданных тем или иным способом функциях $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ требуется сначала найти частные решения $p(x)$ и $\varphi = \varphi(x,t)$ уравнений (8.1.3.4) и (8.1.3.5) (последние уравнение можно линеаризовать, см. ниже). После этого решение уравнения (8.1.3.1) определяется по формуле (8.1.3.2), где функция $U(z)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения (8.1.3.6).

В общем случае два уравнения (8.1.3.4) и (8.1.3.5) при заданных функциях $a = a(x)$, $c = c(x)$, $p = p(x)$, $k(\varphi)$, $s(\varphi)$ образуют переопределенную нелинейную систему уравнений для одной функции φ. Эту систему будем называть *определяющей системой уравнений.* Свойства уравнений (8.1.3.4) и (8.1.3.5) будем исследовать последовательно.

Нелинейное уравнение (8.1.3.4) приводится к двум простым уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными $\sqrt{s(\varphi)}\,\varphi_x = \pm\sqrt{p(x)/a(x)}$, общее решение которых записывается так:

$$\int\sqrt{s(\varphi)}\,d\varphi = \pm\int\sqrt{p(x)/a(x)}\,dx + \xi(t), \tag{8.1.3.8}$$

где $\xi(t)$ — произвольная функция. Поэтому в общем случае функция φ должна иметь вид

$$\varphi = G(y), \qquad y = \xi(t) + \theta(x). \tag{8.1.3.9}$$

Отметим, что решение (8.1.3.9) допускает и другое (эквивалентное) представление $\varphi = \bar{G}(\bar{y})$, $\bar{y} = \bar{\xi}(t)\bar{\theta}(x)$, где $\bar{y} = e^y$, $\bar{\xi} = e^\xi$, $\bar{\theta} = e^\theta$.

Нелинейные преобразования

$$\varphi = F(\psi) \tag{8.1.3.10}$$

сохраняют вид уравнений (8.1.3.4) и (8.1.3.5), причем функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ изменяются следующим образом:

$$k(\varphi) \Longrightarrow k(F(\psi))F'_\psi(\psi) + \frac{F''_{\psi\psi}(\psi)}{F'_\psi(\psi)}, \qquad s(\varphi) \Longrightarrow s(F(\psi))[F'_\psi(\psi)]^2. \tag{8.1.3.11}$$

Вырожденный случай $k(\varphi) \equiv 0$ соответствует линейному УрЧП с переменными коэффициентами (8.1.3.5). При $k(\varphi) \not\equiv 0$ нелинейное уравнение (8.1.3.5) с помощью подстановки

$$\psi = C_1\int K(\varphi)\,d\varphi + C_2, \qquad K(\varphi) = \exp\Bigl[\int k(\varphi)\,d\varphi\Bigr], \tag{8.1.3.12}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, преобразуется к линейному УрЧП:

$$c(x)\psi_t = [a(x)\psi_x]_x. \tag{8.1.3.13}$$

В частном случае $k(\varphi) = k = \mathrm{const}$ можно использовать подстановку

$$\varphi = k^{-1}\ln|\psi|, \tag{8.1.3.14}$$

которая следует из (8.1.3.12).

Поскольку преобразования вида (8.1.3.10) меняют только функциональные коэффициенты $k(\varphi)$ и $s(\varphi)$ в уравнениях (8.1.3.4) и (8.1.3.5), функцию F без ограничения общности можно выбрать так, чтобы упростить одно из этих уравнений. Ниже описаны три возможных способа упрощения этих уравнений.

1°. При $s(\varphi) = 1$ и $k = k(\varphi)$ из формулы (8.1.3.8) находим

$$\varphi = \xi(t) + \theta(x), \tag{8.1.3.15}$$

что соответствует $G(y) = y$ в (8.1.3.9). В этом случае $p(x) = a(x)(\theta'_x)^2$.

2°. При $s(\varphi) = 1/\varphi$ и $k = k(\varphi)$ формула (8.1.3.8) дает

$$\varphi = \bar{\xi}(t)\bar{\theta}(x). \tag{8.1.3.16}$$

3°. При $s = s(\varphi)$ и $k(\varphi) = 0$ уравнение (8.1.3.5) является линейным УрЧП автономного вида, решения которого строятся методом разделения переменных.

В дальнейшем будем использовать простейшее представление решения из п. 1°. Подставив (8.1.3.15) в уравнение (8.1.3.5), приходим к функционально-дифференциальному уравнению

$$c(x)\xi'_t = [a(x)\theta'_x]'_x + a(x)(\theta'_x)^2 k(\varphi), \qquad \varphi = \xi(t) + \theta(x). \tag{8.1.3.17}$$

Используем метод дифференцирования (см. разд. 4.1.2), чтобы найти допустимые функции $k(\varphi)$, для которых это уравнение может иметь решения. Сначала, разделив на c, представим уравнение (8.1.3.17) в виде

$$\xi'_t = Q(x) + R(x)k(\varphi), \qquad \varphi = \xi(t) + \theta(x), \tag{8.1.3.18}$$

где $Q(x) = [(a\theta'_x)'_x]/c$ и $R(x) = a(\theta'_x)^2/c$. Затем, дифференцируя обе части (8.1.3.18) по t, преобразуем полученное уравнение к виду $\xi''_{tt}/\xi'_t = R(x)k'_\varphi(\varphi)$. Прологарифмируем обе части этого уравнение и вновь продифференцируем по t. Разделив на ξ'_t, имеем $[\ln(\xi''_{tt}/\xi'_t)]'_t/\xi'_t = [\ln k'_\varphi(\varphi)]'_\varphi$. Продифференцировав далее по x, получим

$$[\ln k'_\varphi(\varphi)]''_{\varphi\varphi} = 0. \tag{8.1.3.19}$$

Решения этого ОДУ записываются так:

$$k(\varphi) = k_1\varphi + k_2 \qquad \text{(вырожденное решение)}, \tag{8.1.3.20}$$

$$k(\varphi) = k_1 e^{-k_2\varphi} + k_3 \qquad \text{(невырожденное решение)}, \tag{8.1.3.21}$$

где k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Формулы (8.1.3.20) и (8.1.3.21) определяют все допустимые функции $k(\varphi)$, при которых функционально-дифференциальное уравнение (8.1.3.17) может иметь решения.

Построение точных решений при $k(\varphi) = k$ и $s(\varphi) = 1$.

Прямой метод построения точных решений. В простейшем случае при $k(\varphi) = k = \text{const}$, что соответствует значениям $k_1 = 0$ и $k_2 = k$ в (8.1.3.20), подстановка выражения (8.1.3.15) в уравнение (8.1.3.17) дает $\xi(t) = t$ (для удобства постоянный сомножитель выбран равным единице). Поэтому класс уравнений (8.1.3.1) в этом случае допускает точные решения с функциональным разделением переменных вида (8.1.3.2), где

$$\varphi(x,t) = t + \int g(x)\,dx. \tag{8.1.3.22}$$

Здесь функция $g(x) = \theta'_x(x)$ может задаваться исследователем или определяться в ходе последующего анализа (в зависимости от цели, см. ниже). Подставив

(8.1.3.22) в уравнение (8.1.3.4) при $s(\varphi)=1$ и уравнение (8.1.3.5) при $k(\varphi)=k$, получим

$$p(x)=a(x)g^2(x), \tag{8.1.3.23}$$

$$c(x)=[a(x)g(x)]'_x+ka(x)g^2(x). \tag{8.1.3.24}$$

Соотношение (8.1.3.24) связывает первые два функциональных коэффициента уравнения (8.1.3.1) и функцию $g=g(x)$ в (8.1.3.22) (это соотношение является дифференциальным относительно функций a, g и алгебраическим относительно функции c), а соотношение (8.1.3.23) является алгебраическим и служит для определения функционального коэффициента $p(x)$.

Если функции $a(x)$ и $c(x)$ считаются заданными, то соотношение (8.1.3.24) при $k\neq 0$ является уравнением Риккати относительно $g=g(x)$. Перепишем это уравнение в стандартном виде:

$$a(x)g'_x+ka(x)g^2+a'_x(x)g-c(x)=0. \tag{8.1.3.25}$$

Рассмотрим два случая.

Вырожденный случай. При $k=0$ уравнение Риккати (8.1.3.25) вырождается в линейное уравнение, общее решение которого определяется формулой

$$g(x)=\frac{1}{a(x)}\Big[\int c(x)\,dx+C_1\Big], \tag{8.1.3.26}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

► Пример 8.6. В случае постоянных коэффициентов уравнения $a=c=1$ с помощью формулы (8.1.3.26) при $C_1=0$ находим $g(x)=x$. Подставив эту функцию в (8.1.3.22) и (8.1.3.23), получим $\varphi(x,t)=t+\frac{1}{2}x^2$, $p(x)=x^2$. Следовательно, нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t=u_{xx}+x^2f(u) \tag{8.1.3.27}$$

при произвольной функции $f(u)$ допускает решение с функциональным разделением переменных

$$u=U(z),\qquad z=t+\tfrac{1}{2}x^2. \tag{8.1.3.28}$$

Здесь функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz}+f(U)=0 \tag{8.1.3.29}$$

(получено подстановкой значений $k=0$ и $s=1$ в (8.1.3.6)), общее решение которого можно представить в неявном виде (8.1.3.7). ◄

► Пример 8.7. Рассмотрим более сложную ситуацию, когда один из коэффициентов уравнения $a=a(x)$ произвольным образом зависит от пространственной переменной, а другой коэффициент является константой $c(x)=1$. С помощью формулы (8.1.3.26) при $C_1=0$ находим $g(x)=x/a(x)$. Подставив эту функцию в (8.1.3.22) и (8.1.3.23), получим $\varphi(x,t) = t + \int \frac{x}{a(x)}\,dx$, $p(x) = x^2/a(x)$. Поэтому нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x + \frac{x^2}{a(x)} f(u), \tag{8.1.3.30}$$

зависящее от двух произвольных функций $a(x)$ и $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \int \frac{x}{a(x)}\,dx, \tag{8.1.3.31}$$

где функция $U(z)$ описывается разрешимым обыкновенным дифференциальным уравнением (8.1.3.29). ◀

Невырожденный случай. При $k = \mathrm{const}$ ($k \neq 0$) подстановка

$$g = \frac{1}{k}\frac{y'_x}{y} \tag{8.1.3.32}$$

преобразует уравнение Риккати (8.1.3.25) к линейному ОДУ второго порядка

$$a(x)y''_{xx} + a'_x(x)y'_x - kc(x)y = 0. \tag{8.1.3.33}$$

► **Пример 8.8.** В случае постоянных коэффициентов $a = c = 1$ общее решение уравнения (8.1.3.33) имеет вид

$$y = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch}(mx) + C_2 \operatorname{sh}(mx) & \text{при } \; k = m^2 > 0, \\ C_1 \cos(mx) + C_2 \sin(mx) & \text{при } \; k = -m^2 < 0, \end{cases} \tag{8.1.3.34}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $k = 1$ в (8.1.3.34) и используя формулу (8.1.3.32), находим

$$g(x) = \operatorname{th} x.$$

Подставив эту функцию в (8.1.3.22) и (8.1.3.23), получим

$$\varphi(x,t) = t + \ln \operatorname{ch} x, \qquad p(x) = \operatorname{th}^2 x.$$

Следовательно, нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = u_{xx} + \operatorname{th}^2 x f(u) \tag{8.1.3.35}$$

при произвольной $f(u)$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных

$$u = U(z), \qquad z = t + \ln \operatorname{ch} x, \tag{8.1.3.36}$$

где функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{zz} - U'_z + f(U) = 0. \tag{8.1.3.37}$$

Порядок уравнения (8.1.3.37) можно понизить на единицу с помощью подстановки $U'_z = \Phi(U)$, которая приводит к уравнению Абеля второго рода в канонической форме. ◀

Табл. 8.1 содержит нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа

$$u_t = u_{xx} + p(x)f(u),$$

где $f(u)$ — произвольная функция, которые допускают точные решения с функциональным разделением переменных $u = U(z)$, $z = \varphi(x,t)$ (функция φ определяется с точностью до аддитивной постоянной). В уравнениях №№ 1, 2, $4-7$ функция $\varphi(x,t)$ является суммой функций разных аргументов (8.1.3.22). Решение типа бегущей волны (см. уравнение № 1) соответствует вырожденному решению уравнения (8.1.3.25) при $g = \alpha = \mathrm{const}$. Решения некоторых уравнений этого типа с более сложными функциями $p(x)$ можно получить с помощью формулы (8.1.3.34) из примера 8.8. Решение уравнения № 3 является автомодельным (см. пример 8.10).

Таблица 8.1. Нелинейные уравнения $u_t = u_{xx} + p(x)f(u)$, допускающие точные решения вида $u = U(z)$, $z = \varphi(x,t)$.

№	Функция $p(x)$	Функция $\varphi(x,t)$	Уравнение для функции $U = U(z)$
1	1	$t + \alpha x$	$\alpha^2 U''_{zz} - U'_z + f(U) = 0$
2	x^2	$t + \frac{1}{2}x^2$	$U''_{zz} + f(U) = 0$
3	x^{-2}	$xt^{-1/2}$	$U''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + z^{-2}f(U) = 0$
4	$\mathrm{th}^2(\alpha x)$	$t + \alpha^{-2}\ln\mathrm{ch}(\alpha x)$	$U''_{zz} - \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$
5	$\mathrm{cth}^2(\alpha x)$	$t + \alpha^{-2}\ln\lvert\mathrm{sh}(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} - \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$
6	$\mathrm{tg}^2(\alpha x)$	$t - \alpha^{-2}\ln\lvert\cos(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} + \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$
7	$\mathrm{ctg}^2(\alpha x)$	$t - \alpha^{-2}\ln\lvert\sin(\alpha x)\rvert$	$U''_{zz} + \alpha^2 U'_z + \alpha^2 f(U) = 0$

Здесь $f(u)$ — произвольная функция, α — произвольная постоянная ($\alpha \neq 0$).

Другие способы построения точных решений. Рассмотрим теперь другие возможности построения точных решений уравнений вида (8.1.3.1) при $k(\varphi) = k$, $s(\varphi) = 1$ без интегрирования уравнения Риккати (8.1.3.25). Для этого будем считать функцию $g(x)$ и любую из двух функций $a(x)$, $c(x)$ заданной, а оставшуюся функцию будем находить, исходя из уравнения (8.1.3.25). В табл. 8.2 указаны возможные ситуации и приведены формулы для искомых функций. Окончательный вид нелинейного реакционно-диффузионного уравнения определяется путем подстановки функции $p(x) = a(x)g^2(x)$ в уравнение (8.1.3.1).

► Пример 8.9. Для альтернативного представления уравнений и их точных решений воспользуемся вторым способом, указанным в табл. 8.2, при $c = 1$. Возможны два случая.

1°. *Вырожденный случай при* $k = 0$. Используя строку № 2 табл. 8.2 находим функции $a(x) = x/g(x)$, $p(x) = x^2/a(x)$, что приводит к УрЧП (8.1.3.30).

Таблица 8.2. Два различных способа задания функциональных коэффициентов уравнения (8.1.3.1) при $p(x) = a(x)g^2(x)$.

№	Известные (заданные) функции	Искомые функции
1	$a = a(x)$, $g = g(x)$	$c(x) = ag'_x + kag^2 + a'_x g$
2	$c = c(x)$, $g = g(x)$	$a(x) = g^{-1}E\Bigl(\int cE^{-1}dx + C_1\Bigr)$

Обозначения: k и C_1 — произвольные постоянные, $g^{-1} = 1/g$, $E = \exp\bigl(-k\int g\,dx\bigr)$.

2°. *Невырожденный случай при* $k \neq 0$. Из строки № 2 табл. 8.2 при $k \neq 0$, $C_1 = 0$ имеем $a(x) = g^{-1}E\int E^{-1}dx$. Введем новую функцию $h = h(x)$, полагая $h = \int E^{-1}dx$. Дифференцируя это выражение и учитывая формулу $E = \exp\bigl(-k\int g\,dx\bigr)$, выразим функцию g через h. После простых преобразований в итоге получим $g = k^{-1}h''_{xx}/h'_x$, $a = kh/h''_{xx}$, $p = k^{-1}hh''_{xx}/(h'_x)^2$. Следовательно, нелинейное уравнение

$$u_t = [a(x)u_x]_x + p(x)f(u), \qquad a(x) = k\frac{h}{h''_{xx}}, \quad p(x) = \frac{1}{k}\frac{hh''_{xx}}{(h'_x)^2}, \tag{8.1.3.38}$$

где $f(u)$ и $h = h(x)$ — произвольные функции, $k \neq 0$ — произвольная постоянная, допускает точное решение с обобщенным разделением переменных

$$u = U(z), \quad z = t + \frac{1}{k}\ln|h'_x|.$$

Здесь функция $U(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения $U''_{zz} - kU'_z + f(U) = 0$.

Например, положив $h = \operatorname{sh}(\alpha x)$, $k = \alpha^2$ в (8.1.3.38), получим уравнение № 4 из табл. 8.1.

Подставив $h = \ln(\alpha x)$, $k = -1$ в (8.1.3.38), приходим к уравнению

$$u_t = [x^2\ln(\alpha x)u_x]_x + \ln(\alpha x)f(u), \tag{8.1.3.39}$$

которое допускает точное решение вида $u = U(z)$, где $z = t + \ln x$. ◄

Прямое построение точных решений при $k(\varphi) \neq \text{const}$.

1°. *Случай* $k(\varphi) = k_1\varphi$, $s(\varphi) = 1$. При $k(\varphi) = k_1\varphi$, что соответствует значению $k_2 = 0$ в (8.1.3.20), подстановка выражения (8.1.3.15) в уравнение (8.1.3.17) дает $\xi(t) = e^{\lambda t}$. В этом случае класс уравнений (8.1.3.1) допускает точные решения с функциональным разделением переменных вида (8.1.3.2), где

$$\varphi(x,t) = e^{\lambda t} + \theta(x). \tag{8.1.3.40}$$

Подставив выражение (8.1.3.40) в соотношение (8.1.3.4), где $s(\varphi) = 1$, и уравнение (8.1.3.17), где $k(\varphi) = k_1\varphi$, получим

$$c(x) = \frac{k_1}{\lambda}a(x)(\theta'_x)^2, \qquad p(x) = a(x)(\theta'_x)^2. \tag{8.1.3.41}$$

В данном случае функция $a(x)$ остается произвольной, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет ОДУ с кубической нелинейностью

$$[a(x)\theta'_x]'_x + k_1 a(x)\theta(\theta'_x)^2 = 0. \tag{8.1.3.42}$$

Подстановка $\eta = \int \exp\bigl(\frac{1}{2}k_1\theta^2\bigr)\,d\theta$ приводит уравнение (8.1.3.42) к линейному уравнению $[a(x)\eta'_x]'_x = 0$, общее решение которого определяется формулой $\eta = C_1 \int \frac{1}{a}\,dx + C_2$.

2°. *Случай* $k(\varphi) = k_1 e^{-k_2\varphi} + k_3,\ s(\varphi) = 1$. При $k(\varphi) = k_1 e^{-k_2\varphi} + k_3$, что соответствует использованию зависимости (8.1.3.21), подставив выражение (8.1.3.15) в уравнение (8.1.3.17), получим $\xi(t) = k_2^{-1}\ln t$. В этом случае класс уравнений (8.1.3.1) допускает точные решения с функциональным разделением переменных вида (8.1.3.2), где

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{k_2}\ln t + \theta(x). \tag{8.1.3.43}$$

Подставив выражение (8.1.3.43) в соотношение (8.1.3.4), где $s(\varphi) = 1$, и уравнение (8.1.3.17), где $k(\varphi) = k_1 e^{-k_2\varphi} + k_3$, имеем

$$p(x) = a(x)(\theta'_x)^2, \quad c(x) = k_1 k_2 a(x) e^{-k_2\theta}(\theta'_x)^2. \tag{8.1.3.44}$$

Функция $a(x)$ остается произвольной, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет ОДУ с квадратичной нелинейностью

$$[a(x)\theta'_x]'_x + k_3 a(x)(\theta'_x)^2 = 0. \tag{8.1.3.45}$$

Это уравнение легко интегрируется, поскольку подстановка $\zeta(x) = \theta'_x$ преобразует его в уравнение Бернулли. В частности, при $k_3 = 0$ общее решение уравнения (8.1.3.45) имеет вид

$$\theta(x) = C_1 \int \frac{1}{a}\,dx + C_2.$$

► **Пример 8.10.** Пусть

$$a(x) = 1, \quad k_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 1. \tag{8.1.3.46}$$

В этом случае уравнение (8.1.3.45) имеет решение $\theta = \ln x$. Подставив эту функцию в формулы (8.1.3.43) и (8.1.3.44), с учетом (8.1.3.46) получим

$$\varphi(x,t) = -\tfrac{1}{2}\ln t + \ln x, \qquad p(x) = x^{-2}, \qquad c(x) = 1. \tag{8.1.3.47}$$

Поэтому уравнение

$$u_t = u_{xx} + x^{-2} f(u) \tag{8.1.3.48}$$

допускает автомодельное решение

$$u = U(z), \qquad z = -\tfrac{1}{2}\ln t + \ln x \equiv \ln(xt^{-1/2}), \tag{8.1.3.49}$$

где функция $U(z)$ удовлетворяет ОДУ:

$$U''_{zz} + (\tfrac{1}{2}e^{2z} - 1)U'_z + f(U) = 0. \tag{8.1.3.50}$$

Отметим, что в приложениях обычно используется альтернативное представление таких решений, которое основано на введении автомодельной переменной $\bar{z} = e^z = xt^{-1/2}$ и приведении уравнения (8.1.3.48) к уравнению $U''_{\bar{z}\bar{z}} + \frac{1}{2}\bar{z}U'_{\bar{z}} + \bar{z}^{-2}U = 0$ (см. уравнение № 3 в табл. 8.1). ◄

► Пример 8.11. Соотношения (8.1.3.44) и уравнение (8.1.3.45) удовлетворяются, если положить

$$a(x) = 1, \quad c(x) = e^{-x}, \quad p(x) = 1, \quad \theta(x) = x, \quad k_1 = k_2 = 1, \quad k_3 = 0.$$

Поэтому уравнение $e^{-x}u_t = u_{xx} + f(u)$ допускает точное решение $u = U(z)$, где $z = x + \ln t$. ◄

8.1.4. Общий вид редукций. Уравнение Гарри Дима

Основная идея общей схемы использования прямого метода редукций, заключается в следующем: точные решения уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными x и t ищутся в виде

$$u(x,t) = F\big(x, t, w(z)\big), \qquad z = z(x,t). \tag{8.1.4.1}$$

Функции $F(x,t,w)$ и $z(x,t)$ должны выбираться так, чтобы для функции $w(z)$ в конечном итоге получить *одно обыкновенное дифференциальное уравнение*. В отличие от представления решений в виде (8.1.1.1) или (8.1.2.1), связь между функциями w и u в (8.1.4.1) может быть нелинейной.

Проиллюстрируем характерные особенности применения прямого метода редукций для поиска точных решений в виде (8.1.4.1).

► Пример 8.12. Рассмотрим опять уравнение Буссинеска (8.1.1.10). Подставив (8.1.4.1) в (8.1.1.10), имеем

$$aF_w z_x^4 w''''_{zzzz} + 4aF_{ww} z_x^4 w'_z w'''_{zzz} + a(4F_{xw} z_x^3 + 6F_w z_x^2 z_{xx})w'''_{zzz} + \cdots = 0. \tag{8.1.4.2}$$

Здесь выписаны только три главных члена и опущены аргументы у функций F и z. Для того чтобы (8.1.4.2) приводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению для $w = w(z)$, отношения функциональных коэффициентов при $w'_z w'''_{zzz}$, w'''_{zzz}, … к функциональному коэффициенту при старшей производной w''''_{zzzz} должны быть функциями z и w, т. е.

$$\frac{4aF_{ww}z_x^4}{aF_w z_x^4} = \Gamma_2(z,w), \qquad \frac{a(4F_{xw}z_x^3 + 6F_w z_x^2 z_{xx})}{aF_w z_x^4} = \Gamma_3(z,w), \qquad \ldots$$

Из первого равенства имеем

$$4F_{ww}/F_w = \Gamma_2(z,w).$$

Интегрируя дважды по w, получим

$$F(x,t,w) = f(x,t)\Theta(z,w) + g(x,t), \qquad (8.1.4.3)$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ — произвольные функции двух аргументов, а

$$\Theta = \int \exp\Bigl(\frac{1}{4}\int \Gamma_2\, dw\Bigr)dw.$$

Полагая в (8.1.4.3) $\Theta(z, w(z)) = U(z)$ и используя представление (8.1.4.1), приходим к решению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (8.1.2.1). Поэтому поиск точных решений уравнения Буссинеска (8.1.1.10) с помощью общего представления (8.1.4.1) приводит к более простому специальному виду решения (8.1.2.1). ◄

► **Пример 8.13.** Рассмотрим уравнение Гарри Дима

$$u_t + 2(u^{-1/2})_{xxx} = 0. \qquad (8.1.4.4)$$

Ищем точные решения в виде (8.1.4.1). Подставив это выражение в уравнение (8.1.4.4), получим

$$-F^{-3/2}F_w z_x^3 w'''_{zzz} + \bigl(-3F^{-3/2}F_{ww} + \tfrac{9}{2}F^{-5/2}F_w^2\bigr) z_x^3 w'_z w''_{zz} + \dots = 0.$$

Отношение функциональных коэффициентов при $w'_z w''_{zz}$ и w'''_{zzz} должно быть функцией z и w, т. е.

$$3\frac{F_{ww}}{F_w} - \frac{9}{2}\frac{F_w}{F} = \Gamma(z,w).$$

Двукратное интегрирование дает

$$F^{-1/2}(x,t,w) = f(x,t)\Theta(z,w) + g(x,t), \qquad (8.1.4.5)$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ — произвольные функции двух аргументов, а

$$\Theta = -\int \exp\Bigl(\frac{1}{3}\int \Gamma\, dw\Bigr)dw.$$

Из формул (8.1.4.1), (8.1.4.5) следует, что можно искать точные решения уравнения Гарри Дима (8.1.4.4) в виде

$$u^{-1/2}(x,t) = f(x,t)U(z) + g(x,t), \qquad z = z(x,t).$$ ◄

Задачи и упражнения к разд. 8.1

1. Найти точное решение уравнения Бюргерса

$$u_t = au_{xx} + buu_x.$$

вида (8.1.1.1), используя прямой метод построения редукций.

2. Найти точное решение обобщенного уравнения Бюргерса — Кортевега — де Фриза n-го порядка

$$u_t = au_x^{(n)} + buu_x.$$

вида (8.1.1.1), используя прямой метод построения редукций.

3. Найти точное решение нелинейного конвективно-диффузионного уравнения

$$u_t = u_{xx} + xf(u)u_x,$$

где $f(u)$ — произвольная функция, используя прямой метод построения редукций.

Указание. Решение искать в виде (8.1.3.2).

4. Найти точное решение нелинейного конвективно-диффузионного уравнения

$$u_t = u_{xx} + \operatorname{th} x f(u)u_x,$$

где $f(u)$ — произвольная функция, используя прямой метод построения редукций.

Указание. Решение искать в виде (8.1.3.2).

5. Найти точное решение нелинейного конвективно-диффузионного уравнения

$$u_t = [a(x)u_x]_x + xf(u)u_x,$$

где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, используя прямой метод построения редукций.

Указание. Решение искать в виде (8.1.3.2).

6. Найти точное решение вида (8.1.3.2) нелинейного уравнения типа Клейна — Гордона

$$u_{tt} = [a(x)u_x]_x + \left[\frac{k}{a(x)} - 1\right]f(u),$$

где $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, используя прямой метод построения редукций.

Указание. Решение искать в виде (8.1.3.2).

8.2. Прямой метод поиска слабых симметрий

8.2.1. Общее описание метода. Уравнение стационарного пограничного слоя

Предварительные замечания. При использовании различных модификаций прямого метода редукций, основанных на формулах (8.1.1.1), (8.1.2.1), (8.1.4.1), функция $w = w(z)$ находится в привилегированном положении, поскольку остальные функции надо выбирать так, чтобы для $w(z)$ было получено *одно обыкновенное дифференциальное уравнение*. Требование того, чтобы функция w удовлетворяла одному ОДУ, накладывает серьезные ограничения на возможности метода и не позволяет эффективно его использовать для поиска многих точных решений, которые можно найти другими методами (в частности, нельзя получить подавляющее большинство решений с обобщенным и функциональным разделением переменных, рассмотренных ранее в главах 6 и 7). Эффективность прямого метода построения редукций существенно увеличится, если его использовать в сочетании с идеями методов обобщенного и функционального разделения переменных, когда все определяющие функции считаются равноправными, а функция $w(z)$ может описываться *переопределенной системой нескольких ОДУ*.

Принцип расщепления. Прямой метод поиска слабых симметрий. Для построения точных решений нелинейных УрЧП, как и ранее, используем выражение (8.1.2.1). Подставив его в рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных, приходим к соотношению (8.1.2.2). Помимо рассмотренного в разд. 8.2.1 алгоритма построения точных решений, будем также допускать, что функция $w(z)$ может удовлетворять переопределенной системе нескольких ОДУ (а функции $f = f(x,t)$ и $g = g(x,t)$ могут описываться переопределенными системами УрЧП). Для построения точных решений полученного уравнения билинейного вида (8.1.2.2) будем использовать обобщенный принцип расщепления, который сформулирован ниже.

Обобщенный принцип расщепления. Решения рассматриваемого уравнения ищем в виде различных линейных комбинаций элементов двух множеств $\{\Phi_j\}$ и $\{\Psi_j\}$, входящих в (8.1.2.2):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{m} \alpha_{ni}\Phi_n = 0, \qquad i = 1, \ldots, l; \\ &\sum_{n=1}^{m} \beta_{nj}\Psi_n = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{8.2.1.1}$$

где $1 \leqslant l \leqslant m-1$ и $1 \leqslant m \leqslant m-1$. Константы α_{ni} и β_{nj} в (8.2.1.1) выбираются так, чтобы билинейное уравнение (8.1.2.2) удовлетворялось тождественно (это всегда можно сделать). Отметим, что соотношения (8.2.1.1) носят алгебраический характер и не зависят от конкретного вида дифференциальных форм Φ_n и Ψ_n.

После того, как соотношения (8.2.1.1) получены, подставив в них дифференциальные формы Φ_n и Ψ_n, приходим к системам дифференциальных уравнений (часто переопределенным) для функций $f = f(x,t)$, $g = g(x,t)$ и $w = w(z)$, которые входят в выражение (8.1.2.1).

Замечание 8.2. *Необходимо рассмотреть также вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений вида (8.2.1.1) одна или несколько дифференциальных форм Ψ_n или Φ_n обращаются в нуль.*

Указанную комбинацию прямого метода редукций и обобщенного принципа расщепления будем называть *прямым методом поиска слабых симметрий*.

Важно отметить существенное качественное различие в итоговом представлении результатов применения прямого метода редукций и прямого метода поиска слабых симметрий. Решения, полученные с использованием прямого метода редукций, обычно выражаются в терминах решений нелинейных ОДУ, в то время как решения, построенные с помощью прямого метода поиска слабых симметрий, часто допускают представление в замкнутой форме (выражаются в квадратурах).

► Пример 8.14. Рассмотрим уравнение протяженного осесимметричного стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a(y u_{yy})_y + \mathcal{F}(x), \tag{8.2.1.2}$$

где u — функция тока, x — координата, отсчитываемая вдоль оси симметрии; $y = \frac{1}{4}r^2$, r — радиальная координата; $\mathcal{F}(x)$ — функция давления. Продольная и поперечная компоненты скорости жидкости v_1 и v_2 выражаются через функцию тока по формулам $v_1 = 2r^{-1}u_r$ и $v_2 = -2r^{-1}u_x$.

Решение уравнения (8.2.1.2) ищем в виде (множитель a берется для удобства)

$$u(x,y) = af(x)w(z) + ag(x), \qquad z = \varphi(x)y + \psi(x). \tag{8.2.1.3}$$

Подставим это выражение в исходное уравнение (8.2.1.2) и исключим y с помощью равенства $\varphi(x)y = z - \psi(x)$. После деления на $a^2\varphi^2 f$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя аргументами вида (6.2.2.1) — (6.2.2.2) из разд. 6.2.2, где $k = 6$:

$$(zw''_{zz})'_z - \psi w'''_{zzz} + f'_x w w''_{zz} + g'_x w''_{zz} - \frac{(f\varphi)'_x}{\varphi}(w'_z)^2 + \frac{\mathcal{F}}{a^2 f \varphi^2} = 0. \tag{8.2.1.4}$$

Используем упрощенную схему построения точных решений. Будем считать, что функциональные коэффициенты при ww''_{zz}, w''_{zz}, $(w'_z)^2$, 1 являются линейными комбинациями коэффициентов 1 и ψ, стоящих соответственно при старших членах $(zw''_{zz})'_z$ и w'''_{zzz}. Имеем

$$\begin{aligned} f'_x &= A_1 + B_1\psi, \\ g'_x &= A_2 + B_2\psi, \\ -(f\varphi)'_x/\varphi &= A_3 + B_3\psi, \\ \mathcal{F}/(a^2 f\varphi^2) &= A_4 + B_4\psi, \end{aligned} \tag{8.2.1.5}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные. Подставим выражения (8.2.1.5) в уравнение (8.2.1.4) и соберем члены, пропорциональные ψ (считаем, что $\psi \neq \mathrm{const}$). Приравнивая функциональный множитель при ψ нулю, для функции $w = w(z)$ получим переопределенную систему, состоящую из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(zw''_{zz})'_z + A_1 w w''_{zz} + A_2 w''_{zz} + A_3(w'_z)^2 + A_4 = 0, \tag{8.2.1.6}$$

$$-w'''_{zzz} + B_1 w w''_{zz} + B_2 w''_{zz} + B_3(w'_z)^2 + B_4 = 0. \tag{8.2.1.7}$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Положим

$$A_1 = A_3 = A_4 = 0, \quad A_2 = -n. \tag{8.2.1.8}$$

В этом случае решение уравнения (8.2.1.6) имеет вид

$$w(z) = \frac{C_1}{n(n+1)} z^{n+1} + C_2 z + C_3, \tag{8.2.1.9}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования. Решение (8.2.1.9) уравнения (8.2.1.6) является одновременно и решением уравнения (8.2.1.7) только при выполнении условий

$$n = -2, \quad B_1 = B_3, \quad C_1 = -\frac{4}{B_1}, \quad C_2^2 = -\frac{B_4}{B_1}, \quad C_3 = -\frac{B_2}{B_1}. \qquad (8.2.1.10)$$

Подставим коэффициенты (8.2.1.8), (8.2.1.10) в систему (8.2.1.5). Интегрируя, получим

$$g(x) = 2x - C_3 f, \quad \varphi = \frac{C_4}{f^2}, \quad \psi = -\frac{C_1}{4} f'_x, \quad \mathcal{F} = -(aC_2C_4)^2 \frac{f'_x}{f^3}, \qquad (8.2.1.11)$$

где $f = f(x)$ — произвольная функция.

Формулы (8.2.1.3), (8.2.1.9), (8.2.1.11) дают точное решение уравнения осесимметричного пограничного слоя (8.2.1.2).

Случай 2. При

$$A_2 = B_1 = B_3 = B_4 = 0, \quad B_2 = -\lambda, \quad A_3 = -A_1, \quad A_4 = \lambda^2/A_1 \qquad (8.2.1.12)$$

совместное решение системы (8.2.1.6), (8.2.1.7) имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{A_1}(C_1 e^{-\lambda z} + \lambda z - 3). \qquad (8.2.1.13)$$

Решение системы (8.2.1.5) с коэффициентами (8.2.1.12) описывается формулами

$$f = A_1 x + C_2, \quad \varphi = C_3, \quad \psi = -\frac{1}{\lambda} g'_x, \quad \mathcal{F} = \frac{(aC_3\lambda)^2}{A_1}(A_1 x + C_2), \qquad (8.2.1.14)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $g = g(x)$ — произвольная функция.

Формулы (8.2.1.3), (8.2.1.13), (8.2.1.14) дают точное решение уравнения пограничного слоя (8.2.1.2).

Случай 3. Система (8.2.1.6) — (8.2.1.7) допускает также решения вида

$$w(z) = C_1 z^2 + C_2 z + C_3,$$

где константы C_1, C_2, C_3 связаны с A_n и B_n. Соответствующее решение легче получить непосредственно из исходного уравнения (8.2.1.2) подстановкой в него $u = \varphi_2(x) y^2 + \varphi_1(x) y + \varphi_0(x)$, что соответствует методу обобщенного разделения переменных. В результате приходим к решению:

$$u(x,y) = C_1 y^2 + \varphi(x) y + \frac{1}{4C_1}\varphi^2(x) - \frac{1}{2C_1}\int \mathcal{F}(x)\,dx - x + C_3,$$

где $\mathcal{F}(x)$ и $\varphi(x)$ — произвольные функции, а C_1 и C_3 — произвольные постоянные. ◄

8.2.2. Уравнение Бюргерса — Хаксли (уравнение диффузионного типа с кубической нелинейностью)

Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью

$$u_t + \sigma u u_x = a u_{xx} + b_3 u^3 + b_2 u^2 + b_1 u + b_0. \qquad (8.2.2.1)$$

При $\sigma = 1$ и $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ оно является уравнением Бюргерса, которое описывает распространение волн в нелинейных диссипативных системах. При $\sigma = b_0 = 0$ оно совпадает с уравнением Хаксли, которое моделирует распространение бегущего импульса по нервному волокну. При $b_0 = 0$, уравнение (8.2.2.1) является ненормированным уравнением Бюргерса—Хаксли, которое описывает пристенное движение жидкости в жидких кристаллах, а также динамику популяций с учетом размножения, смертности, питания и ее диффузионного перемещения.

Будем искать решение уравнения (8.2.2.1) в виде

$$u(x,t) = f(x,t)w(z) + \lambda, \quad z = z(x,t), \tag{8.2.2.2}$$

где функции $f = f(x,t)$, $z = z(x,t)$, $w = w(z)$, а также константа λ подлежат определению. Подставив (8.2.2.2) в (8.2.2.1), получим уравнение, которое удобно представить в билинейном виде

$$\sum_{n=1}^{7} \Phi_n[x,t]\Psi_n[z] = 0. \tag{8.2.2.3}$$

Здесь выражения $\Phi_n = \Phi_n[x,t]$ зависят от коэффициентов уравнения (8.2.2.1) и функций (и их производных), входящих в решение (8.2.2.2), и определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0,\\
&\Phi_2 = 3b_3\lambda^2 f + 2b_2\lambda f + b_1 f + af_{xx} - \sigma\lambda f_x - f_t,\\
&\Phi_3 = 3b_3\lambda f^2 + b_2 f^2 - \sigma f f_x, \quad \Phi_4 = b_3 f^3,\\
&\Phi_5 = afz_{xx} + 2af_x z_x - \sigma\lambda f z_x - fz_t, \quad \Phi_6 = -\sigma f^2 z_x, \quad \Phi_7 = afz_x^2,
\end{aligned} \tag{8.2.2.4}$$

а функции $\Psi_n = \Psi_n[z]$ записываются так:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = w, \quad \Psi_3 = w^2, \quad \Psi_4 = w^3,\\
&\Psi_5 = w'_z, \quad \Psi_6 = ww'_z, \quad \Psi_7 = w''_{zz}.
\end{aligned} \tag{8.2.2.5}$$

Далее используем прямой метод поиска слабых симметрий. Нетрудно убедиться, что при

$$w(z) = 1/z, \tag{8.2.2.6}$$

имеют место три линейных соотношения между функциями (8.2.2.5):

$$\Psi_7 = 2\Psi_4, \quad \Psi_6 = -\Psi_4, \quad \Psi_5 = -\Psi_3. \tag{8.2.2.7}$$

Подставив (8.2.2.7) в (8.2.2.3), получим

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + (\Phi_3 - \Phi_5)\Psi_3 + (\Phi_4 - \Phi_6 + 2\Phi_7)\Psi_4 = 0. \tag{8.2.2.8}$$

Приравнивая нулю функциональный коэффициент при Ψ_4 в (8.2.2.8), после сокращения на f приходим к уравнению $b_3 f^2 + \sigma f z_x + 2a z_x^2 = 0$, решение которого имеет вид

$$f = \beta z_x, \tag{8.2.2.9}$$

где β — корень квадратного уравнения

$$b_3\beta^2 + \sigma\beta + 2a = 0. \tag{8.2.2.10}$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 в (8.2.2.8) и учитывая (8.2.2.4) и (8.2.2.9), после простых арифметических преобразований и перегруппировки слагаемых, получим

$$\begin{aligned} z_t - (3a + \beta\sigma) z_{xx} + (\sigma\lambda + b_2\beta + 3b_3\beta\lambda) z_x &= 0 \quad (\text{коэффициент при } \Psi_3),\\ z_{xt} - a z_{xxx} + \sigma\lambda z_{xx} - (b_1 + 2\lambda b_2 + 3b_3\lambda^2) z_x &= 0 \quad (\text{коэффициент при} \Psi_2),\\ b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 &= 0 \quad (\text{коэффициент при } \Psi_1). \end{aligned} \tag{8.2.2.11}$$

Здесь первые два линейных уравнения в частных производных образуют переопределенную систему для функции $z = z(x,t)$, а последнее (кубическое) уравнение служит для определения константы λ.

С помощью (8.2.2.2), (8.2.2.6), (8.2.2.9) можно представить решение уравнения (8.2.2.1) в виде

$$u(x,t) = \frac{\beta}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda. \tag{8.2.2.12}$$

Пусть β — корень квадратного уравнения (8.2.2.10), а λ — корень последнего (кубического) уравнения в (8.2.2.11). В зависимости от значения константы b_3, следует рассмотреть два случая.

1°. *Случай* $b_3 \neq 0$. Из первых двух уравнений в (8.2.2.11) имеем

$$\begin{aligned} z_t + p_1 z_{xx} + p_2 z_x &= 0,\\ z_{xxx} + q_1 z_{xx} + q_2 z_x &= 0, \end{aligned} \tag{8.2.2.13}$$

где

$$\begin{aligned} &p_1 = -\beta\sigma - 3a, \quad p_2 = \lambda\sigma + \beta b_2 + 3\beta\lambda b_3,\\ &q_1 = -\frac{\beta b_2 + 3\beta\lambda b_3}{\beta\sigma + 2a}, \quad q_2 = -\frac{3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1}{\beta\sigma + 2a}. \end{aligned} \tag{8.2.2.14}$$

Ниже приводятся решения переопределенной системы линейных уравнений (8.2.2.13)—(8.2.2.14), которые вместе с формулой (8.2.2.12) и квадратным уравнением (8.2.2.10) позволяют находить точные решения исходного УрЧП (8.2.2.1).

Возможны четыре основные ситуации.

1.1. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 \neq 4q_2$ ($q_1^2 > 4q_2$) имеем

$$\begin{gathered} z(x,t) = C_1 \exp(k_1 x + s_1 t) + C_2 \exp(k_2 x + s_2 t) + C_3,\\ k_n = -\tfrac{1}{2} q_1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{q_1^2 - 4q_2}, \quad s_n = -k_n^2 p_1 - k_n p_2, \end{gathered}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $n = 1, 2$. При $q_1^2 < 4q_2$ в данном решении надо выделить действительную и мнимую части, что приводит к решению, зависящему от экспоненциальных и тригонометрических функций.

1.2. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 = 4q_2$:

$$z(x,t) = C_1 \exp(kx + s_1 t) + C_2(kx + s_2 t)\exp(kx + s_1 t) + C_3,$$
$$k = -\tfrac{1}{2}q_1, \quad s_1 = -\tfrac{1}{4}p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}p_2 q_1, \quad s_2 = -\tfrac{1}{2}p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}p_2 q_1.$$

1.3. При $q_2 = 0$ и $q_1 \neq 0$:

$$z(x,t) = C_1(x - p_2 t) + C_2 \exp[-q_1 x + q_1(p_2 - p_1 q_1)t] + C_3.$$

1.4. При $q_2 = q_1 = 0$:

$$z(x,t) = C_1(x - p_2 t)^2 + C_2(x - p_2 t) - 2C_1 p_1 t + C_3.$$

2°. *Случай* $b_3 = 0$, $b_2 \neq 0$. Решения определяются формулой (8.2.2.12), где

$$z(x,t) = C_1 + C_2 \exp\Big[Ax + A\Big(\frac{b_1\sigma}{2b_2} + \frac{2ab_2}{\sigma}\Big)t\Big],$$
$$\beta = -\frac{2a}{\sigma}, \quad A = \frac{\sigma(b_1 + 2b_2\lambda)}{2ab_2},$$

а $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$.

8.2.3. Уравнения нестационарного плоского и осесимметричного пограничного слоя

Уравнения плоского пограничного слоя. Уравнения гидродинамического пограничного слоя описывают течения вязких жидкостей в тонких слоях вблизи твердых, жидких и газообразных поверхностей различной формы при больших числах Рейнольдса.

Система уравнений плоского нестационарного ламинарного пограничного слоя для ньютоновской несжимаемой жидкости (классическая модель жидкости) записывается в следующем виде:

$$U_t + UU_x + VU_y = \nu U_{yy} + F(t,x), \tag{8.2.3.1}$$
$$U_x + V_y = 0, \tag{8.2.3.2}$$

где t — время, x и y — продольная и поперечная координаты (значение $y = 0$ соответствуют поверхности тела), U и V — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, $F(t,x) = -p_x/\rho$ — заданная функция (пропорциональная продольному градиенту давления), p — давление, ρ — массовая плотность, ν — кинематическая вязкость жидкости.

С помощью функции тока W, определяемой формулами

$$U = W_y, \quad V = -W_x, \tag{8.2.3.3}$$

система (8.2.3.1) — (8.2.3.2) сводится к одному УрЧП третьего порядка

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} = \nu W_{yyy} + F(t, x). \tag{8.2.3.4}$$

Уравнения осесимметричного пограничного слоя. Система уравнений осесимметричного нестационарного ламинарного пограничного слоя имеет вид

$$U_t + UU_x + VU_y = \nu U_{yy} + F(t, x), \tag{8.2.3.5}$$

$$(rU)_x + (rV)_y = 0, \quad r = r(x), \tag{8.2.3.6}$$

где x и y — продольная и поперечная координаты (соответствующие единичные векторы $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ направлены по касательной и по нормали к поверхности тела вращения), U и V — продольная и поперечная компоненты скорости жидкости, $F(t, x) = -p_x/\rho$ — заданная функция, $r = r(x)$ — безразмерный радиус поперечного сечения, перпендикулярный оси вращения и определяющий форму тела. Остальные обозначения — такие же, как и для уравнения (8.2.3.4). Выбор единицы длины в определении $r = r(x)$ не влияет на вид уравнения.

Введение функции тока W по формулам

$$U = W_y, \quad V = -W_x - \frac{r'_x}{r} W, \qquad r = r(x), \tag{8.2.3.7}$$

приводит систему (8.2.3.5) — (8.2.3.6) к одному уравнению третьего порядка

$$W_{ty} + W_y W_{xy} - W_x W_{yy} - \frac{r'_x}{r} W W_{yy} = \nu W_{yyy} + F(t, x). \tag{8.2.3.8}$$

При $r(x) = \text{const}$ уравнение (8.2.3.8) совпадает с (8.2.3.4). Далее будем рассматривать общий случай уравнения (8.2.3.8) для произвольной зависимости $r = r(x)$. Допустимые формы функции давления $F(t, x)$ будут, как обычно, определяться в процессе анализа.

Преобразование к уравнению плоского пограничного слоя с переменной вязкостью. Путем введения новых переменных

$$z = r(x)y, \quad w = r(x)W, \tag{8.2.3.9}$$

преобразуем уравнение (8.2.3.8) к более удобному для анализа виду

$$w_{tz} + w_z w_{xz} - w_x w_{zz} = \nu r^2(x) w_{zzz} + F(t, x). \tag{8.2.3.10}$$

В частном случае $r(x) \equiv 1$, уравнение (8.2.3.10) совпадает с уравнением плоского пограничного слоя (8.2.3.4).

Общий вид решения. Определяющие уравнения. Редукция к ОДУ. Точные решения уравнения (8.2.3.10) ищем в виде

$$w = fu(\xi) + gz + h, \quad \xi = \varphi z + \psi, \tag{8.2.3.11}$$

где шесть функций $f = f(t, x)$, $g = g(t, x)$, $h = h(t, x)$, $\varphi = \varphi(t, x)$, $\psi = \psi(t, x)$, $u = u(\xi)$ подлежат определению в процессе исследования.

Подставив (8.2.3.11) в (8.2.3.10), получим уравнение, которое удобно представить в билинейной форме

$$\sum_{n=1}^{7} \Phi_n[x,t]\Psi_n[\xi] = 0. \qquad (8.2.3.12)$$

Функции $\Phi_n = \Phi_n[x,t]$ зависят от функциональных коэффициентов (и их производных), входящих уравнение (8.2.3.10) и решение (8.2.3.11), и определяются формулами

$$\begin{gathered} \Phi_1 = g_t + gg_x - F, \quad \Phi_2 = (f\varphi)_t + (fg\varphi)_x, \quad \Phi_3 = f\varphi(f\varphi)_x, \\ \Phi_4 = f(\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2), \\ \Phi_5 = f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi), \quad \Phi_6 = -ff_x\varphi^2, \quad \Phi_7 = -\nu r^2 f\varphi^3, \end{gathered} \qquad (8.2.3.13)$$

а функции $\Psi_n = \Psi_n[\xi]$ имеют вид

$$\begin{gathered} \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = u'_\xi, \quad \Psi_3 = (u'_\xi)^2, \quad \Psi_4 = u''_{\xi\xi}, \\ \Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}, \quad \Psi_6 = uu''_{\xi\xi}, \quad \Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}. \end{gathered} \qquad (8.2.3.14)$$

Уравнение (8.2.3.12) — (8.2.3.14) сводится одному ОДУ для $u = u(\xi)$, если все Φ_n ($n \leqslant 6$) положить пропорциональными Φ_7, т. е.

$$\Phi_n = -a_n\Phi_7 \quad (n = 1, \ldots, 6), \qquad (8.2.3.15)$$

где a_1, …, a_6 — свободные параметры. Подставив (8.2.3.13) в (8.2.3.15), приходим к нелинейной системе УрЧП для определения функций $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, $h = h(t,x)$, $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$:

$$g_t + gg_x - F = a_1\nu r^2 f\varphi^3, \qquad (8.2.3.16)$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x = a_2\nu r^2 f\varphi^3, \qquad (8.2.3.17)$$

$$(f\varphi)_x = a_3\nu r^2\varphi^2, \qquad (8.2.3.18)$$

$$\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \varphi_t\psi - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = a_4\nu r^2\varphi^3, \qquad (8.2.3.19)$$

$$\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi = a_5\nu r^2\varphi^3, \qquad (8.2.3.20)$$

$$f_x = -a_6\nu r^2\varphi. \qquad (8.2.3.21)$$

В результате уравнение (8.2.3.12) редуцируется к нелинейному ОДУ для функции $u = u(\xi)$:

$$a_1 + a_2u'_\xi + a_3(u'_\xi)^2 + a_4u''_{\xi\xi} + a_5\xi u''_{\xi\xi} + a_6uu''_{\xi\xi} = u'''_{\xi\xi\xi}. \qquad (8.2.3.22)$$

Любой совместное решение определяющей системы УрЧП первого порядка (8.2.3.16) — (8.2.3.21) вместе с соответствующим решением ОДУ третьего порядка (8.2.3.22) порождает точное решение вида (8.2.3.11) уравнения (8.2.3.10).

Анализ и решения определяющей системы (8.2.3.16) — (8.2.3.21) для осесимметричного пограничного слоя с произвольной $r(x)$. Систему уравнений (8.2.3.16) — (8.2.3.21) удается расщепить на несколько более простых подсистем, которые можно рассматривать независимо друг от друга.

Подсистема, состоящая из уравнений (8.2.3.18) и (8.2.3.21), позволяет выразить f и φ через $r = r(x)$. При заданных f и φ подсистема, состоящая из уравнений (8.2.3.17) и (8.2.3.20), служит для определения g и r, откуда следует, что в случае общего положения функция $r = r(x)$ не может считаться произвольной. После того, как g и r найдены, функция давления вычисляется по формуле

$$F = g_t + gg_x - a_1\nu r^2 f\varphi^3, \tag{8.2.3.23}$$

которая является следствием уравнения (8.2.3.16). Функцию ψ в уравнении (8.2.3.19) можно считать произвольно заданной. Интегрируя по x, находим функцию h:

$$h = \int \frac{1}{\varphi^2}\bigl(\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \varphi_t\psi - g\varphi_x\psi - a_4\nu r^2\varphi^3\bigr)\,dx + p(t), \tag{8.2.3.24}$$

где $p(t)$ — произвольная функция.

Далее функцию $r = r(x)$ будем считать произвольной.

Анализ начнем с подсистемы, состоящей из уравнений (8.2.3.17) и (8.2.3.20). Выделим производную g_x и перепишем эти уравнения в виде

$$g_x + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi}g = a_2\nu r^2\varphi^2 - \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi}, \tag{8.2.3.25}$$

$$g_x - \frac{\varphi_x}{\varphi}g = -a_5\nu r^2\varphi^2 + \frac{\varphi_t}{\varphi}. \tag{8.2.3.26}$$

Найдем условия, при которых уравнения (8.2.3.25) и (8.2.3.26) совпадают. В этом случае $r = r(x)$ можно считать произвольной функцией. Тогда g определяется из (8.2.3.26), а следовательно, выражается через φ и r.

Приравнивая функциональные коэффициенты при g и правые части уравнений (8.2.3.25) и (8.2.3.26), имеем

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_x}{f\varphi} = 0, \quad \frac{\varphi_t}{\varphi} + \frac{(f\varphi)_t}{f\varphi} = (a_2 + a_5)\nu r^2\varphi^2. \tag{8.2.3.27}$$

Интегрируя первое уравнение в (8.2.3.27), получим

$$f = \lambda(t)\varphi^{-2} \tag{8.2.3.28}$$

где $\lambda(t)$ — произвольная функция. Подстановка выражения (8.2.3.28) во второе уравнение (8.2.3.27) дает

$$[\ln\lambda(t)]'_t = (a_2 + a_5)\nu r^2(x)\varphi^2. \tag{8.2.3.29}$$

Уравнение (8.2.3.29) удовлетворяется в следующих двух случаях:

$$(a) \quad a_5 = -a_2, \quad \lambda(t) = \lambda_0, \quad \varphi = \varphi(t, x) \text{ — любая функция;} \tag{8.2.3.30}$$

$$(b) \quad \varphi = \frac{\sigma(t)}{r(x)}, \quad \lambda(t) = \lambda_0 \exp\Bigl[(a_2 + a_5)\,\nu\int\sigma^2(t)\,dt\Bigr], \tag{8.2.3.31}$$

где λ_0 — произвольная постоянная, а $\sigma(t)$ — произвольная функция.

Случай (a). Без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Учитывая (8.2.3.28), получим $f = \varphi^{-2}$. Уравнения (8.2.3.18) и (8.2.3.21) принимают вид

$$\varphi'_x = -a_3\nu r^2\varphi^4, \qquad \varphi'_x = \tfrac{1}{2}a_6\nu r^2\varphi^4. \tag{8.2.3.32}$$

Эти уравнения совместны, если $a_6 = -2a_3$. Интегрируя первое уравнение в (8.2.3.32), а затем (8.2.3.26), находим точное решение уравнения (8.2.3.10) вида (8.2.3.11), в котором следует положить

$$\begin{aligned} f &= \Bigl[3a_3\nu\!\int r^2(x)\,dx + b(t)\Bigr]^{2/3}, \\ \varphi &= \Bigl[3a_3\nu\!\int r^2(x)\,dx + b(t)\Bigr]^{-1/3}, \\ g &= c(t)\varphi + \varphi\!\int\Bigl(\frac{\varphi_t}{\varphi^2} + a_2\nu r^2\varphi\Bigr)\,dx, \end{aligned} \tag{8.2.3.33}$$

где $b = b(t)$ и $c = c(t)$ — произвольные функции, h определяется формулой (8.2.3.24), $\psi = \psi(t,x)$ — произвольная функция, а $u = u(\xi)$ — функция, удовлетворяющая одному ОДУ (8.2.3.22) при $a_5 = -a_2$ и $a_6 = -2a_3$. Функция давления задается формулой (8.2.3.23). Следует отметить, что при $a_3 \neq 0$ функцию g можно представить в виде

$$g = c(t)\varphi - \frac{1}{3}b'_t(t)\varphi\!\int\varphi^2 dx + \frac{a_2}{2a_3}\varphi^{-1}.$$

Случай (b). Из формул (8.2.3.28) и (8.2.3.31), а также уравнений (8.2.3.18) и (8.2.3.21), следует, что должны выполняться условия $a_6 = -2a_3$ и $r(x) = \alpha x + \beta$, т. е. функция $r(x)$ не является произвольной. Этот случай здесь не рассматривается.

Решения определяющей системы (8.2.3.16) — (8.2.3.21) для плоского пограничного пограничный слоя при $r(x) \equiv 1$. Рассмотрим теперь случай уравнения плоского пограничного слоя (8.2.3.10) при $r(x) = 1$ и опишем некоторые из его точных решений вида (8.2.3.11). Во всех рассматриваемых ниже случаях будут приведены только выражения для функций $\varphi = \varphi(t,x)$, $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$. Функция $\psi = \psi(t,x)$ является произвольной, функции $h = h(t,x)$ и $F = F(t,x)$ определяются формулами (8.2.3.24) и (8.2.3.23) при $r(x) = 1$, а функция $u = u(\xi)$ удовлетворяет ОДУ (8.2.3.22).

1°. *Случай* $a_5 = -a_2$, $a_6 = -2a_3$, $a_3 \neq 0$. Точное решение вида (8.2.3.11) получим, положив $r(x) = 1$ в (8.2.3.33), (8.2.3.23), (8.2.3.24). В результате имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= \bigl[3a_3\nu x + b(t)\bigr]^{-1/3}, \\ f &= \bigl[3a_3\nu x + b(t)\bigr]^{2/3}, \\ g &= c(t)\varphi - \frac{1}{3a_3\nu}b'_t(t) + \frac{a_2}{2a_3}\varphi^{-1}, \end{aligned} \tag{8.2.3.34}$$

где $b = b(t)$ и $c = c(t)$ — произвольные функции.

2°. *Случай* $a_5=-a_2$ *и* $a_3=a_6=0$. Формулы (8.2.3.33) при $a_3=0$ приводят к точному решению (8.2.3.11), в котором следует положить

$$\begin{aligned}
&\varphi=\varphi(t)-\text{произвольная функция},\\
&f=\varphi^{-2},\\
&g=\Big(\frac{\varphi_t}{\varphi}+a_2\nu\varphi^2\Big)x+c(t)\varphi,
\end{aligned}\tag{8.2.3.35}$$

где $c=c(t)$ — произвольная функция, а остальные функции описаны выше.

3°. *Случай* $a_3=a_6=0$. Точное решение вида (8.2.3.11) определяется формулами

$$\begin{aligned}
&\varphi=\varphi(t)-\text{произвольная функция},\\
&f=\frac{k}{\varphi^2}\exp\Big[(a_2+a_5)\,\nu\int\varphi^2\,dt\Big],\\
&g=\Big(\frac{\varphi_t}{\varphi}-a_5\nu\varphi^2\Big)x+c(t)\varphi,
\end{aligned}\tag{8.2.3.36}$$

где $c(t)$ — произвольная функция, а k — произвольная постоянная. Три функции (8.2.3.36) удовлетворяют четырем уравнениям (8.2.3.17), (8.2.3.18), (8.2.3.20), (8.2.3.21) при $r=1$, $a_3=a_6=0$ и принимают вид (8.2.3.35) при $a_5=-a_2$ и $k=1$.

Использование метода поиска слабых симметрий для построения точных решений. Уравнение пограничного слоя (8.2.3.10) с произвольной $r(x)$ имеет гораздо больше точных решений вида (8.2.3.11), чем получено ранее путем прямой редукции к одному ОДУ (8.2.3.22) при $a_5=-a_2$ и $a_6=-2a_3$. Ниже описана процедуру построения других точных решений вида (8.2.3.11).

Определяющая система (8.2.3.16) — (8.2.3.21) получена в предположении, что первые шесть функций Ψ_i в (8.2.3.14) линейно независимы.

Если некоторые из функций Ψ_i линейно зависимы, то следует выбрать линейно независимую подсистему $\{\Psi_j\}$, а остальные функции выразить через элементы этой подсистемы. В этом случае соотношение (8.2.3.12) надо переписать в виде линейной комбинации функций Ψ_j, а затем функциональные множители при Ψ_j приравнять нулю. Полученная в результате указанных действий модифицированная определяющая система будет не только отличаться от системы (8.2.3.16) — (8.2.3.21), но также будет включать меньше уравнений. Чем меньше линейно независимых функций содержится в (8.2.3.14), тем меньше уравнений будет входить в определяющую систему и тем большее число произвольных функций может входить в ее решение.

Решения вида (8.2.3.11), отличные от описываемых уравнениями (8.2.3.16) — (8.2.3.22), возникают, если среди функций Ψ_i имеются две или больше линейно независимые подсистемы, одна из которых содержит Ψ_7. В качестве функций $u=u(\xi)$, которые определяют Ψ_i в (8.2.3.14), следует использовать частные решения ОДУ (8.2.3.22) при подходящих значениях параметров a_i.

В табл. 8.3 включены двенадцать функций $u=u(\xi)$, которые приводят к двум или трем линейным соотношениям между функциями (8.2.3.14). Функция в первой строке дает $\Psi_7 = 0$, что соответствует вырожденному решению. Остальные строки содержат функции, которые порождают невырожденные решения уравнения (8.2.3.10).

Таблица 8.3. Порождающие функции u и соответствующие линейные соотношения для Ψ_n. Обозначения: $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = u'_\xi$, $\Psi_3 = (u'_\xi)^2$, $\Psi_4 = u''_{\xi\xi}$, $\Psi_5 = \xi u''_{\xi\xi}$, $\Psi_6 = uu''_{\xi\xi}$, $\Psi_7 = u'''_{\xi\xi\xi}$.

№	Порождающие функции u	Линейные соотношения для Ψ_n
1	$u=\xi^2$	$\Psi_4=2\Psi_1,\ \Psi_5=\frac{2}{3}\Psi_2,\ \Psi_6=\frac{1}{2}\Psi_3$
2	$u=\xi^3$	$\Psi_5=2\Psi_2,\ \Psi_6=\frac{2}{3}\Psi_3,\ \Psi_7=6\Psi_1$
3	$u=\xi^{-1}$	$\Psi_5=-2\Psi_2,\ \Psi_6=2\Psi_3,\ \Psi_7=-6\Psi_3$
4	$u=\exp\xi$	$\Psi_2=\Psi_4=\Psi_7,\ \Psi_6=\Psi_3$
5	$u=\operatorname{ch}\xi$	$\Psi_6=\Psi_1+\Psi_3,\ \Psi_7=\Psi_2$
6	$u=\operatorname{sh}\xi$	$\Psi_6=\Psi_3-\Psi_1,\ \Psi_7=\Psi_2$
7	$u=\cos\xi$	$\Psi_6=\Psi_3-\Psi_1,\ \Psi_7=-\Psi_2$
8	$u=\sin\xi$	$\Psi_6=\Psi_3-\Psi_1,\ \Psi_7=-\Psi_2$
9	$u=\operatorname{th}\xi$	$\Psi_6=-2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=-2\Psi_2-3\Psi_6$
10	$u=\operatorname{cth}\xi$	$\Psi_6=-2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=-2\Psi_2-3\Psi_6$
11	$u=\operatorname{tg}\xi$	$\Psi_6=-2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=2\Psi_2+3\Psi_6$
12	$u=\operatorname{ctg}\xi$	$\Psi_6=2\Psi_2+2\Psi_3,\ \Psi_7=2\Psi_2-3\Psi_6$

Примеры построения точных решений. Ниже приведены примеры построения точных решений нелинейного УрЧП третьего порядка (8.2.3.10) путем использования некоторых порождающих функций, указанных в табл. 8.3.

► Пример 8.15. Возьмем функцию $u = \xi^3$ из второй строки табл. 8.3 и построим точное решение. Учитывая формулы (8.2.3.14) и линейные соотношения между Ψ_i (см. табл. 8.3), перепишем уравнение (8.2.3.12)—(8.2.3.14) в виде

$$\begin{aligned}
&\bigl[g_t + gg_x - F - 6\nu r^2 f\varphi^3\bigr]\Psi_1 + \\
&\quad + \bigl[(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + 2f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi)\bigr]\Psi_2 + \\
&\quad + \bigl[f\varphi(f\varphi)_x - \tfrac{2}{3}ff_x\varphi^2\bigr]\Psi_3 + \\
&\quad + f(\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2)\Psi_4 = 0.
\end{aligned}$$

Приравнивая функциональные коэффициенты при всех Ψ_i ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) нулю, приходим к системе УрЧП:

$$g_t + gg_x - F - 6\nu r^2 f\varphi^3 = 0, \tag{8.2.3.37}$$

$$(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x + 2f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi) = 0, \tag{8.2.3.38}$$

$$f\varphi_x + \tfrac{1}{3}f_x\varphi = 0, \tag{8.2.3.39}$$

$$\varphi\psi_t + g\varphi\psi_x + g_x\varphi\psi - \psi\varphi_t - g\varphi_x\psi - h_x\varphi^2 = 0. \tag{8.2.3.40}$$

Здесь уравнение (8.2.3.39) преобразовано к более удобному виду, а в последних двух уравнениях произведено деление на ненулевые сомножители $f\varphi$ и f.

В системе (8.2.3.37) — (8.2.3.40) на два уравнения меньше, чем в системе (8.2.3.16) — (8.2.3.21). Кроме того, полученные уравнения не нуждаются в исследовании на совместность. Уравнения (8.2.3.37)—(8.2.3.39) позволяют найти f, g, F при произвольной $r(x)$. Функции $\varphi = \varphi(t,x)$ и $\psi = \psi(t,x)$ остаются произвольными, а функция h, как следует из (8.2.3.40), определяется формулой (8.2.3.24), где $a_4 = 0$.

Общее решение уравнения (8.2.3.39) имеет вид

$$f = a(t)\varphi^{-3}, \tag{8.2.3.41}$$

где $a(t)$ — произвольная функция. Подставив это выражение в (8.2.3.38), после интегрирования получим

$$g = \frac{1}{a(t)}\bigl[a'_t(t)x + b(t)\bigr], \tag{8.2.3.42}$$

где $b(t)$ — произвольная функция. Подставив (8.2.3.41) и (8.2.3.42) в (8.2.3.37), находим функцию давления F:

$$F(t,x) = -6\nu a(t)r^2(x) + \frac{1}{a(t)}[a''_{tt}(t)x + b'_t(t)].$$

При $\psi = h = 0$ подстановка (8.2.3.41) и (8.2.3.42) в (8.2.3.11) дает точное решение

$$u = a(t)z^3 + \frac{1}{a(t)}[a'_t(t)x + b(t)]z,$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции. Интересно, что произвольная функция φ, входящая в (8.2.3.41), в окончательный результат не входит, так как она сокращается после подстановки в (8.2.3.11). ◀

► **Пример 8.16.** Возьмем теперь $u = \exp\xi$ из строки № 4 табл. 8.3. Используя формулы (8.2.3.14) и линейные соотношения между Ψ_i (см. табл. 8.3), перепишем уравнение (8.2.3.12) — (8.2.3.14) в виде

$$\begin{aligned}(g_t + gg_x - F)\Psi_1 + \bigl[(f\varphi)_t + (fg\varphi)_x - f\varphi^2 h_x - \nu r^2 f\varphi^3\bigr]\Psi_2 +{}\\ + f\varphi\bigl[(f\varphi)_x - f_x\varphi\bigr]\Psi_3 + f(\varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi)\Psi_5 = 0,\end{aligned}$$

где для простоты мы положили $\psi = 0$. Приравняв нулю функциональные коэффициенты при Ψ_i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 5$), получим

$$\begin{gathered} g_t + gg_x - F = 0,\\ (f\varphi)_t + (fg\varphi)_x - f\varphi^2 h_x - \nu r^2 f\varphi^3 = 0,\\ \varphi_x = 0, \qquad \varphi_t + g\varphi_x - g_x\varphi = 0. \end{gathered} \tag{8.2.3.43}$$

Из первого, третьего и четвертого уравнений следует, что

$$\varphi = \varphi(t), \quad g = \frac{1}{\varphi}\bigl[\varphi'_t x + b(t)\bigr], \quad F = \frac{1}{\varphi}\bigl[\varphi''_{tt}x + b'_t(t)\bigr], \tag{8.2.3.44}$$

где $\varphi = \varphi(t)$ и $b = b(t)$ — произвольные функции. Второе уравнение в (8.2.3.43) дает

$$h = \frac{2\varphi_t'}{\varphi^2}x + \frac{1}{\varphi}\int\left(\frac{f_t}{f} + g\frac{f_x}{f} - \nu r^2\varphi^2\right)dx + c(t), \tag{8.2.3.45}$$

где $c(t)$ — произвольная функция.

Формулы (8.2.3.11), (8.2.3.44), (8.2.3.45) при произвольной $f = f(t,x)$ и $\psi = 0$ определяют точное решение уравнения (8.2.3.10) для произвольной функции $r(x)$, т. е. для любой формы обтекаемой поверхности. ◀

Замечание 8.3. *Важно подчеркнуть, что прямой метод поиска слабых симметрий, описанный в разд. 8.2.1, позволяет найти значительно больше точных решений уравнения (8.2.3.10), чем прямой метод поиска редукций, рассмотренный в разд. 8.1.*

Литература к главе 8

Аксенов А.В., Козырев А.А. Одномерные и двумерные редукции уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2013, т. 2, № 4, с. 415–421.

Аристов С.Н., Полянин А.Д. Точные решения трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса. *Доклады АН*, 2009, т. 54, № 7, с. 35–40.

Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье — Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных. *Теор. основы хим. технологии*, 2009, т. 43, № 5, с. 547–566.

Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010.

Лойцянский Л.Г. *Ламинарный пограничный слой*. М.: Физматлит, 1962.

Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. М.: Наука, 1974.

Aksenov A.V., Kozyrev A.A. New reductions of the unsteady axisymmetric boundary layer equation to ODEs and simpler PDEs. *Mathematics*, 2022, Vol. 10, No. 10, 1673.

Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.*, 1989, Vol. 30, No. 10, pp. 2201–2213.

Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations. *Methods Appl. Anal.*, 1997, Vol. 4, No. 2, pp. 173–195.

Burde G.I. The construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Steady flows. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1994, Vol. 47, No. 2, pp. 247–260.

Estévez P.G. Non-classical symmetry and the singular manifold: the Burgers and the Burgers–Huxley equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1994, Vol. 27, pp. 2113–2127.

Hood S. New exact solutions of Burgers's equation – an extension to the direct method of Clarkson and Kruskal. *J. Math. Physics*, 1995, Vol. 36, No. 4, 1971.

Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson's and Kruskal's method. *IMA J. Appl. Math.*, 2000, Vol. 64, No. 3, pp. 223–244.

Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys.*, 1993, Vol. 94, No. 2, pp. 211–218.

Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 1, 90.

Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear convection–diffusion equations with variable coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2019, Vol. 73, pp. 379–390.

Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Applied Math. & Comput.*, 2019, Vol. 347, pp. 282–292.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton — London, 2012.

Polyanin A.D., Zhurov A.I. Direct functional separation of variables and new exact solutions to axisymmetric unsteady boundary-layer equations. *Commun. Nonlinear Science & Numer. Simulation*, 2016, Vol. 31, No. 1-3, pp. 11–20.

Polyanin A.D., Zhurov A.I. One-dimensional reductions and functional separable solutions to unsteady plane and axisymmetric boundary-layer equations for non-Newtonian fluids. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2016, Vol. 85, pp. 70–80.

Polyanin A.D., Zhurov A.I. Unsteady axisymmetric boundary-layer equations: Transformations, properties, exact solutions, order reduction and solution method. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2015, Vol. 74, pp. 40–50.

Zhurov A.I., Polyanin A.D. Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2020, Vol. 27, pp. 1–16.

9. Метод дифференциальных связей

9.1. Метод дифференциальных связей для обыкновенных дифференциальных уравнений

9.1.1. Описание метода. Дифференциальные связи первого порядка

Описание метода. Прежде чем описывать метод дифференциальных связей для уравнений в частных производных, рассмотрим сначала характерные особенности его применения к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Основная идея метода состоит в том, что точные решения сложного (неинтегрируемого) уравнения ищутся путем совместного анализа этого уравнения и более простого вспомогательного (обычно интегрируемого) уравнения, называемого *дифференциальной связью*.

Порядок дифференциальной связи совпадает с порядком входящей в нее старшей производной. Обычно порядок дифференциальной связи меньше, чем порядок исследуемого уравнения. Простейшими и наиболее часто используемыми являются дифференциальные связи первого порядка. Уравнение и дифференциальная связь должны содержать набор свободных параметров (иногда произвольных функций), значения которых выбираются так, чтобы уравнение и связь были совместными. После анализа на совместность все решения, полученные при интегрировании дифференциальной связи будут одновременно и решениями исходного уравнения. Рассматриваемый метод позволяет находить частные решения исходного уравнения при некоторых значениях определяющих параметров.

Для простоты рассмотрим сначала автономные обыкновенные дифференциальные уравнения вида*

$$F(y, y'_x, \dots, y_x^{(n)}; \mathbf{a}) = 0, \tag{9.1.1.1}$$

которые явно не содержат независимой переменной x и зависят от вектора свободных параметров $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_k\}$. Для уравнений (9.1.1.1) следует брать дифференциальные связи первого порядка автономного вида

$$G(y, y'_x; \mathbf{b}) = 0, \tag{9.1.1.2}$$

зависящие от вектора свободных параметров $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_s\}$.

*Подобные уравнения часто возникают в математической физике, когда точные решения нелинейных УрЧП ищутся в виде бегущей волны.

Дифференцируя соотношение (9.1.1.2) достаточное число раз, можно выразить старшие производные через y и y'_x: $y_x^{(k)} = \varphi_k(y, y'_x; \mathbf{b})$. Подставив эти выражения в исходное уравнение (9.1.1.1), приходим к уравнению первого порядка

$$H(y, y'_x; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{9.1.1.3}$$

Исключение производной y'_x из (9.1.1.2) и (9.1.1.3) приводит к алгебраическому (или трансцендентному) уравнению

$$P(y; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{9.1.1.4}$$

Далее ищем значения параметров $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при которых уравнение (9.1.1.4) удовлетворяется тождественно при любых y (обычно это приводит к некоторым ограничениям на компоненты вектора $\mathbf{a}$). После этого выражаем вектор $\mathbf{b}$ через $\mathbf{a}$, так что $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a})$, и подставляем обратно в дифференциальную связь (9.1.1.2). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$g(y, y'_x; \mathbf{a}) = 0 \qquad (g = G|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{a})}). \tag{9.1.1.5}$$

Это уравнение совместно с исходным уравнением (9.1.1.1); иными словами, исходное уравнение является следствием уравнения (9.1.1.5) и поэтому наследует все его решения. Наконец, разрешая уравнение (9.1.1.5) относительно производной, приходим к уравнению с разделяющимися переменными, интегрирование которого позволяет найти его общее решение. Общее решение уравнения (9.1.1.5) является точным решением и исходного уравнения (9.1.1.1).

Замечание 9.1. *На практике чаще всего дифференциальную связь первого порядка задают в явном виде $y'_x = h(y; \boldsymbol{b})$. В этом случае ее последовательное дифференцирование*

$$y''_{xx} = (y'_x)'_y y'_x = hh'_y, \quad y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_y y'_x = h(hh'_y)'_y, \quad \dots$$

позволяет выразить старшие производные через y, так что $y_x^{(k)} = \varphi_k(y; \boldsymbol{b})$. Используя эти выражения и дифференциальную связь, после исключения производных из уравнения (9.1.1.1) сразу приходим к алгебраическому (трансцендентному) уравнению вида (9.1.1.4).

Замечание 9.2. *Вместо y'_x можно исключить зависимую переменную y из (9.1.1.2) и (9.1.1.3), в результате чего получим алгебраическое (трансцендентное) уравнение относительно производной: $Q(y'_x; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$. Далее ищутся значения параметров $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, для которых это уравнение удовлетворяется тождественно для любых y'_x.*

Примеры нелинейных ОДУ и их дифференциальных связей. Структурный вид дифференциальной связи (9.1.1.2) во многих случаях можно выбирать аналогичным виду исходного уравнения (9.1.1.1) (но с другими определяющими параметрами). Проиллюстрируем сказанное на примерах конкретных ОДУ второго, третьего, четвертого и более высоких порядков.

► Пример 9.1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка со степенной нелинейностью

$$y''_{xx} - cy'_x = ay + by^n, \tag{9.1.1.6}$$

которое встречается в теории химических реакторов, теории горения и математической биологии*. Простые случаи $n = 0$, $n = 1$, $b = 0$, которые приводят к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами, рассматривать не будем.

Дополним уравнение (9.1.1.6) дифференциальной связью первого порядка

$$y'_x = \alpha y + \beta y^m, \tag{9.1.1.7}$$

которая является ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными и легко интегрируется. Вид правой части уравнения (9.1.1.7) выбран аналогичным виду правой части исходного уравнения (9.1.1.6), но с другими параметрами.

Уравнение и дифференциальная связь содержат семь параметров: a, b, c, n, m, α, β. Цель дальнейшего исследования состоит в определении параметров α, β, m дифференциальной связи, которые надо выразить через a, b, c, n. Одновременно с этим будут найдены ограничения на параметры уравнения и построено его решение.

Дифференцируя (9.1.1.7) и заменяя первую производную на правую часть (9.1.1.7), последовательно имеем

$$\begin{aligned} y''_{xx} = (\alpha + m\beta y^{m-1})y'_x &= (\alpha + m\beta y^{m-1})(\alpha y + \beta y^m) = \\ &= \alpha^2 y + \alpha\beta(m+1)y^m + m\beta^2 y^{2m-1}. \end{aligned} \tag{9.1.1.8}$$

Исключив первую и вторую производные в (9.1.1.6) с помощью (9.1.1.7) и (9.1.1.8), после элементарных преобразований получим

$$(\alpha^2 - \alpha c - a)y + \beta[\alpha(m+1) - c]y^m + m\beta^2 y^{2m-1} - by^n = 0. \tag{9.1.1.9}$$

Чтобы это соотношение удовлетворялось тождественно при любых y, надо положить

$$\begin{aligned} &\alpha^2 - \alpha c - a = 0, \\ &\alpha(m+1) - c = 0, \\ &2m - 1 = n, \\ &m\beta^2 - b = 0. \end{aligned} \tag{9.1.1.10}$$

Здесь третье уравнение позволяет сбалансировать два последних члена соотношения (9.1.1.9). Три других алгебраических уравнения (9.1.1.10) соответствуют приравниванию нулю коэффициентов при различных степенях y в (9.1.1.9).

Если выполняются условия (9.1.1.10), то решения уравнения (9.1.1.7) также являются решениями более сложного уравнения (9.1.1.6). Определяющая система их четырех уравнений (9.1.1.10) содержит семь параметров a, b, c, n, m, α, β. Три параметра b, c, n исходного уравнения можно считать произвольными, остальные параметры выражаются так:

$$a = -\frac{2c^2(n+1)}{(n+3)^2}, \quad m = \frac{n+1}{2}, \quad \alpha = \frac{2c}{n+3}, \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{2b}{n+1}}, \tag{9.1.1.11}$$

*Уравнение (9.1.1.6) описывает решения типа бегущей волны уравнения Колмогорова — Петровского — Пискунова $u_t = u_{zz} - f(u)$ для кинетической функции специального вида $f(u) = au + bu^n$. В этом случае имеем $u = y(x)$, где $x = z + ct$.

где $n \neq -1$, $n \neq -3$, $b(n+1) > 0$. Видно, что для совместности уравнений (9.1.1.6) и (9.1.1.7) необходимо, чтобы параметр a исходного уравнения был определенным образом связан с двумя другими параметрами c и n. В этом случае имеются два семейства параметров (9.1.1.11) уравнения (9.1.1.7), которые приводят к двум различным однопараметрическим решениям уравнений (9.1.1.6) и (9.1.1.7).

Интегрируя дифференциальную связь (9.1.1.7) (которая представляет собой ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными) и учитывая формулы (9.1.1.11), в итоге получим два точных решения уравнения (9.1.1.6) при $a = -2c^2(n+1)/(n+3)^2$:

$$y = \left[Ce^{\alpha(1-m)x} - (\beta/\alpha)\right]^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная, а константы m, α, β выражаются через параметры исходного уравнения по формулам (9.1.1.11). ◀

► Пример 9.2. Рассмотрим нелинейное ОДУ третьего порядка

$$y'''_{xxx} = ay^4 + by^2 + c \tag{9.1.1.12}$$

совместно с дифференциальной связью первого порядка

$$y'_x = \alpha y^2 + \beta. \tag{9.1.1.13}$$

С помощью (9.1.1.13) находим производные

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= 2\alpha y y'_x = 2\alpha y(\alpha y^2 + \beta) = 2\alpha^2 y^3 + 2\alpha\beta y, \\ y'''_{xxx} &= (6\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta)y'_x = (6\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta)(\alpha y^2 + \beta) = 6\alpha^3 y^4 + 8\alpha^2\beta y^2 + 2\alpha\beta^2. \end{aligned} \tag{9.1.1.14}$$

Чтобы третья производная в (9.1.1.14) совпала с правой частью (9.1.1.12), должны выполняться соотношения

$$a = 6\alpha^3, \quad b = 8\alpha^2\beta, \quad c = 2\alpha\beta^2. \tag{9.1.1.15}$$

Разрешив первые два уравнения относительно α и β и подставив полученные выражения в последнее уравнение, получим

$$\alpha = \left(\frac{a}{6}\right)^{1/3}, \quad \beta = \left(\frac{a}{6}\right)^{-2/3}\frac{b}{8}, \quad c = \frac{3b^2}{16a}. \tag{9.1.1.16}$$

Отсюда следует, что уравнение третьего порядка (9.1.1.12) при $c = 3b^2/(16a)$ имеет частное решение, которое определяется путем интегрирования уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (9.1.1.13), параметры которого связаны с параметрами исходного уравнения первыми двумя соотношениями (9.1.1.16). ◀

► Пример 9.3. Покажем, что ОДУ n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью

$$y_x^{(n)} = ae^{\lambda y} \tag{9.1.1.17}$$

допускает дифференциальную связь первого порядка

$$y'_x = be^{\mu y}. \tag{9.1.1.18}$$

Действительно, последовательное дифференцирование равенства (9.1.1.18) дает

$$y''_{xx} = b\mu e^{\mu y} y'_x = b^2 \mu e^{2mu}, \quad \ldots, \quad y_x^{(m)} = b^m \mu^{m-1}(m-1)!\, e^{m\mu y}. \tag{9.1.1.19}$$

Подставляя выражение (9.1.1.19) при $m = n$ в (9.1.1.17) и учитывая (9.1.1.18), в итоге находим коэффициенты дифференциальной связи:

$$\mu = \frac{\lambda}{n}, \qquad b = \left[\frac{an^{n-1}}{\lambda^{n-1}(n-1)!}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Общее решение уравнения с разделяющимися переменными (9.1.1.18) и соответствующие ему точное решение исходного уравнения (9.1.1.17) имеют вид

$$y = -\frac{1}{\mu}\ln(-b\mu x + C).$$

◄

9.1.2. Дифференциальные связи произвольного порядка. Общий метод исследования на совместность двух уравнений

В общем случае дифференциальная связь представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение произвольного порядка. Поэтому необходимо уметь анализировать переопределенные системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений на совместность. Ниже описывается общий алгоритм, который используется для анализа таких систем.

1°. *Случай ОДУ одинакового порядка*. Рассмотрим сначала два обыкновенных дифференциальных уравнения одного и того же порядка

$$F_1(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0, \tag{9.1.2.1}$$

$$F_2(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0. \tag{9.1.2.2}$$

Здесь и далее будем предполагать, что уравнения зависят от свободных параметров, которые для краткости опускаются. Исключим старшую производную (разрешив одно из уравнений относительно $y_x^{(n)}$ и подставив полученное выражение во второе уравнение). В результате имеем уравнение $(n-1)$-го порядка

$$G_1(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n-1)}) = 0. \tag{9.1.2.3}$$

Дифференцируя (9.1.2.3) по x и исключая производную $y_x^{(n)}$ из полученного уравнения с помощью любого из уравнений (9.1.2.1) или (9.1.2.2), приходим к другому уравнению $(n-1)$-го порядка

$$G_2(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n-1)}) = 0. \tag{9.1.2.4}$$

Таким образом, анализ двух уравнений n-го порядка (9.1.2.1) и (9.1.2.2) сводится к анализу двух уравнений $(n-1)$-го порядка (9.1.2.3) и (9.1.2.4). Понижая порядок уравнений далее аналогичным образом, в итоге приходим к одному алгебраическому (трансцендентному) уравнению (поскольку два дифференциальных уравнения первого порядка сводятся к одному алгебраическому уравнению). Анализ полученного алгебраического уравнения не представляет существенных сложностей и выполняется так же, как и ранее в разд. 9.1.1 для случая дифференциальной связи первого порядка.

► Пример 9.4. Рассмотрим полученную в примере 6.15 переопределенную систему, состоящую из двух ОДУ (см. первые два уравнения в (6.5.3.4)):

$$\begin{aligned} (\theta\theta'_x)'_x &= A_1\theta + A_2, \\ \theta''_{xx} &= A_3\theta + A_4. \end{aligned} \qquad (9.1.2.5)$$

Покажем как, не используя решения второго линейного уравнения (9.1.2.5) при различных значениях определяющих параметров A_n, можно найти совместное решение этой системы путем исследования ее на совместность.

Раскроем скобки в первом уравнении (9.1.2.5), а затем исключим вторую производную с помощью второго уравнения. В результате получим ОДУ первого порядка

$$(\theta'_x)^2 + A_3\theta^2 = (A_1 - A_4)\theta + A_2.$$

Дифференцируя это уравнение и сокращая на θ'_x, приходим к ОДУ второго порядка

$$2\theta''_{xx} + 2A_3\theta = A_1 - A_4.$$

Исключая отсюда вторую производную с помощью второго уравнения (9.1.2.5), получим линейное алгебраическое уравнение относительно θ:

$$4A_3\theta + 3A_4 - A_1 = 0.$$

Чтобы тождественно удовлетворить этому уравнению для любых θ, надо положить

$$A_3 = 0, \qquad A_4 = \frac{1}{3}A_1. \qquad (9.1.2.6)$$

При этих значениях переопределенная система ОДУ (9.1.2.5) имеет совместное решение в виде квадратичного многочлена (сначала решается второе ОДУ (9.1.2.5) с параметрами (9.1.2.6), а затем его решение подставляется в первое ОДУ):

$$\theta = \frac{1}{6}A_1x^2 + Cx + \frac{3}{2A_1}(C^2 - A_2),$$

где C — произвольная постоянная. ◄

2°. *Случай ОДУ различного порядка.* Пусть имеются два обыкновенных дифференциальных уравнения различного порядка:

$$F_1(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(n)}) = 0, \qquad (9.1.2.7)$$

$$F_2(x, y, y'_x, \ldots, y_x^{(m)}) = 0, \qquad (9.1.2.8)$$

где $m < n$. Дифференцируя $n - m$ раз ОДУ (9.1.2.8), приводим рассматриваемую систему (9.1.2.7)–(9.1.2.8) к системе вида (9.1.2.1)–(9.1.2.2), в которой оба уравнения имеют один и тот же порядок n.

► **Пример 9.5.** Рассмотрим ОДУ четвертого порядка с квадратичной нелинейностью

$$y''''_{xxxx} = a(y''_{xx})^2 - by^2 + c \tag{9.1.2.9}$$

вместе с линейной дифференциальной связью второго порядка

$$y''_{xx} = \alpha y + \beta. \tag{9.1.2.10}$$

Двукратное дифференцирование (9.1.2.10) дает $y''''_{xxxx} = \alpha^2 y + \alpha\beta$. Используем это выражение и дифференциальную связь (9.1.2.10) для исключения производных из уравнения (9.1.2.9). В результате приходим к квадратичному уравнению относительно y, которое удовлетворяется тождественно при выполнении условий (проверить самостоятельно):

$$a\alpha^2 - b = 0, \quad \alpha - 2a\beta = 0, \quad c = \alpha\beta - a\beta^2.$$

Два параметра a и b исходного уравнения можно считать произвольными, а остальные параметры выражаются через них следующим образом:

$$c = \frac{b}{4a^2}, \quad \alpha = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \beta = \pm\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

◄

► **Пример 9.6.** Рассмотрим еще одно ОДУ четвертого порядка с квадратичной нелинейностью

$$y''''_{xxxx} = a(y''_{xx})^2 + b(y'_x)^2 + c. \tag{9.1.2.11}$$

Добавим к (9.1.2.11) нелинейную дифференциальную связь второго порядка

$$y''_{xx} = \alpha(y'_x)^2 + \beta, \tag{9.1.2.12}$$

которое представляет собой автономное уравнение, интегрируемое в квадратурах.

Последовательно дифференцируя (9.1.2.12), находим производные

$$\begin{aligned} y'''_{xxx} &= 2\alpha y'_x y''_{xx} = 2\alpha y'_x[\alpha(y'_x)^2 + \beta] = 2\alpha^2(y'_x)^3 + 2\alpha\beta y'_x, \\ y''''_{xxxx} &= [6\alpha^2(y'_x)^2 + 2\alpha\beta]y''_{xx} = [6\alpha^2(y'_x)^2 + 2\alpha\beta][\alpha(y'_x)^2 + \beta] = \\ &= 6\alpha^3(y'_x)^4 + 8\alpha^2\beta(y'_x)^2 + 2\alpha\beta^2. \end{aligned} \tag{9.1.2.13}$$

Подставив (9.1.2.12) и (9.1.2.13) в (9.1.2.11), получим биквадратное уравнение относительно производной

$$(6\alpha^3 - a\alpha^2)(y'_x)^4 + (8\alpha^2\beta - 2a\alpha\beta - b)(y'_x)^2 + 2\alpha\beta^2 - c = 0,$$

которое будет тождественно удовлетворяться, если положить

$$6\alpha^3 - a\alpha^2 = 0, \quad 8\alpha^2\beta - 2a\alpha\beta - b = 0, \quad 2\alpha\beta^2 - c = 0.$$

Два параметра a и b исходного уравнения можно считать произвольными, а остальные константы выражаются через них следующим образом:

$$c = 27\,a^{-3}b^2, \quad \alpha = \tfrac{1}{6}a, \quad \beta = -9\,a^{-2}b.$$

◄

Задачи и упражнения к разд. 9.1

1. Найти частные решения ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} = ay^n + by^{2n+1}$$

с помощью дифференциальной связи первого порядка

$$y'_x = \alpha + \beta y^{n+1}.$$

2. Найти частные решения ОДУ второго порядка

$$y''_{xx} - cy'_x = a + be^{\lambda y}$$

с помощью дифференциальной связи первого порядка.

Указание. Правая часть дифференциальной связи задается в таком же виде, что и правая часть исходного уравнения.

3. Найти частные решения ОДУ четвертого порядка

$$y''''_{xxxx} = a + by^3$$

с помощью дифференциальной связи первого порядка

$$(y'_x)^2 = \alpha y^m + \beta.$$

Найти соотношения между параметрами исходного уравнения и дифференциальной связи и условия при которых они совместны.

4. Найти частные решения ОДУ четвертого порядка

$$y''''_{xxxx} = ay^n + by^{2n+3}$$

с помощью дифференциальной связи первого порядка

$$(y'_x)^2 = \alpha y^m + \beta.$$

5. Найти частные решения ОДУ четвертого порядка

$$y''''_{xxxx} = ae^{\lambda y} + be^{2\lambda y}$$

с помощью дифференциальной связи первого порядка

$$(y'_x)^2 = \alpha + \beta e^{\lambda y}.$$

6. Найти частные решения ОДУ n-го порядка

$$y^{(n)}_x = ae^{\lambda y} y'_x$$

с помощью дифференциальной связи первого порядка

$$y'_x = be^{\mu y}.$$

7. Показать, что автономная дифференциальная связь второго порядка

$$y''_{xx} = f(y)(y'_x)^2 + g(y)y'_x$$

эквивалентна подходящей автономной дифференциальной связи первого порядка $y'_x = h(y)$.

9.2. Описание метода дифференциальных связей для уравнений с частными производными

9.2.1. Предварительные замечания. Простой пример

Основная идея метода: попытаться найти точные решения сложного уравнения в частных производных путем совместного анализа этого уравнения и более простого вспомогательного уравнения, называемого *дифференциальной связью*.

В разд. 6.1 рассматривались примеры нелинейных УрЧП, допускающих точные решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u(x,t) = \varphi(x) + \psi(t). \tag{9.2.1.1}$$

На начальном этапе функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ считаются произвольными и подлежат определению в ходе последующего анализа.

Дифференцируя выражение (9.2.1.1) по t, получим

$$u_t = f(t) \qquad (f = \psi'_t). \tag{9.2.1.2}$$

Верно и обратное: из соотношения (9.2.1.2) следует представление решения в виде (9.2.1.1).

Дифференцируя далее (9.2.1.2) по x, имеем

$$u_{xt} = 0. \tag{9.2.1.3}$$

Обратно, из (9.2.1.3) можно получить представление решения в виде (9.2.1.1).

Таким образом, задачу поиска точных решений вида (9.2.1.1) для конкретного уравнения с частными производными можно заменить эквивалентной задачей о поиске точных решений данного уравнения, удовлетворяющих дополнительному условию (9.2.1.2) или (9.2.1.3). Подобные дополнительные условия, записанные в виде одного или нескольких дифференциальных уравнений, принято назвать *дифференциальными связями*.

Прежде чем приводить общее описание метода дифференциальных связей, продемонстрируем его характерные особенности на простом примере.

► Пример 9.7. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = a u_{yyy}, \tag{9.2.1.4}$$

которое встречается в теории гидродинамического пограничного слоя. Будем искать решения уравнения (9.2.1.4), удовлетворяющие линейной дифференциальной связи первого порядка

$$u_x = \varphi(y). \tag{9.2.1.5}$$

Здесь функция $\varphi(y)$ в общем случае не может быть произвольной, а должна удовлетворять условию совместности уравнений (9.2.1.4) и (9.2.1.5). Условие совместности представляет собой дифференциальное уравнение для определения $\varphi(y)$; оно выводится из уравнений (9.2.1.4) и (9.2.1.5) и соотношений, полученных из них путем дифференцирования.

Последовательно дифференцируя (9.2.1.5) по разным переменным, находим производные

$$u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = \varphi'_y, \quad u_{xxy} = 0, \quad u_{xyy} = \varphi''_{yy}, \quad u_{xyyy} = \varphi'''_{yyy}. \tag{9.2.1.6}$$

Дифференцируя (9.2.1.4) по x, имеем

$$u_{xy}^2 + u_y u_{xxy} - u_{xx} u_{yy} - u_x u_{xyy} = a u_{xyyy}. \tag{9.2.1.7}$$

Подставив в (9.2.1.7) производные (9.2.1.5) и (9.2.1.6), приходим к ОДУ третьего порядка для функции φ:

$$(\varphi'_y)^2 - \varphi\varphi''_{yy} = a\varphi'''_{yyy}. \qquad (9.2.1.8)$$

Это уравнение представляет собой условие совместности уравнений (9.2.1.4) и (9.2.1.5).

Для построения точного решения проинтегрируем уравнение (9.2.1.5). Получим

$$u = \varphi(y)x + \psi(y). \qquad (9.2.1.9)$$

Функцию $\psi(y)$ найдем, подставив (9.2.1.9) в (9.2.1.4). Учитывая (9.2.1.8), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\psi(y)$:

$$\varphi'_y\psi'_y - \varphi\psi''_{yy} = a\psi'''_{yyy}. \qquad (9.2.1.10)$$

В итоге получаем точное решение вида (9.2.1.9), где функции φ и ψ описываются ОДУ (9.2.1.8) и (9.2.1.10).

Замечание 9.3. *Указанное выше решение легче получить прямой подстановкой выражения (9.2.1.9) в исходное уравнение (9.2.1.4).* ◀

9.2.2. Общее описание метода дифференциальных связей

В общем случае процедура построения точных решений для нелинейных уравнений математической физики методом дифференциальных связей существенно сложнее, чем для обыкновенных дифференциальных уравнений. Она состоит из нескольких последовательных этапов, которые описаны ниже.

1°. Поиск точных решений уравнения

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0 \qquad (9.2.2.1)$$

осуществляется путем присоединения к нему дифференциальной связи (вспомогательного дифференциального уравнения)

$$G(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0. \qquad (9.2.2.2)$$

Вид дифференциальной связи (9.2.2.2) можно задаваться:

• исходя из априорных соображений (например, можно потребовать, чтобы связь представляла собой разрешимое или более простое уравнение),

• исходя из некоторых свойств рассматриваемого уравнения (например, его симметрий или законов сохранения).

2°. В общем случае полученная таким образом переопределенная система (9.2.2.1) — (9.2.2.2) для одной искомой функции u требует проведения анализа ее уравнений на совместность. Если дифференциальная связь (9.2.2.2) задана исходя из априорных соображений, она должна иметь достаточный функциональный произвол (т. е. содержать произвольные определяющие функции). В результате исследования системы (9.2.2.1) — (9.2.2.2) на совместность должны быть получены условия, конкретизирующие вид определяющих функций. Эти условия (*условия совместности*) обычно записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В простых случаях исследование на совместность проводится путем дифференцирования (возможно, многократного) уравнений (9.2.2.1) и (9.2.2.2) по x и t и исключения старших производных из полученных дифференциальных соотношений и уравнений (9.2.2.1), (9.2.2.2). В результате приходят к уравнению, содержащему степени младших производных. Приравнивание нулю коэффициентов при всех степенях производных позволяет найти условия совместности, которые связывают функциональные коэффициенты уравнений (9.2.2.1) и (9.2.2.2).

3°. Решаем систему полученных в п. 2° дифференциальных уравнений для определяющих функций. Затем эти функции подставляем в дифференциальную связь (9.2.2.2). В результате приходим к уравнению

$$g(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \, \ldots) = 0. \qquad (9.2.2.3)$$

Дифференциальная связь (9.2.2.3), которая совместна с рассматриваемым уравнением (9.2.2.1), называется *инвариантным многообразием* для уравнения (9.2.2.1).

4°. Ищем общее решение (i) уравнения (9.2.2.3) или (ii) уравнения, которое является следствием (9.2.2.1) и (9.2.2.3). Полученное решение будет содержать некоторые произвольные функции $\{\varphi_m\}$ (эти функции могут зависеть от x и t, так и от u). Отметим, что в некоторых случаях вместо общего решения можно использовать частные решения уравнения (9.2.2.3) или его следствий.

5°. Решение, полученное в п. 4°, подставляем в исходное УрЧП (9.2.2.1). Приходим к уравнению, которое позволяет найти функции $\{\varphi_m\}$. Определив $\{\varphi_m\}$, подставляем их в решение из п. 4°. В результате получим точное решение исходного уравнения (9.2.2.1).

Замечание 9.4. *При неудачном выборе дифференциальной связи уравнения (9.2.2.1) и (9.2.2.2) могут оказаться несовместными (не имеющими общих решений).*

Замечание 9.5. *На последних трех этапах метода дифференциальных связей приходится решать различные уравнения (системы уравнений). Если хотя бы на одном из этих этапов не удается получить решение, то не удается построить и точное решение исходного уравнения.*

Для бо́льшей наглядности общая схема применения метода дифференциальных связей изображена на рис. 9.1.

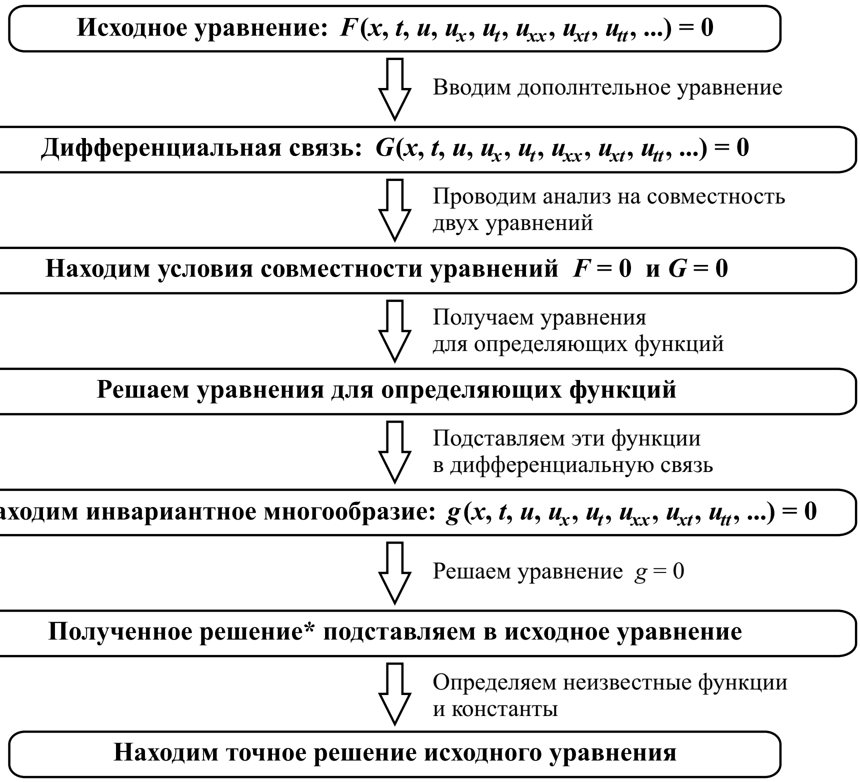

Рис. 9.1. Алгоритм построения точных решений методом дифференциальных связей.

9.3. Дифференциальные связи первого порядка для уравнений с частными производными

9.3.1. Эволюционные уравнения второго порядка

Дифференциальная связь первого порядка. Условие совместности. Будем рассматривать эволюционные уравнения второго порядка вида

$$u_t = \Phi(x, t, u, u_x, u_{xx}). \tag{9.3.1.1}$$

На предварительном этапе, до использования метода дифференциальных связей, уравнение (9.3.1.1) разрешим относительно старшей производной:

$$u_{xx} = F(x, t, u, u_x, u_t). \tag{9.3.1.2}$$

Затем дополним уравнение (9.3.1.1) дифференциальной связью первого порядка общего вида

$$u_t = G(x, t, u, u_x). \tag{9.3.1.3}$$

*Это решение обычно содержит некоторые произвольные функции и постоянные.

Условие совместности уравнений (9.3.1.2) и (9.3.1.3) выводится путем однократного дифференцирования (9.3.1.2) по t и двукратного дифференцирования (9.3.1.3) по x с последующим приравниванием полученных выражений для смешанных производных третьего порядка u_{xxt} и u_{txx}:

$$\mathrm{D}_t F = \mathrm{D}_x^2 G. \tag{9.3.1.4}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования по t и x:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t}, \\ \mathrm{D}_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t}. \end{aligned} \tag{9.3.1.5}$$

Частные производные u_t, u_{xx}, u_{xt} и u_{tt} в формулах (9.3.1.5) должны быть выражены через x, t, u, u_x с помощью уравнений (9.3.1.2), (9.3.1.3) и соотношений, полученных дифференцированием этих уравнений. В результате условие совместности (9.3.1.4) принимает вид $R(x, t, u, u_x) = 0$. Часто левую часть этого соотношения можно представить в виде полинома по производной u_x:

$$\sum_{m=1}^{M} R_m(x, t, u) u_x^m = 0.$$

Процедура расщепления по производной приводит к системе определяющих уравнений

$$R_m(x, t, u) = 0, \qquad m = 1, \ldots, M.$$

Иллюстративный пример. Ниже рассмотрен пример, иллюстрирующий применение метода дифференциальных связей для построения точных решений нелинейных УрЧП. При этом для простоты и наглядности формулы для вычисления производных (9.3.1.4) и (9.3.1.5) использоваться не будут.

► Пример 9.8. Для поиска точных решений нелинейного уравнения теплопроводности с источником

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u) \tag{9.3.1.6}$$

используем дифференциальную связь простейшего вида

$$u_t = \varphi(u). \tag{9.3.1.7}$$

Функции $f(u)$, $g(u)$, $\varphi(u)$ в уравнениях (9.3.1.6) и (9.3.1.7) заранее неизвестны и подлежат определению в ходе последующего анализа. Процедура построения решения состоит из нескольких этапов, подробно описанных ниже.

1°. *Преобразование исходного УрЧП к более удобному виду*. Разрешив уравнение (9.3.1.6) относительно старшей производной, имеем

$$u_{xx} = \frac{u_t - f'_u(u)u_x^2 - g(u)}{f(u)} = \frac{\varphi(u) - g(u) - f'_u(u)u_x^2}{f(u)}.$$

Здесь на втором этапе была исключена производная u_t с помощью дифференциальной связи (9.3.1.7). Полученное соотношение удобно представить в следующем виде:

$$u_{xx} = h(u) - \frac{f'_u(u)}{f(u)} u_x^2, \quad h(u) = \frac{\varphi(u) - g(u)}{f(u)}. \tag{9.3.1.8}$$

Далее для краткости в промежуточных результатах будем опускать аргументы функций $f = f(u)$, $g = g(u)$, $\varphi = \varphi(u)$.

2°. *Вывод определяющей системы уравнений.* Последовательно дифференцируя по x связь (9.3.1.7), находим смешанную производную третьего порядка u_{txx}:

$$\begin{aligned} &u_t = \varphi, \quad u_{tx} = \varphi'_u u_x, \\ &u_{txx} = \varphi'_u u_{xx} + \varphi''_{uu} u_x^2 = \varphi'_u \Big(h - \frac{f'_u}{f} u_x^2\Big) + \varphi''_{uu} u_x^2 = \\ &\qquad = h\varphi'_u + \Big(\varphi''_{uu} - \varphi'_u \frac{f'_u}{f}\Big) u_x^2. \end{aligned} \tag{9.3.1.9}$$

Здесь при выкладках была исключена вторая производная u_{xx} с помощью соотношения (9.3.1.8).

Дифференцируя (9.3.1.8) по t, вычисляем смешанную производную третьего порядка u_{xxt}:

$$\begin{aligned} u_{xxt} &= h'_u u_t - \Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u u_t u_x^2 - 2\frac{f'_u}{f} u_x u_{xt} = \\ &= h'_u \varphi - \Big[\varphi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u + 2\varphi'_u \frac{f'_u}{f}\Big] u_x^2. \end{aligned} \tag{9.3.1.10}$$

Здесь на последнем этапе были исключены производные u_t и u_{xt} с помощью дифференциальной связи (9.3.1.7) и второго соотношения (9.3.1.9).

Приравнивая производные третьего порядка u_{xxt} и u_{txx}, которые определены формулами (9.3.1.9) и (9.3.1.10), получим соотношение

$$\Big[\varphi''_{uu} + \varphi'_u \frac{f'_u}{f} + \varphi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u\Big] u_x^2 + h\varphi'_u - h'_u \varphi = 0. \tag{9.3.1.11}$$

Приравнивая далее нулю функциональные коэффициенты при различных степенях u_x (процедура расщепления по производной u_x), приходим к определяющей системе уравнений

$$\begin{aligned} \varphi''_{uu} + \varphi'_u \frac{f'_u}{f} + \varphi\Big(\frac{f'_u}{f}\Big)'_u &= 0, \\ h\varphi'_u - h'_u \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{9.3.1.12}$$

3°. *Решение определяющей системы уравнений.* Систему (9.3.1.12) удается проинтегрировать, поскольку первое уравнение можно представить в виде $[(f\varphi)'_u / f]'_u = 0$, а у второго уравнения разделяются переменные. В результате имеем

$$\begin{aligned} &\varphi = \frac{1}{f}\Big(A \int f\,du + B\Big), \\ &g = (1 - Cf)\varphi, \end{aligned} \tag{9.3.1.13}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. При выводе формулы для g в (9.3.1.13) функция h была заменена другими функциями с учетом ее определения в (9.3.1.8).

Далее рассмотрим невырожденный случай, когда $A \neq 0$ в (9.3.1.13). Считая, что функция $f = f(u)$ задана произвольно, с помощью (9.3.1.13) находим функции $g(u)$ и $\varphi(u)$:

$$g(u) = \frac{a + cf}{f}\Bigl(\int f\,du + b\Bigr), \quad \varphi(u) = \frac{a}{f}\Bigl(\int f\,du + b\Bigr), \tag{9.3.1.14}$$

где $a = A$, $b = B/A$, $c = -AC$ — произвольные постоянные.

4°. *Определение общего вида решения с помощью дифференциальной связи.* Подставив функцию $\varphi(u)$ из (9.3.1.14) в дифференциальную связь (9.3.1.7), приходим к уравнению

$$u_t = \frac{a}{f}\Bigl(\int f\,du + b\Bigr). \tag{9.3.1.15}$$

Подстановка $w = \displaystyle\int f\,du + b$ приводит (9.3.1.15) к простому линейному ОДУ $w_t = aw$. Интегрируя его, находим общее решение уравнения (9.3.1.15) в неявном виде

$$\int f(u)\,du = \theta(x)e^{at} - b. \tag{9.3.1.16}$$

Здесь функция $\theta = \theta(x)$ играет роль постоянной интегрирования, которая зависит от x (т. к. w зависит от x и t, а уравнение $w_t = aw$ не зависит явно от x) и на данном этапе считается произвольной.

5°. *Получение решения исходного УрЧП.* Дифференцируя (9.3.1.16) по x и t, имеем $u_t = ae^{at}\theta/f$ и $u_x = e^{at}\theta'_x/f$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение (9.3.1.6) и учитывая (9.3.1.14), приходим к линейному ОДУ второго порядка

$$\theta''_{xx} + c\theta = 0, \tag{9.3.1.17}$$

общее решение которого имеет вид

$$\theta = \begin{cases} C_1 \sin\bigl(x\sqrt{c}\,\bigr) + C_2 \cos\bigl(x\sqrt{c}\,\bigr) & \text{при } c > 0, \\ C_1 \operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-c}\,\bigr) + C_2 \operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-c}\,\bigr) & \text{при } c < 0, \\ C_1 x + C_2 & \text{при } c = 0, \end{cases} \tag{9.3.1.18}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формулы (9.3.1.16) и (9.3.1.18) описывают точные решения (в неявном виде) уравнения (9.3.1.6) при произвольной $f(u)$ и функции $g(u)$, заданной первой формулой (9.3.1.14). ◀

Замечание 9.6. *В вырожденном случае, подставив $A = 0$ в (9.3.1.13), для функций $g(u)$ и $\varphi(u)$ получим следующие выражения (как и выше, f считается произвольной заданной функцией):*

$$g(u) = \frac{b}{f} + c, \quad \varphi(u) = \frac{b}{f},$$

где $b = B$ и $c = -BC$ — произвольные постоянные. Это решение можно вывести из (9.3.1.14) путем переобозначения постоянных $b \to b/a$ и $c \to ac/b$ с последующим предельным переходим при $a \to 0$. После простых вычислений находим соответствующее *решение уравнения (9.3.1.6) в неявном виде:*

$$\int f(u)\,du = bt - \frac{1}{2}cx^2 + C_1x + C_2.$$

9.3.2. Уравнения второго порядка гиперболического типа

Аналогичным образом исследуется гиперболическое уравнение второго порядка вида

$$u_{xt} = F(x,t,u,u_x,u_t), \tag{9.3.2.1}$$

дополненное дифференциальной связью первого порядка (9.3.1.3). Считаем, что $G_{u_x} \neq 0$.

Условие совместности для этих уравнений получается путем однократного дифференцирования (9.3.2.1) по t и двукратного дифференцирования (9.3.1.3) по t и x с последующим приравниванием полученных выражений для смешанных производных третьего порядка u_{xtt} и u_{ttx}:

$$\mathrm{D}_t F = \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_t G]. \tag{9.3.2.2}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования (9.3.1.5), в которых частные производные u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} должны быть выражены через x, t, u, u_x с помощью (9.3.2.1) и (9.3.1.3) и их дифференциальных следствий.

► Пример 9.9. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_{xt} = f(u). \tag{9.3.2.3}$$

Дополним (9.3.2.3) квазилинейной дифференциальной связью

$$u_x = \varphi(t)g(u). \tag{9.3.2.4}$$

Дифференцируя (9.3.2.3) по x и заменяя первую производную по x на правую часть равенства (9.3.2.4), имеем

$$u_{xxt} = \varphi g f'_u. \tag{9.3.2.5}$$

Дифференцируя далее (9.3.2.4) по x и t, получим два соотношения

$$u_{xx} = \varphi g'_u u_x = \varphi^2 g g'_u, \tag{9.3.2.6}$$

$$u_{xt} = \varphi'_t g + \varphi g'_u u_t. \tag{9.3.2.7}$$

Исключив в (9.3.2.7) смешанную производную с помощью уравнения (9.3.2.3), находим первую производную по t:

$$u_t = \frac{f - \varphi'_t g}{\varphi g'_u}. \tag{9.3.2.8}$$

Дифференцируя (9.3.2.6) по t и заменяя u_t правой частью равенства (9.3.2.8), имеем

$$u_{xxt} = 2\varphi\varphi'_t g g'_u + \varphi^2 (g g'_u)'_u u_t = 2\varphi\varphi'_t g g'_u + \varphi (g g'_u)'_u \frac{f - \varphi'_t g}{g'_u}. \tag{9.3.2.9}$$

Приравнивая теперь смешанные производные третьего порядка (9.3.2.5) и (9.3.2.9), после сокращения на φ и элементарных преобразований приходим к определяющему уравнению

$$\varphi'_t g[(g'_u)^2 - gg''_{uu}] = gg'_u f'_u - f(gg'_u)'_u, \tag{9.3.2.10}$$

которое имеет два различных решения.

Решение 1. Уравнение (9.3.2.10) удовлетворяется тождественно при любой функции $\varphi = \varphi(t)$, если положить

$$(g'_u)^2 - gg''_{uu} = 0,$$
$$gg'_u f'_u - f(gg'_u)'_u = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$f(u) = ae^{\lambda u}, \quad g(u) = be^{\lambda u/2}, \tag{9.3.2.11}$$

где a, b, λ — произвольные постоянные. Для простоты выкладок далее рассмотрим случай

$$a = b = 1, \quad \lambda = -2. \tag{9.3.2.12}$$

Подставим функцию $g(u)$ из (9.3.2.11) – (9.3.2.12) в дифференциальную связь (9.3.2.4). Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$u = \ln[\varphi(t)x + \psi(t)], \tag{9.3.2.13}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставляя (9.3.2.13) в исходное уравнение (9.3.2.3) с правой частью (9.3.2.11) – (9.3.2.12), приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\psi(t)$:

$$\psi\varphi'_t - \varphi\psi'_t = 1.$$

Общее решение этого уравнения записывается так:

$$\psi(t) = C\varphi(t) - \varphi(t)\int \frac{dt}{\varphi^2(t)}, \tag{9.3.2.14}$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, формулы (9.3.2.13) и (9.3.2.14), где $\varphi(t)$ — произвольная функция, дают точное решение нелинейного УрЧП с экспоненциальной нелинейностью $u_{xt} = e^{-2u}$.

Решение 2. Второе решение определяется линейной зависимостью

$$\varphi(t) = at + b, \tag{9.3.2.15}$$

где a и b — произвольные постоянные. В этом случае, функции $f(u)$ и $g(u)$ связаны уравнением (9.3.2.10), где $\varphi'_t = a$. Интегрируя (9.3.2.4) с учетом (9.3.2.15), находим общий вид решения

$$u = u(z), \quad z = (at + b)x + \psi(t), \tag{9.3.2.16}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставим эту зависимость в исходное уравнение (9.3.2.3), а затем заменим x на z с помощью (9.3.2.16). В результате получим

$$[az + (at + b)\psi'_t - a\psi]u''_{zz} + au'_z = f(u). \tag{9.3.2.17}$$

Чтобы это соотношение было обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $u = u(z)$, надо положить

$$(at + b)\psi'_t - a\psi = \text{const}.$$

Интегрируя, находим функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = ct + d, \tag{9.3.2.18}$$

где c и d — произвольные постоянные.

Формулы (9.3.2.16) и (9.3.2.18) определяют решение уравнения (9.3.2.3) при произвольной функции $f(u)$. При этом функция $u(z)$ описывается уравнением $(az + bc - ad)u''_{zz} + au'_z = f(u)$, которое следует из (9.3.2.17) и (9.3.2.18). Частному случаю $a = d = 0$ соответствует решение типа бегущей волны, а случаю $b = c = d = 0$ — автомодельное решение. ◀

Задачи и упражнения к разд. 9.3

1. Найти точные решения нелинейного реакционно-диффузионного уравнения

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u),$$

используя дифференциальную связь первого порядка $u_x = \xi(t)\varphi(u)$.

2. Найти точные решения нелинейного реакционно-диффузионного уравнения

$$u_t = [f(u)u_x]_x + g(u),$$

используя дифференциальную связь первого порядка $u_x = \eta(x)\varphi(u)$.

3. Исследовать на совместность нелинейное уравнение диффузионного типа

$$u_u = u_{xx} + f_1(u)u_x + f_0(u) \tag{9.3.2.19}$$

и дифференциальной связи первого порядка

$$u_t = g_1(u)u_x + g_0(u). \tag{9.3.2.20}$$

4. Найти точные решения нелинейного уравнения диффузионного типа (9.3.2.19) с помощью дифференциальной связи первого порядка (9.3.2.20).

9.4. Дифференциальные связи второго порядка для уравнений с частными производными

9.4.1. Дифференциальные связи второго порядка и эквивалентные более простые дифференциальные связи

Обсудим задачу о совместности эволюционного уравнения второго порядка

$$u_t = F_1(x, t, u, u_x, u_{xx}) \tag{9.4.1.1}$$

с дифференциальной связью аналогичного вида

$$u_t = F_2(x, t, u, u_x, u_{xx}). \tag{9.4.1.2}$$

Во-первых, эту задачу можно свести к более простой задаче с дифференциальной связью первого порядка, которая рассматривалась в разд. 9.3.1. Для этого сначала надо исключить из уравнений (9.4.1.1) и (9.4.1.2) вторую производную u_{xx}. В результате получим уравнение первого порядка типа (9.3.1.3) (его можно рассматривать как более простую, чем исходная, дифференциальную связь), которое далее исследуется на совместность с исходным уравнением (9.4.1.1).

Во-вторых, исключив производную по t из (9.4.1.1) и (9.4.1.2), приходим к уравнению вида

$$H(x, t, u, u_x, u_{xx}) = 0, \tag{9.4.1.3}$$

которое можно трактовать как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x со свободным параметром t. Постоянные интегрирования, возникающие при решении уравнения (9.4.1.3) будут произвольными функциями t, т. е. $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$.

Таким образом, эволюционная дифференциальная связь второго порядка общего вида (9.4.1.1) эквивалентна, с одной стороны, подходящей связи первого порядка типа (9.3.1.3), а с другой стороны — дифференциальной связи второго порядка в виде обыкновенного дифференциального уравнения (9.4.1.3). Такие эквивалентные связи технически использовать проще, чем исходную дифференциальную связь (9.4.1.2).

Замечание 9.7. *В левые части уравнения (9.4.1.1) и дифференциальной связи (9.4.1.2) вместо u_t может входить вторая производная u_{tt} (или u_{tx}). Тогда исключение u_{tt} (или u_{tx}) также приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка вида (9.4.1.3), использование которого более целесообразно, чем исходной дифференциальной связи.*

9.4.2. Иллюстративные примеры использования дифференциальных связей второго порядка

► Пример 9.10. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с источником

$$u_t = [f_1(u)u_x]_x + f_2(u). \tag{9.4.2.1}$$

Для поиска его точных решений будем использовать автономную дифференциальную связь второго порядка с квадратичной нелинейностью относительно второй производной:

$$u_{xx} = g_1(u)u_x^2 + g_2(u), \tag{9.4.2.2}$$

которое можно трактовать как ОДУ по переменной x. Функции $f_2(u)$, $f_1(u)$, $g_2(u)$, $g_1(u)$, входящие в (9.4.2.1) и (9.4.2.2), подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Исключив вторую производную из (9.4.2.1) и (9.4.2.2), приходим к УрЧП первого порядка

$$u_t = \varphi(u)u_x^2 + \psi(u), \tag{9.4.2.3}$$

где

$$\varphi(u) = f_1(u)g_1(u) + f_1'(u), \quad \psi(u) = f_1(u)g_2(u) + f_2(u). \tag{9.4.2.4}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по u.

Продифференцировав (9.4.2.2) по t, имеем

$$u_{xxt} = 2g_1u_xu_{xt} + g_1'u_x^2u_t + g_2'u_t.$$

Исключим производные u_{xxt}, u_{xt}, u_t из этого соотношения с помощью уравнений (9.4.2.2) и (9.4.2.3) и их следствий, которые выводятся с помощью дифференцирования. В результате получим

$$\begin{aligned}&(2\varphi g_1^2 + 3\varphi' g_1 + \varphi g_1' + \varphi'')u_x^4 + \\ &\quad + (4\varphi g_1g_2 + 5\varphi' g_2 + \varphi g_2' - g_1\psi' - \psi g_1' + \psi'')u_x^2 + 2\varphi g_2^2 + \psi' g_2 - \psi g_2' = 0.\end{aligned}$$

Приравнивание нулю функциональных множителей при различных степенях u_x дает три уравнения, которые удобно записать в виде

$$\begin{gathered}(\varphi' + \varphi g_1)' + 2g_1(\varphi' + \varphi g_1) = 0,\\ 4g_2(\varphi' + \varphi g_1) + (\varphi g_2 - \psi g_1)' + \psi'' = 0,\\ \varphi = -\tfrac{1}{2}(\psi/g_2)'.\end{gathered} \tag{9.4.2.5}$$

Первому уравнению можно удовлетворить, положив $\varphi' + \varphi g_1 = 0$. Соответствующее частное решение системы (9.4.2.5) записывается так:

$$\varphi = -\frac{1}{2}\mu', \quad \psi = \mu g_2, \quad g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'}, \quad g_2 = \left(2C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\right)\frac{1}{\mu'}, \tag{9.4.2.6}$$

где $\mu = \mu(u)$ — произвольная функция.

Учитывая (9.4.2.4), находим функциональные коэффициенты исходного уравнения (9.4.2.1) и дифференциальной связи (9.4.2.2):

$$\begin{gathered}f_1 = \left(C_3 - \frac{1}{2}u\right)\mu', \quad f_2 = (\mu - f_1)g_2,\\ g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'}, \quad g_2 = \left(2C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\right)\frac{1}{\mu'}.\end{gathered} \tag{9.4.2.7}$$

Уравнение (9.4.2.2) с учетом (9.4.2.7) допускает первый интеграл

$$u_x^2 = \left[4C_1\mu + 4C_2\sqrt{|\mu|} + 2\sigma_t'(t)\right]\frac{1}{(\mu')^2}, \tag{9.4.2.8}$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция. Исключим u_x^2 из равенства (9.4.2.3) с помощью (9.4.2.8) и подставим функции φ и ψ из (9.4.2.6). В результате приходим к уравнению

$$\mu' u_t = -C_2\sqrt{|\mu|} - \sigma_t'(t). \tag{9.4.2.9}$$

Остановимся подробнее на частном случае $C_2 = C_3 = 0$. Интегрируя уравнение (9.4.2.9) и учитывая, что $\mu_t = \mu' u_t$, имеем

$$\mu = -\sigma(t) + \theta(x), \tag{9.4.2.10}$$

где $\theta(x)$ — произвольная функция. Подставив (9.4.2.10) в (9.4.2.8) и используя соотношение $\mu_x = \mu' u_x$, получим $\theta_x^2 - 4C_1\theta = 2\sigma_t - 4C_1\sigma$. Приравнивая обе части этого уравнения нулю и интегрируя полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, находим функции в правой части выражения (9.4.2.10):

$$\sigma(t) = A\exp(2C_1 t), \quad \theta(x) = C_1(x+B)^2, \tag{9.4.2.11}$$

где A и B — произвольные постоянные. Таким образом, точное решение уравнения (9.4.2.1) с функциями f_1 и f_2 из (9.4.2.7) при $C_2 = C_3 = 0$ можно представить в неявном виде

$$\mu(u) = -A\exp(2C_1 t) + C_1(x+B)^2.$$

В решении и определяющих соотношениях (9.4.2.7) функция $\mu(u)$ задается произвольным образом. ◀

▶ Пример 9.11. Рассмотрим систему гидродинамического типа, состоящую из двух нелинейных УрЧП

$$\begin{aligned} &F_{tx} + FF_{xx} - F_x^2 = \nu F_{xxx} + q(t)F_x + p(t), \\ &G_t + FG_x - GF_x = \nu G_{xx}, \end{aligned} \tag{9.4.2.12}$$

первое из которых не зависит от G, а второе линейно по G. Функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$ в первом уравнении можно задавать произвольным образом. Отметим, что точные решения системы (9.4.2.12) порождают точные решения нестационарных трехмерных уравнений Навье—Стокса.

Дополним систему (9.4.2.12) дифференциальной связью второго порядка

$$G = a(t) + b(t)F_x + c(t)F_{xx}. \tag{9.4.2.13}$$

Из второго уравнения системы (9.4.2.12) исключим G с помощью (9.4.2.13) и сравним полученное уравнение с первым уравнением (9.4.2.12) (а также с уравнениями, которые возникают после дифференцирования первого уравнения (9.4.2.12) по x). В результате находим условия совместности системы (9.4.2.12) и дифференциальной связи (9.4.2.13):

$$\begin{aligned} a_t' + bp &= 0, \\ b_t' + bq - a &= 0, \\ c_t' + qc &= 0. \end{aligned} \tag{9.4.2.14}$$

Интегрируя последнее уравнение в (9.4.2.14), имеем $c = C_1\exp\left(-\int q\,dt\right)$, где C_1 — произвольная постоянная. Первые два уравнения (9.4.2.14) приводят к линейному ОДУ второго порядка для функции b:

$$b_{tt}'' + qb_t' + (p + q_t')b = 0. \tag{9.4.2.15}$$

Решив это уравнение, из второго уравнения в (9.4.2.14) без интегрирования можно определить функцию $a = a(t)$.

Полученный результат можно перефразировать следующим образом. Путь известно точное решение $F = F(t,x)$ первого уравнения (9.4.2.12). Тогда соответствующее точное решение второго уравнения (9.4.2.12) можно получить по формуле (9.4.2.13), где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9.4.2.14). ◄

Дополнительная литература к разд. 9.4

1. Kaptsov O.V. Determining equations and differential constraints. *Nonlinear Math. Phys.*, 1995, Vol. 2, pp. 283–291.

2. Kaptsov O.V. Linear determining equations for differential constraints. *Sbornik: Mathematics*, 1998, Vol. 189, pp. 1839–1854.

3. Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, Vol. 36, pp. 1401–1414.

4. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

5. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton — London, 2012.

6. Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020.

9.5. Связь между методом дифференциальных связей и другими методами

9.5.1. Предварительные замечания

Метод дифференциальных связей, который основан на теории совместности двух и более уравнений в частных производных, является одним из наиболее общих методов (если не самым общим методом) построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных. Многие другие методы можно трактовать как его частные случаи.

Наиболее трудная и неформальная проблема, возникающая при применении этого метода, состоит в следующем: как найти подходящую дифференциальную связь для заданного нелинейного уравнения в частных производных. Например, если дифференциальная связь обладает недостаточным функциональным произволом, то можно не найти ни одного решения; если же она имеет слишком общий вид, то анализ совместности рассматриваемых нелинейных уравнений в частных производных может оказаться слишком сложным, чтобы найти какие-либо точные решения. Успешное решение указанной проблемы лежит за пределами формального описания метода дифференциальных связей и в каждом конкретном случае обычно определяется опытом и интуицией исследователя.

Кроме того, при применении метода дифференциальных связей на нескольких этапах приходится решать различные дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений, которые содержат произвольные функции, что существенно осложняет анализ. Если не удается найти решение хотя бы на одном из этих этапов, то не удается и построить точное решение исходного уравнения. Поэтому метод дифференциальных связей обычно сложнее применять, чем другие методы, описанные в данной книге.

Указанные обстоятельства объясняют, почему для построения точных решений нелинейных УрЧП на практике часто предпочтительнее использовать более простые, хотя и менее общие методы.

Важно отметить, что менее общие методы часто дают возможность конструктивным путем получить важные соотношения, которые можно трактовать как дифференциальные связи (эти соотношения нельзя получить априорно, исходя непосредственно из метода дифференциальных связей). Идеи и алгоритмы, положенные в основу этих методов, нередко позволяют им быть более эффективными*, чем метод дифференциальных связей, при построении точных решений отдельных классов нелинейных уравнений в частных производных.

Таким образом представляется, что методы обобщенного и функционального разделения переменных, прямые методы построения редукций и слабых симметрий и метод дифференциальных связей в совокупности дополняют друг друга. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки и может быть эффективнее других на подходящих классах нелинейных УрЧП.

Далее мы обсудим связь метода дифференциальных связей с другими методами, которые описаны в предыдущих главах данной книги.

9.5.2. Связь методов обобщенного разделения переменных с методом дифференциальных связей

Методы обобщенного разделения переменных можно переформулировать в терминах метода дифференциальных связей (в том смысле, что любому решению с обобщенным разделением переменных можно поставить в соответствие эквивалентную дифференциальную связь).

Решения с обобщенным разделением переменных заданного вида путем исключения искомых функций с помощью дифференцирования сводятся к дифференциальным связям. В табл. 9.1 приведены примеры некоторых дифференциальных связей первого и второго порядка, которые эквивалентны наиболее распространенным решениям с разделяющимися переменными. Функции f и g можно выразить через исходные функции φ, ψ, χ. Видно, что каждому решению с простым и обобщенным разделением переменных можно поставить в соответствие несколько эквивалентных дифференциальных связей.

Верно и обратное: интегрируя приведенные в последнем столбце табл. 9.1

*Здесь имеется ввиду, что эти методы быстрее приводят к искомому результату, причем промежуточных выкладок меньше и они существенно проще.

Таблица 9.1. Дифференциальные связи первого и второго порядка, соответствующее некоторым классам решений с разделяющимися переменными.

№	Тип решения	Структура решения	Дифференциальные связи
1	Решение с аддитивным разделением переменных	$u=\varphi(x)+\psi(t)$	$u_x=f(x)$ $u_t=g(t)$ $u_{xt}=0$
2	Решение с мультипликативным разделением переменных	$u=\varphi(x)\psi(t)$	$u_x=f(x)u$ $u_t=g(t)u$ $uu_{xt}-u_xu_t=0$
3	Решение с обобщенным разделением переменных	$u=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$	$u_x=f(t)x+g(t)$ $xu_x-u=f(t)x^2+g(t)$ $xu_x-2u=f(t)x+g(t)$ $u_{xx}=f(t)$ $xu_{xx}-u_x=f(t)$
4	Решение с обобщенным разделением переменных	$u=\varphi(t)\psi(x)+\chi(t)$	$u_x=f(t)g(x)$ $u_t=f(t)u+g(t)$ $u_x=f(x)[u+g(t)]$ $u_{xx}-f(x)u_x=0$ $u_{xt}-g(t)u_x=0$

дифференциальные связи, можно получить общий вид решений с простым и обобщенным разделением переменных, которые приведены в предпоследнем столбце этой таблицы.

Для решений, указанных в табл. 9.1, на практике предпочтительнее использовать методы обобщенного разделения переменных, поскольку в этих методах требуется меньше этапов, на которых приходится решать промежуточные дифференциальные уравнения.

Замечание 9.8. *Дифференциальные соотношения, которые получаются в результате использования метода расщепления (см. разд. 6.5) при исследовании билинейных функционально-дифференциальных уравнений, возникающих после подстановки решений с обобщенным разделением переменных в рассматриваемые УрЧП, можно трактовать как дифференциальные связи. Таким образом метод расщепления позволяет конструктивно строить дифференциальные связи в процессе решения (важно подчеркнуть, что эти связи не известны заранее и не могут быть заданы из априорных соображений на начальном этапе анализа).*

9.5.3. Связь методов функционального разделения переменных с методом дифференциальных связей

Методы функционального разделения переменных также можно переформулировать в терминах метода дифференциальных связей (в том смысле, что любому решению с функциональным разделением переменных можно поставить в соответствие эквивалентную дифференциальную связь).

Решения с функциональным разделением переменных заданного вида пу-

Таблица 9.2. Дифференциальные связи первого и второго порядка, соответствующее двум классам решений с функциональным разделением переменных.

№	Тип решения	Структура решения	Дифференциальные связи
1	Решение с обобщенным разделением переменных (решение типа обобщенной бегущей волны)	$u=U(z),\ \ z=\varphi(t)x+\psi(t)$	$u_x=f(t)g(u)$ $u_t=[f(t)x+g(t)]u_x$ $u_{xx}-f(u)u_x^2=0$ $u_xu_{xt}-u_tu_{xx}=f(t)u_x^2$
2	Решение с обобщенным разделением переменных	$u=U(z),\ \ z=\varphi(x)+\psi(t)$	$u_x=f(x)g(u)$ $u_t=f(t)g(u)$ $u_t=f(x)g(t)u_x$ $uu_{xt}-f(u)u_xu_t=0$ $u_xu_{xt}-u_tu_{xx}=f(x)u_xu_t$ $u_xu_{tt}-u_tu_{xt}=g(t)u_xu_t$

тем исключения произвольных функций с помощью дифференцирования сводятся к дифференциальным связям. В табл. 9.2 указаны примеры некоторых дифференциальных связей первого и второго порядка, которые эквивалентны двум наиболее распространенным формам решений с функциональным разделением переменных. Функции f и g можно выразить через исходные функции U, φ, ψ. Видно, что каждому решению с обобщенным разделением переменных можно поставить в соответствие несколько эквивалентных дифференциальных связей.

Верно и обратное: интегрируя приведенные в последнем столбце табл. 9.2 дифференциальные связи, можно получить общий вид решений с функциональным разделением переменных, которые указаны в предпоследнем столбце этой таблицы.

9.5.4. Прямой метод построения редукций и дифференциальные связи

Рассмотрим редукцию, основанную поиске решений в виде

$$u(x,t)=F\big(x,t,w(z)\big),\quad z=z(x,t), \tag{9.5.4.1}$$

где функции $F(x,t,w)$ и $z(x,t)$ выбираются так, чтобы $w(z)$ удовлетворяла одному обыкновенному дифференциальному уравнению; см. разд. 8.1.4.

Покажем, что поиск решения в виде (9.5.4.1) эквивалентен поиску решения методом дифференциальных связей с использованием квазилинейной дифференциальной связи первого порядка

$$\xi(x,t)u_t+\eta(x,t)u_x=\zeta(x,t,u). \tag{9.5.4.2}$$

Действительно, первые интегралы характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{\xi(x,t)}=\frac{dx}{\eta(x,t)}=\frac{du}{\zeta(x,t,u)}$$

имеют вид

$$z(x,t) = C_1, \quad \varphi(x,t,u) = C_2, \tag{9.5.4.3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Поэтому общее решение уравнения (9.5.4.2) можно записать следующим образом (см. разд. 3.1.1):

$$\varphi(x,t,u) = w\bigl(z(x,t)\bigr), \tag{9.5.4.4}$$

где $w(z)$ — произвольная функция. Разрешив (9.5.4.4) относительно u, получим представление решения в виде (9.5.4.1).

Литература к главе 9

Мелешко С.В. Дифференциальные связи и однопараметрические группы преобразований Ли — Беклунда. Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 1, с. 42–46.

Полянин А.Д. Переопределенные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами и их приложения. Вестник НИЯУ «МИФИ», 2016, т. 5, № 2, с. 122–136.

Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020.

Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. М.: Физматлит, 2005.

Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. *Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике*. Новосибирск: Наука, 1984.

Яненко Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. *Труды IV Всесоюзного мат. съезда*, т. 2, с. 613–621. Л.: Наука, 1964.

Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl.*, 1994, Vol. 23, pp. 1595–621.

Olver P.J. Direct reduction and differential constraints. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1994, Vol. 444, pp. 509–523.

Polyanin A.D. Comparison of the effectiveness of different methods for constructing exact solutions to nonlinear PDEs. Generalizations and new solutions. *Mathematics*, 2019, Vol. 7, No. 5, 386.

Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 1, 90.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton — London, 2012.

Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton — London: CRC Press, 2018.

10. Использование простых решений для построения сложных решений

Предварительные замечания. В данной главе описан ряд простых методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые проводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующей основной идее: *простые точные решения рассматриваемых уравнений могут использоваться для поиска более сложных решений этих же уравнений*.

В частности, показано, как исходя из простых решений рассматриваемых уравнений, с помощью преобразований сдвига и масштабирования можно найти более сложные точные решения этих же уравнений. Описан метод поиска точных решений уравнений с несколькими пространственными переменными, исходя из решений родственных уравнений с одной пространственной переменной. Продемонстрировано, что в некоторых случаях можно получать достаточно сложные решения путем добавления слагаемых к более простым решениям. Обсуждаются ситуации, когда с помощью однотипных простых решений можно построить более сложное составное решение (нелинейная суперпозиция решений). Изложен метод построения сложных точных решений линейных уравнений путем введения комплексного параметра в более простые решения.

Эффективность описанных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения Навье—Стокса и др.

10.1. Построение сложных решений, исходя из простых решений, с помощью преобразований сдвига и масштабирования

10.1.1. Некоторые определения. Простейшие преобразования

Будем говорить, что уравнение с частными производными

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \qquad (10.1.1.1)$$

инвариантно относительно однопараметрического обратимого преобразования

$$x = X(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, c), \quad t = T(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, c), \quad u = U(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, c), \qquad (10.1.1.2)$$

если после подстановки выражений (10.1.1.2) в (10.1.1.1) получим точно такое же уравнение

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{u}_{\bar{t}\bar{t}}, \dots) = 0.$$

Важно отметить, что входящий в преобразование (10.1.1.2) свободный параметр c, который может принимать значения на некотором интервале (c_1, c_2), не входит в рассматриваемое уравнение (10.1.1.1).

Преобразования, сохраняющие вид уравнения (10.1.1.2), преобразуют решение рассматриваемого уравнения в решение этого же уравнения.

Далее будут рассматриваться только однопараметрические преобразования вида

$$x = \bar{x} + a_1, \quad t = \bar{t} + a_2, \quad u = \bar{u} + a_3 \quad (\textit{преобразование сдвига});$$
$$x = b_1\bar{x}, \quad t = b_2\bar{t}, \quad u = b_3\bar{u} \quad (\textit{преобразование масштабирования}),$$

и композиции этих преобразований. Здесь a_n и b_n $(n = 1,\ 2,\ 3)$ — постоянные величины, зависящие от свободного параметра c. Такие преобразования будем называть *простейшими преобразованиями*.

10.1.2. Построение сложных решений, исходя из простых решений с разделением переменных специального вида

Простые одночленные решения в виде произведения функций различных переменных проще всего находить методом разделения переменных (простейшие решения данного типа $u = Ax^\alpha t^\beta$ легко определяются из рассматриваемых уравнений методом неопределенных коэффициентов). Ниже описаны способы построения более сложных решений, исходя из таких решений.

Сначала будем рассматривать простые решения с разделением переменных специального вида

$$u = t^k \varphi_1(x), \tag{10.1.2.1}$$

где k — некоторая постоянная, а $\varphi_1(x)$ — некоторая функция. Такие решения не меняются (инвариантны) при преобразовании масштабирования

$$t = c\bar{t}, \qquad u = c^k \bar{u}. \tag{10.1.2.2}$$

Справедливо следующее утверждение, позволяющее строить более сложные решения, исходя из решений вида (10.1.2.1).

Утверждение 1. *Пусть уравнение*

$$F(t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \tag{10.1.2.3}$$

которое не зависит явно от пространственной переменной x, *имеет простое решение вида* (10.1.2.1) *и не меняется при преобразовании масштабирования* (10.1.2.2) *(т. е. уравнение* (10.1.2.3) *имеет такое же свойство, что и исходное* *решение* (10.1.2.1)*). Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида*

$$u = t^k \varphi_2(z), \qquad z = x + m \ln t, \tag{10.1.2.4}$$

где m — *произвольная постоянная.*

Замечание 10.1. *В общем случае вид функций* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(z)$*, входящих соответственно в исходное решение (10.1.2.1) и более сложное решение (10.1.2.4), может различаться.*

Рассмотрим теперь простые решения с разделением переменных другого вида

$$u = x^n \psi_1(t), \tag{10.1.2.5}$$

где n — некоторая постоянная, а $\psi_1(t)$ — некоторая функция. Такие решения не меняются (инвариантны) при преобразовании масштабирования

$$x = c\bar{x}, \qquad u = c^n \bar{u}. \tag{10.1.2.6}$$

Более сложное, чем (10.1.2.5), решение можно получить с помощью утверждения 1, переобозначив соответствующим образом постоянные и переменные величины в (10.1.2.1)–(10.1.2.4). Ниже описан другой эквивалентный способ построения более сложного решения, который иногда удобнее использовать на практике.

Утверждение 2. *Пусть уравнение*

$$F\,(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots\,) = 0, \tag{10.1.2.7}$$

которое не зависит явно от времени t*, имеет простое решение вида* (10.1.2.5) *и не меняется при преобразовании масштабирования* (10.1.2.6) *(т. е. уравнение* (10.1.2.7) *имеет такое же свойство, что и исходное решение* (10.1.2.5)*). Тогда это уравнение имеет также более сложное решение вида*

$$u = e^{-npt} \psi_2(y), \qquad y = xe^{pt}, \tag{10.1.2.8}$$

где p — *произвольная постоянная.*

► Пример 10.1. Рассмотрим уравнение Буссинеска

$$u_t = a(uu_x)_x, \tag{10.1.2.9}$$

которое описывает нестационарное течение грунтовых вод в пористой среде со свободной поверхностью.

Уравнение (10.1.2.9) имеет простое точное решение

$$u = -\frac{x^2}{6at}, \tag{10.1.2.10}$$

которое одновременно является решением двух видов (10.1.2.1) и (10.1.2.5). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений, исходя из решения (10.1.2.10).

1°. Решение (10.1.2.10) и уравнение (10.1.2.9) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $t = c\bar{t}$, $u = \bar{u}/c$. Поэтому в силу утверждения 1 уравнение (10.1.2.9) допускает более сложное точное решение

$$u = \frac{\varphi(z)}{t}, \quad z = x + k\ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет ОДУ второго порядка

$$k\varphi'_z - \varphi = a(\varphi\varphi'_z)'_z. \qquad (10.1.2.11)$$

Отметим, что уравнение (10.1.2.11) при $k = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде квадратичного многочлена

$$\varphi = -\frac{x^2}{6a} + Cx - \frac{3aC^2}{2},$$

где C — произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение совпадает с исходным решением (10.1.2.10).

2°. Решение (10.1.2.10) и уравнение (10.1.2.9) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $x = c\bar{x}$, $u = c^2\bar{u}$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (10.1.2.9) допускает другое точное решение

$$u = e^{-2pt}\psi(y), \quad y = xe^{pt},$$

где $p \neq 0$, а функция $\psi = \psi(y)$ описывается ОДУ

$$py\psi'_y - 2p\psi = a(\psi\psi'_y)'_y.$$

◄

► Пример 10.2. Рассмотрим теперь уравнение Гудерлея

$$u_{xx} = au_y u_{yy}, \qquad (10.1.2.12)$$

которое используется для описания трансзвуковых течений газа.

Уравнение (10.1.2.12) допускает простое точное решение

$$u = \frac{y^3}{3ax^2}, \qquad (10.1.2.13)$$

которое является частным случаем одновременно сразу двух видов решений (10.1.2.1) и (10.1.2.5). Рассмотрим по порядку обе возможности построения более сложных решений, исходя из решения (10.1.2.13).

1°. Решение (10.1.2.13) и уравнение (10.1.2.12) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $x = c\bar{x}$, $u = c^{-2}\bar{u}$. Поэтому, в силу утверждения 1, уравнение (10.1.2.12) имеет более сложное точное решение вида

$$u = x^{-2}\varphi(z), \quad z = y + m\ln x,$$

где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается ОДУ второго порядка

$$m^2\varphi''_{zz} - 5m\varphi'_z + 6\varphi = a\varphi'_z\varphi''_{zz}.$$

Это уравнение при $m = 0$ допускает однопараметрическое семейство решений в виде кубического многочлена

$$\varphi(z) = \frac{z^3}{3a} + Cz^2 + aC^2z + \frac{a^2C^3}{3},$$

где C — произвольная постоянная. При $C=0$ это решение совпадает с исходным решением (10.1.2.13).

2°. Решение (10.1.2.13) и уравнение (10.1.2.12) сохраняют вид также при преобразовании масштабирования $y=c\bar{y}$, $u=c^3\bar{u}$. Поэтому, в силу утверждения 2, можно получить также другое более сложное точное решение

$$u=e^{-3px}\psi(z), \qquad z=ye^{px},$$

где $p\neq 0$, а функция $\psi=\psi(z)$ описывается ОДУ

$$p^2z^2\psi''_{zz}-5p^2z\psi'_z+9p^2\psi=a\psi'_z\psi''_{zz}.$$ ◄

► **Пример 10.3.** В газовой динамике встречается волновое уравнение

$$u_{tt}=a(u^bu_x)_x, \qquad b\neq 0, \tag{10.1.2.14}$$

которое допускает простое точное решение

$$u=a^{-1/b}x^{2/b}t^{-2b}. \tag{10.1.2.15}$$

Это решение принадлежит обоим классам решений (10.1.2.1) и (10.1.2.5). Поэтому, исходя из решения (10.1.2.15), можно построить два более сложных решения, описанных ниже.

1°. Решение (10.1.2.15) и уравнение (10.1.2.14) инвариантны относительно преобразования масштабирования $t=c\bar{t}$, $u=c^{-2/b}\bar{u}$. В силу утверждения 1, уравнение (10.1.2.14) имеет более сложное решение вида

$$u=t^{-2/b}\varphi(z), \qquad z=x+m\ln t,$$

где функция $\varphi=\varphi(z)$ описывается ОДУ

$$m^2\varphi''_{zz}-\frac{m(b+4)}{b}\,\varphi'_z+\frac{2(b+2)}{b^2}\,\varphi=a(\varphi^b\varphi'_z)'_z.$$

2°. Решение (10.1.2.15) и уравнение (10.1.2.14) инвариантны также относительно преобразования масштабирования $x=c\bar{x}$, $u=c^{2/b}\bar{u}$. Поэтому, в силу утверждения 2, уравнение (10.1.2.14) допускает другое решение

$$u=e^{-2pt/b}\psi(y), \qquad y=xe^{pt},$$

где $p\neq 0$, а функция $\psi=\psi(y)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$p^2y^2\psi''_{yy}+\frac{p^2(b-4)}{b}\,y\psi'_y+\frac{4p^2}{b^2}\,\psi=a(\psi^b\psi'_y)'_y.$$ ◄

Ниже сформулировано еще одно утверждение, позволяющее строить точные решения нелинейных УрЧП.

Утверждение 3. *Пусть уравнение*

$$F(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\ldots)=0, \tag{10.1.2.16}$$

которое не зависит явно от переменных x и t (и поэтому допускает решение типа бегущей волны), не меняется при преобразовании масштабирования искомой функции

$$u=c\bar{u}.$$

Тогда это уравнение допускает точное решение (более сложное, чем решение типа бегущей волны), которое можно представить в следующих двух альтернативных формах:

$$u = Ce^{kt}\varphi(px+qt) \qquad \textit{(первая форма)},$$
$$u = Ce^{mx}\psi(px+qt) \qquad \textit{(вторая форма)}, \tag{10.1.2.17}$$

где C, k, p, q — произвольные постоянные ($pq \neq 0$), $m = kp/q$, $\psi(z) = e^{-mz/p}\varphi(z)$. Имеются также более простые решения с разделением переменных вида $u = Ce^{kt}\varphi(x)$ и $u = Ce^{mx}\psi(t)$.

► **Пример 10.4.** Рассмотрим нелинейное уравнение типа теплопроводности

$$u_t = au_{xx} + uf(u_x/u), \tag{10.1.2.18}$$

где $f = f(\xi)$ — произвольная функция.

Уравнение (10.1.2.18) не меняется при преобразовании масштабирования зависимой переменной $u = c\bar{u}$. Поэтому, в силу утверждения 3, это уравнение имеет решение вида (10.1.2.17) (первая форма), где функция $\varphi = \varphi(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ:

$$k\varphi + q\varphi'_z = ap^2\varphi''_{zz} + \varphi f(p\varphi'_z/\varphi).$$ ◄

10.1.3. Обобщение на случай произвольного числа пространственных переменных

Приведенные выше утверждения 1–3 допускают очевидные обобщения на случай произвольного числа пространственных переменных. Продемонстрируем сказанное на конкретном примере.

► **Пример 10.5.** Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с n пространственными переменными

$$u_t = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigl(u^k\frac{\partial u}{\partial x_i}\Bigr), \qquad k \neq 0. \tag{10.1.3.1}$$

Уравнение (10.1.3.1) допускает простое решение с разделением переменных

$$u = t^{-1/k}\varphi(x_1,\ldots,x_n), \tag{10.1.3.2}$$

где функция $\varphi = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\,\varphi = a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigl(\varphi^k\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Bigr).$$

Решение (10.1.3.2) и уравнение (10.1.3.1) не меняются при преобразовании масштабирования $t = c\bar{t}$, $u = c^{-1/k}\bar{u}$. Поэтому, в силу утверждения 1 (точнее его обобщения), уравнение (10.1.3.1) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/k}\theta(z_1,\ldots z_n), \qquad z_i = x_i + m_i\ln t,$$

где m_i — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z_1, \dots z_n)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$-\frac{1}{k}\,\theta + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial\theta}{\partial z_i} = a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\Bigl(\theta^k \frac{\partial\theta}{\partial z_i}\Bigr).$$

◀

10.1.4. Обобщение на системы уравнений математической физики

Приведенные в разд. 10.1.2 утверждения 1–3 могут быть также использованы для нахождения решений систем уравнений.

► **Пример 10.6.** Рассмотрим систему, состоящую из двух нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^b u_x)_x + u^{b+1} f(u/v),\\ v_t &= a(v^b v_x)_x + v^{b+1} g(u/v), \end{aligned} \tag{10.1.4.1}$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Система уравнений (10.1.4.1) имеет простое решение вида

$$u = t^{-1/b}\varphi(x), \qquad v = t^{-1/b}\psi(x), \tag{10.1.4.2}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ описываются системой ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi}{b} &= a(\varphi^b \varphi'_x)'_x + \varphi^{b+1} f(\varphi/\psi),\\ -\frac{\psi}{b} &= a(\psi^b \psi'_x)'_x + \psi^{b+1} g(\varphi/\psi). \end{aligned}$$

Решение (10.1.4.2) и система уравнений (10.1.4.1) сохраняют вид при преобразовании масштабирования $t = c\bar{t}$, $u = c^{-1/b}\bar{u}$, $v = c^{-1/b}\bar{v}$. В силу утверждения 1, система уравнений (10.1.4.1) имеет также более сложное решение вида

$$u = t^{-1/b}\Phi(z), \qquad v = t^{-1/b}\Psi(z), \qquad z = x + m\ln t,$$

где m — произвольная постоянная, а функции $\Phi = \Phi(z)$ и $\Psi = \Psi(z)$ удовлетворяют системе ОДУ:

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi}{b} + m\Phi'_z &= a(\Phi^b \Phi'_z)'_z + \Phi^{b+1} f(\Phi/\Psi),\\ -\frac{\Psi}{b} + m\Psi'_z &= a(\Psi^b \Psi'_z)'_z + \Psi^{b+1} g(\Phi/\Psi). \end{aligned}$$

◀

► **Пример 10.7.** Рассмотрим другую нелинейную систему УрЧП, состоящую из двух уравнений реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a(u^b u_x)_x + u f(u/v),\\ v_t &= a(v^b v_x)_x + v g(u/v), \end{aligned} \tag{10.1.4.3}$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

Система уравнений (10.1.4.3) имеет простое решение вида

$$u = x^{2/b}\varphi(t), \qquad v = x^{2/b}\psi(t), \tag{10.1.4.4}$$

где функции $\varphi=\varphi(t)$ и $\psi=\psi(t)$ описываются системой ОДУ первого порядка

$$\varphi'_t=\frac{2a(b+2)}{b^2}\varphi^{b+1}+\varphi f(\varphi/\psi),$$
$$\psi'_t=\frac{2a(b+2)}{b^2}\psi^{b+1}+\psi g(\varphi/\psi).$$

Решение (10.1.4.4) и система уравнений (10.1.4.3) не меняются при преобразовании масштабирования $x=c\bar{x}$, $u=c^{2/b}\bar{u}$, $v=c^{2/b}\bar{v}$. Поэтому, в силу утверждения 2 (точнее его обобщения), система уравнений (10.1.4.3) имеет также более сложное решение вида

$$u=e^{-2mt/b}\Phi(z),\qquad v=e^{-2mt/b}\Psi(z),\qquad z=xe^{mt},$$

где функции $\Phi=\Phi(z)$ и $\Psi=\Psi(z)$ описываются системой ОДУ:

$$mz\Phi'_z-\frac{2m}{b}\Phi=a(\Phi^b\Phi'_z)'_z+\Phi f(\Phi/\Psi),$$
$$mz\Psi'_z-\frac{2m}{b}\Psi=a(\Psi^b\Psi'_z)'_z+\Psi f(\Phi/\Psi),$$

где m — произвольная постоянная ($m\neq 0$). ◄

❖ *Задачи и упражнения к разд. 10.1*

1. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_t=a(u^bu_x)_x.$$

a) Найти простое точное решение этого уравнения вида

$$u=Ax^\alpha t^\beta.$$

b) Используя решение из п. a), построить два более сложных решения с помощью преобразований масштабирования и утверждений 1 и 2.

2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$u_t=au_xu_{xx}$$

a) Найти простое точное решение этого уравнения вида

$$u=Ax^\alpha t^\beta.$$

b) Используя решение из п. a), построить два более сложных решения с помощью преобразований масштабирования и утверждений 1 и 2.

3. Рассмотрим уравнение пограничного слоя на плоской пластине для функции тока

$$u_yu_{xy}-u_xu_{yy}=\nu u_{yyy}.$$

a) Показать, что это уравнение имеет простое решение вида

$$u=\frac{ax}{y}$$

и выразить искомый коэффициент a через ν.

b) Используя решение из п. a), построить два более сложных решения с помощью преобразований масштабирования и утверждений 1 и 2.

4. Нелинейное УрЧП с переменными коэффициентами, описывающее изменение толщины пленки тяжелой вязкой жидкости, движущейся вдоль горизонтальной супергидрофобной поверхности с переменным коэффициентом поверхностного натяжения, записывается так:

$$u_t = [(au^3 + bx^{2/3}u^2)(u_x - c(x^2 u_{xx})_x)]_x, \qquad (10.1.4.5)$$

где a, b и c — некоторые постоянные.

a) Показать, что это уравнение имеет простое решение степенного вида

$$u = x^{2/3} f(t)$$

и вывести ОДУ для определения функции $f = f(t)$.

b) Используя решение из п. a), построить более сложное решение с помощью преобразований масштабирования и утверждения 2.

5. Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух уравнений волнового типа (система УрЧП типа Клейна — Гордона):

$$u_{tt} = a(u^b u_x)_x + uf(u/v),$$
$$v_{tt} = a(v^b v_x)_x + vg(u/v),$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

a) Показать, что эта система имеет простое решение вида

$$u = x^k \varphi(t), \qquad v = x^k \psi(t).$$

Найти коэффициент k и систему ОДУ для функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$.

b) Используя решение из п. a), построить более сложное решение с помощью преобразований масштабирования и утверждения 2.

5. Рассмотрим нелинейную систему, состоящую из двух уравнений волнового типа (система УрЧП типа Клейна — Гордона):

$$u_{tt} = a(u^b u_x)_x + u^{b+1} f(u/v),$$
$$v_{tt} = a(v^b v_x)_x + v^{b+1} g(u/v),$$

где a, b — некоторые постоянные ($b \neq 0$), $f(z)$ и $g(z)$ — произвольные функции.

a) Показать, что эта система имеет простое решение вида

$$u = t^k \varphi(x), \qquad v = t^k \psi(x),$$

Найти коэффициент k и систему ОДУ для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(x)$.

b) Используя решение из п. a), построить более сложное решение с помощью преобразований масштабирования и утверждения 1.

10.2. Построение сложных точных решений путем обобщения простых решений

10.2.1. Построение сложных точных решений путем добавления слагаемых к более простым решениям

В некоторых случаях простые решения удается обобщить путем добавления к ним одного или нескольких дополнительных слагаемых, что приводит к более сложным решениям с обобщенным разделением переменных (см. главу 6). Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Буссинеска (10.1.2.9) и уравнения Гудерлея (10.1.2.12).

► Пример 10.8. Как указывалось ранее, уравнение Буссинеска (10.1.2.9) имеет квадратичное по пространственной переменной x решение с простым разделением переменных (10.1.2.10), которое запишем в виде

$$u = \varphi(t)x^2, \quad \varphi(t) = -1/(6at). \tag{10.2.1.1}$$

Попробуем искать более сложное решение уравнения (10.1.2.9) в виде суммы

$$u(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x^k, \quad k \neq 2, \tag{10.2.1.2}$$

первый член которой совпадает с решением (10.2.1.1). Во второе слагаемое формулы (10.2.1.2) входят функция $\psi(t)$ и коэффициент k, которые требуется найти.

Подставив (10.2.1.2) в (10.1.2.9), после элементарных преобразований получим

$$(\varphi'_t - 6a\varphi^2)x^2 + [\psi'_t - a(k+1)(k+2)\varphi\psi]x^k - ak(2k-1)\psi^2 x^{2k-2} = 0. \tag{10.2.1.3}$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при различных степенях x в (10.2.1.3) должны равняться нулю. Таким образом возможны два случая $k = 0$ и $k = 1/2$ (оба соответствуют обращению в нуль коэффициента при x^{2k-2}), которые надо рассмотреть отдельно.

1°. *Первый случай*. Подставив $k = 0$ в (10.2.1.3), для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ имеем систему уравнений

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \qquad \psi'_t - 2a\varphi\psi = 0,$$

общее решение которой определяется формулами

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t+C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}}, \tag{10.2.1.4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. *Второй случай* (решение Баренблатта — Зельдовича дипольного типа). Подставив $k = 1/2$ в (10.2.1.3), получим систему уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\varphi'_t - 6a\varphi^2 = 0, \qquad \psi'_t - \tfrac{15}{4}a\varphi\psi = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6a(t+C_1)}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}. \tag{10.2.1.5}$$

Учитывая формулы (10.2.1.2), (10.2.1.4), (10.2.1.5), в итоге получим два трехпараметрических решения с обобщенным разделением переменных уравнения (10.1.2.9):

$$u = -\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2 + \frac{C_2}{|t+C_1|^{1/3}},$$
$$u = -\frac{1}{6a(t+C_1)}(x+C_3)^2 + \frac{C_2}{|t+C_1|^{5/8}}(x+C_3)^{1/2},$$

где в целях бо́льшей общности дополнительно добавлен произвольный сдвиг по пространственной переменной x. ◀

Замечание 10.2. *Волновое уравнение с квадратичной нелинейностью*

$$u_{tt} = a(uu_x)_x,$$

также допускает решения вида (10.2.1.2) при $k = 0$ *и* $k = 1/2$.

► Пример 10.9. Вернемся теперь к уравнению Гудерлея (10.1.2.12). Это уравнение допускает простое точное решение (10.1.2.13), которое запишем в виде

$$u = f(x)y^3, \quad f(x) = 1/(3ax^2).$$

Будем искать более сложные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнения (10.1.2.12) в виде

$$u(x, y) = \varphi(x)y^k + \psi(x), \tag{10.2.1.6}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а также константа $k \neq 0$, являются искомыми (решение (10.1.2.13) является частным случаем решения (10.2.1.6) при $k = 3$ и $\psi = 0$). Важно отметить, что подобные двучленные решения УрЧП достаточно часто встречаются на практике и являются наиболее простыми решениями с обобщенным разделением переменных.

Подставив (10.2.1.6) в (10.1.2.12), после перестановки членов приходим к соотношению

$$\varphi''_{xx}y^k - ak^2(k-1)\varphi^2 y^{2k-3} + \psi''_{xx} = 0, \tag{10.2.1.7}$$

которое содержит степенные функции y^k и y^{2k-3} и должно удовлетворяться тождественно для любых y.

Рассмотрим два случая: $\psi''_{xx} = 0$ и $\psi''_{xx} \neq 0$.

1°. *Первый случай.* При $\psi''_{xx} = 0$ получим двучленное уравнение с разделяющимися переменными, которому можно удовлетворить, если положить

$$k = 3, \quad \varphi''_{xx} - 18a\varphi^2 = 0. \tag{10.2.1.8}$$

Общее решение автономного ОДУ (10.2.1.8) можно представить в неявной форме

$$x = \pm\int (12a\varphi^3 + C_1)^{-1/2} d\varphi + C_2.$$

Кроме того, это уравнение допускает частное решение степенного вида $\varphi = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}$, что приводит к трехпараметрическому точному решению уравнения (10.1.2.12):

$$u = \frac{1}{3a}(x + C_1)^{-2}y^3 + C_2x + C_3, \tag{10.2.1.9}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. *Второй случай.* Чтобы сбалансировать функцию $\psi''_{xx} \neq 0$ со вторым членом в равенстве (10.2.1.7), надо положить $k = 3/2$. В результате получим двучленное уравнение, которому можно удовлетворить, если положить

$$\varphi''_{xx} = 0, \quad \psi''_{xx} = \tfrac{9}{8}a\varphi^2.$$

Эти уравнения легко интегрируются и приводят к четырехпараметрическому точному решению уравнения (10.1.2.12):

$$u = (C_1 x + C_2) y^{3/2} + \frac{3a}{32C_1^2}(C_1 x + C_2)^4 + C_3 x + C_4, \tag{10.2.1.10}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. ◄

► **Пример 10.10.** Рассмотрим уравнение гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} = \nu u_{yyy}, \tag{10.2.1.11}$$

где u — функция тока, ν — кинематический коэффициент вязкости. Нетрудно проверить, что это уравнение допускает автомодельное решение

$$u = F(\xi), \quad \xi = y/x, \tag{10.2.1.12}$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ третьего порядка $-(F_z')^2 = \nu F_{zzz}'''$.

Ищем более общее решение уравнение (10.2.1.11), добавив к (10.2.1.12) функцию $\varphi(x)$:

$$u = F(\xi) + \varphi(x), \quad \xi = y/x.$$

Несложные выкладки показывают, что $\varphi(x) = a \ln x$, где a — произвольная постоянная. В итоге получим более сложное (неавтомодельное) решение уравнения пограничного слоя (10.2.1.11) вида

$$u = F(\xi) + a \ln x, \quad \xi = y/x,$$

где функция $F = F(\xi)$ описывается ОДУ $-(F_z')^2 - aF_{zz}'' = \nu F_{zzz}'''$. ◄

10.2.2. Построение составных решений (нелинейная суперпозиция решений)

В некоторых случаях два однотипных, но различных решения рассматриваемого нелинейного уравнения удается объединить и получить более общее составное решение. Продемонстрируем возможный ход рассуждений в таких случаях на примерах уравнения Гудерлея и нелинейного уравнения диффузии с объемной химической реакцией второго порядка.

► **Пример 10.11.** Из выражений (10.2.1.9) и (10.2.1.10) следует, что уравнение Гудерлея (10.1.2.12) имеет два однотипных решения $u_1 = \varphi y^{3/2} + \psi$ и $u_2 = \varphi y^3 + \psi$, отличающихся друг от друга показателем степени y. Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (10.1.2.12), включающее сразу оба члена с различными показателями степени. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x, y) = \varphi_1(x) y^3 + \varphi_2(x) y^{3/2} + \psi(x). \tag{10.2.2.1}$$

Подставим его в уравнение (10.1.2.12). После объединения членов при степенных функциях $y^{3n/2}$ ($n = 0,\ 1,\ 2$), получим

$$(\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2) y^3 + (\varphi_2'' - \tfrac{45}{4} a\varphi_1\varphi_2) y^{3/2} + \psi'' - \tfrac{9}{8} a\varphi_2^2 = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось для любых y надо приравнять нулю коэффициенты при $y^{3n/2}$. В результате приходим к системе ОДУ:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1'' - 18a\varphi_1^2 = 0,\\
&\varphi_2'' - \tfrac{45}{4}a\varphi_1\varphi_2 = 0,\\
&\psi'' - \tfrac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0.
\end{aligned} \tag{10.2.2.2}$$

Таким образом конструктивно доказано, что уравнение (10.1.2.12) имеет решение вида (10.2.2.1). ◄

Можно показать, что система (10.2.2.2) допускает точное решение

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \frac{1}{3a}(x+C_1)^{-2},\\
&\varphi_2 = C_2(x+C_1)^{5/2} + C_3(x+C_1)^{-3/2},\\
&\psi = \frac{3a}{112}C_2^2(x+C_1)^7 + \frac{3}{8}aC_2C_3(x+C_1)^3 + \frac{9}{16}aC_3^2(x+C_1)^{-1} + C_4x + C_5.
\end{aligned}$$

► **Пример 10.12.** Рассмотрим теперь нелинейное уравнение диффузии с объемной химической реакцией второго порядка

$$u_t = a(uu_x) - bu^2. \tag{10.2.2.3}$$

Процедуру построения составного решения этого уравнения проведем в два этапа: сначала найдем два достаточно простых решений, а затем, используя эти решения, построим уже составное решение.

1°. *Решение экспоненциального вида по x.* Точные решения с обобщенным разделением переменных уравнения (10.2.2.3) ищем в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \tag{10.2.2.4}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ и постоянная λ подлежат определению в ходе дальнейшего исследования. Подставив (10.2.2.4) в (10.2.2.3) и собрав подобные члены при экспонентах $e^{n\lambda x}$ ($n = 0,\ 1,\ 2$), получим

$$(b-2a\lambda^2)\varphi^2e^{2\lambda x} + [\varphi_t' + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi]e^{\lambda x} + \psi_t' + b\psi^2 = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно для любых x, функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ ($n=0,\ 1,\ 2$) надо приравнять к нулю. В результате приходим к простой дифференциально-алгебраической системе

$$\begin{aligned}
&b - 2a\lambda^2 = 0,\\
&\varphi_t' + (2b - a\lambda^2)\varphi\psi = 0,\\
&\psi_t' + b\psi^2 = 0,
\end{aligned}$$

которая допускает два решения

$$\lambda = \pm\Big(\frac{b}{2a}\Big)^{1/2}, \quad \varphi = \frac{C_1}{|t+C_2|^{3/2}}, \quad \psi = \frac{1}{b(t+C_2)}, \tag{10.2.2.5}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2°. *Составное решение экспоненциального вида по переменной x.* Из соотношений (10.2.2.4) и (10.2.2.5) следует, что уравнение (10.2.2.3) имеет два решения $u_1 = \varphi e^{-\lambda x} + \psi$ и $u_2 = \varphi e^{\lambda x} + \psi$. По структуре они отличаются друг от друга только знаком показателя экспоненты λ.

Это обстоятельство наводит на мысль попытаться построить более общее решение уравнения (10.2.2.3), включающее сразу оба экспоненциальных члена. Другими словами, ищем составное решение вида

$$u(x,t) = \varphi_1(t)e^{-\lambda x} + \varphi_2(t)e^{\lambda x} + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}. \tag{10.2.2.6}$$

Подставив его в (10.2.2.3), после элементарных преобразований имеем

$$[(\varphi_1)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_1\psi]e^{-\lambda x} + [(\varphi_2)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_2\psi]e^{\lambda x} + \psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0.$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при $e^{n\lambda x}$ ($n = 0, \pm 1$), приходим к системе ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} &(\varphi_1)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_1\psi = 0,\\ &(\varphi_2)'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi_2\psi = 0,\\ &\psi'_t + b(2\varphi_1\varphi_2 + \psi^2) = 0. \end{aligned} \tag{10.2.2.7}$$

Таким образом доказано, что уравнение диффузии с квадратичной нелинейностью (10.2.2.3) допускает решение вида (10.2.2.6).

Исключив ψ из первых двух уравнений в (10.2.2.7), получим равенство $(\varphi_1)'_t/\varphi_1 = (\varphi_2)'_t/\varphi_2$. Отсюда следует, что $\varphi_1 = A\varphi(t)$, $\varphi_2 = B\varphi(t)$, где A и B — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$ — любая (на данном этапе) функция. В результате решение с обобщенным разделением переменных (10.2.2.6) приводится к виду

$$u(x,t) = \varphi(t)(Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}) + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \tag{10.2.2.8}$$

где функции $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ, состоящей из двух уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'_t + \tfrac{3}{2}b\varphi\psi = 0,\\ &\psi'_t + b(2AB\varphi^2 + \psi^2) = 0. \end{aligned} \tag{10.2.2.9}$$

Эта автономная система путем исключения t сводится к одному ОДУ, которое является однородным и поэтому может быть проинтегрировано. Отметим, что система уравнений (10.2.2.9) при $AB > 0$ допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{1}{3b\sqrt{AB}\,(t+C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t+C)},$$

которые определяют решение (10.2.2.8) в виде произведения функций разных аргументов.

3°. *Решение тригонометрического вида по* x. При записи формул (10.2.2.6) и (10.2.2.8) неявно подразумевалось, что $ab > 0$. При $ab < 0$ имеем

$$\lambda = i\beta, \quad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad i^2 = -1.$$

В этом случае в решении (10.2.2.8) вместо экспоненциальных функций появляются тригонометрические функции, т. е. его можно представить в виде

$$u(x,t) = \varphi(t)[A_1\cos(\beta x) + B_1\sin(\beta x)] + \psi(t), \quad \beta = \left(-\frac{b}{2a}\right)^{1/2}, \quad (10.2.2.10)$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные. Подставив (10.2.2.10) в исходное уравнение (10.2.2.3) и проведя выкладки аналогичные сделанным в п. 2°, получим следующую нелинейную систему ОДУ для определения функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\begin{aligned} &\varphi_t' + \tfrac{3}{2}b\varphi\psi = 0,\\ &\psi_t' + b[\tfrac{1}{2}(A_1^2 + B_1^2)\varphi^2 + \psi^2] = 0. \end{aligned} \qquad (10.2.2.11)$$

Эта система допускает два простых решения

$$\varphi = \pm\frac{2}{3b\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,(t + C)}, \quad \psi = \frac{2}{3b(t + C)},$$

которые определяют решение (10.2.2.10) в виде произведения функций разных аргументов. ◄

10.3. Использование комплексных параметров для построения точных решений УрЧП

10.3.1. Линейные уравнения с частными производными

В случае линейных уравнений с частными производными для построения более сложных решений, исходя из более простых решений, можно использовать следующее утверждение.

Утверждение 4. Пусть линейное однородное уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными x и t имеет однопараметрическое решение вида $u = \varphi(x,t,c)$, где c — произвольный параметр, который не входит в исходное уравнение. Тогда рассматриваемое уравнение имеет также два двухпараметрических решения

$$u_1 = \operatorname{Re}\varphi(x,t,a+ib), \qquad u_2 = \operatorname{Im}\varphi(x,t,a+ib),$$

где a и b — произвольные действительные постоянные, $\operatorname{Re}z$ и $\operatorname{Im}z$ — действительная и мнимая части комплексного числа z, $i^2 = -1$.

Из утверждения 4 следует справедливость двух следствий, сформулированных ниже.

Следствие 4.1. Пусть левая часть линейного однородного уравнение с частными производными не зависит явно от независимой переменной t (поэтому это уравнение инвариантно относительно сдвига по времени t) и имеет решение $u = \varphi(x,t)$. Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений

$$u_1 = \operatorname{Re}\varphi(x,t+ia), \qquad u_2 = \operatorname{Im}\varphi(x,t+ia),$$

где a — произвольная действительная постоянная.

Следствие 4.2. Пусть левая часть линейного однородного уравнение с частными производными не зависит явно от независимой переменной x (поэтому это уравнение инвариантно относительно сдвига по пространственной переменной x) и имеет решение $u = \varphi(x, t)$. Тогда это уравнение имеет также два однопараметрических семейства решений

$$u_1 = \operatorname{Re} \varphi(x + ia, t), \qquad u_2 = \operatorname{Im} \varphi(x + ia, t),$$

где a — произвольная действительная постоянная.

Замечание 10.3. *Доказательство утверждения 4 и двух его следствий приведено в статьях Полянина & Аксенова (2020) и Aksenov & Polyanin (2021).*

► **Пример 10.13.** Рассмотрим линейное уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{10.3.1.1}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение допускает простое точное решение экспоненциального вида

$$u = \exp(c^2 t + cx),$$

где c — произвольный параметр.

Используя утверждение 4, получим два более сложных двухпараметрических семейства точных решений уравнения (10.3.1.1):

$$u_1 = \operatorname{Re}\, \exp(c^2 t + cx)|_{c=a+ib} = \exp[(a^2 - b^2)t + ax] \cos[b(2at + x)],$$
$$u_2 = \operatorname{Im}\, \exp(c^2 t + cx)|_{c=a+ib} = \exp[(a^2 - b^2)t + ax] \sin[b(2at + x)]. \quad ◄$$

► **Пример 10.14.** Рассмотрим более сложное линейное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x, \tag{10.3.1.2}$$

которое описывает двумерные процессы с осевой симметрией, где x — радиальная координата. Нетрудно проверить, что уравнение (10.3.1.2) допускает преобразование сдвига по переменной t и имеет частное решение

$$u = \frac{1}{t} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{4t}\Bigr). \tag{10.3.1.3}$$

Делая в решении (10.3.1.3) сдвиг с мнимым параметром по переменной t и используя следствие 4.1, находим два более сложных однопараметрических семейства решений:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \operatorname{Re} \frac{1}{t + ia} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t + ia)}\right) = \\
&= \frac{1}{t^2 + a^2} \exp\left(-\frac{x^2 t}{4(t^2 + a^2)}\right)\left(t \cos \frac{ax^2}{4(t^2 + a^2)} + a \sin \frac{ax^2}{4(t^2 + a^2)}\right), \\
u_2 &= \operatorname{Im} \frac{1}{t + ia} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t + ia)}\right) = \\
&= \frac{1}{t^2 + a^2} \exp\left(-\frac{x^2 t}{4(t^2 + a^2)}\right)\left(a \cos \frac{ax^2}{4(t^2 + a^2)} - t \sin \frac{ax^2}{4(t^2 + a^2)}\right).
\end{aligned} \quad ◄$$

10.3.2. Нелинейные уравнения с частными производными

В некоторых случаях из одного решения нелинейного уравнения можно получить другое решение, перейдя от действительных параметров к комплексным таким образом, чтобы преобразованные уравнение и решение оставались действительными. Поясним сказанное на конкретных примерах.

► Пример 10.15. Вернемся снова к уравнению (10.2.2.3). Легко проверить, что решение с тригонометрическими функциями (10.2.2.10) и нелинейная система ОДУ (10.2.2.11) могут быть получены из экспоненциального решения (см. решение (10.2.2.8)):

$$u(x,t) = \varphi(t)(Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}) + \psi(t), \quad \lambda = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/2},$$

и системы нелинейных ОДУ (10.2.2.9), если в них формально положить

$$\begin{aligned} &e^{\lambda x} = e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x),\\ &e^{-\lambda x} = e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x),\\ &A = \tfrac{1}{2}(A_1 + iB_1), \quad B = \tfrac{1}{2}(A_1 - iB),\\ &A_1 = A + B, \quad B_1 = i(B - A), \end{aligned} \tag{10.3.2.1}$$

где использовано обозначение $\beta = [-b/(2a)]^{1/2}$. ◄

► Пример 10.16. Рассмотрим нелинейное уравнение параболического типа

$$u_t = au_{xx} + uf(u_x^2 - bu^2), \tag{10.3.2.2}$$

где $f(z)$ — произвольная функция.

Легко проверить, что уравнение (10.3.2.2) имеет простое точное решение с мультипликативным разделением переменных, экспоненциальное по переменной x:

$$u = \psi(t)e^{\lambda x}, \tag{10.3.2.3}$$

где параметр λ и функция $\psi(t)$ определяются в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (10.3.2.3) в уравнение (10.3.2.2), получаем два решения вида (10.3.2.3), где

$$\lambda = \pm\sqrt{b}, \qquad \psi'_t = [ab + f(0)]\psi.$$

Наличие двух однотипных решений, соответствующих $\pm\lambda$, наводят на мысль попробовать взять их линейную комбинацию и искать более общее составное решение вида

$$u = \psi(t)(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}), \tag{10.3.2.4}$$

где A и B — некоторые постоянные. Прямая проверка показывает, что функция (10.3.2.4) при произвольных A и B действительно является решением уравнения (10.3.2.2), причем функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$\psi'_t = ab\psi + \psi f(-4ABb\psi^2). \tag{10.3.2.5}$$

Подставляя (10.3.2.1) в (10.3.2.4) и (10.3.2.5), получаем новое решение, содержащее тригонометрические функции аргумента x:

$$u = \varphi(t)[A_1 \cos(\beta x) + B_1 \sin(\beta x)], \qquad \beta = \sqrt{-b},$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ первого порядка

$$\psi'_t = ab\psi + \psi f\bigl(-(A_1^2 + B_1^2)b\psi^2\bigr).$$

◀

Утверждение 5. Пусть нелинейное УрЧП имеет точное решение, содержащее тригонометрические функции, вида

$$u = F(x, t, A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x), \beta^2), \tag{10.3.2.6}$$

где A, B, β — свободные действительные параметры, которые не входят в рассматриваемое уравнение. Тогда это уравнение имеет также точное решение, содержащее гиперболические функции:

$$u = F(x, t, \bar{A}\,\mathrm{ch}(\lambda x) + \bar{B}\,\mathrm{sh}(\lambda x), -\lambda^2), \tag{10.3.2.7}$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, λ — свободные действительные параметры. Верно и обратное: если уравнение имеет решение вида (10.3.2.7), то оно имеет также точное решение вида (10.3.2.6).

Решение (10.3.2.7) получается из (10.3.2.6) путем переобозначения параметров $\beta = i\lambda$, $A = \bar{A}$, $B = -i\bar{B}$, $i^2 = -1$.

▶ **Пример 10.17.** Рассмотрим нелинейное уравнение четвертого порядка

$$u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \tag{10.3.2.8}$$

к которому сводятся двумерные стационарные уравнения Навье — Стокса в плоском случае.

Уравнение (10.3.2.8) имеет точное решение

$$u(x, y) = [\bar{A}\,\mathrm{sh}(\lambda x) + \bar{B}\,\mathrm{ch}(\lambda x)]e^{-\gamma y} + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 + \lambda^2)x.$$

Поэтому в силу утверждения 5 это уравнение имеет также точное решение

$$u(x, y) = [A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]e^{-\gamma y} + \frac{\nu}{\gamma}(\gamma^2 - \beta^2)x.$$

◀

Задачи и упражнения к разд. 10.3

1. Линейное уравнение теплопроводности (10.3.1.1) имеет частное решение

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4t}\Bigr).$$

Используя это решение, получить более сложные решения этого уравнения с помощью сдвига с мнимым параметром по переменной t (использовать следствие 4.1).

2. Рассмотрим линейное волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

a) Проверить, что это уравнение допускает преобразования сдвига по обоим независимым переменным и имеет частное решение

$$u = \frac{x}{x^2 - t^2}.$$

b) Используя точное решение из п. a), получить более сложные решения этого уравнения с помощью сдвигов с мнимым параметром по переменным t и x (использовать следствия 4.1 и 4.2).

3. Рассмотрим линейное УрЧП с запаздыванием волнового типа

$$u_{tt} = w_{xx}, \quad w = u(x, t - \tau).$$

a) Проверить, что это уравнение имеет частное решение экспоненциального типа

$$\tilde{u}(x,t) = \exp\bigl(\mu e^{\mu\tau/2}x + \mu t\bigr),$$

где μ — произвольная постоянная.

b) Полагая в решении из a) $\mu = i\alpha$, а затем выделяя действительную и мнимую части, получить два более сложных решения рассматриваемого уравнения.

4. Рассмотрим линейное волновое уравнение с переменными коэффициентами

$$u_{tt} - (xu_x)_x = 0,$$

которое используется для описания распространения локализованных возмущений в одномерной мелкой воде над наклонным дном.

a) Проверить, что это уравнение допускает преобразование сдвига по времени t и имеет частное решение

$$u = \frac{Ct}{(4x - t^2)^{3/2}},$$

где C — произвольная постоянная.

b) Используя точное решение из п. a), получить более сложные решения этого уравнения с помощью сдвига с мнимым параметром по переменной t (использовать следствие 4.1).

Литература к главе 10

Полянин А.Д., Аксенов А.В. Использование простых решений нелинейных уравнений математической физики для построения более сложных решений. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, т. 9, № 5, с. 420–437.

Аксенов А.В., Полянин А.Д. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений. *Теор. & мат. физика*, т. 211, № 2, с. 149–180.

Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: ИПМех РАН, 2020.

Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 4, 345.

11. Использование решений одних уравнений для построения решений других уравнений

Предварительные замечания. В данной главе описан ряд простых, но достаточно эффективных, методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными и функционально-дифференциальных УрЧП (включая УрЧП с запаздыванием), которые обычно проводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующей основной идее: *точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений или других классов уравнений, имеющих аналогичные нелинейные члены*.

В частности, показано, как исходя из точных решений более простых УрЧП можно найти точные решения более сложных УрЧП. Рассмотрен метод поиска точных решений уравнений с несколькими пространственными переменными, исходя из решений аналогичных уравнений с одной пространственной переменной. Продемонстрировано, что в некоторых случаях можно получать точные решения нелинейных УрЧП с запаздыванием, исходя из решений соответствующих более простых УрЧП без запаздывания. Излагается принцип аналогии решений, позволяющий строить точные решения функционально-дифференциальных УрЧП с пропорциональными аргументами, исходя из более простых УрЧП с обычными аргументами.

Эффективность описанных методов иллюстрируется на конкретных примерах. Рассматриваются нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа (без запаздывания, с запаздыванием, с пропорциональными аргументами) и нелинейные уравнения волнового типа.

11.1. Построение решений сложных УрЧП с помощью решений более простых УрЧП

11.1.1. Одномерные нелинейные уравнения с частными производными

Нередко для построения точных решений сложных нелинейных УрЧП удается использовать решения более простых уравнений. Проиллюстрируем ход рассуждений в подобных случаях на конкретных примерах.

Следующий пример показывают, как точные решения нелинейных реакционно-диффузионного уравнений в некоторых случаях могут быть использованы для получения точных решений уравнений волнового типа.

► Пример 11.1. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_t = a(uu_x)_x + bu, \tag{11.1.1.1}$$

которое допускает несколько простых точных решений, приведенных ниже.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t), \tag{11.1.1.2}$$

где $\psi_1(t) = -be^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-1}$, $\psi_2(t) = C_2e^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-1/3}$; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)\sqrt{x}, \tag{11.1.1.3}$$

где $\psi_1(t) = -be^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-1}$, $\psi_2(t) = C_2e^{bt}(6ae^{bt} + C_1)^{-5/8}$; C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение волнового типа с квадратичной нелинейностью

$$u_{tt} = a(uu_x)_x + bu. \tag{11.1.1.4}$$

Уравнения (11.1.1.1) и (11.1.1.4) отличаются только порядком производной по переменной t в левой части уравнений. Поскольку правые части этих уравнений, включающие производные по переменной x и нелинейности одинаковы, можно предположить, что степенная структура решений по x обоих уравнений также будет одинаковой, а изменятся только зависящие от t функциональные множители при различных степенях x.

Другими словами, ищем точные решения УрЧП волнового типа (11.1.1.4) в той же форме, что и решения реакционно-диффузионного УрЧП (11.1.1.1). В результате получим два точных решения уравнения (11.1.1.4), которые описаны ниже.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных вида (11.1.1.2), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 6a\psi_1^2 + b\psi_1, \\ \psi_2'' &= 2a\psi_1\psi_2 + b\psi_2. \end{aligned}$$

2°. Решение с обобщенным разделением переменных вида (11.1.1.3), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 6a\psi_1^2 + b\psi_1, \\ \psi_2'' &= \tfrac{15}{4}a\psi_1\psi_2 + b\psi_2. \end{aligned}$$

◄

Рассмотренный пример является хорошей иллюстрацией довольно общего факта, который является следствием результатов, изложенных в разд. 6.6.2, и может быть сформулирован в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть нелинейное уравнение с частными производными

$$u_t = F[u],$$

где $F[u] \equiv F(u, u_x, \ldots, u_x^{(n)})$, имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \sum_{k=1}^{m} \psi_k(t)\varphi_k(x). \tag{11.1.1.5}$$

Тогда более сложное уравнение с частными производными

$$L_1[u] = L_2[w], \qquad w = F[u],$$

где L_1, L_2 являются линейными дифференциальными операторами по переменной t вида

$$L_1[u] = \sum_{i=0}^{k} a_i(t)u_t^{(i)}, \qquad L_2[w] = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)w_t^{(j)},$$

также имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (11.1.1.5) с теми же функциями $\varphi_k(x)$ (но с другими функциями $\psi_k(t)$).

11.1.2. Использование одномерных уравнений для построения решений многомерных уравнений

В некоторых случаях решения нелинейных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной x можно использовать для построения решений родственных уравнений с несколькими пространственными переменными $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Как это можно делать на практике поясним на конкретных примерах.

► Пример 11.2. Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с одной пространственной переменной

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \frac{a}{f(u)} + b, \tag{11.1.2.1}$$

где $f(u)$ — произвольная функция, a и b — произвольные постоянные. Можно показать, что уравнение (11.1.2.1) допускает точное решение в неявной форме

$$\int f(u)\,du = at + \theta(x), \tag{11.1.2.2}$$

где $\theta(x) = -\frac{1}{2}bx^2 + C_1x + C_2$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пространственное обобщение уравнения (11.1.2.1) записывается так:

$$u_t = \operatorname{div}[f(u)\nabla u] + \frac{a}{f(u)} + b.$$

Точное решение этого уравнения ищем в неявном виде, заменив в (11.1.2.2) x на $\mathbf{x}$:

$$\int f(u)\,du = at + \theta(\mathbf{x}).$$

Отсюда имеем $f(u)u_t = a$ и $f(u)\nabla u = \nabla\theta$. В результате для функции $\theta = \theta(\mathbf{x})$ получим уравнение Пуассона $\Delta\theta + b = 0$. ◀

► Пример 11.3. Нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с одной пространственной переменной и постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + uf(\bar{u}/u), \quad \bar{u} = u(x, t-\tau), \quad \tau > 0, \tag{11.1.2.3}$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u = \varphi(x)\psi(t), \tag{11.1.2.4}$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются ОДУ и ОДУ с постоянным запаздыванием

$$\varphi''_{xx} = C\varphi, \tag{11.1.2.5}$$

$$\psi'_t = aC\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(t-\tau), \tag{11.1.2.6}$$

C — произвольная постоянная. Уравнение (11.1.2.5) является линейным ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и легко интегрируется, а ОДУ с запаздыванием первого порядка (11.1.2.6) имеет точное решение экспоненциального вида $\psi = Ae^{\lambda t}$, где A — произвольная постоянная, а λ — корень трансцендентного уравнения $\lambda = aC + f(e^{-\lambda\tau})$.

Рассмотрим теперь реакционно-диффузионное уравнение с запаздыванием

$$u_t = a\Delta u + uf(\bar{u}/u), \quad \bar{u} = u(\mathbf{x}, t-\tau), \tag{11.1.2.7}$$

которое является пространственным обобщением уравнения (11.1.2.3). Точное решение уравнения (11.1.2.7) можно получить, заменив в (11.1.2.4) x на $\mathbf{x}$:

$$u = \varphi(\mathbf{x})\psi(t). \tag{11.1.2.8}$$

Подставим (11.1.2.8) в (11.1.2.7). После разделения переменных для функции $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ получим уравнение Гельмгольца $\Delta\varphi = C\varphi$, а для функции $\psi = \psi(t)$ — ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием (11.1.2.6). ◀

Задачи и упражнения к разд. 11.1

1. Уравнение теплопроводности с экспоненциальной нелинейностью

$$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x$$

имеет точное решение с аддитивным разделением переменных вида $u = \varphi(x) + \psi(t)$, где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются независимыми ОДУ:

$$(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C, \quad \psi'_t = aCe^{\lambda\psi},$$

где C — произвольная постоянная, которые легко интегрируются.

По аналогии с решением уравнения теплопроводности найти точное решение волнового уравнения с экспоненциальной нелинейностью

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x.$$

2. Реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_t = a(uu_x)_x + bu^2$$

в зависимости от знака коэффициента b допускает точные решения вида

$$u = \psi_1(t)\cos(\lambda x) + \psi_2 \sin(\lambda x) + \psi_3(t), \qquad \text{если } \ b/a = 2\lambda^2 > 0;$$
$$u = \psi_1(t)\exp(-\beta x) + \psi_2 \exp(\beta x) + \psi_3(t), \qquad \text{если } \ b/a = -2\beta^2 < 0.$$

По аналогии с решением реакционно-диффузионного уравнения найти точные решения волнового уравнения с квадратичной нелинейностью

$$u_{tt} = a(uu_x)_x + bu^2.$$

3. Реакционно-диффузионное уравнение с одной пространственной переменной и экспоненциальной нелинейностью

$$u_t = a(e^{\lambda u} u_x)_x + be^{\lambda u} + c$$

допускает решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{\lambda}\ln[\varphi(t) + \psi(t)\theta(x)],$$

где функция $\theta = \theta(x)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $a\theta''_{xx} + b\lambda\theta = 0$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют ОДУ первого порядка.

По аналогии с решением одномерного реакционно-диффузионного уравнения найти точное решение многомерного реакционно-диффузионного уравнения с экспоненциальной нелинейностью

$$u_t = a\,\mathrm{div}\,(e^{\lambda u}\nabla u) + be^{\lambda u} + c.$$

11.2. Построение решений УрЧП с запаздыванием помощью решений более простых уравнений

11.2.1. Построение точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием, исходя из структуры решений соответствующих УрЧП без запаздывания

В биологии, биофизике, биохимии, медицине, теории управлении, экологии, экономике и других областях встречаются системы, динамика которых зависит не только от текущего состояния системы в данный момент времени, но и от состоянии системы в некоторый предыдущий момент времени. Дифференциальные уравнения, описывающие такие процессы, помимо неизвестной функции $u = u(x,t)$, также включают функцию $w = u(x, t-\tau)$, где t — время, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. В некоторых случаях запаздывание может зависеть от времени, $\tau = \tau(t)$.

Наличие запаздывания существенно усложняет анализ таких уравнений. Хотя многие нелинейные уравнения в частных производных с постоянным запаздыванием допускают решения типа бегущей волны $u = u(x+\lambda t)$, они не имеют автомодельных решений вида $u = t^{\beta}\varphi(xt^{\lambda})$, которые часто имеют более простые уравнения в частных производных без запаздывания.

Ниже на простых конкретных примерах будет показано, как можно найти точные решения некоторых нелинейных УрЧП с запаздыванием, используя структуру решений более простых УрЧП без запаздывания.

► **Пример 11.4.** Рассмотрим нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = a(uu_x)_x + bw, \qquad w = u(x, t-\tau). \tag{11.2.1.1}$$

Уравнение (11.2.1.1) является более сложным, чем уравнение без запаздывания (11.1.1.1) и совпадает с ним при $\tau = 0$. Наличие запаздывания в уравнении (11.2.1.1) не влияет на нелинейный член, содержащий производные по x. Следовательно, можно предположить, что степенная структура решений по переменной x в обоих уравнениях будет одинаковой, и изменятся только функциональные коэффициенты, зависящие от t.

Другими словами, ищем точные решения УрЧП с запаздыванием (11.2.1.1) в той же форме, что и решения более простого УрЧП без запаздывания (11.1.1.1). В результате получим два точных решения нелинейного УрЧП с запаздыванием (11.2.1.1), которые приведены ниже.

1°. Решение с обобщенным разделением переменных вида (11.1.1.2), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с запаздыванием

$$\psi_1' = 6a\psi_1^2 + b\bar{\psi}_1, \qquad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau),$$
$$\psi_2' = 2a\psi_1\psi_2 + b\bar{\psi}_2, \qquad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau).$$

2°. Решение с обобщенным разделением переменных вида (11.1.1.3), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ с запаздыванием

$$\psi_1' = 6a\psi_1^2 + b\bar{\psi}_1, \qquad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau),$$
$$\psi_2' = \tfrac{15}{4}a\psi_1\psi_2 + b\bar{\psi}_2, \qquad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau).$$
◄

► **Пример 11.5.** Реакционно-диффузионное уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c), \tag{11.2.1.2}$$

имеет решение с функциональным разделением переменных вида

$$u(x,t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)], \qquad (11.2.1.3)$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ описываются нелинейной системой ОДУ

$$\begin{aligned}\psi_2' &= 4a\psi_2^2 + b\psi_2,\\ \psi_1' &= 4a\psi_1\psi_2 + b\psi_1,\\ \psi_0' &= a(\psi_1^2 + 2\psi_2) + b\psi_0 + c.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь более сложное нелинейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянным запаздыванием

$$u_t = au_{xx} + u(b\ln w + c), \quad w = u(x, t-\tau). \qquad (11.2.1.4)$$

УрЧП с запаздыванием (11.2.1.4) в частном случае при $\tau = 0$ совпадает с более простым УрЧП без запаздывания (11.2.1.2). Решение УрЧП с запаздыванием (11.2.1.4), как и для решения УрЧП без запаздывания (11.2.1.2), ищем в виде (11.2.1.3). В результате для функциональных коэффициентов $\psi_n = \psi_n(t)$ получим нелинейную систему ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned}\psi_2' &= 4a\psi_2^2 + b\bar\psi_2, \quad \bar\psi_2 = \psi_2(t-\tau),\\ \psi_1' &= 4a\psi_1\psi_2 + b\bar\psi_1, \quad \bar\psi_1 = \psi_1(t-\tau),\\ \psi_0' &= a(\psi_1^2 + 2\psi_2) + b\bar\psi_0 + c, \quad \bar\psi_0 = \psi_0(t-\tau).\end{aligned}$$ ◄

11.2.2. Построение точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием с помощью решений специального вида более простых УрЧП без запаздывания

Опишем метод построения точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием, который основан на использовании решений специального вида вспомогательных более простых УрЧП без запаздывания.

Будем рассматривать нелинейные УрЧП без запаздывания с двумя независимыми переменными вида

$$\Phi(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots; \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0, \qquad (11.2.2.1)$$

где $u = u(x,t)$ — искомая функция, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — свободные параметры.

В некоторых случаях точные решения уравнения (11.2.2.1) можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений с запаздыванием. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть УрЧП без запаздывания (11.2.2.1) допускает решение типа обобщенной бегущей волны, которое можно представить в неявном виде

$$F(u) = kt + \theta(x), \qquad (11.2.2.2)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$P(k, \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0, \tag{11.2.2.3}$$

а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Q(x, \theta, \theta'_x, \theta''_{xx}, \ldots; \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0. \tag{11.2.2.4}$$

Тогда более сложное нелинейное УрЧП с запаздыванием, которое получается из (11.2.2.1) формальной заменой свободных параметров $\beta_1, \ldots, \beta_m$ на функции по правилу

$$\beta_i \implies \varphi_i\bigl(F(u) - F(w)\bigr), \quad w = u(x, t-\tau), \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\varphi_i(z)$ — заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (11.2.2.2). В этом случае константа k и функция $\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (11.2.2.3) и (11.2.2.4), в которых следует положить

$$\beta_i = \varphi_i(k\tau), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Замечание 11.1. *На решениях вида (11.2.2.2) имеем* $F(w) = k(t-\tau) + \theta(x) = F(u) - k\tau$, *т. е.*

$$F(u) - F(w) = k\tau = \textit{const}. \tag{11.2.2.5}$$

Замечание 11.2. *В простейших случаях вместо ОДУ (11.2.2.4) может быть явно задана функция* $\theta = \theta(x, \beta_1, \ldots, \beta_m)$.

► Пример 11.6. Для иллюстрации практического применения утверждения 2 возьмем линейное уравнение диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = u_{xx} + \beta, \tag{11.2.2.6}$$

где β — свободный параметр.

Уравнение (11.2.2.6) допускает простое точное решение с разделяющимися переменными, которое записывается в явном виде

$$u = kt + \lambda x^2 + C_1 x + C_2, \tag{11.2.2.7}$$

где C_1, C_2, λ — произвольные постоянные, а параметр k следующим образом выражается через β и λ:

$$k = 2\lambda + \beta. \tag{11.2.2.8}$$

Решение (11.2.2.7) является частным случаем решения вида (11.2.2.2) при $F(u) = u$ и $\theta(x) = \lambda x^2 + C_1 x + C_2$. Имеем $F(u) - F(w) = u - w = k\tau$. Используя утверждение 2, заменим в линейном уравнении (11.2.2.6) параметр β на $\varphi(u-w)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному уравнению с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + \varphi(u - w),$$

которое допускает точное решение (11.2.2.7), где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = 2\lambda + \varphi(k\tau)$$

(получено из (11.2.2.8) при $\beta = \varphi(k\tau)$). ◀

► Пример 11.7. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)}, \qquad (11.2.2.9)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и два свободных параметра σ и β. Можно показать, что УрЧП (11.2.2.9) допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int f(u)\,du = kt - \frac{1}{2}\sigma x^2 + C_1 x + C_2, \qquad (11.2.2.10)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β линейным соотношением

$$k = \beta. \qquad (11.2.2.11)$$

Решение (11.2.2.10) является решением вида (11.2.2.2) при $F(u) = \int f(u)\,du$.

Используя утверждение 2, заменим в уравнении (11.2.2.9) параметры σ и β соответственно на $\varphi(F(u) - F(w))$ и $\psi(F(u) - F(w))$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции. В результате приходим к более сложному нелинейному уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)),$$
$$F(u) = \int f(u)\,du,$$

которое зависит от четырех произвольных функций и имеет точное решение

$$\int f(u)\,du = kt - \frac{1}{2}\varphi(k\tau)x^2 + C_1 x + C_2,$$

где постоянная k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$k = \psi(k\tau)$$

(получено из (11.2.2.11) при $\beta = \psi(k\tau)$). ◀

Утверждение 3. Пусть УрЧП без запаздывания (11.2.2.1) имеет решение с функциональным разделением переменных специального вида

$$F(u) = e^{kt}\theta(x), \qquad (11.2.2.12)$$

где константа k определяется из алгебраического (трансцендентного) уравнения (11.2.2.3), а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (11.2.2.4). Тогда более сложное нелинейное УрЧП с запаздыванием, которое получается из (11.2.2.1) формальной заменой свободных параметров $\beta_1, \ldots, \beta_m$ на функции по правилу

$$\beta_i \implies \varphi_i\bigl(F(w)/F(u)\bigr), \quad w = u(x, t-\tau), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{11.2.2.13}$$

где $\varphi_i(z)$ — заданные (достаточно произвольно) функции, также допускает точное решение вида (11.2.2.12), причем константа k и функция $\theta = \theta(x)$ определяются из уравнений (11.2.2.3) и (11.2.2.4), в которых следует положить

$$\beta_i = \varphi_i(e^{-k\tau}), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{11.2.2.14}$$

Замечание 11.3. *На решениях вида (11.2.2.12) последовательно имеем* $F(w) = e^{k(t-\tau)}\theta(x) = e^{-k\tau}F(u)$, *т. е.*

$$F(w)/F(u) = e^{-k\tau} = \text{const}.$$

Замечание 11.4. *Утверждение 3 можно свести к утверждению 2. Для этого надо, считая* $F(u) > 0$, *прологарифмировать решение (11.2.2.12), а затем сделать переобозначения* $\ln F(u) \implies F(u)$ *и* $\ln\theta \implies \theta$ *(аналогичным образом рассматривается также случай* $F(u) < 0$*). Однако на практике часто встречается представление решения непосредственно в виде (11.2.2.12), поэтому проще и удобнее его и использовать.*

► Пример 11.8. Рассмотрим линейное уравнение диффузионного типа

$$u_t = u_{xx} + \beta u, \tag{11.2.2.15}$$

где β — свободный параметр.

Уравнение (11.2.2.15) допускает точное решение с разделяющимися переменными

$$u = e^{kt}\theta(x), \tag{11.2.2.16}$$

где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\theta''_{xx} + (\beta - k)\theta = 0. \tag{11.2.2.17}$$

Решение (11.2.2.16) является частным случаем решения (11.2.2.12) при $F(u) = u$. Имеем $F(w)/F(u) = w/u = e^{-k\tau}$. Используя утверждение 3, заменим в уравнении (11.2.2.15) параметр β на $\varphi(w/u)$, где $\varphi(z)$ — произвольная функция. В результате приходим к нелинейному УрЧП с запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + u\varphi(w/u),$$

которое допускает точное решение (11.2.2.16), где k — произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(x)$ удовлетворяет линейному ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\theta''_{xx} + [\varphi(e^{-k\tau}) - k]\theta = 0.$$

Это уравнение получено подстановкой константы $\beta = \varphi(e^{-k\tau})$ в (11.2.2.17) и легко интегрируется. ◄

11.2.3. Принцип аналогии решений для нелинейных УрЧП с пропорциональными аргументами

Рассмотрим нелинейные уравнения в частных производных с пропорциональными аргументами, которые помимо искомой функции $u = u(x,t)$ содержат также функции с растяжением одной или нескольких независимых переменных вида $u(px,t)$, $u(x,qt)$ или $u(px,qt)$, где p и q — параметры масштабирования (для УрЧП с пропорциональными запаздываниями имеем $0<p<1$, $0<q<1$).

Опишем достаточно общий метод построения точных решений нелинейных УрЧП с пропорциональными аргументами, который основан на использовании следующего принципа.

Принцип аналогии решений. Структура точных решений УрЧП с пропорциональными аргументами

$$\begin{aligned} &F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\ldots,w,w_x,w_t,w_{xx},w_{xt},w_{tt},\ldots)=0,\\ &w=u(px,qt), \end{aligned} \tag{11.2.3.1}$$

часто (но не всегда) определяется структурой решений более простых уравнений в частных производных с обычными аргументами:

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\ldots,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\ldots)=0. \tag{11.2.3.2}$$

Уравнение (11.2.3.2) не содержит искомой функции с пропорциональными аргументами и получено из (11.2.3.1) формальной заменой w на u.

Схема применения принципа аналогии для УрЧП второго порядка с пропорциональными аргументами, разрешенного относительно u_t и не зависящего явно от переменных x и t, изображена на рис. 11.1.

Проиллюстрируем использование принципа аналогии на примерах трех УрЧП с пропорциональными аргументами, имеющих различные типы решений.

► **Пример 11.9.** Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональными аргументами

$$u_t = au_{xx} + bw^k, \qquad w = u(px,qt), \tag{11.2.3.3}$$

содержащее нелинейность степенного вида.

Следуя принципу аналогии, положим $w = u$ в уравнении (11.2.3.3). В результате приходим к более простому нелинейному уравнению теплопроводности (диффузии) с обычными аргументами

$$u_t = au_{xx} + bu^k. \tag{11.2.3.4}$$

Это уравнение допускает автомодельное решение

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-k}}U(z), \qquad z = xt^{-1/2}, \qquad k \neq 1. \tag{11.2.3.5}$$

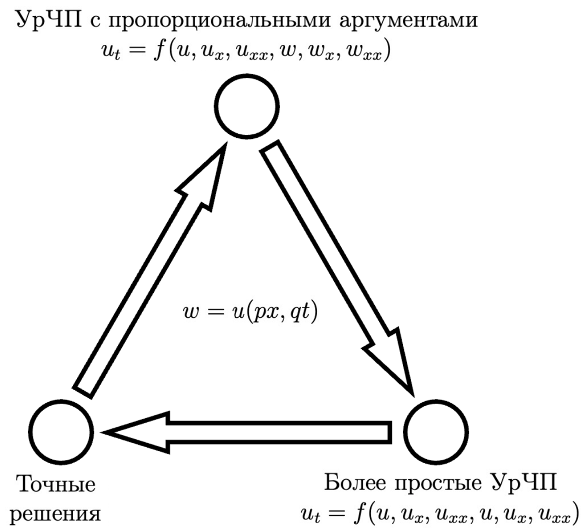

Рис. 11.1. Схема использования принципа аналогии для построения точных решений нелинейных УрЧП с пропорциональными аргументами.

Используя принцип аналогии, ищем решение нелинейного уравнения с пропорциональными аргументами (11.2.3.3) в таком же виде (11.2.3.5). В результате для функции $U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ с пропорциональным аргументом

$$aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z - \frac{1}{1-k}U + bq^{\frac{k}{1-k}}W^k = 0,$$
$$W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}.$$

◀

► Пример 11.10. Рассмотрим теперь реакционно-диффузионное уравнение с пропорциональными аргументами и экспоненциальной нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + be^{\lambda w}, \quad w = u(px, qt). \qquad (11.2.3.6)$$

Следуя принципу аналогии, положим $w = u$ в уравнении (11.2.3.6). В результате приходим к более простому нелинейному уравнению теплопроводности (диффузии) с обычными аргументами и источником экспоненциального вида

$$u_t = au_{xx} + be^{\lambda u}.$$

Это уравнение допускает инвариантное решение вида

$$u(x,t) = U(z) - \frac{1}{\lambda}\ln t, \quad z = xt^{-1/2}, \quad \lambda \neq 0. \qquad (11.2.3.7)$$

Используя принцип аналогии, ищем решение нелинейного УрЧП с пропорциональными аргументами (11.2.3.6) в виде (11.2.3.7). В итоге для функции

$U = U(z)$ получим нелинейное ОДУ с пропорциональным аргументом

$$\begin{aligned} &aU''_{zz} + \frac{1}{2}zU'_z + \frac{1}{\lambda} + \frac{b}{q}e^{\lambda W} = 0, \\ &W = U(sz), \quad s = pq^{-1/2}. \end{aligned}$$

◄

► **Пример 11.11.** Рассмотрим УрЧП с пропорциональными аргументами и логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c\ln w + d), \qquad w = u(px, qt). \tag{11.2.3.8}$$

Положив $w = u$ в уравнении (11.2.3.8), приходим к более простому нелинейному уравнению с обычными аргументами

$$u_t = au_{xx} + u[(b + c)\ln u + d],$$

которое допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{11.2.3.9}$$

Используя принцип аналогии, ищем решение нелинейного УрЧП с пропорциональными аргументами (11.2.3.8) в виде (11.2.3.9). После разделения переменных для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получим нелинейные ОДУ с пропорциональными аргументами

$$\begin{aligned} &a\varphi''_{xx} + \varphi(b\ln\varphi + c\ln\bar{\varphi}) = K\varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px); \\ &\psi'_t = \psi(b\ln\psi + c\ln\bar{\psi}) + (d + K)\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned}$$

где K — произвольная постоянная. ◄

11.2.4. Метод порождающих уравнений

Опишем метод построения точных решений некоторых нелинейных систем УрЧП с запаздыванием с помощью более простых решений отдельных (изолированных) УрЧП с запаздыванием.

Рассмотрим два различных независимых (изолированных) нелинейных УрЧП с постоянным запаздыванием $\tau > 0$:

$$F\big(u, \bar{u}, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, f(z_1)\big) = 0, \qquad \bar{u} = u(x, t - \tau), \qquad z_1 = z_1(u, \bar{u}); \tag{11.2.4.1}$$

$$G\big(v, \bar{v}, v_x, v_t, v_{xx}, v_{xt}, v_{tt}, g(z_2)\big) = 0, \qquad \bar{v} = v(x, t - \tau), \qquad z_2 = z_2(v, \bar{v}), \tag{11.2.4.2}$$

которые содержат заданные функции F, G, z_1, z_2 и произвольные функции одного аргумента $f(z_1)$ и $g(z_2)$.

Будем считать, что уравнения (11.2.4.1) и (11.2.4.2) имеют точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{n=1}^{N_1} \varphi_{1n}(x)\psi_{1n}(t), \quad v = \sum_{n=1}^{N_2} \varphi_{2n}(x)\psi_{2n}(t) \tag{11.2.4.3}$$

и что оба этих решения удовлетворяют любым функциональным связям одинакового типа, т. е. допустим любой из следующих двух возможных вариантов:

$$z_1(u,\bar u)=p_1(x),\quad z_2(v,\bar v)=p_2(x)\quad \text{(функциональные связи первого рода);}$$
$$z_1(u,\bar u)=q_1(t),\quad z_2(v,\bar v)=q_2(t)\quad \text{(функциональные связи второго рода).}\tag{11.2.4.4}$$

Метод порождающих уравнений основан на использовании следующего принципа.

Принцип построения систем УрЧП с запаздыванием и их точных решений. Пусть изолированные нелинейные УрЧП с запаздыванием (11.2.4.1) и (11.2.4.2) допускают решения с обобщенным разделением переменных (11.2.4.3), каждое из которых удовлетворяет двум функциональным связям одинакового вида (11.2.4.4). Тогда более сложная нелинейная система, состоящая из двух связанных нелинейных УрЧП с запаздыванием

$$F\big(u,\bar u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},f(z_1,z_2)\big)=0,\qquad \bar u=u(x,t-\tau),\qquad z_1=z_1(u,\bar u);\tag{11.2.4.5}$$

$$G\big(v,\bar v,v_x,v_t,v_{xx},v_{xt},v_{tt},g(z_1,z_2)\big)=0,\qquad \bar v=v(x,t-\tau),\qquad z_2=z_2(v,\bar v),\tag{11.2.4.6}$$

где $f(z_1,z_2)$ и $g(z_1,z_2)$ — произвольные функции двух аргументов, допускает точное решение вида (11.2.4.3).

Далее исходные независимые уравнения (11.2.4.1) и (11.2.4.2) будем называть *порождающими* (или *генерирующими*) *уравнениями*.

Замечание 11.5. *В простейших случаях порождающие УрЧП (11.2.4.1) и (11.2.4.2) могут быть одинаковыми с точностью до элементарных переобозначений определяющих параметров и произвольных функций.*

► Пример 11.12. В качестве порождающих уравнений используем одно уравнение реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием

$$u_t=a(u^ku_x)_x+uf(\bar u/u),\qquad \bar u=u(x,t-\tau),\tag{11.2.4.7}$$

где $z=\bar u/u$. Это уравнение допускает решение с мультипликативным разделением переменных $u=\varphi(x)\psi(t)$, которое удовлетворяет функциональной связи второго рода (11.2.4.4).

Используя метод порождающих уравнений, приходим к нелинейной системе реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned}u_t&=a_1(u^ku_x)_x+uf(\bar u/u,\bar v/v),\quad \bar u=u(x,t-\tau),\\ v_t&=a_2(v^mv_x)_x+vg(\bar u/u,\bar v/v),\quad \bar v=v(x,t-\tau).\end{aligned}\tag{11.2.4.8}$$

Система УрЧП (11.2.4.8) наследует вид решений порождающих ее уравнений (которые с точностью до элементарных переобозначений определяющих параметров и произвольных функций совпадают с УрЧП (11.2.4.7)), т. е. допускает точные решения с мультипликативным разделением переменных

$$u=\varphi_1(x)\psi_1(t),\qquad v=\varphi_2(x)\psi_2(t).\tag{11.2.4.9}$$

Подставив (11.2.4.9) в (11.2.4.8), после несложных преобразований для функций $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ получим систему, состоящую из двух независимых ОДУ и двух связанных ОДУ с запаздыванием

$$\begin{aligned} &a_1(\varphi_1^k \varphi_1')' = C_1 \varphi_1, \\ &a_2(\varphi_2^m \varphi_2')' = C_2 \varphi_2, \\ &\psi_1' = C_1 \psi_1^{k+1} + \psi_1 f\big(\bar\psi_1/\psi_1, \bar\psi_2/\psi_2\big), \quad \bar\psi_1 = \psi_1(t-\tau), \\ &\psi_2' = C_2 \psi_2^{m+1} + \psi_2 g\big(\bar\psi_1/\psi_1, \bar\psi_2/\psi_2\big), \quad \bar\psi_2 = \psi_2(t-\tau), \end{aligned} \tag{11.2.4.10}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Общие решения первых двух автономных ОДУ в (11.2.4.10) можно представить в неявной форме. При $k, m \neq 0$ и $k, m \neq -2$ эти уравнения имеют частные решения

$$\varphi_1 = \left[\frac{C_1 k^2 x^2}{2a_1(k+2)}\right]^{1/k}, \quad \varphi_2 = \left[\frac{C_2 m^2 x^2}{2a_2(m+2)}\right]^{1/m}.$$

◀

Замечание 11.6. *Уравнения (11.2.4.1) и (11.2.4.2) и система (11.2.4.5)–(11.2.4.6) могут дополнительно явно зависеть от x и t и включать старшие производные искомых величин по этим переменным.*

Задачи и упражнения к разд. 11.2

1. Волновое уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_{tt} = a(uu_x)_x + bu$$

совпадает с уравнением (11.1.1.4) и имеет два точных решения с обобщенным разделением переменных вида (11.1.1.2) и (11.1.1.3).

Найти точные решения более сложного нелинейного волнового уравнения с постоянным запаздыванием

$$u_{tt} = a(uu_x)_x + bw, \qquad w = u(x, t-\tau),$$

используя (по аналогии) структуру решений приведенного выше более простого волнового УрЧП без запаздывания.

2. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа без запаздывания

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \sigma + \frac{\beta}{f(u)}, \tag{11.2.4.11}$$

которое обобщает УрЧП (11.2.2.9) и содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и два свободных параметра σ и β. Можно показать, что уравнение (11.2.4.11) допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int f(u)\,du = kt - \sigma \int \frac{x\,dx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \tag{11.2.4.12}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а константа k связана с параметром β линейным соотношением $k = \beta$.

Используя утверждение 2 и решение (11.2.4.12), получить точное решение нелинейного уравнению реакционно-диффузионного типа с запаздыванием

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \varphi(F(u) - F(w)) + \frac{1}{f(u)}\psi(F(u) - F(w)),$$
$$F(u) = \int f(u)\,du,$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные функции.

3. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью

$$u_t = (uu_x)_x + au + bu^2, \qquad (11.2.4.13)$$

где a, b — свободные параметры.

При $b > 0$ уравнение (11.2.4.13) допускает точное решение с разделяющимися переменными в явном виде

$$u = e^{kt}\sqrt{|C_1\cos(\sigma x) + C_2\sin(\sigma x)|}, \qquad \sigma = \sqrt{2b}, \qquad (11.2.4.14)$$

которое является частным случаем решения (11.2.2.16), где параметр k удовлетворяет линейному соотношению $k = a$.

Используя утверждение 3 (при $\beta_1 = a$ и $\beta_2 = b$) и решение (11.2.4.14), найти точное решение нелинейного УрЧП с запаздыванием

$$u_t = (uu_x)_x + u\varphi_1(w/u) + u^2\varphi_2(w/u), \qquad w = u(x, t-\tau),$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — произвольные функции.

4. Используя принцип аналогии решений, построить точное решение нелинейного реакционно-диффузионного уравнения с пропорциональными аргументами

$$u_t = au_{xx} + bu^m w^k, \qquad w = u(px, qt),$$

учитывая, что более простое УрЧП при $p = q = 1$ допускает автомодельное решение вида

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{1-m-k}}U(z), \qquad z = xt^{-1/2}.$$

5. Реакционно-диффузионное уравнение с логарифмической нелинейностью

$$u_t = au_{xx} + u(b\ln u + c), \qquad (11.2.4.15)$$

допускает точное решение вида

$$u(x,t) = \exp[\psi_2(t)x^2 + \psi_1(t)x + \psi_0(t)].$$

Используя принцип аналогии решений, построить точное решение более сложного реакционно-диффузионного уравнения с пропорциональным аргументом

$$u_t = au_{xx} + u(b_1\ln u + b_2\ln w + c), \qquad w = u(x, qt).$$

6. Уравнение типа Клейна — Гордона со степенной нелинейностью

$$u_{tt} = au_{xx} + bu^k$$

при $k \neq 1$ допускает автомодельное решение вида

$$u(x,t) = t^{\frac{2}{1-k}} U(z), \qquad z = x/t.$$

Используя принцип аналогии решений, построить точное решение более сложного УрЧП с пропорциональными аргументами

$$u_{tt} = a u_{xx} + b w^k, \qquad w = u(px, qt).$$

7. Уравнение типа Клейна — Гордона с экспоненциальной нелинейностью

$$u_{tt} = a u_{xx} + b e^{\mu u}$$

допускает точное решение вида

$$u(x,t) = U(z) - \frac{2}{\mu} \ln t, \qquad z = x/t.$$

Используя принцип аналогии решений, построить точное решение более сложного УрЧП с пропорциональными аргументами

$$u_{tt} = a u_{xx} + b e^{\mu u + \lambda w}, \qquad w = u(px, qt).$$

8. Рассмотрим два разных уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} &u_t = a_1 u_{xx} + bu + f(u - \bar{u}), && \bar{u} = u(x, t - \tau);\\ &v_t = a_2 v_{xx} + v g(\bar{v}/v), && \bar{v} = v(x, t - \tau), \end{aligned} \tag{11.2.4.16}$$

где $f(z_1)$ и $g(z_2)$ — произвольные функции. Первое из этих уравнений имеет точное решение с аддитивным разделением переменных, а второе уравнение допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных.

Применяя метод порождающих уравнений к уравнениям (11.2.4.16), получить решение системы уравнений реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_{xx} + bu + f(u - \bar{u}, \bar{v}/v),\\ v_t &= a_2 v_{xx} + v g(u - \bar{u}, \bar{v}/v), \end{aligned}$$

где $f(z_1, z_2)$ и $g(z_1, z_2)$ — произвольные функции двух аргументов.

Литература к главе 11

Полянин А.Д., Аксенов А.В. Использование простых решений нелинейных уравнений математической физики для построения более сложных решений. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, т. 9, № 5, с. 420–437.

Аксенов А.В., Полянин А.Д. Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений. *Теор. & мат. физика*, т. 211, № 2, с. 149–180.

Полянин А.Д., Журов А.И. *Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. М.: ИПМех РАН, 2020.

Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2020, т. 9, № 2, с. 115–128.

Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа. *Вестник НИЯУ «МИФИ»*, 2020, т. 9, № 4, с. 315–328.

Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Журов А.И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М.: ИПМех РАН, 2022.

Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 4, 345.

Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. *J. Math. Analysis & Applications*, 2021, Vol. 494, 124619.

Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. *Commun. Nonlinear Science & Numer. Simulation*, 2021, Vol. 95, 105634.

Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 5, 511.

Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays. *Mathematics*, 2023, Vol. 11, No. 3, 516.

Polyanin A.D., Zhurov A.I. The generating equations method: Constructing exact solutions to delay reaction-diffusion systems and other non-linear coupled delay PDEs. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2015, Vol. 71, pp. 104–115.

Научное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Оригинал-макет: А.И. Журов, А.Д. Полянин

Формат 70x100/16.
Гарнитура «Times New Roman». Печать цифровая.
Учетн. печ. л. 18,2. Тираж 300 экз.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)
119526 Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1
http://www.ipmnet.ru/

Отпечатано в типографии «Элис Групп»
105094, г. Москва, Семеновская Набережная, д. 3/1, корп. 6
http://www.alice-group.ru/

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИПМех РАН

А. Д. ПОЛЯНИН

Излагаются эффективные аналитические методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики и механики. Описаны методы обобщенного и функционального разделения переменных, прямой метод построения редукций (метод Кларксона — Крускала), метод поиска слабых симметрий, метод дифференциальных связей и некоторые другие методы. Показано, что точные решения одних уравнений нередко могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений. Исследуются уравнения массо- и теплопереноса, гидродинамики, теории волн, нелинейной акустики, теории горения, нелинейной оптики и др. Во всех разделах рассматриваются примеры использования методов для построения точных решений конкретных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Приведены многочисленные задачи и упражнения, позволяющие получить практические навыки применения рассматриваемых методов.

Изложение материала ведется в соответствии с принципом от «простого к сложному». Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом.

Книга предназначена для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, механики и физики. Ее теоретический материал и упражнения могут быть использованы в курсах лекций по прикладной математике и математической физике, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

ISBN 978-5-91741-283-2

9 785917 412832