Е. В. Торская

Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями

Е. В. Торская

Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями

Москва ♦ Ижевск
2020

УДК 539.3, 531.4
ББК 22.21
Т615

Издание осуществлено при поддержке
Российского научного фонда (грант 18-19-00574).

Торская Е. В.

Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями. — М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2020. — 296 с.

Представлен ряд новых задач механики контактного взаимодействия для слоистых сред в условии неполного сцепления слоев для единичного контакта, в том числе с пригрузкой, а также для периодической контактной задачи и задачи о контакте с учетом шероховатости одного из взаимодействующих тел. Изучены особенности напряженного состояния слоистых тел в условиях фрикционного нагружения, что позволило предсказать вероятный механизм разрушения покрытий. Модель усталостного изнашивания в результате накопления контактно-усталостных повреждений за счет циклического нагружения скользящими неровностями дала возможность описать различные явления, имеющие место при фрикционном взаимодействии: отделение слоев конечной толщины, поверхностное изнашивание и выкрашивание покрытия от границы раздела с подложкой.

Результаты могут быть использованы для оптимизации механических свойств покрытий и их толщины в пределах, допускаемых технологией, по критерию минимизации напряжений, ответственных за разрушение покрытий. Также показано, что разработанные методы решения контактных задач могут быть использованы для идентификации упругих свойств относительно жестких однородных покрытий по результатам индентирования, что особенно важно для новых материалов, существующих только в качестве покрытий.

© Е. В. Торская, 2020

ISBN 978-5-4344-0905-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. Контакт гладкого индентора и многослойного упругого полупространства 7

1.1. Осесимметричное нагружение двухслойного упругого полупространства при неполном сцеплении слоев 15

1.2. Осесимметричная контактная задача для многослойного покрытия с неполным сцеплением слоев 29

1.3. Фрикционное нагружение тел с покрытиями 37

1.4. Контакт индентора при наличии пригрузки с двухслойным упругим полупространством 45

1.5. Анализ напряжений, возникающих при фрикционном нагружении тел с однослойными покрытиями 57

1.6. Исследование напряженного состояния покрытий, состоящих из двух и более слоев 91

1.7. Определение модуля упругости покрытий по результатам индентирования 107

Глава 2. Моделирование контактного взаимодействия двухслойных тел с учетом адгезии и реологических свойств материалов покрытия или подложки 119

2.1. Пространственная контактная задача для тел с покрытиями при наличии адгезии 123

2.2. Квазистатическая задача о скольжении индентора по двухслойному основанию при наличии вязкоупругости 139

Глава 3. Моделирование контактного взаимодействия тел с покрытиями с учетом поверхностной шероховатости 160
3.1. Периодическая контактная задача 164
3.2. Оценка влияния характера распределения пригрузки на контактные характеристики.....176
3.3. Определение и анализ напряженного состояния двухслойного упругого полупространства при множественном характере нагружения.....177
3.4. Анализ функции дополнительного смещения 194
3.5. Решение двухуровневой контактной задачи.....198
3.6. Задача о контактном взаимодействии гладкого индентора и шероховатого двухслойного упругого полупространства.....207

Глава 4. Моделирование контактно-усталостного разрушения двухслойного упругого полупространства.....214
4.1. Накопление контактно-усталостных повреждений в двухслойном полупространстве при неполном сцеплении слоев (единичный контакт).....221
4.2. Моделирование контактно-усталостного разрушения двухслойного упругого полупространства.....233
4.3. Исследование контактно-усталостного изнашивания двухслойного упругого полупространства при смещении границы упругого слоя.....253
4.4. Контактно-усталостное изнашивание вязкоупругого слоя 264

Список литературы.....275

ПРЕДИСЛОВИЕ

В механике контактного взаимодействия, являющейся разделом механики деформируемого твердого тела, традиционно большое внимание уделяется контакту при наличии сил трения. Это связано с тем, что фрикционное взаимодействие как физический процесс включает в себя целый ряд факторов (изнашивание, фрикционный разогрев, адгезионное взаимодействие и т. п.), при этом взаимодействующие тела часто бывают неоднородными, а их поверхности всегда являются шероховатыми. Все эти особенности фрикционного контакта могут учитываться при построении механико-математических моделей, позволяющих количественно описывать происходящие процессы. Задачей исследователя является выбор факторов, являющихся наиболее существенными для рассматриваемого вида фрикционного взаимодействия. Наличие подобного выбора приводит к появлению большого спектра задач механики фрикционного взаимодействия.

В данной монографии исследуются некоторые аспекты механики контактного взаимодействия упругих тел с покрытиями при наличии сил трения. При разработке механико-математических моделей учтены возможное неполное сцепление покрытия с подложкой и шероховатость поверхностей взаимодействующих тел, приводящая к дискретности контакта. Дополнительными физическими факторами, влияющими на контактное взаимодействие тел с покрытиями и отраженными в моделях, являются адгезия и несовершенная упругость. Объектом исследования также является один из механизмов изнашивания тел с покры-

тиями, а именно усталостное изнашивание, обусловленное циклическим нагружением при скольжении шероховатых тел.

Все исследования выполнены в лаборатории трибологии Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук; они были инициированы вопросами, возникавшими при исследовании покрытий в различных условиях фрикционного нагружения. В ряде случаев удалось связать напряженное состояние, возникающее в покрытиях при трении, с механизмом их разрушения, а также определить упругие свойства новых материалов покрытий по результатам упругого индентирования. Таким образом, результаты частично использованы и будут использоваться в дальнейшем для решения практических задач трибологии.

Монография является продолжением и развитием фундаментальных работ в этом направлении, принадлежащих Г. С. Шапиро, В. С. Никишину, А. П. Макушкину, И. Г. Горячевой, О. Г. Чекиной. Теоретико-экспериментальные исследования выполнены в соавторстве с экспериментаторами-трибологами и разработчиками новых материалов покрытий Н. К. Мышкиным, А. В. Морозовым, И. И. Курбаткиным, Ю. В. Корневым, Д. М. Гуцевым, В. Г. Кудрицким, Т. И. Муравьевой, А. М. Мезриным, А. С. Усейновым, К. С. Кравчуком, Н. Н. Фроловым, В. В. Сахаровым, K. L. Dahm, P. A. Dearnley. Модели, представленные в главе 2, разрабатывались при участии Ф. И. Степанова.

Автор выражает большую признательность академику И. Г. Горячевой, которая инициировала начало исследований и оказывала автору постоянную поддержку в ходе их выполнения.

Глава 1

КОНТАКТ ГЛАДКОГО ИНДЕНТОРА И МНОГОСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Нанесение покрытий является одним из основных способов модификации поверхности, обеспечивающих увеличение долговечности сопряжений, работающих в условиях фрикционного контакта. Наличие искусственно нанесенных покрытий и пленок различных типов, также как и неоднородность поверхностных слоев материалов, связанная с процессами окисления, старения материала и рядом других явлений, предполагает учет изменения механических свойств в зависимости от расстояния до поверхности. В рамках теории упругости это означает, что следует рассматривать упругое тело с изменяющимися значениями модуля Юнга (либо модуля сдвига) и коэффициента Пуассона.

Непрерывное изменение механических свойств рассмотрено в работе В. И. Кузнецова [56], где исследован случай непрерывного изменения коэффициента Пуассона; в работе Н. А. Ростовцева, И. Е. Храневской [89] рассмотрено непрерывное изменение модуля Юнга. Обзор работ на эту тему можно найти в [79].

Контактные задачи для упругих тел с непрерывно либо ступенчато меняющимися по глубине механическими характеристиками рассмотрены многими исследователями. Методы исследования можно разделить на три большие группы: аналити-

ческие (главным образом асимптотические) методы, численные методы, а также численно-аналитические методы.

Для первого направления характерно то, что существенно, на уровне модели, учитывается твердость и мягкость покрытия, а также его относительная толщина (покрытия тонкие и толстые, различающиеся отношением толщины к размерам области контакта), что позволяет использовать методы асимптотических разложений. К преимуществам данного подхода следует отнести то, что в результате обычно получаются удобные для исследования аналитические выражения.

Существует большое количество работ в рамках этого направления. Многие работы рассмотрены в [79]. Следует отдельно упомянуть работы В. М. Александрова [5, 9, 11], в особенности монографию В. М. Александрова и С. М. Мхитаряна [11], где асимптотические методы успешно используются для решения разнообразных задач. В более поздних работах С. М. Айзиковича и его коллег были расширены границы применимости асимптотических методов, в том числе рассмотрены покрытия с градиентным изменением механических свойств [1–4, 106, 116]. Похожие постановки контактных задач, в которых важным является условие непрерывности изменения упругих свойств по глубине, представлены в [139, 140]. Особенностью всех перечисленных выше работ является отсутствие учета сил трения как в постановках задач об определении контактных давлений, так и при исследовании напряженного состояния тел с неоднородными по глубине механическими свойствами.

Следует отметить, что вопрос о влиянии сил трения на распределение контактных давлений при скольжении упругих тел является предметом многочисленных исследований. Одними из первых в этой области следует считать работы Н. И. Мусхе-

лишвили [73] и Л. А. Галина [18]. При взаимодействии тел из одинаковых материалов трение не влияет на решение контактной задачи. Степень влияния касательных сил на распределение контактных давлений зависит от соотношения упругих свойств материалов, а также от величины коэффициента трения. Во многих случаях при коэффициентах трения меньших, чем единица, разница между контактными характеристиками, полученными без учета и с учетом сил трения, достаточно мала, чтобы ею можно было пренебречь. Таким образом, можно разделить задачи на контактную, решаемую без учета сил трения, и задачу определения напряженного состояния упругого тела при наличии сил трения в области контакта. В монографии К. Джонсона [44] приведен обзор работ, в том числе и экспериментальных, в которых идет речь о границах применимости закона Амонтона – Кулона для случаев сухого трения и при наличии граничной смазки.

Развитие вычислительной техники привело к широкому использованию стандартных вычислительных пакетов, основанных на методе конечных элементов. Использование этих пакетов требует работы по их адаптации к имеющимся задачам, а также понимания особенностей контактного взаимодействия тел с покрытиями для подбора адекватной сетки разбиения на элементы. Преимуществами метода являются: возможность рассматривать наличие трения при решении контактной задачи, исследование взаимодействия тел сложной формы, возможность введения в модель неупругих элементов. К недостаткам следует отнести сложности при исследовании точечного контакта, а также относительно длительное время расчетов. Кроме того, при подобных расчетах невозможно получить адекватное решение при наличии точек или линий концентрации напряжений. Первые работы,

появившиеся в этом направлении, посвящены контактному взаимодействию тел с покрытиями, которые могут быть рассмотрены в рамках плоских задач теории упругости (например, [153]), или осесимметричных задач с известной площадкой контакта [138]. В дальнейшем появилось большое количество работ по моделированию фрикционного контакта тел с покрытиями в трехмерной постановке. Из большой массы подобных работ следует выделить исследования [151, 152, 172], характеризующиеся подробным анализом полученных результатов.

В отличие от асимптотических методов, численно-аналитические решения контактных задач для слоистых упругих тел не предполагают каких-либо ограничений, налагаемых на относительную толщину либо относительную жесткость покрытий. При этом численные расчеты используются только на конечном этапе решения. Метод основан на решении первой задачи теории упругости для многослойных сред (определение напряженного состояния при заданной нагрузке на границе) с помощью интегральных преобразований Фурье и Ханкеля.

В этом контексте интегральные преобразования Фурье одним из первых использовал И. Г. Альперин [12] для определения поля напряжений упругой полуплоскости, состоящей из n слоев, трение между которыми отсутствует; последним слоем является упругое полупространство. Решение строится для каждого слоя и выражается через бигармонические функции напряжений.

В работе Г. С. Шапиро [114] рассматривается осесимметричная задача для многослойной плиты. Используя интегральные преобразования Ханкеля, автор получил точное решение задачи. Функция напряжений $\varphi_i(r,z)$ $(i=0...n)$ представляется как:

$$\varphi_i(r,z)=\int_0^\infty\Big(\big(A_i(\alpha)+zB_i(\alpha)\big)e^{-\alpha z}+\big(C_i(\alpha)+zD_i(\alpha)\big)e^{\alpha z}\Big)I_0(\alpha r)d\alpha\,.$$

Использование заданных граничных условий приводит к системе $4n$ уравнений относительно функций $A_i(\alpha)$, $B_i(\alpha)$, $C_i(\alpha)$, $D_i(\alpha)$ и переменной α. Решение системы и вычисление несобственных интегралов по α дает нужный результат, что и было показано автором на примере решения задачи для одного слоя, лежащего без трения на жестком основании и нагруженном на верхней границе равномерным давлением, распределенным внутри круга [115].

В работе Р. М. Раппопорт [81] для двухслойного полупространства решены осесимметричная задача Буссинеска и плоская задача Фламана с помощью интегральных преобразований Ханкеля и Фурье соответственно. На границе раздела сред равенство нормальных и касательных напряжений удовлетворяются тождественно благодаря соответствующему подбору вида функций напряжений для слоев.

Позже тем же автором [82–84] был развит метод послойного решения плоской и осесимметричной задач теории упругости для полупространства с произвольным числом слоев, суть которого состоит в решении системы из $2(n-1)$ уравнений относительно трансформант Фурье или Ханкеля нормальных и касательных напряжений при известных значениях этих трансформант на верхней и нижней границах. Далее задача решается послойно. В работах приведены результаты расчетов для случаев двух- и трехслойных оснований.

В. И. Петришиным и А. К. Приварниковым [76] решалась осесимметричная задача для многослойного основания. Суть решения состоит в использовании специальных рекуррентных

соотношений для определения трансформант интегрального преобразования Ханкеля (нормальных и касательных напряжений и перемещений) на границах между слоями через известные трансформанты напряжений и перемещений на граничной плоскости плиты. Этот подход был развит в других работах [77, 78] тех же авторов.

Существенными вкладом в развитие методов интегральных преобразований для решения пространственной и плоской задачи теории упругости в случае однородного слоя явилась монография Я. С. Уфлянда [112], в которой наряду с методами приведены также и решения многих частных задач.

В монографии В. С. Никишина и Г. С. Шапиро [75] метод решения осесимметричной задачи для многослойных плит на основе преобразований Ханкеля, предложенный Шапиро [114], распространен на многослойное плиты и многослойное полупространство. Существенно, что изложен алгоритм получения результатов с помощью численных расчетов и проведен анализ применимости используемых методов вычислений. В качестве примера использования алгоритма решен ряд задач для разного количества слоев. Также в этой монографии предложен метод решения пространственных задач для многослойных сред, на верхнюю границу которых действуют нормальные и касательные силы. Метод базируется на использовании двойных интегральных преобразований Фурье и охватывает класс задач, допускающих построение единственной бигармонической функции для каждого слоя. В качестве примера приведено решение одной частной пространственной задачи о нормальном нагружении многослойной плиты.

Метод решения первой основной задачи теории упругости с помощью интегральных преобразований имеет то преимуще-

ство, что на его основе возможно решение смешанных задач, в частности, контактной задачи о взаимодействии индентора со слоистой средой. Так, в работах А. П. Макушкина [66–69] рассматривается контакт жесткого сферического индентора и двухслойного основания. Если в первой из этих работ при исследовании контакта индентора с полимерным слоем предполагается распределение давления по Герцу на неизвестной площадке контакта, которая определяется путем итераций, то в последующих работах распределение давления определяется в процессе решения задачи. Давление находится в виде кусочно-постоянной функции при делении области контакта на большое количестве подобластей. Хотя целью автора являлось определение контактных характеристик и, далее, напряженно-деформированного состояния двухслойного основания с более мягким верхним слоем, предложенный метод решения контактных задач может быть распространен и на другие случаи.

Подобным методом пользовались также Као и Кир (C. H. Kuo, L. M. Keer) [160], построившие решение осесимметричной задачи о контакте жесткого индентора с упругим основанием, состоящим из произвольного количества жестко скрепленных друг с другом слоев. В работе приведены результаты расчетов, полученные для одного слоя, скрепленного с более мягким основанием, при разных значениях толщины слоя.

Одними из последних в данном направлении являются работы В. И. Фабриканта (V. I. Fabrikant) [137, 138], развивавшего методы решения контактных задач теории упругости для многослойных трансверсально-изотропных сред в условиях полного сцепления между слоями. Автору удалось аналитически получить определяющие соотношения, но дальнейшей численной реализации этих соотношений не последовало.

Следует отметить, что все постановки задач для слоистых сред, рассмотренные выше, предполагают либо условие отсутствия трения (нулевые касательные напряжения) на границах раздела слоев, либо условия полного сцепления, которое характеризуется равенством касательных напряжений на границах раздела слоев. В то же время, понятие степени сцепления покрытия с подложкой является важным при описании существующих систем покрытие-подложка, являющихся предметом многочисленных трибологических исследований [87, 151]. Экспериментально доказано, что степень сцепления существенно влияет на распределение напряжений в покрытии и подложке, а также на характер разрушения покрытия.

Работы ученых-механиков в этом направлении крайне немногочисленны. В. В. Можаровский и В. Е. Старжинский [71] предложили метод решения контактной задачи для полосы, дискретно сцепленной с основанием (число разрезов на границе раздела конечно). В. М. Александровым и В. В. Клиндуховым [8] рассмотрены осесимметричные контактные задачи для двухслойного упругого основания, где свойства границы раздела моделировались наличием между слоями твердой либо мягкой прослойки, для решения задачи использовались асимптотические методы.

Более многочисленны работы, посвященные исследованию упругих тел, ослабленных системой внутренних дефектов. Остановимся здесь на тех из них, в которых разрабатываются методы, позволяющие исследовать контактные задачи для упругих тел с системой дефектов. В работах И. Г. Горячевой и И. В. Фельдштейна [37, 148] рассмотрена система дефектов, локализованная вблизи некоторой внутренней поверхности области, занимаемой упругим телом. Введение характеристик дефектного слоя, кото-

рые интегрально описывают его поведение при деформировании, позволяет свести постановку задачи к формулировке условий сопряжения на данной внутренней поверхности. Подобный подход может быть использован для определения напряжений на некотором расстоянии от системы дефектов, в том числе и для решения контактной задачи. Для одного частного вида дефектов показано, что вместо системы дефектов при решении контактной задачи можно рассматривать слой, характеризуемый сдвиговой и нормальной податливостью, между которыми установлена связь. Похожим методом гомогенизации свойств системы дефектов пользовался Л. М. Кир (L. M. Keer) [156, 185].

В данной главе для случая осесимметричного нагружения двухслойного упругого полупространства исследуется влияние неполного сцепления слоев на внутренние напряжения. Приведены постановка и метод решения контактной задачи для гладкого осесимметричного индентора и двухслойного либо многослойного упругого полупространства с усложненными условиями на границе раздела слоев. Наличие сил трения в области контактного взаимодействия переводит задачи в разряд пространственных и позволяет использовать разработанные методики для анализа фрикционного контакта покрытий триботехнического назначения.

1.1. Осесимметричное нагружение двухслойного упругого полупространства при неполном сцеплении слоев

В данной части работы рассматриваются условия на границе раздела упругого слоя и упругого полупространства, допускающие относительное проскальзывание граничных точек,

связанное с неполным сцеплением покрытия и полупространства. Одной из целей исследования является изучение степени влияния относительного проскальзывания на напряженное состояние в слое и полупространстве.

Рассматривается упругий слой толщины H, лежащий на упругом полупространстве и нагруженный давлением $p(r)$ внутри круговой области радиуса a, $r \le a$ (рис. 1.1).

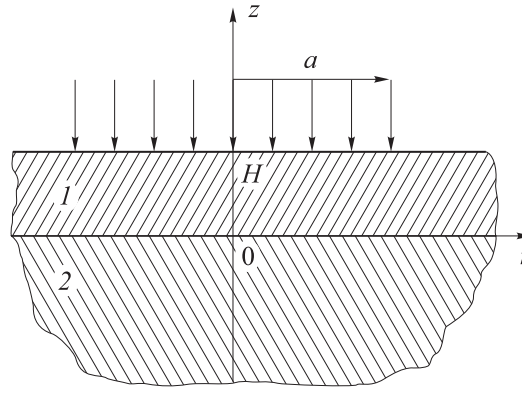


Рис. 1.1. Схема осесимметричного нагружения двухслойного упругого полупространства

На границе раздела упругого слоя и упругого полупространства имеют место следующие граничные условия:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)},$$
$$\tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = \frac{1}{k_1}\left(u_r^{(1)} - u_r^{(2)}\right), \qquad (1.1)$$
$$w^{(1)}(r + u_r^{(1)}) = w^{(2)}(r + u_r^{(2)}).$$

Здесь $\sigma_z^{(i)}, \tau_{rz}^{(i)}, u_r^{(i)}, w^{(i)}$ — компоненты тензора напряжений и перемещения в слое (i = 1) и полупространстве (i = 2). Усло-

вия (1.1) допускают относительное проскальзывание в радиальном направлении точек слоя $u_r^{(1)}$ и полупространства $u_r^{(2)}$ на границе раздела. Поскольку тангенциальные напряжения направлены против проскальзывания, коэффициент $k_1 \geq 0$. При $k_1 = 0$ соотношения (1.1) совпадают с условиями полного сцепления слоя и основания:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)};\ \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)};\\ &u_r^{(1)} = u_r^{(2)};\ w^{(1)} = w^{(2)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

При $k_1 \to \infty$ соотношения (1.1) соответствуют случаю, когда слой лежит без трения на упругом полупространстве:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)};\ \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0;\\ &w^{(1)}\left(r + u_r^{(1)}\right) = w^{(2)}\left(r + u_r^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

На верхней границе упругого слоя поставим условия осесимметричного нагружения известным давлением $p(r)$:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = -p(r), && 0 \leq r \leq a,\\ &\sigma_z^{(1)} = 0, && a < r < \infty,\\ &\tau_{rz}^{(1)} = 0, && 0 \leq r < \infty. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Преобразуем последнее соотношение в граничных условиях (1.1), разложив функции $w^{(i)}(r + u_r^{(i)})$ в ряд и отбросив члены, начиная со второго порядка малости по $u_r^{(i)}$:

$$w^{(1)}(r) - w^{(2)}(r) = \tilde{w}(r), \tag{1.5}$$

где

$$\tilde{w}(r) = -u_r^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}(r)}{\partial r} + u_r^{(2)} \frac{\partial w^{(2)}(r)}{\partial r}. \tag{1.6}$$

Соотношение (1.6) совпадает с условиями полного сцепления при $\tilde{w}(r) = 0$.

В общем случае функция $\tilde{w}(r)$ неизвестна, что не позволяет применить для решения задачи прямую процедуру сведения ее к линейным системам функциональных уравнений, используя преобразования Ханкеля. Для решения задачи разработан алгоритм итерационной процедуры, схема которого изображена на рис. 1.2.

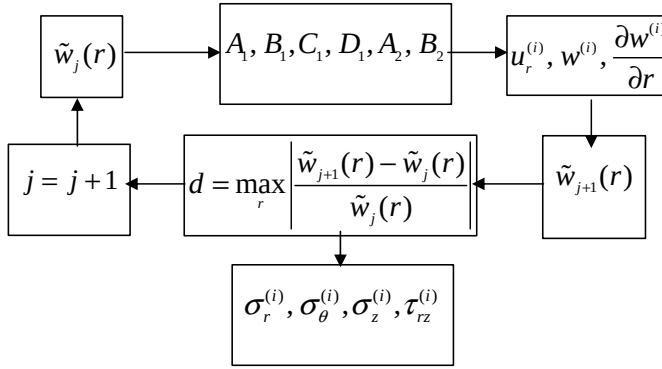


Рис. 1.2. Блок-схема решения задачи

Рассмотрим некоторый j-й шаг, на котором известна функция $\tilde{w}_j(r)$. Тогда для определения осесимметричных полей напряжений и деформаций в двухслойном упругом теле имеем следующие соотношения при $z = 0$:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \\ &\tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = \frac{1}{k_1}\left(u_r^{(1)} - u_r^{(2)}\right), \\ &w^{(1)} - w^{(2)} = \tilde{w}_j(r). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Условия на верхней границе слоя имеют вид (1.4).

Для решения сформулированной выше граничной задачи применим интегральные преобразования Ханкеля [75]. Для этого представим напряжения и перемещения в форме Лява [64]:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu_i \Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial r^2}\right],\\
\sigma_\theta^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu_i \Delta\varphi^{(i)} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\right],\\
\sigma_z^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu_i)\Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right],\\
\tau_{rz}^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu_i)\Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right],\\
u_r^{(i)} &= -\frac{1+\nu_i}{E_i}\frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial r\partial z},\\
w^{(i)} &= \frac{1+\nu_i}{E_i}\left[(1-\nu_i)\Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right].
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Здесь E_i и ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $\varphi^{(i)}(r,z)$ — бигармонические функции, которые для слоя и основания определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(1)}(r,z) &= \int_0^{+\infty}\left[\left(A_1(\beta) - zB_1(\beta)\right)e^{\beta z/H} + \left(C_1(\beta) + zD_1(\beta)\right)e^{-\beta z/H}\right]J_0(\beta r)\,d\beta,\\
\varphi^{(2)}(r,z) &= \int_0^{+\infty}\left[\left(A_2(\beta) - zB_2(\beta)\right)e^{\beta z/H}\right]J_0(\beta r)\,d\beta.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода. Соотношения (1.4) и (1.7), выраженные с помощью (1.8) через бигармонические функции (1.9), позволяют свести задачу к системе шести ли-

нейных относительно функциональных коэффициентов $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2$ уравнений вида:

$$\mathrm{M} * \mathrm{A} = \mathrm{Q}, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{A} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2\},$$

$$\mathrm{Q} = \{\overline{p}(\beta), 0, 0, 0, 0, 0\},$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & \tilde{\nu}_1 - \beta\lambda & e^{-\beta\lambda} & (\tilde{\nu}_1 + \beta\lambda)e^{-\beta\lambda} & 0 & 0 \\ 1 & 2\nu_1 + \beta\lambda & e^{-\beta\lambda} & (\beta\lambda - 2\nu_1)e^{-\beta\lambda} & 0 & 0 \\ -e^{-\beta\lambda} & \tilde{\nu}_1 e^{-\beta\lambda} & 1 & \tilde{\nu}_1 & 1 & -\tilde{\nu}_2 \\ e^{-\beta\lambda} & 2\nu_1 e^{-\beta\lambda} & 1 & -2\nu_1 & -1 & -2\nu_2 \\ e^{-\beta\lambda} & 2\tilde{\nu}_1 e^{-\beta\lambda} & -1 & 1 & -\tilde{\chi} - \beta k_1 & -\tilde{\chi} - 2\nu_2\beta k_1 \\ -e^{-\beta\lambda} & e^{-\beta\lambda} & -1 & -2\tilde{\nu}_1 & \tilde{\chi} & -2\tilde{\chi}\tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)}, \quad \lambda = H / a, \quad \tilde{\nu}_i = 1 - 2\nu_i, \quad i = 1, 2.$$

При этом функции $\tilde{w}_j(\rho)$ и $p(\rho)$ $(\rho = r / a)$ представляются в виде:

$$\begin{aligned} p(\rho) &= \int_0^{+\infty} \beta \overline{p}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \\ \tilde{w}_j(\rho) &= \int_0^{+\infty} \beta \overline{w}_j(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $\overline{p}(\beta)$ и $\overline{w}_j(\beta)$ — результат применения преобразования Ханкеля к функциям $\tilde{w}_j(\rho)$ и $p(\rho)$.

Систему уравнений решаем с использованием системы компьютерной алгебры Maple, в результате имеем аналитические соотношения для образов напряжений и перемещений. Искомые напряжения и перемещения в слое и полупространстве определяются путем применения обратных интегральных пре-

образований. Интегрирование проводилось численно, полученные аналитические соотношения были переведены в коды языка программирования Fortran, затем была написана программа расчета интегралов с проверкой их сходимости.

По найденным значениям перемещений $w^{(i)}$ и $u_r^{(i)}$ на границе слоя и полупространства из (1.6) определялась функция $\tilde{w}_{j+1}(\rho)$. Значение функции $\tilde{w}_{j+1}(\rho)$ использовалось на следующем шаге итерационного процесса в качестве правой части последнего соотношения (1.7). Итерационный процесс считался сошедшимся на *j*-м шаге, если выполнялось следующее условие:

$$\max_r \left| \frac{\tilde{w}_{j+1}(r) - \tilde{w}_j(r)}{\tilde{w}_j(r)} \right| < \varepsilon, \qquad (1.12)$$

где ε — наперед заданная малая величина.

При численной реализации в качестве нулевого приближения использовалась функция $\tilde{w}_0(\rho) = 0$. Вычисления показали хорошую сходимость итерационного процесса при различных значениях параметров задачи. Как правило, количество итераций при $\varepsilon = 10^{-3}$ не превышало четырех.

После окончания итерационной процедуры с использованием полученной на последнем шаге функции вычислялись напряжения и перемещения внутри слоя и полупространства.

При численных расчетах предполагалось, что давление, действующее на верхнюю границу слоя, равномерно распределено внутри круга радиуса a, т. е. $p(r) = p_0$.

На основании исследования задачи были выделены следующие безразмерные параметры:

$$\chi = E_1 / E_2,\ \lambda = H / a,\ \tilde{p}_0 = p_0 / E_2,\ \tilde{k} = a / (k_1 p_0), \qquad (1.13)$$

а также коэффициенты Пуассона покрытия ν_1 и полупространства ν_2, которые оказывают влияние на распределение безразмерных напряжений $\sigma_r^{(i)}/p_0, \sigma_\theta^{(i)}/p_0, \sigma_z^{(i)}/p_0, \tau_{rz}^{(i)}/p_0$ и безразмерных перемещений $u_r^{(i)}/a$, $w^{(i)}/a$ в слое и полупространстве. Параметр $\tilde{k}$ характеризует степень сцепления покрытия с подложкой.

Прежде всего, важно провести анализ функции $\tilde{w}(\rho)$ при различных значениях параметра $\tilde{k}$ для относительно твердых ($\chi > 0$) и относительно мягких ($\chi < 0$) покрытий. Результаты расчетов, представленные на рис. 1.3, позволяют сделать вывод, что при малых значениях $\tilde{k}$ и λ и $\chi > 0$ функция $\tilde{w}(\rho)$ наиболее сильно отличается от нуля. В случае мягких покрытий ($\chi < 0$) небольшие отклонения функции $\tilde{w}(\rho)$ от нуля наблюдаются лишь при малых значениях $\tilde{k}$ и λ.

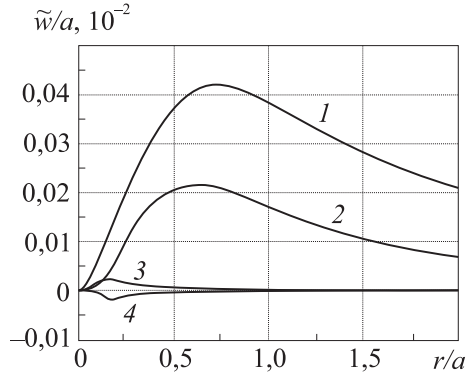


Рис. 1.3. Функция $\tilde{w}(\rho)$: *1*, *4* — $\lambda = 0{,}15$, $\tilde{k} = 0{,}01$; *2* — $\lambda = 0{,}15$, $\tilde{k} = 0{,}2$; *3* — $\lambda = 0{,}55$, $\tilde{k} = 0{,}01$; *1–3* — $\chi = 100$, $\tilde{p}_0 = 0{,}5$, $\nu_1 = 0{,}33$, $\nu_2 = 0{,}45$; *4* — $\chi = 0{,}05$, $\tilde{p}_0 = 0{,}02$, $\nu_1 = 0{,}45$, $\nu_2 = 0{,}33$

Таким образом, приближенное условие $w^{(1)} = w^{(2)}$, которое обычно ставится на границе слоя и основания, с достаточной точностью выполняется в случае относительно мягких покрытий. Для относительно твердых и тонких покрытий при малых значениях $\tilde{k}$ желательно использовать уточненное граничное условие, входящее в (1.1).

Относительное проскальзывание $(u_r^{(1)} - u_r^{(2)})/a$ точек слоя и полупространства на границе раздела для различных значений $\chi, \lambda, \tilde{k}$ представлено на рис. 1.4. Знак этой функции положителен в случае мягких покрытий и отрицателен для относительно твердых покрытий, при этом абсолютная величина проскальзывания возрастает с уменьшением параметра $\tilde{k}$. Результаты расчетов показывают, что с увеличением толщины покрытия λ при $\chi < 0$ и постоянном $\tilde{k}$ величина относительного проскальзывания в каждой точке сначала возрастает до некоторого максимального значения, зависящего от величины $\tilde{k}$, а затем убывает до нуля. Этот вывод иллюстрируется на рис. 1.4 кривыми *1–3*.

Подобную же зависимость имеет функция $\tau_{rz}^{(1)}$ на границе раздела $z = 0$. На рис. 1.5 представлены графики функции $\tau_{rz}^{(1)}$ для относительно твердых (кривые *1* и *1'*) и относительно мягких (кривые *2* и *2'*) покрытий одинаковой толщины. Кривые *1* и *2* соответствуют неполному сцеплению покрытия с полупространством, а кривые *1'* и *2'* практически совпадают с кривыми, рассчитанными для случая полного сцепления покрытия с подложкой. Мы видим, что при уменьшении степени сцепления покрытия с подложкой абсолютные значения функции $\tau_{rz}^{(1)}$ на границе раздела слоев также уменьшаются.

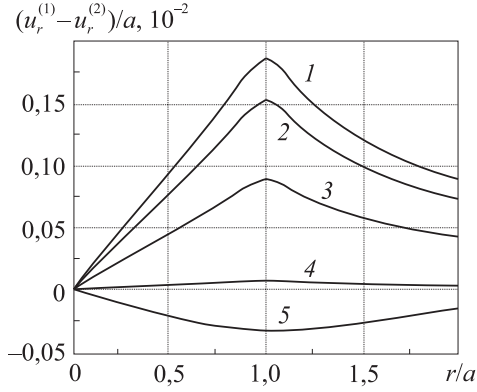


Рис. 1.4. Относительное проскальзывание точек слоя и полупространства на границе раздела: *1* — $\lambda = 0{,}55,\ \tilde{k} = 0{,}01$; *2*, *5* — $\lambda = 0{,}15,\ \tilde{k} = 0{,}01$; 3 — $\lambda = 1{,}2,\ \tilde{k} = 0{,}01$; 4 — $\lambda = 0{,}15,\ \tilde{k} = 0{,}5$; *1–4* — $\chi = 0{,}05,\ \tilde{p}_0 = 0{,}02,\ \nu_1 = 0{,}45,\ \nu_2 = 0{,}33$; *5* — $\chi = 100,\ \tilde{p}_0 = 0{,}5,\ \nu_1 = 0{,}33,\ \nu_2 = 0{,}45$

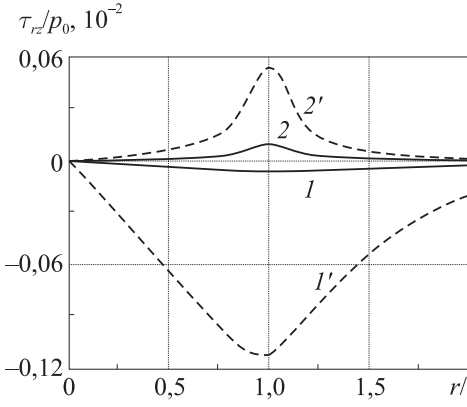


Рис. 1.5. Функция $\tau_{rz}^{(1)}$ на границе раздела $z = 0$: *1*, *2* — $\tilde{k} = 0{,}5$; *1′*, *2′* — $\tilde{k} = 10$; *1*, *1′* — $\chi = 100,\ \lambda = 0{,}15,\ \nu_1 = 0{,}33,\ \nu_2 = 0{,}45$; *2*, *2′* — $\chi = 0{,}05,\ \lambda = 0{,}15,\ \nu_1 = 0{,}45,\ \nu_2 = 0{,}33$

Анализ функции $\sigma_z^{(1)}(\rho)$ на границе раздела позволяет установить, что в случае мягких покрытий поведение функции практически не зависит от параметра $\tilde{k}$ (кривые *2* и *2′* на рис. 1.6). В случае же относительно твердых покрытий значения функции изменяются с изменением параметра $\tilde{k}$, особенно в области нагружения $\rho \le 1$, где значения исследуемой функции в области неполного сцепления (рис. 1.6, кривая *1*) превосходят ее значения при полном сцеплении. Следует также отметить, что за пределами области нагружения при $\rho > 1$ и $\chi > 1$ функция $\sigma_z^{(1)}(\rho)$ становится отрицательной. При этом максимальные по абсолютной величине значения функции увеличиваются при уменьшении степени сцепления покрытия с подложкой. Это обстоятельство может привести к отслаиванию покрытия, особенно в случае малых значений параметра $\tilde{k}$. Это значит, что нарушаются условия совместности перемещений на границе раздела твердого упругого слоя с упругим полупространством при отсутствии сцепления между ними.

Графики функции $\sigma_r^{(1)}(\rho)$ при $z / H = 0{,}9$ (кривые *1* и *1′*), $z = 0$ (кривые *2* и *2′*), а также функции $\sigma_r^{(2)}(\rho)$ при $z = 0$ (кривые *3* и *3′*) приведены на рис. 1.7. Они соответствуют случаю относительно тонкого и твердого покрытия. Значения функции при неполном сцеплении (сплошные линии) и полном сцеплении (пунктирные линии) наиболее сильно отличаются на границе раздела в слое ($\sigma_r^{(1)}$ при $z = 0$). При этом под областью нагружения $\rho \le 1$ радиальные напряжения на верхней границе слоя являются сжимающими и на его нижней границе — растягивающими. Заметно, что для мягких покрытий значения функции $\sigma_r(\rho)$ при различных значениях параметра $\tilde{k}$ мало отличаются друг от друга.

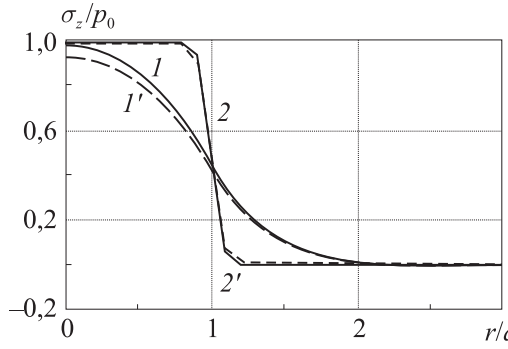


Рис. 1.6. Функция $\sigma_z^{(1)}$ на границе раздела $z=0$: *1*, *2* — $\tilde{k}=0,01$; *1′*, *2′* — $\tilde{k}=10$; *1*, *1′* — $\chi=100$, $\lambda=0,15$, $\nu_1=0,33$, $\nu_2=0,45$; *2*, *2′* — $\chi=0,05$, $\lambda=0,15$, $\nu_1=0,45$, $\nu_2=0,33$

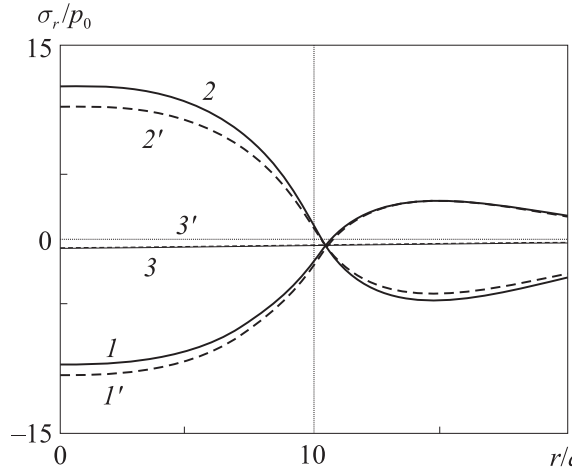


Рис. 1.7. Функция $\sigma_r(\rho)$: *1–3* — $\tilde{k}=0,01$; *1′–3′* — $\tilde{k}=0,10$; *1* и *1′* — $z/H=0,9$; *2* и *2′* — на границе раздела со стороны покрытия; *3* и *3′* — на границе раздела со стороны полупространства; $\chi=100$, $\lambda=0,15$, $\nu_1=0,33$, $\nu_2=0,45$

Анализ функции $\sigma_\theta(\rho)$ при различных значениях $\tilde{k}$ позволяет сделать аналогичный предыдущему вывод, что параметр $\tilde{k}$ наиболее сильно влияет на значения функции $\sigma_\theta^{(1)}(\rho)$ на границе раздела в пределах области нагружения, с уменьшением значений $\tilde{k}$ абсолютные значения функции в рассматриваемой точке ρ $(\rho \le 1)$ увеличиваются.

Характер разрушения покрытия во многом определяется распределением максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ в слое и полупространстве. Расчеты показыают, что максимальные значения $\tau_{\max}^{(1)}$ внутри слоя в случае твердых покрытий имеют место на оси симметрии области нагружения. На рис. 1.8 представлены графики функции $\tau_{\max}(z)$ при $\rho = 0$ и $\chi = 100$. Для твердых и тонких покрытий (кривые *1* и *1'*) наблюдаются различия в значениях функции при различных величинах параметра $\tilde{k}$. В случае неполного сцепления (малых значений $\tilde{k}$) увеличивается концентрация максимальных касательных напряжений в слое вблизи границы раздела по сравнению со случаем полного сцепления. При увеличении толщины слоя значения $\tau_{\max}^{(1)}$ на границе раздела уменьшаются. Для твердых и толстых покрытий разница в значениях функции $\tau_{\max}(z)$ при изменении параметра $\tilde{k}$ становится пренебрежимо малой.

Анализ функции $\tau_{\max}^{(2)}(\rho)$ на границе раздела слоя и полупространства позволяет установить, что в случае больших значений $\tilde{k}$ эта функция является монотонно убывающей по ρ, в то время как при малых $\tilde{k}$ она имеет максимум под границей зоны нагружения $(\rho = 1)$, однако значения функции в этих точках на порядок меньше соответствующих значений в слое.

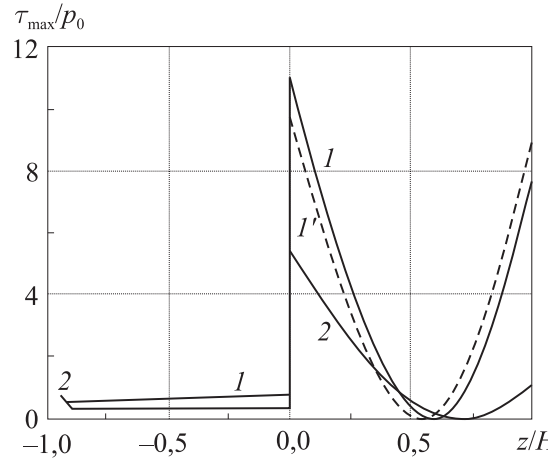


Рис. 1.8. Функция $\tau_{\max}(z)$: *1* — $\lambda = 0,2$, $\tilde{k} = 0,01$; *1′* — $\lambda = 0,2$, $\tilde{k} = 0,10$; *2* — $\lambda = 0,55$, $\tilde{k} = 0,01$; $\chi = 100$, $\nu_1 = 0,33$, $\nu_2 = 0,45$

Для мягких покрытий параметр $\tilde{k}$ оказывает слабое влияние на распределение максимальных касательных напряжений в слое и основании.

Проведенные исследования характера распределения напряжений в телах с покрытиями при использовании усложненных условий на границе раздела слоя и полупространства, которые отражают степень сцепления покрытия и полупространства, а также учитывают относительный сдвиг точек границы вследствие деформации тел, позволяют сделать следующие выводы:

– условия на границе раздела покрытия и полупространства наиболее сильно влияют на характер напряженного состояния в двухслойном теле в случае относительно твердых и тонких покрытий;
– при уменьшении степени сцепления покрытия с полупространством увеличиваются значения отрывающих нор-

мальных напряжений на границе раздела относительно тонкого и твердого упругого слоя и полупространства, что может привести к отслаиванию покрытия;

– использование уточненных граничных условий на нормальные перемещения точек слоя и полупространства целесообразно в случае относительно твердых и тонких покрытий при малой степени их сцепления с основанием.

1.2. Осесимметричная контактная задача для многослойного покрытия с неполным сцеплением слоев

Рассмотрим контактное взаимодействие осесимметричного гладкого индентора и упругого полупространства (рис. 1.9), в котором модуль Юнга и коэффициент Пуассона являются кусочно-постоянными функциями, зависящими от расстояния от поверхности. Форма индентора описывается функцией $f(r)$.

На индентор действует нормальная сила *P*, направленная по оси симметрии индентора. Силы трения отсутствуют, задача рассматривается в осесимметричной постановке. В цилиндрической системе координат, связанной с точкой начального касания, граничные условия на поверхности полупространства имеют вид:

$$\begin{aligned} &w^{(1)} + w^{(0)} = f(r) + \delta, && 0 \le r \le a; \\ &\sigma_z^{(1)} = p_c(r), && a < r < \infty; \\ &\tau_{rz}^{(1)} = 0. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Здесь $w^{(1)}$ и $w^{(0)}$ — упругие перемещения поверхностей полупространства и индентора соответственно (если рассматривается

жесткий индентор, принимаем $w^{(0)} \equiv 0$); δ — сближение двух тел; a — радиус области контакта, который для гладких инденторов является неизвестной величиной. Условие $\sigma_z^{(1)} = p_c(r)$ соответствует наличию на поверхности полупространства вне области контакта дополнительных сил (пригрузки), направленных перпендикулярно поверхности полупространства, которые полагаются известными и распределенными симметрично относительно центра области контакта.

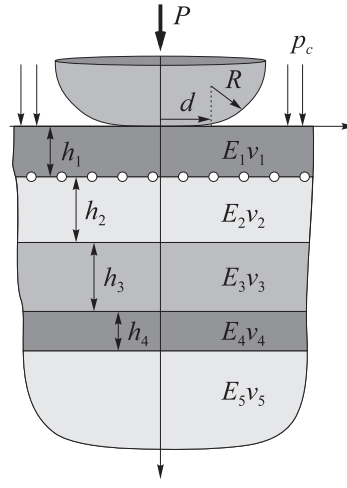


Рис. 1.9. Схема контакта гладкого индентора и многослойного полупространства

Выполняется также условие равновесия:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} p(r)\, r\, dr\, d\varphi . \qquad (1.15)$$

Здесь $p(r)$ — распределение контактного давления ($p(r) = \sigma_z^{(1)}(r)$ для $r \le a$). Для гладкого индентора учитывается

также условие равенства нулю нормальных напряжений на границах области контакта, радиус которой неизвестен:

$$\sigma_z(r)=0, \quad r=a. \tag{1.16}$$

Условия на границе раздела упругих слоев принимаются в виде:

$$\begin{aligned} &w^{(i)}=w^{(i+1)}, \quad \sigma_z^{(i)}=\sigma_z^{(i+1)}, \quad \tau_{rz}^{(i)}=\tau_{rz}^{(i+1)}, \\ &\tau_{rz}^{(i)}=\frac{1}{k_i}\left(u_r^{(i)}-u_r^{(i+1)}\right), \quad i=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь $w^{(i)}$ и $u_r^{(i)}$ — вертикальные и радиальные перемещения в i-м слое, при $i=n+1$ — в упругом полупространстве, на котором лежит многослойное покрытие. Связь касательных напряжений $\tau_{rz}^{(i)}$ с разницей радиальных смещений соседних слоев на границе их раздела соответствует случаю неполного сцепления слоев. Коэффициенты k_i предполагаются известными. При $k_i \to \infty$ граничные условия соответствуют отсутствию сцепления на границе раздела слоев:

$$\tau_{rz}^{(i)}=\tau_{rz}^{(i+1)}=0. \tag{1.18}$$

При $k_i=0$ выполняются условия полного сцепления:

$$u_r^{(i)}=u_r^{(i+1)}. \tag{1.19}$$

Осесимметричная задача с граничными условиями (1.14)–(1.17) решается с помощью метода, основанного на интегральных преобразованиях Ханкеля [75]. Представим напряжения и перемещения в слое и основании в форме Лява (1.8).

Бигармонические функции для произвольного слоя i и полупространства представим в виде:

$$\varphi^{(i)}(r,z)=\int_0^{+\infty}\left[\left(A_i(\beta)-zB_i(\beta)\right)e^{\beta z/H}+\left(C_i(\beta)+zD_i(\beta)\right)e^{-\beta z/H}\right]J_0(\beta r)\,d\beta,$$

$$\varphi^{(n+1)}(r,z)=\int_0^{+\infty}\left[\left(A_{n+1}(\beta)-zB_{n+1}(\beta)\right)e^{\beta z/H}\right]J_0(\beta r)\,d\beta.$$

(1.20)

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, H — толщина покрытия из n слоев.

Вместо граничных условий (1.14) рассмотрим следующие условия на верхней границе верхнего слоя:

$$\sigma_z^{(1)}=q(r),\quad \tau_{rz}^{(1)}=0. \tag{1.21}$$

Функция $q(r)$ совпадает с $p(r)$ внутри области контакта; вне области контакта она совпадает с функцией $p_c(r)$.

Соотношения (1.17) и (1.21), представленные с помощью (1.8) и (1.20), позволяют получить систему из $4n + 2$ уравнений, линейных относительно функциональных коэффициентов $A_1(\beta),B_1(\beta),C_1(\beta),D_1(\beta),\ldots A_i(\beta),B_i(\beta),C_i(\beta),D_i(\beta),\ldots A_{n+1}(\beta),B_{n+1}(\beta)$:

$$\mathrm{M}*\mathrm{A}=\mathrm{Q}, \tag{1.22}$$

где

$$\mathrm{A}=\left\{A_1,B_1,C_1,D_1,\ldots,A_n,B_n,C_n,D_n,A_{n+1},B_{n+1}\right\},$$

$$\mathrm{Q}=\left\{\overline{q}(\beta),0,\ldots..,0,0\right\},$$

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} N_0^{(2,4)} & & & & & \\ N_1^{(4,4)} & R_2^{(4,4)} & & & 0 & \\ & N_2^{(4,4)} & R_3^{(4,4)} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & N_{n-1}^{(4,4)} & R_n^{(4,4)} & \\ & & & & N_n^{(4,4)} & P_{n+1}^{(4,2)} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы-клетки определяются следующим образом:

$$N_0^{(2,4)} = \begin{pmatrix} -1 & \tilde{\nu}_1 - \beta\tilde{\lambda} & e^{-\beta\tilde{\lambda}} & (\tilde{\nu}_1 + \beta\tilde{\lambda})e^{-\beta\tilde{\lambda}} \\ 1 & 2\nu_1 + \beta\tilde{\lambda} & e^{-\beta\tilde{\lambda}} & (\beta\tilde{\lambda} - 2\nu_1)e^{-\beta\tilde{\lambda}} \end{pmatrix},$$

$$N_i^{(4,4)} = \begin{pmatrix} -\xi_i(\beta) & (-\beta\tilde{\lambda}\mu_i + \tilde{\nu}_i)\xi_i(\beta) & 1 & \beta\tilde{\lambda}\mu_i + \tilde{\nu}_i \\ \xi_i(\beta) & (\beta\tilde{\lambda}\mu_i + 2\nu_i)\xi_i(\beta) & 1 & \beta\tilde{\lambda}\mu_i - 2\nu_i \\ \xi_i(\beta) & (\beta\tilde{\lambda}\mu_i + 1)\xi_i(\beta) & -1 & -\beta\tilde{\lambda}\mu_i + 1 \\ -\xi_i(\beta) & (-\beta\tilde{\lambda}\mu_i + 2\tilde{\nu}_i)\xi_i(\beta) & -1 & -\beta\tilde{\lambda}\mu_i - 2\tilde{\nu}_i \end{pmatrix},$$

$$R_i^{(4,4)} = \begin{pmatrix} 1 & \beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} - \tilde{\nu}_i & -\xi_i(\beta) & -(\beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} + \tilde{\nu}_i)\xi_i(\beta) \\ -1 & -\beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} - 2\nu_i & -\xi_i(\beta) & -(\beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} - 2\nu_i)\xi_i(\beta) \\ -\chi_{i-1} - k_{i-1} & -(k_{i-1} + \chi_{i-1})\beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} + \\ & +2\nu_i k_{i-1} - \chi_{i-1} & (\chi_{i-1} - 1)\xi_i(\beta) & (2\nu_i + (\chi_{i-1} - 1)\beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} - \\ & & & -\chi_{i-1})\xi_i(\beta) \\ \chi_{i-1} & \chi_{i-1}(\beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} - 2\tilde{\nu}_i) & \chi_{i-1}\xi_i(\beta) & \chi_{i-1}(\beta\tilde{\lambda}\mu_{i-1} + 2\tilde{\nu}_i)\xi_i(\beta) \end{pmatrix},$$

$$P_{n+1}^{(4,2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\nu}_{n+1} \\ -1 & -2\nu_{n+1} \\ -\tilde{\chi}_n - \beta k_n & -\tilde{\chi}_n - 2\nu_{n+1}\beta k_n \\ \tilde{\chi}_n & -2\tilde{\chi}_n\tilde{\nu}_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\chi}_i = \frac{E_i(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}(1+\nu_i)}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{H}{a}, \quad \tilde{\nu}_i = 1 - 2\nu_i, \quad \xi_i(\beta) = e^{-\beta\tilde{\lambda}(\mu_{i-1} - \mu_i)}, \quad \mu_i = \frac{h_i}{H} \quad (\mu_0 = 1).$$

Здесь h_i — толщина i-го слоя, $\overline{q}(\beta)$ — результат применения преобразования Ханкеля к функции $q(\rho)$ $(\rho = r/a)$:

$$\overline{q}(\beta) = \int_0^{+\infty} \rho q(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho. \tag{1.23}$$

Система уравнений (1.22) решается аналитически с помощью системы аналитических вычислений Maple, если число слоев n = 1, 2. Подробное исследование системы уравнений (1.22)

для предельных случаев полного сцепления между слоями и отсутствия сцепления приведено в [75]. В частности, было показано, что определитель системы отличен от нуля на интервале $0 < \beta < \infty$. Для произвольного числа слоев разработан программный блок, написанный на языке Fortran, в котором использовался метод Гаусса с выделением главного элемента с контролем величины определителя и погрешности для любого из используемых значений β.

После решения системы функциональных уравнений (1.22) напряжения и перемещения рассчитываются на основе соотношения (1.8) с учетом полученных в результате решения системы уравнений бигармонических функций (1.20). Например, вертикальное смещение поверхности определяется соотношением:

$$\frac{E_1}{(1+\nu_1)a} w^{(1)}(\rho) = \int_0^{+\infty} \overline{\Delta}_w^{(1)}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \qquad (1.24)$$

где

$$\overline{\Delta}_w^{(1)} = \left[-\overline{A}_1(\beta) - \left(\beta\tilde{\lambda} - 2\tilde{\nu}_1 \right) \overline{B}_1(\beta) \right] + \left[-\overline{C}_1(\beta) - \left(\beta\tilde{\lambda} + 2\tilde{\nu}_1 \right) \overline{D}_1(\beta) \right] e^{-\beta\tilde{\lambda}}.$$

Сходимость интегралов типа (1.24), используемых для определения напряжений и перемещений, доказана в [75]. При этом показано, что для точек поверхности необходимо использовать метод улучшения сходимости интегралов, состоящий в разложении их на сумму интегралов. Так, для (1.24) имеем:

$$\frac{E_1}{(1+\nu_1)a} w^{(1)}(\rho) = 2(1-\nu_1) \left[\int_0^1 \overline{q}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta + \int_1^{+\infty} \overline{q}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta \right] +$$

$$+ \int_0^{+\infty} (\overline{\Delta}_w^{(1)}(\beta) - 2(1-\nu_1)\overline{q}(\beta)) J_0(\rho\beta) d\beta. \qquad (1.25)$$

В этом и подобных случаях используется тот факт, что значения напряжений $\sigma_z^{(1)}$ и $\tau_{rz}^{(1)}$ на поверхности известны. Таким образом, напряжения и перемещения определяются численно.

Решение контактной задачи с граничными условиями (1.21) ищется в виде кусочно-постоянной функции

$$p(r) = p_j (r_{j-1} < r < r_j,\ r_j = j \cdot \Delta r,\ j = 1,2,...,N).$$

Предполагаемая область контакта делится на N колец толщиной Δr, рассматривается следующая система уравнений:

$$p_1\left(\kappa_1^{(m)} - \omega_1^{(m)}\right) + p_2\left(\kappa_2^{(m)} - \omega_2^{(m)}\right) + ... + p_1\left(\kappa_N^{(m)} - \omega_N^{(m)}\right) = f_1(r_m) \quad (i = 1,2...N-1), \tag{1.26}$$

где $f_1(r) = \left(f(r) - f(a)\right) - \left(g(r) - g(a)\right)$ (таким образом из рассмотрения исключается константа δ, присутствующая в соотношении (1.15)); $g(r)$ — упругие перемещения поверхности, обусловленные действием давления $p_c(r)$. Коэффициенты $\kappa_j^{(m)}$ определяют разницу вертикальных перемещений колец с внешними радиусами r_m и r_N под действием единичного давления, действующего внутри j-го кольца. Эти коэффициенты и функция $g(r)$ определяются на основе решения задачи с граничными условиями (1.17) и (1.21).

Коэффициенты $\omega_j^{(m)}$ позволяют учесть упругие перемещения поверхности индентора. Они могут быть определены из следующего соотношения:

$$\overline{w}^{(0)} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{p(r')r'dr'd\theta}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\theta}}, \tag{1.27}$$

где E_0 и ν_0 — упругие характеристики индентора. Для кусочно-постоянного распределения давления коэффициенты имеют вид:

$$\omega_j^{(i)} = \begin{cases} \tilde{E}\rho_j\left[E\left(\frac{r_m}{\rho_j}\right) - E\left(\frac{r_{m-1}}{\rho_j}\right) - \left(1-\frac{r_m}{\rho_j}\right)K\left(\frac{r_m}{\rho_j}\right) + \left(1-\frac{r_{m-1}}{\rho_j}\right)K\left(\frac{r_{m-1}}{\rho_j}\right)\right] - \omega_m^*, & m < j \\ \tilde{E}\left[r_i E\left(\frac{\rho_j}{r_m}\right) - \rho_j\left[E\left(\frac{r_{m-1}}{\rho_j}\right) - \left(1-\frac{r_{m-1}}{\rho_j}\right)K\left(\frac{r_{m-1}}{\rho_j}\right)\right]\right] - \omega_m^*, & m = j \\ \tilde{E}\left[r_i E\left(\frac{\rho_j}{r_m}\right) - r_{m-1}E\left(\frac{\rho_j}{r_{m-1}}\right)\right] - \omega_i^*, & m > j \end{cases}$$

$$\omega_m^* = \tilde{E}r_N\left[E\left(\frac{r_m}{r_N}\right) - E\left(\frac{r_{m-1}}{r_N}\right) - \left(1-\frac{r_m}{r_N}\right)K\left(\frac{r_m}{r_N}\right) + \left(1-\frac{r_{m-1}}{r_N}\right)K\left(\frac{r_{m-1}}{r_N}\right)\right],$$

$$\rho_j = \frac{r_{j-1}+r_j}{2}, \quad \tilde{E} = \frac{4\left(1-\nu_0^2\right)}{\pi E_0}, \tag{1.28}$$

где $K(x)$ и $E(x)$ — полные эллиптические интегралы.

Систему (1.26) замыкает уравнение равновесия, записанное в виде:

$$\pi\sum_{m=1}^{N} p_m\left(r_m^2 - r_{m-1}^2\right) = P. \tag{1.29}$$

Если форма индентора описывается гладкой функцией $f(r)$, необходимо дополнительное условие $p_N = p_c(a)$, которое позволяет, используя метод итераций, определить неизвестный радиус области контакта.

Используя полученные контактные давления, можно на основе изложенного выше метода рассчитать внутренние напряжения, возникающие в слое и основании при осесимметричном нагружении.

1.3. Фрикционное нагружение тел с покрытиями

Решение осесимметричной задачи о контакте гладкого индентора и тел с упругими покрытиями можно использовать для определения напряжений, возникающих в покрытии и подложке при фрикционном нагружении (рис. 1.10). Силы трения скольжения при движении вдоль оси 0x в граничных условиях на поверхности вводятся по закону Амонтона – Кулона в системе координат, связанной с движущимся телом:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)}(x,y) = -p(x,y), \quad \tau_{xz}^{(1)} = -\mu\, p(x,y), \quad 0 < r < a; \\ &\sigma_z^{(1)} = 0, \qquad\qquad \tau_{xz}^{(1)} = 0, \qquad a < r < \infty; \\ &\tau_{yz}^{(1)} = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < r < \infty, \\ &r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Здесь μ — коэффициент трения. На границе раздела слоев сохраняются условия неполного сцепления:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(i)} = \sigma_z^{(i+1)}, \quad w^{(i)} = w^{(i+1)}, \\ &\tau_{xz}^{(i)} = \tau_{xz}^{(i+1)} = \frac{1}{k_i}\left(u_x^{(i)} - u_x^{(i+1)}\right), \\ &\tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(i+1)} = \frac{1}{k_i}\left(u_y^{(i)} - u_y^{(i+1)}\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Таким образом, поставленная задача является пространственной задачей о нагружении многослойного упругого полупространства локально распределенными нормальной и касательной нагрузками, с усложненными условиями на границе раздела слоев.

Метод решения некоторых трехмерных задач о нагружении многослойного упругого полупространства описан в [75]. Ниже будут изложены основные соотношения, позволяющие

решить задачу, в том числе для случая неполного сцепления между слоями.

Как было показано в разделе 1.2, решение осесимметричной контактной задачи определяется в виде кусочно-постоянной функции $p(r)$, зависящей от радиуса.

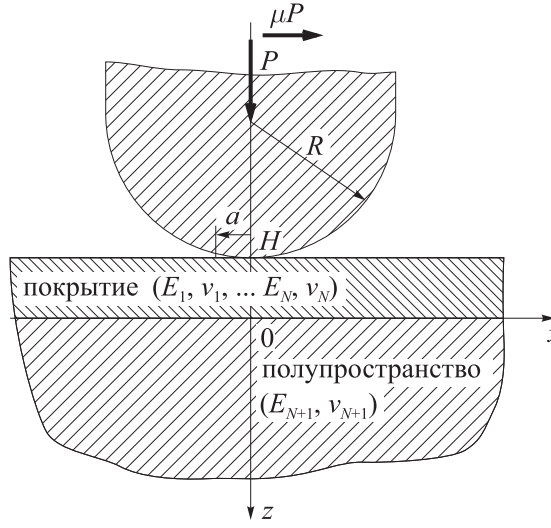


Рис. 1.10. Схема фрикционного нагружения

Был разработан алгоритм перехода от граничного элемента-кольца к элементу-квадрату с постоянным распределением нормальных напряжений, который при достаточно малых размерах обеспечивает адекватный переход к пространственной задаче о нагружении поверхности. Схема перехода представлена на рис. 1.11.

Как показано на рис. 1.11, в случае, когда внутрь поверхности квадрата попадает граница между двумя кольцами, происходит расчет среднего давления внутри квадрата с учетом вкла-

да элементов этих двух колец. Таким образом, выполняется условие сохранения общей нагрузки, приложенной к рассмотренной области контакта. Поскольку касательные напряжения на поверхности прямо пропорциональны нормальным (1.30), они также будут постоянными внутри каждого квадрата.

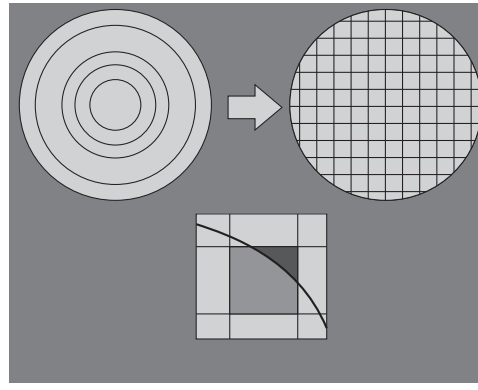


Рис. 1.11. Схема перехода от осесимметричного распределения давления внутри элементов-колец к пространственному описанию

В результате задача сводится к определению напряжений и перемещений, возникающих в многослойном упругом полупространстве под действием заданного постоянного нормального и касательного нагружения, распределенного внутри квадрата. Затем проводится суперпозиция результатов. Сетка точек, в которых рассчитываются напряжения и перемещения, построена так, чтобы на поверхности попадать в центры элементов-квадратов, минимизируя таким образом влияние скачков между квадратами.

Напряжения в i-м слое удовлетворяют системе дифференциальных уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}^{(i)}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}^{(i)}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z^{(i)}}{\partial z}=0,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

а также уравнениям неразрывности Бельтрами–Митчела:

$$\begin{aligned}
&(1+\nu_i)\Delta\sigma_x^{(i)}+\frac{\partial^2(\sigma_x^{(i)}+\sigma_y^{(i)}+\sigma_z^{(i)})}{\partial x^2}=0,\\
&(1+\nu_i)\Delta\sigma_y^{(i)}+\frac{\partial^2(\sigma_x^{(i)}+\sigma_y^{(i)}+\sigma_z^{(i)})}{\partial y^2}=0,\\
&(1+\nu_i)\Delta\sigma_z^{(i)}+\frac{\partial^2(\sigma_x^{(i)}+\sigma_y^{(i)}+\sigma_z^{(i)})}{\partial z^2}=0,\\
&(1+\nu_i)\Delta\tau_{xy}^{(i)}+\frac{\partial^2(\sigma_x^{(i)}+\sigma_y^{(i)}+\sigma_z^{(i)})}{\partial x\,\partial y}=0,\\
&(1+\nu_i)\Delta\tau_{yz}^{(i)}+\frac{\partial^2(\sigma_x^{(i)}+\sigma_y^{(i)}+\sigma_z^{(i)})}{\partial y\,\partial z}=0,\\
&(1+\nu_i)\Delta\tau_{xz}^{(i)}+\frac{\partial^2(\sigma_x^{(i)}+\sigma_y^{(i)}+\sigma_z^{(i)})}{\partial x\,\partial z}=0.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Для перемещений выпишем уравнения Ламе (уравнения равновесия):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial e^{(i)}}{\partial x}+(1-2\nu_i)\Delta u_x^{(i)}=0,\\
&\frac{\partial e^{(i)}}{\partial y}+(1-2\nu_i)\Delta u_y^{(i)}=0,\\
&\frac{\partial e^{(i)}}{\partial z}+(1-2\nu_i)\Delta w^{(i)}=0,\\
&e^{(i)}=\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial w^{(i)}}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

В форме Галеркина общее решение уравнений (1.32)–(1.34) имеет вид [17]:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^{(i)} &= \left(\nu_i\Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)+2(1-\nu_i)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi_1^{(i)},\\
\sigma_y^{(i)} &= \left(\nu_i\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)+2(1-\nu_i)\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi_2^{(i)},\\
\sigma_z^{(i)} &= \left(\nu_i\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)+2(1-\nu_i)\frac{\partial}{\partial z}\Delta\varphi_3^{(i)},\\
\tau_{xy}^{(i)} &= -\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)+(1-\nu_i)\Delta\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial x}\right),\\
\tau_{yz}^{(i)} &= -\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)+(1-\nu_i)\Delta\left(\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial y}\right),\\
\tau_{xz}^{(i)} &= -\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)+(1-\nu_i)\Delta\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial x}\right),\\
u_x^{(i)} &= -\frac{1+\nu_i}{E_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)-2(1-\nu_i)\Delta\varphi_1^{(i)}\right),\\
u_y^{(i)} &= -\frac{1+\nu_i}{E_i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)-2(1-\nu_i)\Delta\varphi_2^{(i)}\right),\\
w^{(i)} &= -\frac{1+\nu_i}{E_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(i)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(i)}}{\partial z}\right)-2(1-\nu_i)\Delta\varphi_3^{(i)}\right).
\end{aligned}
\qquad (1.35)
$$

Здесь для каждого слоя существуют три независимые бигармонические функции $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \varphi_3^{(i)}$.

В случае, если ограничиться только теми задачами, которые решаются с помощью одной бигармонической функции, т. е. если $\varphi_1^{(i)} = \varphi_2^{(i)} = 0$, а функция $\varphi_3^{(i)}$ является единственной ненулевой, т. е. $\varphi_3^{(i)} = \varphi^{(i)}$, соотношения (1.35) приводятся к виду:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial x^2}\right),\\
\sigma_y^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial y^2}\right),\\
\sigma_z^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu_i)\Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right),\\
\tau_{xy}^{(i)} &= -\frac{\partial^3\varphi^{(i)}}{\partial x\partial y\partial z},\\
\tau_{yz}^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial y}\left((1-\nu_i)\Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right),\\
\tau_{xz}^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial x}\left((1-\nu_i)\Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right),\\
u_x^{(i)} &= -\frac{1+\nu_i}{E_i}\frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial x\partial z},\\
u_y^{(i)} &= -\frac{1+\nu_i}{E_i}\frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial y\partial z},\\
w^{(i)} &= -\frac{1+\nu_i}{E_i}\left(2(1-\nu_i)\Delta\varphi^{(i)} - \frac{\partial^2\varphi^{(i)}}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

Класс задач, которые решаются с помощью (1.36), ограничивается краевыми задачами с произвольной нормальной нагрузкой и касательной нагрузкой, удовлетворяющей условиям:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_z^{(1)}(x,y)\big|_{z=H} = p(x,y),\\
&\tau_{xz}^{(1)}(x,y)\big|_{z=H} = \frac{\partial}{\partial x}s(x,y),\ \ \tau_{yz}^{(1)}(x,y)\big|_{z=H} = \frac{\partial}{\partial y}s(x,y).
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

Потенциал $s(x,y) = -\mu p_0 x$ характеризует постоянную однонаправленную касательную нагрузку $-\mu p_0$:

$$\tau_{xz}^{(1)}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(-\mu p_0 x),\quad \tau_{yz}^{(1)}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(-\mu p_0 x)=0. \quad (1.38)$$

Таким образом, задача о фрикционном нагружении многослойного полупространства, где нагрузка является кусочно-постоянной функцией, может быть исследована с помощью решения (1.36).

Метод, основанный на двойных преобразованиях Фурье, может быть использован для финитных функций $p(x,y), s(x,y)$, допускающих двойное интегральное преобразование Фурье и, дополнительно, для интеграла Фурье функции $s(x,y)$ должно выполняться условие дифференцируемости по параметрам x, y. Очевидно, что функции, ненулевые только внутри квадрата $-b\le x\le b, -b\le y\le b$ и определенные как

$$p(x,y)=p_0=const,\ \ s(x,y)=-\mu p_0 x, \quad (1.39)$$

удовлетворяют заданным условиям.

Трансформанта Фурье для произвольной финитной функции $p(x,y)$ определяется соотношением

$$\overline{p}(\alpha,\beta)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\tilde{\Omega}} p(x,y)e^{i(\alpha x+\beta y)}dxdy \quad (1.40)$$

(где $\tilde{\Omega}$ — область определения функции). Можно представить (1.40) в виде:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}(\alpha,\beta)=\overline{p}_c(\alpha,\beta)+i\,\overline{p}_s(\alpha,\beta),\\
&\overline{p}_c(\alpha,\beta)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\tilde{\Omega}} p(x,y)\cos(\alpha x+\beta y)dxdy, \quad (1.41)\\
&\overline{p}_s(\alpha,\beta)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\tilde{\Omega}} p(x,y)\sin(\alpha x+\beta y)dxdy.
\end{aligned}$$

Применительно к функциям (1.39) получим:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_c(\alpha,\beta)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{2(\cos(\alpha b-\beta b)-\cos(\alpha b+\beta b))}{\alpha\beta},\\
&\overline{p}_s(\alpha,\beta)=0,\\
&\overline{s}_c(\alpha,\beta)=0,\\
&\overline{s}_s(\alpha,\beta)=\frac{1}{4\pi^2\alpha^2\beta}(-2(\cos(\alpha b+\beta b)+\alpha b\sin(\alpha b+\beta b)-\\
&\qquad -\cos(\alpha b-\beta b)-\alpha b\sin(\alpha b-\beta b))).
\end{aligned}\tag{1.42}$$

Представим функции $p(x,y)$, $s(x,y)$ в виде суммы:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} p(x,y)\\ s(x,y)\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}\overline{p}_k(\alpha,\beta)\\ \overline{s}_k(\alpha,\beta)\end{pmatrix}G_k(\alpha x,\beta y)d\alpha d\beta,\\
&\overline{p}_1(\alpha,\beta)=-\overline{p}_2(\alpha,\beta)=\overline{p}_c(\alpha,\beta),\\
&\overline{p}_3(\alpha,\beta)=\overline{p}_4(\alpha,\beta)=\overline{p}_s(\alpha,\beta),\\
&\overline{s}_1(\alpha,\beta)=-\overline{s}_2(\alpha,\beta)=\overline{s}_c(\alpha,\beta),\\
&\overline{s}_3(\alpha,\beta)=\overline{s}_4(\alpha,\beta)=\overline{s}_s(\alpha,\beta),\\
&G_1(\alpha x,\beta y)=\cos(\alpha x)\cos(\beta y),\ G_2(\alpha x,\beta y)=\sin(\alpha x)\sin(\beta y),\\
&G_3(\alpha x,\beta y)=\sin(\alpha x)\cos(\beta y),\ G_4(\alpha x,\beta y)=\cos(\alpha x)\sin(\beta y).
\end{aligned}\tag{1.43}$$

Таким образом, получены четыре части, в сумме описывающие граничные условия. Учитывая наличие нулевых трансформант в (1.42), получим:

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_3(\alpha,\beta)=\overline{p}_4(\alpha,\beta)=0,\\
&\overline{s}_1(\alpha,\beta)=\overline{s}_2(\alpha,\beta)=0.
\end{aligned}\tag{1.44}$$

Дальнейший метод решения, идентичный для каждой из четырех задач, использует конструктивную аналогию между общими решениями вида (1.36) и (1.8), алгоритм расчета включает в себя:

– переход к цилиндрической системе координат,
– определение бигармонических функций аналогично (1.20),
– сведение задачи к системе уравнений типа (1.22).

В случае двухслойного упругого полупространства образы напряжений и перемещений удается получить в аналитическом виде (с использованием системы аналитических вычислений Maple).

Вопрос о сходимости обратных двойных интегральных преобразований Фурье исследован в [75]. Несмотря на то, что сходимость доказана, проверка сходимости, проводимая на каждом этапе численных расчетов для определения напряжений и перемещений, выявила плохую сходимость в точках, близких к поверхности (таких, где расстояние от рассматриваемой точки до поверхности не превышало 10 % от размера квадрата). Для получения достоверных результатов были использованы элементы-квадраты малого размера (относительно толщины покрытия), что привело к повышению требований к точности решения системы функциональных уравнений типа (1.22), поэтому, несмотря на универсальность метода и теоретическую возможность его использования для многослойных покрытий, в данном исследовании достоверные результаты были получены только для двухслойного упругого полупространства.

В этой главе будет показано, что и при таком ограничении с помощью данного метода можно исследовать разнообразные задачи, возникающие при фрикционном нагружении тел с покрытиями.

1.4. Контакт индентора при наличии пригрузки с двухслойным упругим полупространством

Рассматривается осесимметричный индентор и двухслойное упругое основание (рис. 1.12). Форма индентора описывается функцией $f(r)$. На границе раздела покрытия и полупространства рассматриваются следующие граничные условия:

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)},$$
$$\tau_{rz}^{(1)} = \frac{1}{k_1}\left(u_r^{(1)} - u_r^{(2)}\right). \tag{1.45}$$

Эти условия совпадают с условиями (1.4) при $n = 1$.

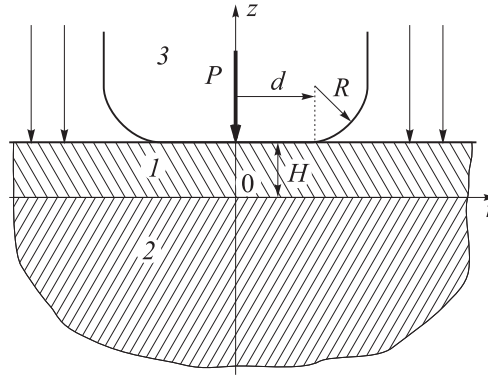


Рис. 1.12. Схема контакта гладкого индентора и двухслойного упругого полупространства при наличии пригрузки

На верхней границе слоя ($z = H$) рассматриваются следующие условия:

$$w^{(1)} = f(r) + \delta, \qquad 0 \le r \le a;$$
$$\sigma_z^{(1)} = p_c(r), \qquad a < r < \infty; \tag{1.46}$$
$$\tau_{rz}^{(1)} = 0.$$

Эти условия аналогичны условиям (1.14) для частного случая жесткого индентора. Систему уравнений (1.45)–(1.46) замыкают уравнение равновесия (1.15) и условие нулевого давления на границе области контакта (1.16), необходимое для определения неизвестного радиуса области контакта в случае гладкого индентора.

Метод решения осесимметричной контактной задачи подробно изложен в разделе 1.2. Особенностью реализации метода решения для случая однослойного покрытия является аналитическое решение системы функциональных уравнений типа (1.22), которое в этом случае принимает вид:

$$\mathrm{A}=\{A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2\},$$

$$\mathrm{Q}=\{\bar{q}(\beta), 0, 0, 0, 0, 0\},$$

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} -1 & \tilde{\nu}_1-\beta\lambda & e^{-\beta\lambda} & (\tilde{\nu}_1+\beta\lambda)e^{-\beta\lambda} & 0 & 0 \\ 1 & 2\nu_1+\beta\lambda & e^{-\beta\lambda} & (\beta\lambda-2\nu_1)e^{-\beta\lambda} & 0 & 0 \\ -e^{-\beta\lambda} & \tilde{\nu}_1 e^{-\beta\lambda} & 1 & \tilde{\nu}_1 & 1 & -\tilde{\nu}_2 \\ e^{-\beta\lambda} & 2\nu_1 e^{-\beta\lambda} & 1 & -2\nu_1 & -1 & -2\nu_2 \\ e^{-\beta\lambda} & 2\tilde{\nu}_1 e^{-\beta\lambda} & -1 & 1 & -\tilde{\chi}-\beta k_1 & -\tilde{\chi}-2\nu_2\beta k_1 \\ -e^{-\beta\lambda} & e^{-\beta\lambda} & -1 & -2\tilde{\nu}_1 & \tilde{\chi} & -2\tilde{\chi}\tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.47}$$

Метод расчета, изложенный выше, был использован для анализа контактных и внутренних напряжений, возникающих в двухслойном упругом полупространстве при вдавливании в него сферического штампа и плоского штампа со скругленными краями. Форма штампа описывается следующей функцией:

$$f(r)=\begin{cases} H, & 0\le r\le d, \\ H+\dfrac{(r-d)^2}{2R}, & d<r<d+R. \end{cases} \tag{1.48}$$

Функция соответствует сферической форме штампа, если $d = 0$, и форме штампа с плоским основанием при $R \to 0$.

Для анализа используем следующие безразмерные параметры: $\chi = E_1 / E_2$ — относительная твердость покрытия, $\nu_1, \nu_2, \lambda = H / L$ — относительная толщина покрытия, $K = kp^* / L$, p^* / E_2, $R' = R / L$, где $p^* = P / (\pi L^2)$ и $L = R$ для сферического штампа, $L = d$ для плоского штампа со скругленными краями. Рассмотрим как относительно жесткие ($\chi > 1$), так и относительно мягкие ($\chi < 1$) покрытия.

На рис. 1.13 представлена зависимость радиуса области контакта от относительной толщины покрытия. Она была получена для внедрения сферического штампа в относительно твердые (кривые *1–3*) и относительно мягкие (кривые *4, 5*) покрытия.

Для относительно тонких покрытий величина радиуса контакта близка к a_2 — радиусу области контакта, соответствующему контакту штампа с подложкой без покрытия. Для относительно толстых покрытий эта величина стремится к a_1 — радиусу области контакта, соответствующему контакту штампа с полупространством, обладающим механическими свойствами покрытия.

Распределение контактных давлений также зависит от свойств покрытий и отличается от распределения давления, полученного по соотношениям Герца [44]. На рис.1.14 показано распределение давления, полученного при контакте сферического индентора с относительно твердым (кривая *2*) и относительно мягким (кривая *3*) покрытиями. Для сравнения приведено герцевское распределение давления (кривая *1*). Параметры контакта, использованные при расчете, соответствуют значкам «×» на кривых *1* и *5* рис. 1.13.

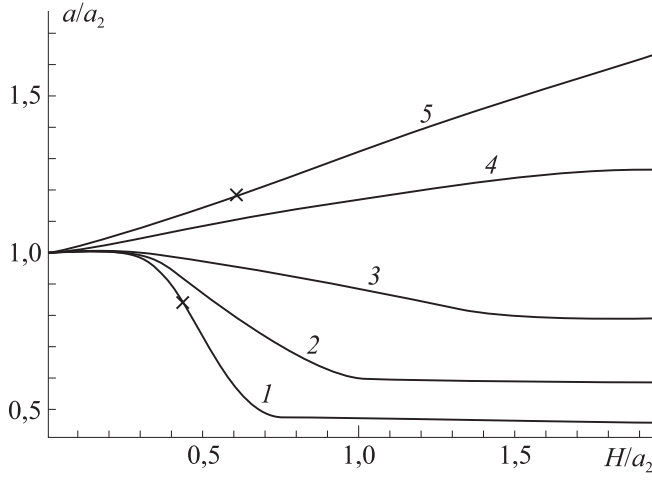


Рис. 1.13. Зависимость радиуса области контакта от относительной толщины покрытия (сферический штамп) при $p^* = 0{,}2E_2$, $p_c = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $K = 0$ и $\chi = 10, 5, 2, 0{,}5, 0{,}2$ (кривые *1*–*5* соответственно)

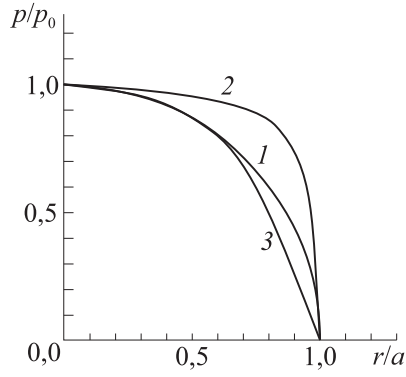


Рис. 1.14. Распределение давления при контакте сферического штампа и тела с покрытием: $p^* = 0{,}2E_2$, $p_c = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $K = 0$ и $\chi = 1$ (кривая *1*), $\chi = 10$, $\lambda = 0{,}4$ (кривая *2*), $\chi = 0{,}2$, $\lambda = 0{,}6$ (кривая *3*), $p_0 = p(0)$

На рис. 1.15 и 1.16 показано распределение контактных и внутренних напряжений, возникающих при вдавливании штампа с плоским основанием и скругленными краями без пригрузки.

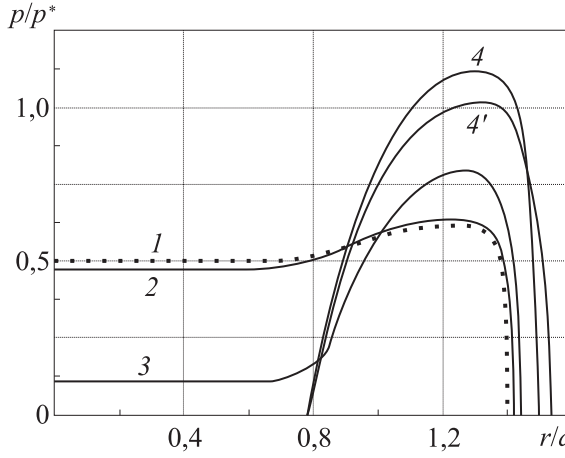


Рис. 1.15. Распределение давления при вдавливании штампа с плоским основанием и скругленными краями в тело с твердым покрытием: $p^* = 0{,}2E_2$, $\chi = 20$, $p_c = 0$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $R' = 0{,}4$ и $\lambda \to \infty$ (кривая *1*), $\lambda = 2$ (кривая *2*), $\lambda = 1$ (кривая *3*), $\lambda = 0{,}5$ (кривые *4*, *4′*), $K = 0$ (кривые *2–4*), $K = 20$ (кривая *4′*).

На рис. 1.15 представлено распределение контактных давлений, полученных для относительно твердых покрытий разной толщины. В случае относительно толстого покрытия (кривая *2*) распределение давления близко к распределению, полученному аналитически [20] при аналогичном нагружении упругого полупространства (кривая *1*). При уменьшении толщины покрытия увеличивается радиус области контакта и растет давление на

границе области; в центральной части области контакта давление падает и становится равным нулю для тонких покрытий, в этом случае имеет место контакт по кольцевой области (кривая *4*). Для бóльших значений χ, p^* контакт по кольцу возникает и для более толстых покрытий. Этот эффект имеет место только для относительно твердых покрытий. В случае относительно мягких покрытий область контакта всегда круговая.

Сравнение кривых *4* и *4´* на рис. 1.15 позволяет оценить влияние степени сцепления покрытия с полупространством. При меньшем сцеплении (большем значении параметра *K*) максимальное значение давления падает и толщина кольца увеличивается. Чем толще покрытие, тем меньше влияние степени сцепления на распределение давления под штампом.

Распределение напряжений в покрытии и основании представлено на рис. 1.16. На рис. 1.16,а представлено распределение максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}(r,z)$, расчет проводился для значений параметров, соответствующих кривой *3* рис. 1.15 для случаев полного (справа) и неполного (слева) сцепления покрытия с основанием. Имеют место два локальных максимума и локальный минимум функции $\tau_{\max}(r,z)$ в покрытии. При $K=0$ максимальные значения $\tau_{\max}=1{,}1p^*$ ($z=0,\ r=0{,}73d$) и $\tau_{\max}=1{,}31p^*$ ($z=H,\ \ r=0{,}69d$), минимальное значение $\tau_{\max}=0{,}21p^*$ ($z=0{,}45H,\ r=0$); при $K=25$ максимальные значения $\tau_{\max}=1{,}145p^*$ ($z=0,\ \ r=0{,}70d$) и $\tau_{\max}=1{,}307p^*$ ($z=H$, $r=0{,}69d$), минимальное значение $\tau_{\max}=0{,}18p^*$ ($z=0{,}45H$, $r=0$). Сравнение левой и правой частей рисунка показывает, что неполное сцепление приводит к увеличению концентрации напряжений на границе раздела.

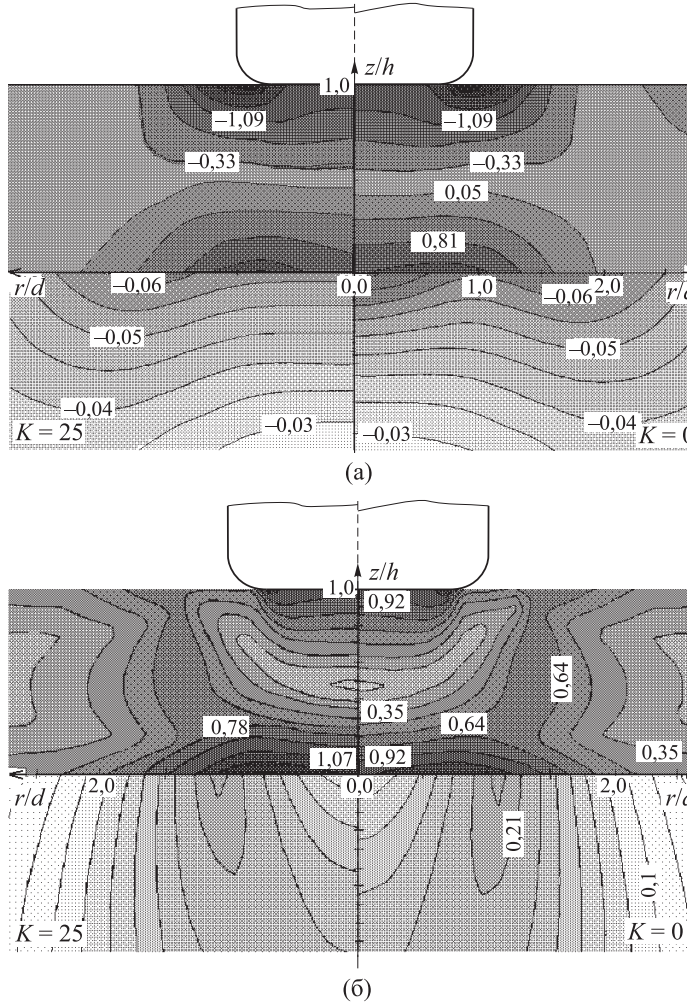


Рис. 1.16. Распределение максимальных касательных $\tau_{\max}(r,z)$ (а) и сжимающих-растягивающих $\sigma_r(r,z)$ (б) напряжений при вдавливании штампа с плоским основанием и скругленными краями в тело с твердым покрытием. $p^* = 0{,}2E_2$, $\chi = 20$, $p_c = 0$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $R' = 0{,}4$, $\lambda = 1$, $K = 0$ (слева) и $K = 25$ (справа)

Распределение напряжений $\sigma_r(r,z)$ представлено на рис. 1.16,б. Растягивающие напряжения концентрируются на границе раздела покрытия и полупространства, а сжимающие напряжения — на поверхности. Это свидетельствует об изгибе тонких твердых покрытий. При $K=0$ напряжения имеют максимум $\sigma_r=1{,}5p^*$ ($z=0$, $r=0{,}7d$) и минимум $\sigma_r=-2{,}3p^*$ ($z=H$, $r=0{,}88d$) внутри слоя, при $K=25$ максимальное значение $\sigma_r=1{,}65p^*$ ($z=0$, $r=0{,}6d$) и минимальное значение $\sigma_r=-2{,}4p^*$ ($z=H$, $r=0{,}88d$). Неполное сцепление приводит к увеличению значений растягивающих напряжений.

На рис. 1.17 представлены распределения максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}(r,0)$ на границе раздела покрытия и полупространства со стороны покрытия (кривые *1–3*) и основания (кривые *1′–3′*) при разных значениях параметра *K*. Другие параметры контакта соответствуют параметрам кривой *2* на рис. 1.15. Скачок напряжений является наибольшим под областью контакта.

На рис. 1.18 представлены распределения максимальных касательных напряжений под центром сферического штампа для случая относительно твердых (а) и относительно мягких (б) покрытий. Постоянное давление действует вне круга радиуса r' (радиус определяется из соотношения $\overline{p}\pi(r')^2=P$, где $\overline{p}=P\sqrt{3}/(6R^2)$. Кривые *1–4* иллюстрируют влияние толщины покрытий на распределение напряжений. Кривые *1* рассчитаны для однородного полупространства, упругие свойства которого совпадают со свойствами покрытия. Следует отметить, что этот результат совпадает с результатами аналитических исследований [44]. В твердом покрытии имеют место два максимума на-

пряжений, один из которых находится на границе раздела покрытия с подложкой. Чем тоньше покрытие, тем больше значение этого максимума. Второй максимум находится внутри (кривые *2*, *3*) либо на поверхности покрытия (кривая *4*). Его значение может быть как меньше (кривые *3*, *4*), так и больше значения (кривая *2*) максимума на границе раздела. Сравнение кривых *4* и *4'* позволяет оценить влияние пригрузки на распределение напряжений.

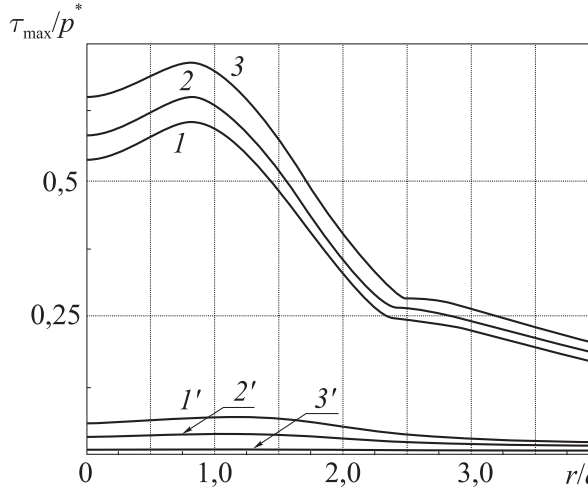


Рис. 1.17. Распределения максимальных касательных напряжений $\tau_{max}(r,0)$ на границе раздела покрытия и подложки со стороны покрытия (кривые *1–3*) и подложки (кривые *1′–3′*), возникающие при вдавливании штампа с плоским основанием и скругленными краями в тело с твердым покрытием: $p^* = 0{,}2E_2$, $\chi = 20$, $p_c = 0$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $R' = 0{,}4$, $\lambda = 1$; $K = 0$ (кривые *1*, *1′*), $K = 20$ (кривые *2*, *2′*) и $K = 2000$ (кривые *3*, *3′*)

В случае относительно мягких покрытий максимум достигается внутри слоя. Еще один максимум достигается в основании: внутри основания для относительно тонких покрытий (кривая *4*) и на границе раздела для более толстых покрытий (кривые *2, 3*).

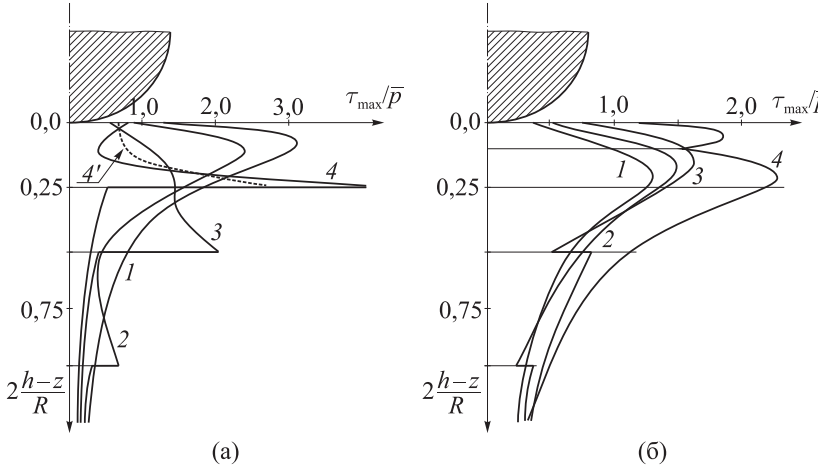


Рис. 1.18. Влияние пригрузки и толщины слоя на распределение максимальных касательных напряжений для относительно твердого (а) и относительно мягкого (б) покрытий (внедрение сферического штампа): (а) $p^* = 0{,}1E_2$, $\chi = 10$, $p_c = \bar{p}$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $H/R \to \infty$, $H/R = 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125$ (кривые *1–4*); $p_c = 0$, $\lambda = 0{,}125$ (кривая *4′*); (б) $p^* = 0{,}08E_2$, $\chi = 1/10$, $p_c = \bar{p}$, $\nu_1 = 0{,}4$, $\nu_2 = 0{,}3$, $H/R \to \infty$, $H/R = 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}055$ (кривые *1–4*)

Рассмотрим влияние пригрузки на контактное давление, возникающее при вдавливании штампа с плоским основанием и скругленными краями в двухслойное упругое тело, состоящее из алюминия (подложка) и покрытия из Al_2O_3. Двухслойное тело

имеет следующие механические характеристики: $E_1 = 350$ ГПа, $E_2 = 70$ ГПа, $H = 150$ мкм. Метод нанесения покрытия обеспечивает полное сцепление с подложкой. На рис. 1.19 представлено распределение давления в области контакта при разных значениях пригрузки, действующей внутри кольца $2d \le r \le 4d$. Распределение давления является почти равномерным (кривая *3*) при величине пригрузки $p_c = 3p^*$. Увеличение пригрузки ведет к уменьшению радиуса области контакта, который в случае кривой *4* становится близким радиусу плоского основания штампа. Максимальные давления могут иметь место на краю области контакта при отсутствии пригрузки, но при очень больших значениях пригрузки они локализуются в центре области контакта.

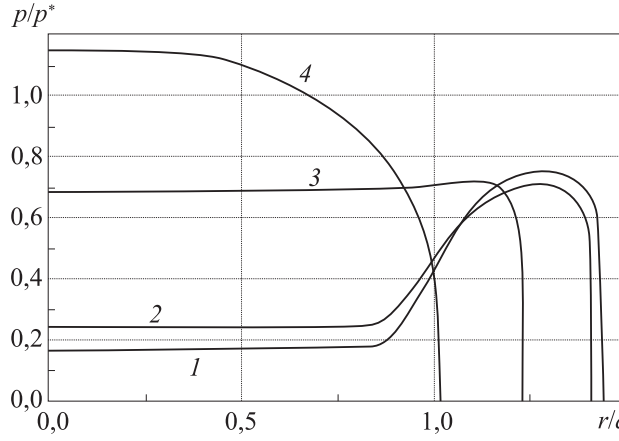


Рис. 1.19. Влияние пригрузки на распределение давлений при вдавливании штампа с плоским основанием и скругленными краями в тело с покрытием: $p^* = 0{,}2E_2$, $\chi = 20$, $p_c = 0$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $R' = 0{,}4$, $\lambda = 1$, $K = 0$ (кривая *1*); $p_c = p^*$ (кривая *2*); $p_c = 3p^*$ (кривая *3*), $p_c = 4p^*$ (кривая *4*)

1.5. Анализ напряжений, возникающих при фрикционном нагружении тел с однослойными покрытиями

В данном разделе представлены распределения напряжений, возникающих при фрикционном нагружении тел с однослойными упругими покрытиями недеформируемым сферическим индентором. Подобный тип нагружения используется в трибологии, когда необходимо провести испытание материала с большой концентрацией приложенной нагрузки, которую обеспечивает контакт точечного типа. Ниже будут рассмотрены модельные задачи о фрикционном нагружении такого типа, которые позволяют провести анализ влияния входных параметров задачи на распределение напряжений, и результаты расчета для реальных покрытий и условий нагружения. В обоих случаях были использованы условия полного сцепления покрытия с подложкой. Будут рассмотрены напряжения в плоскости *xOz*, связанной с центром области контакта и параллельной направлению скольжения.

Относительно твердые покрытия ($\chi > 1$)

Рассмотрим распределение растягивающих-сжимающих и максимальных касательных напряжений в слое и полупространстве со следующими упругими характеристиками: $E_1 = 350$ ГПа, $E_2 = 70$ ГПа ($\chi = 5$), $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ (рис. 1.20). В результате решения осесимметричной контактной задачи ($P = 35$ Н, $H = 100$ мкм, $R = 20$ мм) получаем распределение контактного давления и размер площадки контакта a; безразмерная толщина покрытия $\lambda = 0{,}585$. Коэффициент трения $\mu = 0{,}4$.

Особенностью распределения напряжений σ_x является концентрация растягивающих напряжений как на поверхности

покрытия, так и на границе раздела покрытия и полупространства (рис. 1.20,а). Подобное распределение обусловлено как действием сил трения, так и изгибом тонкого твердого покрытия под действием нормального нагружения. Действие сил трения приводит к появлению зоны растяжения на поверхности, в то время как изгиб приводит к растяжению на границе раздела. В рассматриваемом случае максимум напряжений имеет место на границе раздела, $(\sigma_x)_{\max} = 0{,}771p_0$ ($z/H = 0$, $x/a = -0{,}2$), и существенно превышает максимальное растяжение на поверхности; здесь p_0 — максимальное давление в области контакта.

Сравнение распределения напряжений σ_x (рис. 1.20,а) и максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ (рис. 1.20,б) показывает, что в обоих случаях напряжения концентрируются на границе раздела и на поверхности позади области контакта. Наибольшее значение максимальных касательных напряжений $\tau_m = (\tau_{\max})_{\max} = 0{,}661p_0$ находится на границе раздела ($z/H = 0$, $x/a = 0$). Максимальные растягивающие напряжения в основании также концентрируются на границе раздела, при этом их значения существенно меньше, чем в покрытии.

На рис. 1.21 представлены результаты, полученные для следующих параметров системы покрытие-подложка: $E_1 = 300$ ГПа, $E_2 = 200$ ГПа, $\nu_1 = 0{,}2$, $\nu_2 = 0{,}3$, $P = 7{,}9$ Н, $H = 8{,}8$ мкм, $R = 6{,}35$ мм, $\mu = 0{,}3$. По сравнению с предыдущим примером, это покрытие является менее твердым ($\chi = 1{,}5$) и более тонким ($\lambda = 0{,}154$). Анализ распределения напряжений σ_x показывает, что максимальное значение растягивающих напряжений $(\sigma_x)_{\max} = 0{,}535p_0$ достигается на поверхности на границе области контакта $x = -a$ (рис. 1.21,а). Максимальное значение растягивающих напряжений в подложке $(\sigma_x)_{\max} = 0{,}105p_0$ достигается на границе раздела при $x/a = -1{,}1$.

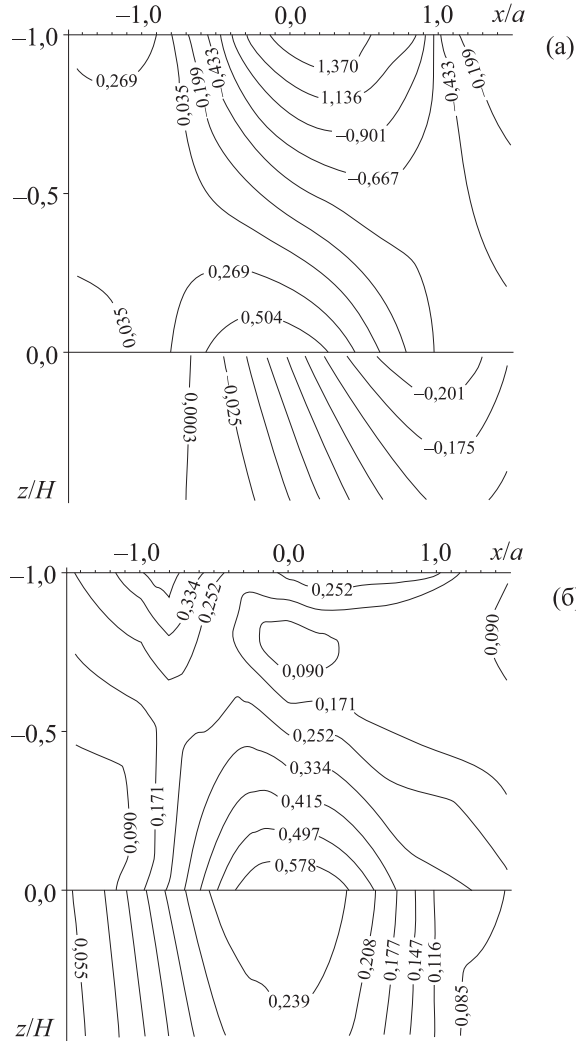


Рис. 1.20. Распределение напряжений σ_x (а) и максимальных касательных напряжений τ_{max} (б) в двухслойном полупространстве: E_1 = 350 ГПа, E_2 = 70 ГПа, $\nu_1 = \nu_2$ = 0,3, P = 35 Н, H = 100 мкм, R = = 20 мм, μ = 0,4

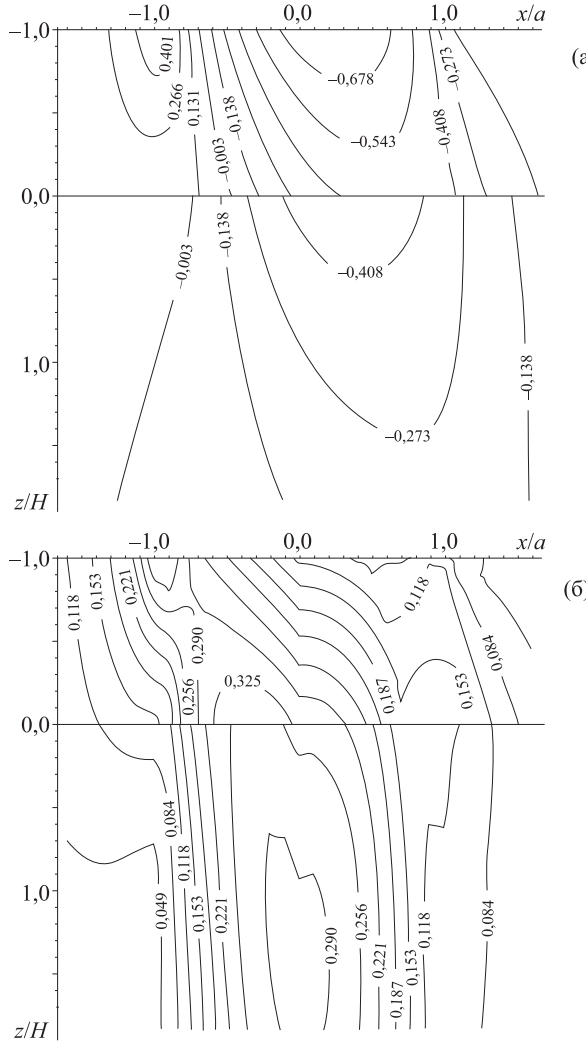


Рис. 1.21. Распределение напряжений σ_x (а) и максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ (б) в двухслойном полупространстве: E_1 = 300 ГПа, E_2 = 200 ГПа, ν_1 = 0,2, ν_2 = 0,3, P = 7,9 Н, H = 8,8 мкм, R = 6,35 мм, μ = 0,3

Максимальные касательные напряжения имеют два максимума в покрытии — на поверхности и на границе раздела покрытия с подложкой, причем второй из них больше ($\tau_m = 0{,}359p_0$). В подложке максимум достигается на расстоянии $z = 1{,}3H$ от границы раздела, и значение этого максимума ($\tau_m = 0{,}303p_0$) сравнимо со значением τ_m в упругом слое.

Величина коэффициента трения оказывает существенное влияние на распределение напряжений. Результаты, представленные на рис. 1.22, позволяют проанализировать влияние величины коэффициента трения на максимальные значения растягивающих (рис. 1.22,а) и максимальных касательных (рис. 1.22,б) напряжений.

Для рассматриваемого диапазона значений коэффициента трения ($0 < \mu < 0{,}8$), максимальные растягивающие напряжения в покрытии достигаются на поверхности ($z = H$) для кривых *3, 5* и на границе раздела ($z = 0$) для кривой *1* (рис. 1.22,а). Максимальное значение растягивающих напряжений в подложке находится на границе раздела (кривые *2, 4, 6*).

Локализация максимума максимальных касательных напряжений существенно зависит от значения коэффициента трения. В покрытии максимальные значения могут быть как на поверхности, так и на границе раздела. Значки на кривых *1, 3, 5* (рис. 1.22,б) показывают, при каком значении коэффициента трения основной максимум τ_m переходит с границы раздела на поверхность покрытия. Напряжение τ_m в подложке может быть как на границе раздела, так и на некотором удалении от нее. Значки на кривых *4* и *6* фиксируют значение коэффициента трения, превышение которого приводит к локализации максимума на границе раздела; для кривой *2* максимум всегда находится на границе раздела.

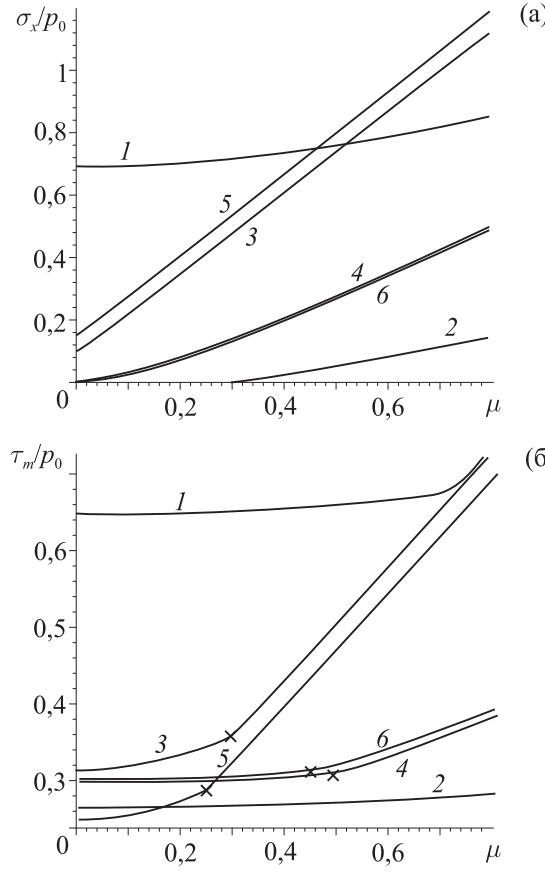


Рис. 1.22. Влияние величины коэффициента трения на максимальные значения напряжений σ_x (*а*) и максимальных касательных напряжений (б) в покрытии (кривые *1*, *3*, *5*) и основании (кривые *2*, *4*, *6*): *1*, *2* — E_1 = 350 ГПа, E_2 = 70 ГПа, $\nu_1 = \nu_2$ = 0,3, P = 35 Н, H = 100 мкм, R = 20 мм; *3*–*6* — E_1 = 300 ГПа, E_2 = 200 ГПа, P = 7,9 Н, H = 8,8 мкм, R = 6,35 мм; *3*, *4* — ν_1 = 0,2, ν_2 = 0,3; *5*, *6* — $\nu_1 = \nu_2$ = 0,3

Увеличение значения коэффициента трения ведет к увеличению концентрации напряжений в покрытии и подложке.

Сравнение кривых *1*, *2* с кривыми *3*, *4* показывает, что влияние трения на максимальные значения напряжений уменьшается с увеличением относительной твердости покрытия. Величина коэффициента трения, при которой точка τ_m перемещается на поверхность, равна 0,72 для кривой *1* и существенно меньше для кривых *3* и *5* (0,3 и 0,25 соответственно).

Относительно мягкие покрытия ($\chi < 1$)

Рассмотрим распределение напряжений σ_x в относительно мягком (χ = 0,15) упругом слое и упругом основании: E_1 = 45 ГПа, E_2 = 300 ГПа, ν_1 = 0,35, ν_2 = 0,3, P = 5 Н, H = 20 мкм, R = 10 мм, μ = 0,4 (рис. 1.23). Радиус индентора и нагрузка выбраны так, чтобы радиус области контакта существенно превышал толщину покрытия (λ = 0,264). Почти вертикальные изолинии в слое свидетельствуют о том, что напряжения передаются с поверхности на границу раздела почти без изменения. Под действием трения на поверхности появляются растягивающие напряжения. Эти напряжения сохраняются по всей толщине покрытия при $x < -0{,}9a$. Точка максимума ($(\sigma_x)_{\max} = 0{,}490p_0$) находится на поверхности ($x/a = -1{,}1$). В упругом полупространстве максимальные растягивающие и сжимающие напряжения локализуются на границе раздела ($(\sigma_x)_{\max} = 0{,}426p_0$, $x/a = -1$).

Рис. 1.24 позволяет проанализировать зависимость максимальных значений максимальных касательных напряжений τ_m в относительно мягких покрытиях от величины коэффициента трения. Значки на кривых *1*, *3* и *5* обозначают значение коэффициента трения, превышение которого приводит к сдвигу максимума напряжений от внутренних точек на поверхность покрытия. Сравнение кривых *1* и *3*, а также кривых *2* и *4*, полученных

при близких значениях λ (λ = 0,876 для кривых *1, 2* и λ = 0,891 для кривых *3, 4*) и разных χ (χ = 0,3 для кривых *1, 2* и χ = 0,15 для кривых *3, 4*), показывает, что уменьшение твердости покрытия ведет к увеличению значения τ_m в покрытии и подложке. Кривые *5* и *6* построены при χ = 0,3 и λ = 0,463. Сравнение этих кривых с кривыми *1* и *2* показывает, что уменьшение толщины покрытия ведет к увеличению значения τ_m в подложке. При малых значениях коэффициента трения значения τ_m в покрытии могут быть меньше, чем в подложке.

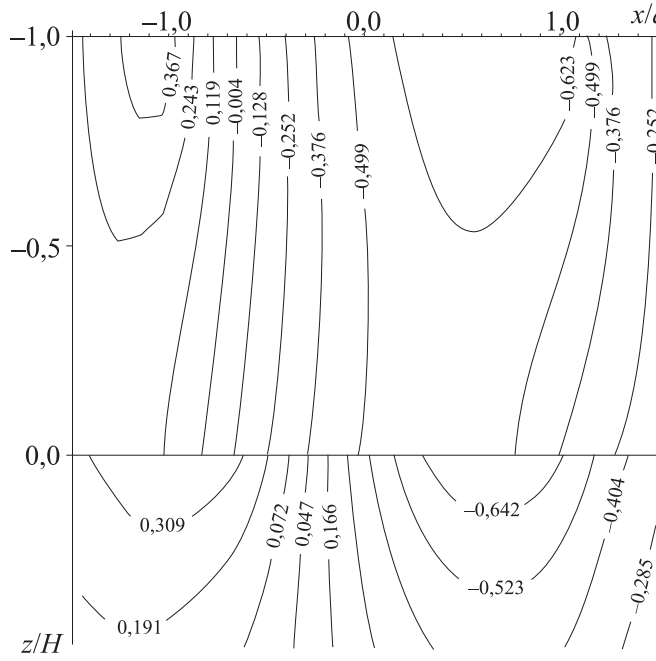


Рис. 1.23. Распределение напряжений σ_x в двухслойном основании: E_1 = 45 ГПа, E_2 = 300 ГПа, ν_1 = 0,35, ν_2 = 0,3, P = 5 Н, H = 20 мкм, R = 10 мм, μ = 0,4

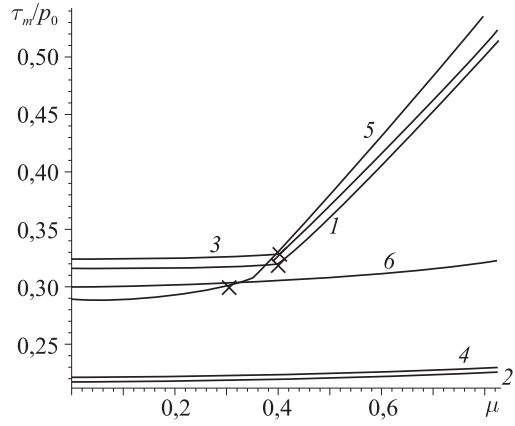


Рис. 1.24. Влияние величины коэффициента трения на максимальные значения максимальных касательных напряжений в покрытии (кривые *1*, *3*, *5*) и основании (кривые *2*, *4*, *6*): ν_1 = 0,35, ν_2 = 0,3, E_1 = 45 ГПа, E_2 = 150 ГПа, $\nu_1 = \nu_2$ = 0,3, P = 0,3 Н, H = 20 мкм, R = 3 мм (кривые *1*, *2*); E_1 = 45 ГПа , E_2 = 300 ГПа, P = 7,9 Н, H = 20 мкм, R = 5 мм (кривые *3*, *4*); E_1 = 45 ГПа, E_2 = 150 ГПа, H = 7 мкм, R = 3 мм (кривые *5*, *6*)

Анализ напряжений на границе раздела покрытия с подложкой для покрытий из нитрида хрома и оксида титана

Наиболее опасным видом разрушения покрытий при трении является его отслаивание от подложки с последующим выкрашиванием. Если подобное явление — результат многоциклового нагружения, можно говорить об усталостной природе отслаивания. В этом случае анализ напряжений, возникающих на границе раздела покрытия с подложкой, имеет важное значение. Исследование, включающее результаты экспериментов и анализ напряженного состояния, в качестве объекта испытаний должно использовать образцы композиций покрытия с подложкой, удовлетворяющие следующим требованиям:

- в процессе испытаний на трение этих покрытий выявлены разрушения усталостного типа (локальные выкрашивания покрытий);
- материалы покрытий должны быть апробированы, чтобы была возможность предварительной оценки и последующего сравнения с уже опубликованными результатами;
- свойства композиций (упругие характеристики, толщина покрытий, степень сцепления с подложкой) известны и стабильны для всей серии образцов.

В соответствии с этими критериями были выбраны две композиции покрытие-подложка, для которых было проведено сравнение результатов моделирования с экспериментом [131].

Покрытие из нитрида хрома на стальной подложке. Эти покрытия имеют широкое применение в триботехнике благодаря высокой износостойкости и антифрикционным свойствам [118].

Проводились фрикционные испытания по схеме шарик-диск (возвратно-поступательное движение). Использовались шарики из твердого сплава и оксида алюминия (корунда), которые характеризуются высокой износостойкостью и большим (сравнительно с покрытиями) модулем упругости, диаметр шариков 7,94 мм. Длина дорожки скольжения ±15 мм, что при частоте 1 Гц обеспечило среднюю скорость скольжения 0,03 м/с. Испытания проводились как в дистиллированной воде, так и в 3 % растворе NaCl. И в том, и в другом случае, независимо от материала шарика, часто наблюдались случаи отслаивания покрытия (рис. 1.25) [117]. Параллельно при тех же условиях проводились испытания покрытий из модифицированной стали s-phase и материала подложки без покрытия. Отслаивания покрытий из модифицированной стали s-phase не наблюдалось.

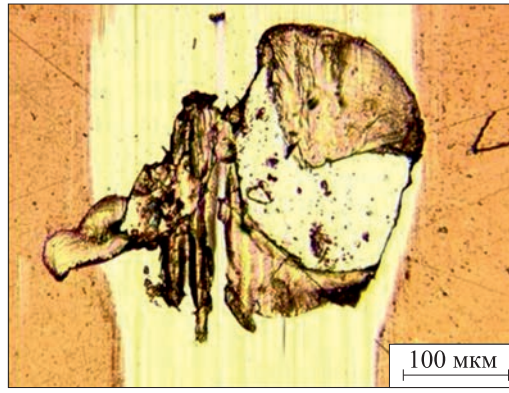


Рис. 1.25. Отслаивание покрытия CrN после 24 часов испытаний (172 800 циклов) в дистиллированной воде. Трение в паре с шариком из твердого сплава

Входные данные для определения напряженного состояния в покрытии и подложке для двух вариантов покрытий собраны в табл. 1.1 (часть 1).

Таблица 1.1. Входные параметры для расчета напряжений в покрытии и подложке

		Материал	E	ν	H	P	μ
			ГПа		мкм	Н	
1	Шарик	Al_2O_3	375	0,22	—	—	—
	Покрытие (1)	CrN	320	0,27	6,0	1,47	0,22
	Покрытие (2)	s-phase	287	0,27	8,0	1,47	0,48
	Подложка	сталь AISI 316L	200	0,27	—	—	—
2	Шарик	Si_3N_4	310	0,26	—	—	—
	Покрытие	TiO_2	230	0,22	2,0	0,5–5,0	0,1
	Подложка	CP-Ti	103	0,34	—	—	—

Результаты расчета на основе этих данных представлены на рис. 1.26. Радиус области контакта составил 30,2 мкм для покрытия из нитрида хрома и 30,5 мкм для покрытия из модифицированной стали s-phase. Распределение максимальных касательных напряжений (рис. 1.26,а), полученное для покрытия из оксида хрома и стальной подложки, позволяет сделать вывод, что при данных параметрах нагружения максимум напряжений в покрытии находится на границе с подложкой, а в материале подложки на некотором удалении от границы. Интересно отметить, что расстояние от поверхности до точки максимума в подложке близко к расстоянию, которое определяется аналитически для контакта без трения сферического индентора и однородного упругого полупространства [44]. То же можно сказать и о величине этого максимума, отнесенной к максимальному значению контактного давления. На рис. 1.26,б,в представлены распределения сжимающих-растягивающих напряжений σ_x и максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ на границе раздела покрытия с подложкой. Эти напряжения были выбраны потому, что они обычно входят в различные критерии разрушения [46], существенно важным может быть и скачок напряжений на границе раздела материалов. Представленные кривые позволяют сделать вывод, что напряжения на границе раздела с покрытием из нитрида хрома больше, чем на границе раздела с покрытием из модифицированной стали, что следует связать с большей разницей упругих свойств материала в случае нитрида хрома. Этим же объясняется и относительно малый перепад напряжений на границе раздела покрытия из модифицированной стали со стальной подложкой. Судя по большому количеству циклов фрикционного нагружения, в результате которого происходит выкрашивание покрытия из нитрида хрома, а также по тому факту, что максимальные касательные

напряжения концентрируются на границе раздела материалов, фрикционное разрушение в данном случае действительно имеет признаки многоцикловой усталости.

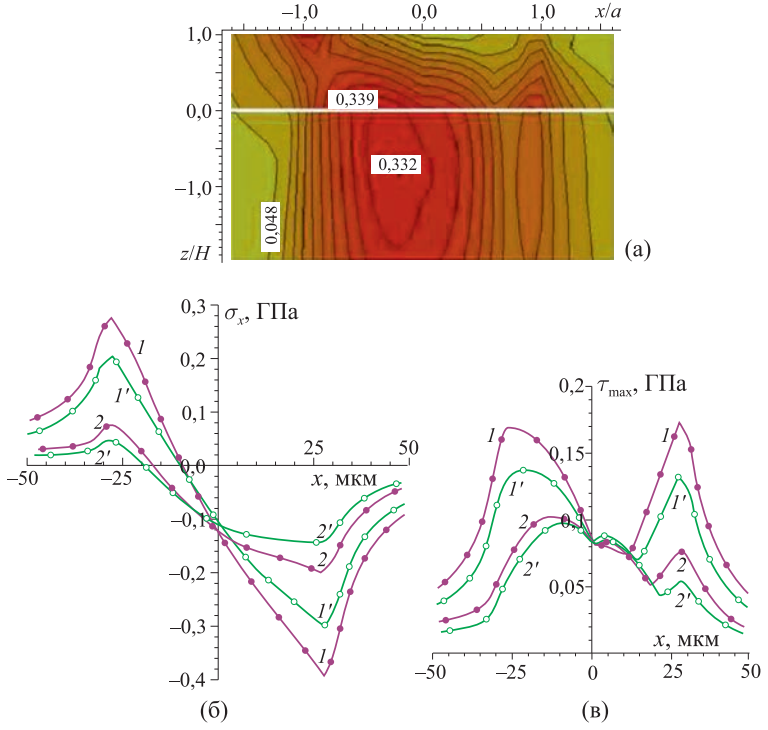


Рис. 1.26. Распределение напряжений в покрытиях CrN и s-phase: изолинии максимальных касательных напряжений $\tau_{\max} / p_0$ для покрытия CrN (а); распределение напряжений σ_x вдоль границы раздела покрытия с подложкой (б); распределение напряжений $\tau_{\max}$ вдоль границы раздела покрытия с подложкой (в); кривые *1* и *2* относятся к покрытиям из CrN и s-phase соответственно, кривые *1′* и *2′* — напряжения на границе раздела со стороны подложки, кривые *1* и *2* — напряжения на границе раздела со стороны покрытия

Покрытие из оксида титана, полученное на титане и титановых сплавах. Титановые сплавы обладают целым рядом полезных свойств, но при этом малой износостойкостью. Высокотемпературное оксидирование является одним из способов получения износостойкого керамического поверхностного слоя, состоящего из оксида титана TiO_2. Предварительное исследование показало, что оксидирование в течение 36 часов при температуре 625 °С действительно повышает износостойкость поверхностных слоев [133]. При этом в результате длительных испытаний наблюдался эффект отслаивания. Из всего перечисленного следует, что данная композиция материалов удовлетворяет критериям модельного материала, пригодного для исследований.

Для экспериментов использовались титановые образцы, подвергнутые оксидированию при температуре 700 °С в течение 36 часов, в результате образовался оксидный слой толщиной от 2 до 2,5 мкм. Материалы испытывались по схеме шарик-диск (возвратно-поступательное движение) с шариками из оксида алюминия (корунда) в дистиллированной воде, диаметр шариков 7,94 мм. Длина дорожки скольжения ±10 мм, что при частоте 1 Гц обеспечило среднюю скорость скольжения 0,02 м/с. Фотографии нескольких дорожек трения, полученных за разное время испытаний, представлены на рис. 1.27. На первом этапе прослеживается незначительный износ оксидного слоя, далее появляются локальные выпучивания покрытия и, наконец, отслаивание и выкрашивание покрытия. Стабильно низкое значение коэффициента трения и высокая износостойкость шарика позволяют рассчитывать на адекватность результатов моделирования для данной системы.

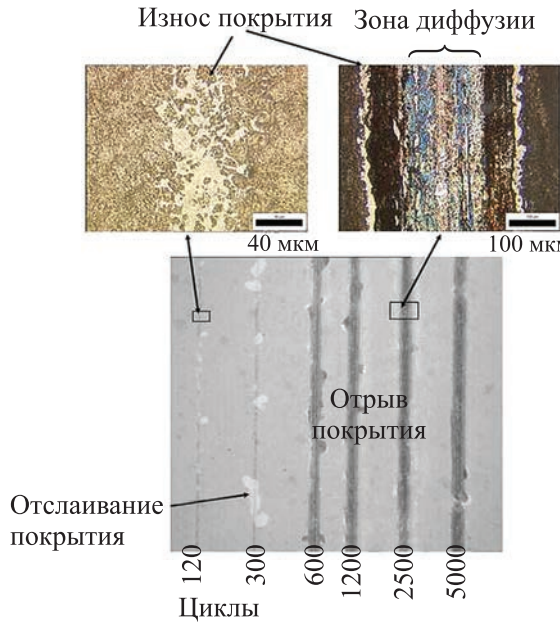


Рис. 1.27. Отслаивание и выкрашивание покрытия TiO_2, полученного в результате оксидирования при температуре 700 °С. Среда — дистиллированная вода, нагрузка — 0,98 Н, средняя скорость скольжения — 0,02 м/с [131]

Параметры, использованные для расчетов, приведены в табл. 1.1 (часть 2). На рис. 1.28 и 1.29 приведены результаты расчетов напряжений σ_x и максимальных касательных напряжений на границе раздела материалов для разных значений нагрузки. Следует отметить, что с ростом нагрузки и, соответственно, радиуса пятна контакта происходит и уменьшение относительной толщины покрытия. В связи с этим при относительно быстром росте абсолютных значений напряжений перепад напряжений увеличивается относительно медленно при увеличении нагрузки.

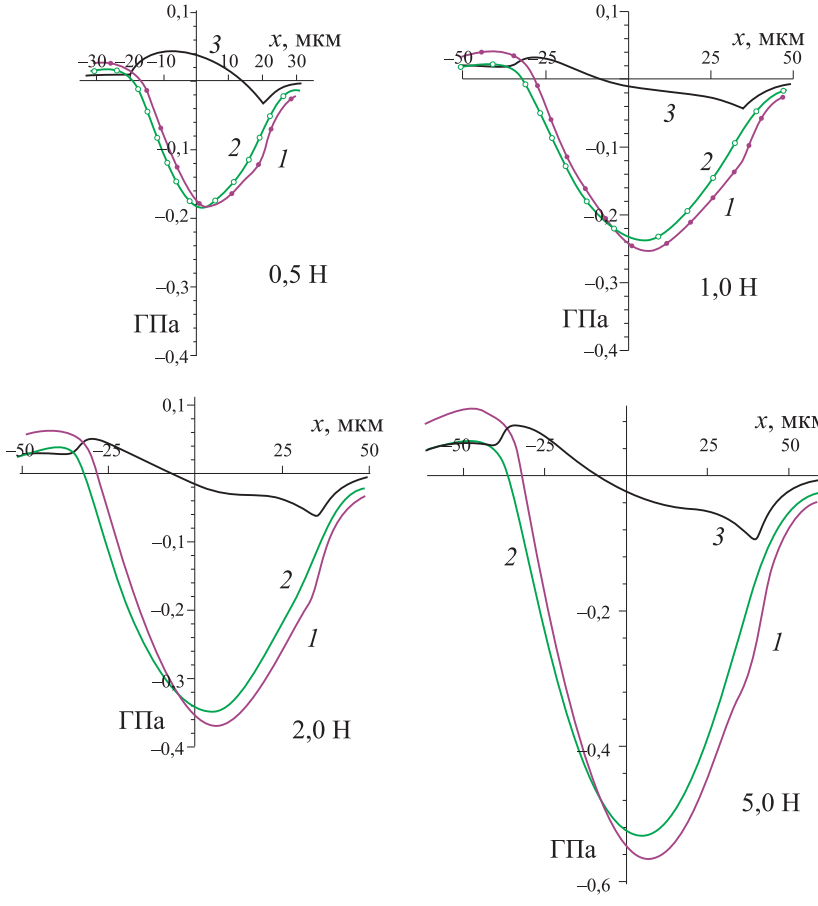


Рис. 1.28. Распределение напряжений σ_x вдоль границы раздела покрытия с подложкой для системы ТО-СР-Ti для разных величин нагрузки. Кривые *1* — напряжения на границе раздела со стороны покрытия, кривые *2* — напряжения на границе раздела со стороны подложки, кривые *3* — перепад напряжений на границе раздела

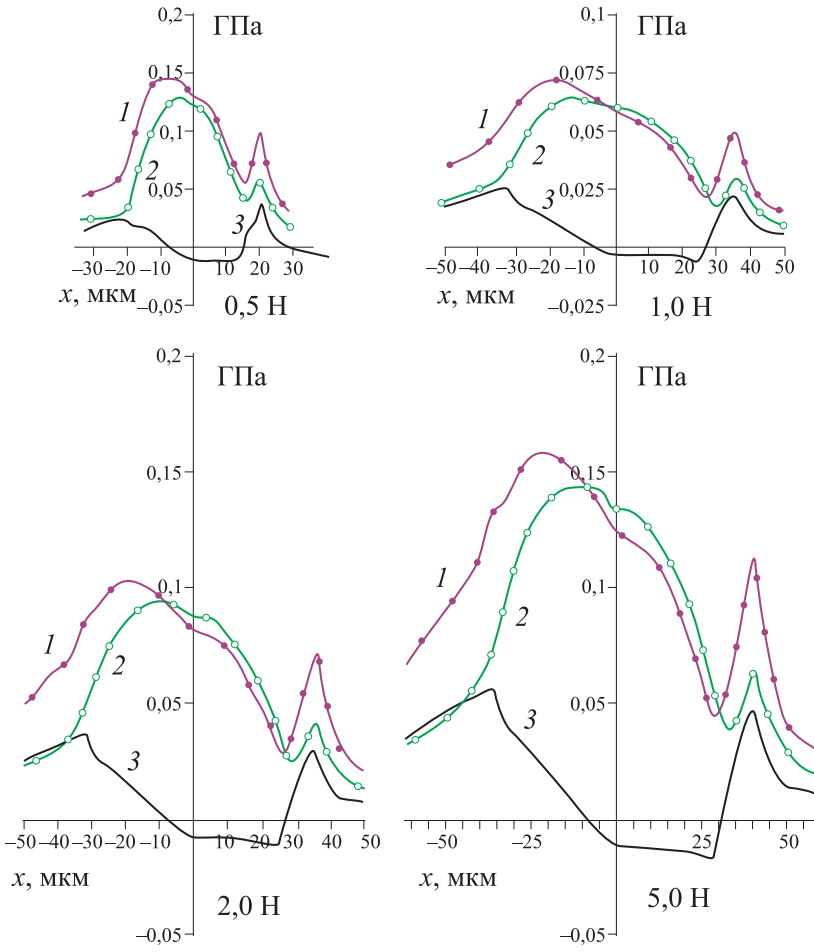


Рис. 1.29. Распределение напряжений τ_{max} вдоль границы раздела покрытия с подложкой для системы ТО-СР-Ti для разных величин нагрузки. Кривые *1* — напряжения на границе раздела со стороны покрытия, кривые *2* — напряжения на границе раздела со стороны подложки, кривые *3* — перепад напряжений на границе раздела

Экспериментально-теоретическое исследование причин скалывания покрытий на основе многокомпонентных оксидов при фрикционном нагружении

В данном разделе рассматриваются покрытия на основе оксидов, полученные карбоксилатным методом [13]; такой метод нанесения покрытий обеспечивает возможность обработки деталей сложной формы, компоновки покрытий из различных оксидов с произвольным сочетанием долей материала, а также является энергетически малозатратным. Особенностью данных покрытий является их малая толщина (до нескольких сот нанометров) и аморфная структура материала. Предыдущие микроскопические и трибологические исследования покрытий различной толщины и химического состава [102] показали, что большинство покрытий имеют сравнительно низкий (0,1–0,2) коэффициент трения в паре со сталью, в той или иной степени сглаживают рельеф исходной поверхности. В то же время при стандартных трибологических испытаниях по схеме палец-диск покрытия быстро разрушались. В связи с этим для дальнейших исследований, описанных в данной работе, эксперименты по фрикционному нагружению покрытий были проведены на другом масштабном уровне с помощью сканирующего нанотвердомера по методике, разработка которой была начата ранее также для материалов с покрытиями [108, 109]. Исследования, проведенные при разных нагрузках по схеме «шарик–плоский образец с покрытием» для большого количества материалов покрытий, отличающихся химическим составом и использованным температурным режимом, показали, что наряду с изнашиванием, т. е. возникновением и углублением канавки трения, есть случаи скалывания покрытий на ранних стадиях испытания. Для объяснения причин раннего скалывания покры-

тий целесообразно определить напряженное состояние покрытий при фрикционном нагружении и связать его с результатами дополнительных экспериментов с образцами, для которых характерно образование сколов.

Покрытия были получены карбоксилатным методом, который заключается в термическом разложении растворов карбоксилатов металлов с образованием аморфных покрытий соответствующих оксидов с последующей их структуризацией при повышении температуры термообработки [90]. При низкотемпературном термодеструкционном синтезе слои оксида алюминия (образец 1) и смешанного оксида алюминия и гадолиния (образец 2) являются аморфизированными продуктами с квазисимметричной (3D-шаровой) изотропной структурой. Термообработка проводилась при температуре 500 °С. В качестве подложки использовалось полированное кварцевое стекло, измеренный модуль упругости которого равен 110 МПа [102]. Модуль упругости покрытий измерялся методом силовой спектроскопии при индентировании вибрирующим наконечником, по зависимости изменения частоты колебаний от степени прижима наконечника к поверхности материала [107]. Глубина вдавливания индентора не превышала 1/10 толщины покрытия. Измерение толщины покрытия проводилось путем нанесения глубоких царапин с возрастающей нагрузкой пирамидальным алмазным наконечником, с последующим сканированием рельефа в области отслоения покрытия. Результаты измерения толщины и модулей упругости покрытий приведены в табл. 1.2.

Эксперименты, проводившиеся в рамках данной работы, выполнены с помощью сканирующего нанотвердомера модели «НаноСкан-3D» производства ФГБНУ ТИСНУМ, Россия. Данный прибор предназначен для исследования рельефа и механи-

ческой структуры поверхности, а также для измерения механических и трибологических свойств материалов с высоким пространственным разрешением.

Таблица 1.2

	Химический состав	Толщина покрытия, нм	Приведенный модуль упругости, ГПа
Образец 1	оксид алюминия	80	72,4±1,9
Образец 2	оксид алюминия и оксид гадолиния	175	74,3±1,8

Фрикционные испытания проводились при движении наконечника (индентора) в контакте с поверхностью по круговой траектории с поддержанием постоянной нормальной силы прижима. Радиус трека составил 100 мкм. В качестве индентора использовался сферический сапфировый наконечник (модуль упругости 400 ГПа, радиус шарика 650 мкм). Среднеарифметическая шероховатость поверхности индентора Ra = 5 нм. На каждом образце проводилось две серии испытаний: первая серия с различным количеством циклов износа (от 10 до 500 циклов) и фиксированной силой прижима (10 мН), вторая серия с различной силой прижима (от 1 до 60 мН) и фиксированным количеством циклов износа (50 циклов). Рельефы области испытания и вершины индентора исследовались с помощью сканирующей зондовой нанолаборатории «Интегра Прима», производства ЗАО «НТ-МДТ», Россия. Изображения рельефа поверхности получены методом атомно-силовой микроскопии в полуконтактном режиме с использованием кантилеверов NSG01, имеющих типичный радиус закругления наконечника 10 нм и усредненный угол заострения 22°.

Оценивались изменения поверхности покрытия после фрикционных испытаний. Количество циклов в испытаниях было недостаточным для появления выраженной канавки изнашивания, на поверхности наблюдаются отдельные канавки малой (по сравнению с толщиной покрытия) глубины, обусловленные неровностями контртела; в ряде случаев присутствуют глубокие трещины. На дне трещин имеются плоские участки, что свидетельствует о прорыве покрытия до подложки. Это подтверждается сравнением глубины трещин и толщины покрытия, определенной ранее. Было установлено, что при появлении трещины дальнейшее разрушение покрытия идет более интенсивно, чем в случае углубления канавки трека в процессе истирания без образования трещины.

На рис. 1.30 представлены фотографии и профилограмма дорожки трения, полученной на образце 2 при нагрузке 10 мН за 300 циклов (размерность — мкм). Скол в данном случае локален, что может свидетельствовать о наличии отдельного дефекта материала. На рис. 1.31 представлен случай, когда трещина-скол имеет большую протяженность (образец 1, нагрузка 10 мН, 500 циклов).

Результаты экспериментов обобщены в табл. 1.3 и 1.4 для образцов 1 и 2 соответственно. При этом следует отметить, что для образца 1 все сколы имеют характер протяженных трещин на дорожке трения, а для образца 2, где зафиксировано 3 случая сколов, 2 из них (отмеченный ранее на рис. 1.20, а также полученный за 50 циклов при нагрузке 20 мН) являются локальными.

Для расчета напряжений, возникающих в покрытии и подложке при фрикционном нагружении, рассматривалась задача о скольжении сферического тела по границе плоского тела с покрытием. Определялись растягивающие-сжимающие напряжения

Таблица 1.3

Серия 1	Наличие скола	Серия 2	Наличие скола
10 мН, 10 цикл.	–	5 мН, 50 цикл.	–
10 мН, 100 цикл.	+	10 мН, 50 цикл.	–
10 мН, 500 цикл.	+	20 мН, 50 цикл.	–
		30 мН, 50 цикл.	+
		40 мН, 50 цикл.	+

Таблица 1.4

Серия 1	Наличие скола	Серия 2	Наличие скола
10 мН, 100 цикл.	–	1 мН, 50 цикл.	–
10 мН, 200 цикл.	–	5 мН, 50 цикл.	–
10 мН, 300 цикл.	+	15 мН, 50 цикл.	–
10 мН, 500 цикл.	+	20 мН, 50 цикл.	+
		30 мН, 50 цикл.	–
		60 мН, 50 цикл.	–

в покрытии и подложке для диапазона нагрузок, использованного в экспериментах. Данные напряжения являются основной причиной скалывания покрытий в случае, когда имеет место хрупкое разрушение (быстрое разрушение на ранних стадиях фрикционного контакта либо малоцикловая усталость). Для обоих образцов была проведена серия расчетов при нагрузке, изменяющейся последовательно, с малым шагом. Расчеты были проведены для сечения плоскостью, проходящей через центр области контакта (плоскость *xOz*) и параллельной направлению скольжения. На рис. 1.32,а и 1.33,а приведены изолинии распределений растягивающих-сжимающих напряжений в покрытии и подложке, полу-

ченные для образца 2 при минимальной и максимальной нагрузках (1 мН и 60 мН соответственно). Направление скольжения указано стрелкой на каждом из рисунков.

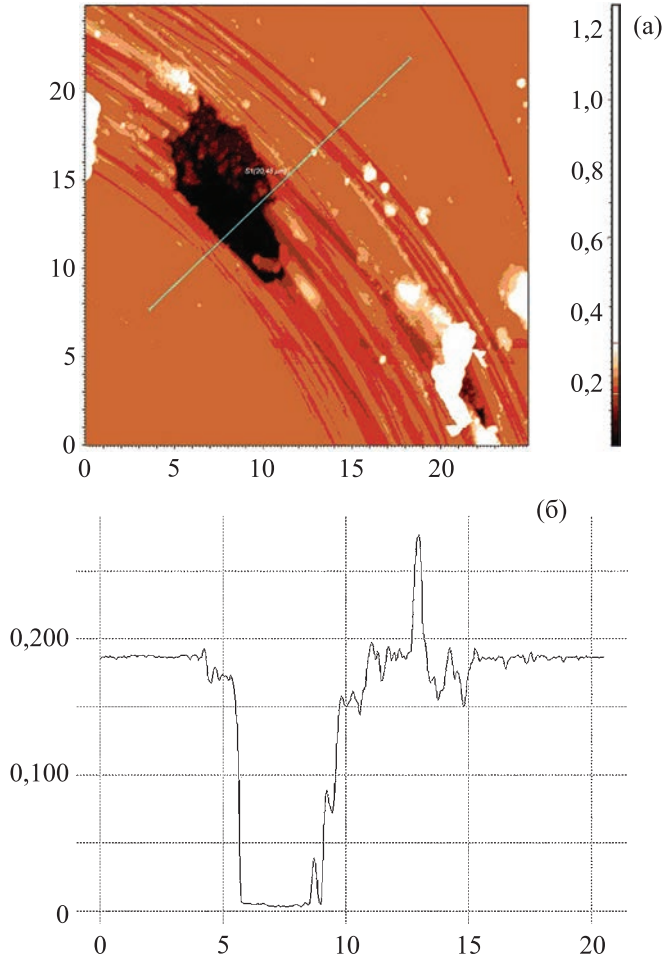


Рис. 1.30. Фотографии (а) и профилограмма (б) дорожки трения: образец 2, нагрузка 10 мН, 300 циклов (размерность — мкм)

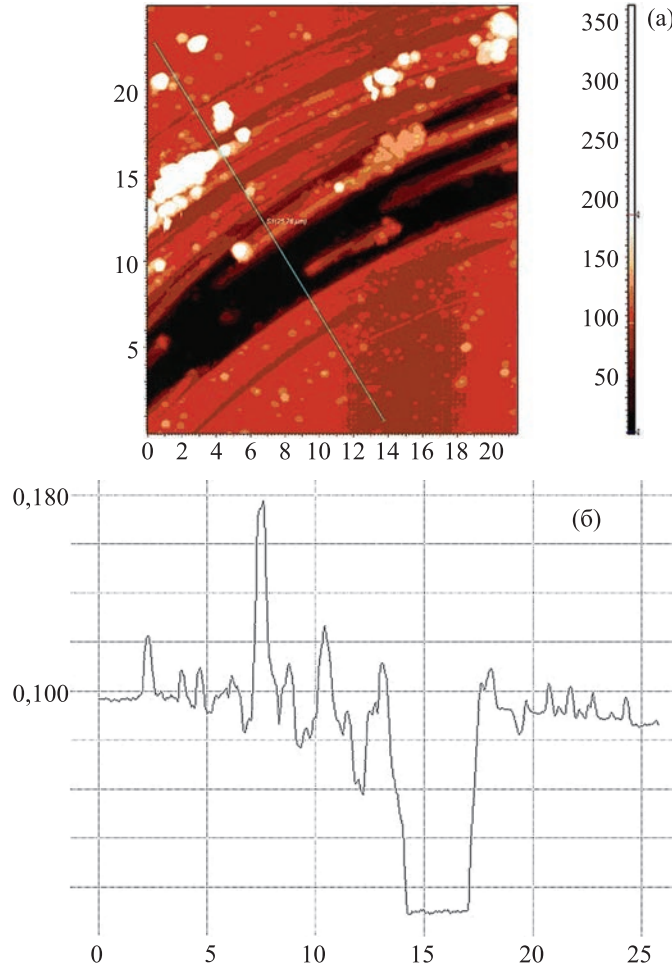


Рис. 1.31. Фотографии (а) и профилограмма (б) дорожки трения: образец 1, нагрузка 10 мН, 500 циклов (размерность — мкм)

Наиболее светлая область соответствует наибольшим значениям сжимающих напряжений, наиболее темная — наибольшим значениям растягивающих напряжений. Точка максимума

растягивающих напряжений находится во всех случаях на поверхности покрытия.

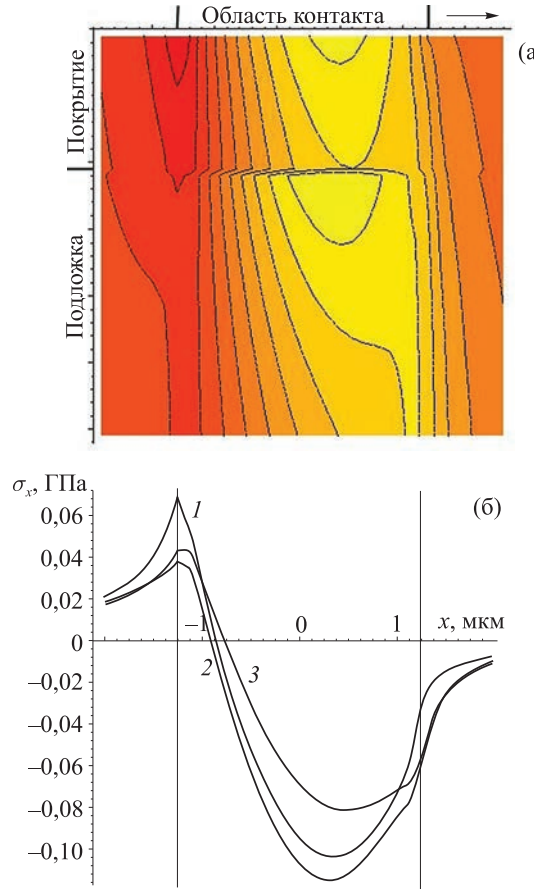


Рис. 1.32. Распределение напряжений σ_x в образце 2 при нагрузке 1 мН: изолинии распределения напряжений в покрытии и подложке (а); кривые распределения напряжений (б) на поверхности (кривая *1*), на границе раздела со стороны покрытия (кривая *2*), на границе раздела со стороны подложки (кривая *3*)

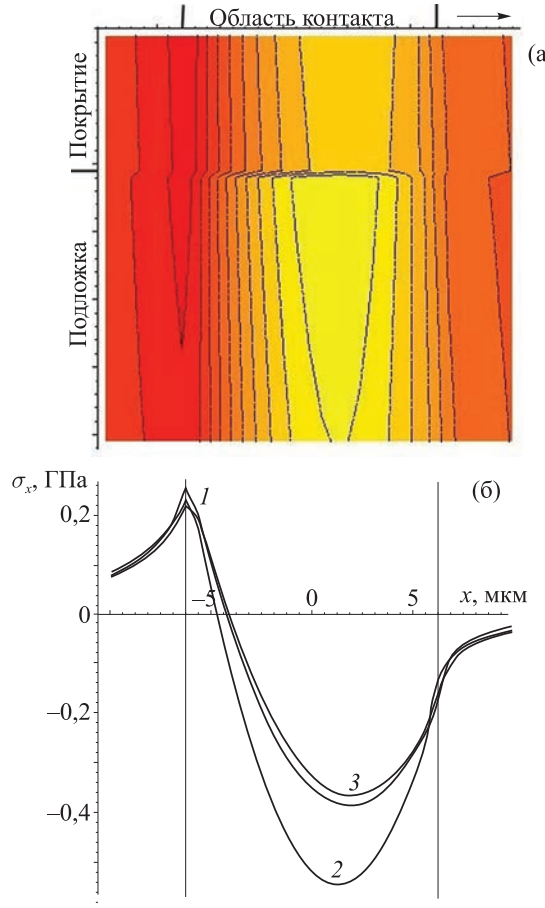


Рис. 1.33. Распределение напряжений σ_x в образце 2 при нагрузке 60 мН: изолинии распределения напряжений в покрытии и подложке (а); кривые распределения напряжений (б) на поверхности (кривая *1*), на границе раздела со стороны покрытия (кривая *2*), на границе раздела со стороны подложки (кривая *3*)

Наиболее интересными с точки зрения области инициации разрушения покрытия являются напряжения на поверхности (где

находится максимум растягивающих напряжений), а также на границе раздела покрытия с подложкой как со стороны покрытия, так и со стороны подложки. В связи с этим были построены графики (рис. 1.32,б и 1.33,б), позволяющие сделать количественную оценку напряжений, представленных на рис. 1.32,а и 1.33,а. Кривые *1* соответствуют напряжениям на поверхности, кривые *2* — на границе раздела со стороны покрытия, кривые *3* — также на границе раздела, но со стороны подложки. Вертикальными линиями отмечены границы области контакта. Положительными являются растягивающие напряжения, отрицательными — сжимающие. Максимальное растяжение достигается на границе области контакта. Разница между максимальными значениями растягивающих напряжений тем меньше, чем больше нагрузка и, соответственно, толщина покрытия, отнесенная к размеру пятна контакта. Чем меньше эта разница, тем больше вероятность образования сквозной трещины по всей толщине покрытия.

Результаты расчетов обобщены на рис. 1.34. Приведены зависимости максимальных значений растягивающих напряжений (в ГПа) от нагрузки в Ньютонах для образцов 1 (кривая *1*) и 2 (кривая 2). Зависимости являются монотонными, поэтому, в соответствии с результатами эксперимента для образца 1, представленными в сводной табл. 1.2, можно считать, что разрушение наступает быстро (50 циклов в нашем случае) при максимальных растягивающих напряжениях на поверхности больше, чем 0,151 ГПа (нагрузка 20 мН), и не меньше, чем 0,172 (нагрузка 30 МПа). В случае нагружения данного покрытия другим контр-телом (при этом возникнет другая геометрия контакта и другое значение коэффициента трения) можно провести предварительный расчет напряженного состояния и оценить вероятность разрушения данного покрытия. Для образца 2 эксперимен-

ты показали (см. сводную табл. 1.3), что при испытаниях продолжительностью 50 циклов пороговые значения напряжений не были достигнуты (единичный скол, полученный при 20 мН, вероятно, обусловлен отдельным дефектом покрытия). Тем не менее, факт этого скола, а также выкрашивание покрытия при увеличении числа циклов может свидетельствовать о том, что помимо сплошной вертикальной трещины, которая образуется достаточно быстро при равномерном распределении растягивающих напряжений по толщине покрытия, могут образовываться трещины, идущие с границы раздела. Скол образуется, когда эта трещина выходит на поверхность.

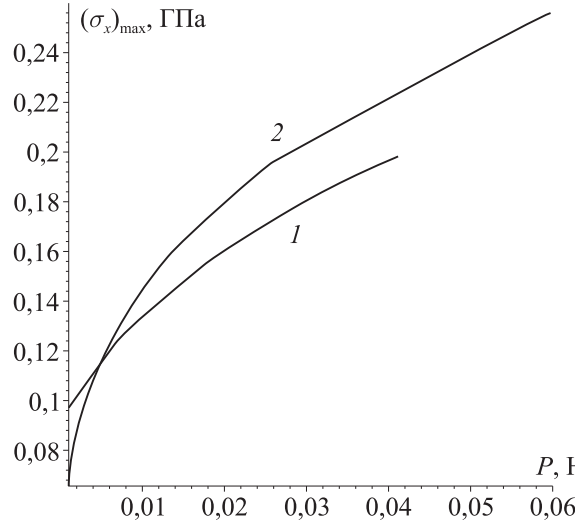


Рис. 1.34. Зависимости максимальных значений растягивающих напряжений для образцов 1 (кривая *1*) и 2 (кривая *2*)

С точки зрения структурных особенностей материала наблюдаемое различие (образцы 1 и 2), вероятно, определяется

различными механизмами процессов образования адгезионных слоев. В случае образования покрытия на основе аморфного оксида алюминия (образец 1) преобладает процесс молекулярного наслаивания. Для образца 2 при химико-структурной модификации поверхности кварцевого стекла возможен разрыв силоксановых связей (Si–O–Si) с встраиванием ионов алюминия в кремнекислородный каркас и соответствующей компенсацией заряда ионами Gd^{3+}. Таким образом, на межфазовой границе происходит образование тонкого адгезионного слоя, механические свойства которого являются промежуточными между свойствами покрытия и подложки. В представленной здесь модели этот слой не учитывался, поскольку его свойства не были известны. При известных свойствах промежуточного слоя он может присутствовать в модели либо в виде упругого слоя, либо как фактор, меняющий граничные условия.

Таким образом, моделирование напряженного состояния здесь, как и в предыдущем разделе, включено в комплекс исследования образцов с покрытиями, в который входят также нанесение покрытий, определение их свойств, эксперименты на трение и изнашивание при разных нагрузках. Для одного из образцов получен узкий диапазон максимальных значений растягивающих напряжений, который можно рассматривать как пороговый: выше этих значений происходит скалывание покрытий, при меньших значениях происходит изнашивание с постепенным углублением канавки на дорожке трения.

Исследование контактных и внутренних напряжений, возникающих в покрытии в подшипнике качения

Условия контакта с качением (например, в подшипниках качения) обычно предполагают циклический характер нагруже-

ния. Обычным типом разрушения поверхностных слоев при качении является контактная усталость [171]. В этом случае распределение внутренних напряжений и прочностные свойства материала определяют долговечность сопряжения. Как уже было показано в предыдущих разделах, когда на одно из взаимодействующих тел нанесено тонкое покрытие, граница раздела покрытия и подложки является зоной, в которой могут достигаться максимальные значения напряжений. В том случае, когда полноценные испытания на контактную усталость затруднительны, а критерий разрушения покрытия неизвестен, имеет смысл оценка напряжений, возникающих в покрытии, в особенности на границе раздела материалов, при заданных условиях нагружения. Обычно технология нанесения покрытий предполагает возможность менять толщину покрытия в некотором диапазоне. В этом случае возможен выбор оптимальной толщины покрытия по критерию минимизации напряжений на границе раздела с подложкой. Подобное исследование представлено в данном разделе.

Рассматривается упругий слой, скрепленный с бесконечным упругим полупространством, в который нагрузкой P вдавливается упругий шарик радиуса R, т. е. учитывается деформация индентора в отличие от предыдущих результатов, полученных для жесткого индентора (в задачах с реальными покрытиями это было оправдано тем, что модуль упругости индентора заметно превосходил модули упругости покрытия и подложки). Таким образом, условия на верхней границе слоя:

$$\begin{aligned} & w^{(1)}(r) + w^{(0)}(r) = f(r) + \delta, \quad 0 \le r \le a, \\ & \sigma_z^{(1)} = 0, \qquad\qquad a < r < \infty, \\ & \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{\theta z}^{(1)} = 0, \qquad 0 \le r < \infty. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Метод решения контактной задачи с учетом упругой деформации индентора изложен в разделе 1.2.

В условиях качения в подшипнике при наличии антифрикционного покрытия коэффициент сопротивления качению обычно не превышает 0,01, поэтому влиянием сил трения на распределение напряжений можно пренебречь.

Был рассмотрен подшипник качения, в котором 32 стальных шарика диаметром 4,763 мм находятся в контакте с желобом. Средний диаметр желоба 90 мм. Нагрузка на подшипник — до 100 Н — распределяется по шарикам равномерно. Скорость вращения — до 1 000 об/мин. На поверхность желоба нанесено тонкое твердое покрытие. В данном случае рассматривалось стальное основание с модулем упругости 204 ГПа и покрытие с модулем упругости 500 ГПа.

Рассматривалось 5 значений нагрузки на подшипник: 20, 40, 60, 80, 100 Н. Толщина покрытия варьировалась в пределах от 1 до 3 мкм. Для каждой из нагрузок было проведено исследование влияния толщины покрытия на контактные характеристики: радиус области контакта a и распределение контактного давления. Результаты приведены на рис. 1.35 и 1.36.

Здесь и далее кривые *1–5* соответствуют нагрузке 100, 80, 60, 40, 20 Н соответственно.

Для каждой из нагрузок была проведена серия расчетов внутренних напряжений. Были определены все компоненты напряжений. Проанализируем результаты расчетов растягивающих и максимальных касательных напряжений, концентрация которых может привести к разрушению покрытия.

Напряжения σ_x (растягивающие-сжимающие напряжения) меняются скачкообразно на границе раздела покрытия и подложки. Локальные максимумы растягивающих напряжений имеют место в покрытии и на его поверхности.

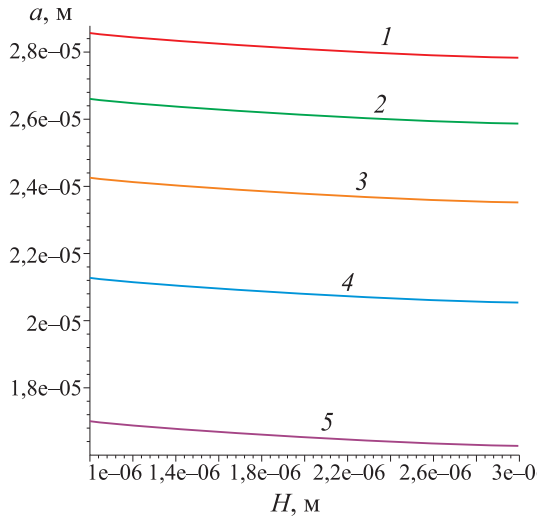


Рис. 1.35. Зависимость радиуса области контакта от толщины покрытия

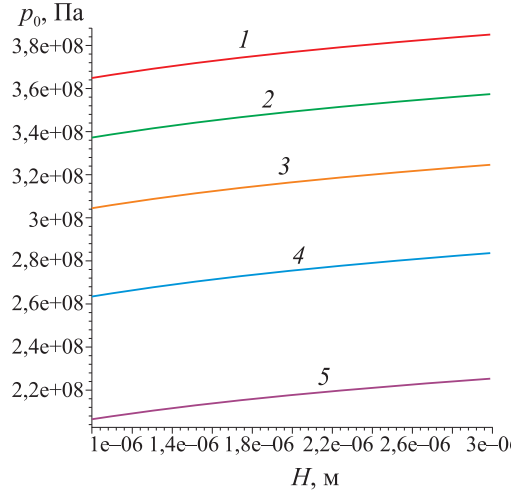


Рис. 1.36. Зависимость максимального значения контактного давления от толщины покрытия

Максимальные касательные напряжения могут иметь локальные максимумы на поверхности, на границе раздела покрытия и основания, а также, в случае особо тонких покрытий, в подложке.

Результаты расчета напряжений обобщены на рис. 1.37 и 1.38.

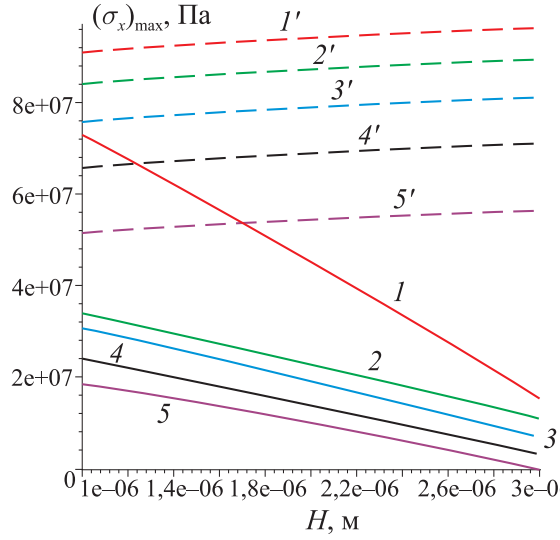


Рис. 1.37. Зависимость максимальных значений растягивающих напряжений от толщины покрытия на поверхности (штриховые линии) и на границе раздела покрытия с подложкой

На рис. 1.37 представлена зависимость максимальных значений растягивающих напряжений от толщины покрытия при разных нагрузках. Штриховые линии соответствуют максимальным значениям на поверхности, сплошные — на границе раздела покрытия и основания. Концентрация растягивающих напряжений может привести к образованию вертикальных трещин,

и, хотя растягивающие напряжения на границе раздела меньше, чем на поверхности, возможно появление в покрытии вертикальных трещин, которые инициируются на границе раздела. Это связано с тем, что зона соединения материалов обычно имеет прочностные характеристики, отличные от характеристик составляющих, поэтому в этой зоне более вероятно наличие дефектов. Увеличение толщины покрытия приводит к небольшому увеличению максимальных значений растягивающих напряжений на поверхности и к снижению — на границе раздела.

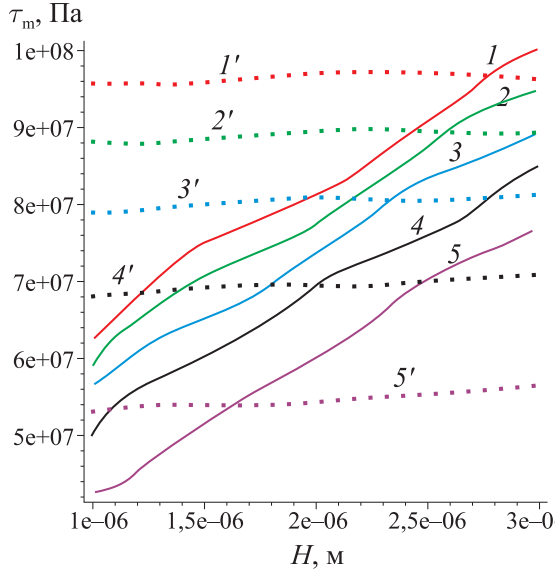


Рис. 1.38. Зависимость максимальных значений максимальных касательных напряжений от толщины покрытия на поверхности (штриховые линии) и на границе раздела покрытия с подложкой

Обобщение результатов расчетов максимальных касательных напряжений приведено на рис. 1.38. Пунктирные и сплош-

ные линии получены для максимальных значений максимальных касательных напряжений на поверхности и на границе раздела соответственно. При практически постоянных значениях локальных максимумов на поверхности имеет место существенное повышение максимальных значений напряжений. Расчеты показывают, что наиболее опасной (при данном соотношении модулей упругости материалов) с точки зрения концентрации напряжений на границе раздела является толщина, приблизительно равная радиусу области контакта, дальнейшее увеличение толщины приводит к затуханию напряжений.

В изучаемых диапазонах толщин и нагрузок покрытия являются более тонкими по отношению к радиусу пятна контакта, и максимум не достигается. Концентрация максимальных касательных напряжений на поверхности не опасна, она лишь может привести к незначительному увеличению скорости износа, тогда как концентрация на границе раздела может вызвать отслаивание. В связи с этим следует выбирать толщину покрытия, находящуюся левее точки пересечения кривых, отличающихся только наличием штриха при номере.

С учетом результатов, полученных для растягивающих напряжений, для малых нагрузок можно признать благоприятной толщину покрытия в 1–1,5 мкм, а для больших — толщину 1,5–2,0 мкм.

1.6. Исследование напряженного состояния покрытий, состоящих из двух и более слоев

В этом разделе представлены результаты решения контактной задачи и расчета внутренних напряжений, возникающих при нагружении покрытий, состоящих из двух и четырех слоев.

Сравнение решения контактной задачи для двухслойного покрытия и для однослойного покрытия с усложненными условиями на границе раздела слоя с основанием

Рассмотрим задачу о вдавливании жесткого сферического индентора в трехслойное упругое полупространство. На границах раздела слоев реализуются условия полного сцепления. Для случая относительно более жестких материалов верхнего слоя и полупространства (рис. 1.39), между которыми находится более мягкий слой, решим также приближенную задачу с теми же условиями на верхней границе слоя, но покрытие рассмотрим однослойное, а промежуточный мягкий слой учтем с помощью следующих условий на границе раздела слоев:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(1)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, \\ &\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{k_1^1}\left(w^{(1)} - w^{(2)}\right), \\ &\tau_{rz}^{(1)} = \frac{1}{k_1^2}\left(u_r^{(1)} - u_r^{(2)}\right). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Эти условия означают, что помимо податливости в тангенциальном направлении, введенной ранее и характеризуемой коэффициентом $k_1^{(2)}$, граница раздела покрытия с подложкой обладает также нормальной податливостью (коэффициент $k_1^{(1)}$).

Метод решения задачи аналогичен методу, изложенному в разделе 1.4, за одним исключением. Матрица в (1.47) принимает вид:

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} -1 & \tilde{\nu}_1-\beta\tilde{\lambda} & e^{-\beta\tilde{\lambda}} & \left(\tilde{\nu}_1+\beta\tilde{\lambda}\right)e^{-\beta\tilde{\lambda}} & 0 & 0 \\ 1 & 2\nu_1+\beta\tilde{\lambda} & e^{-\beta\tilde{\lambda}} & \left(\beta\tilde{\lambda}-2\nu_1\right)e^{-\beta\tilde{\lambda}} & 0 & 0 \\ -e^{-\beta\tilde{\lambda}} & \tilde{\nu}_1 e^{-\beta\tilde{\lambda}} & 1 & \tilde{\nu}_1 & 1 & -\tilde{\nu}_2 \\ e^{-\beta\tilde{\lambda}} & 2\nu_1 e^{-\beta\tilde{\lambda}} & 1 & -2\nu_1 & -1 & -2\nu_2 \\ e^{-\beta\tilde{\lambda}} & 2\tilde{\nu}_1 e^{-\beta\tilde{\lambda}} & -1 & 1 & -\tilde{\chi}-\beta k_1^{(2)} & -\tilde{\chi}-2\nu_2\beta k_1^{(2)} \\ -e^{-\beta\tilde{\lambda}} & e^{-\beta\tilde{\lambda}} & -1 & -2\tilde{\nu}_1 & \tilde{\chi}+\beta k_1^{(1)} & -\left(\beta k_1^{(1)}+2\tilde{\chi}\right)\tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Изменения в матрице, связанные с появлением коэффициента $k_1^{(1)}$, не усложняют решение задачи.

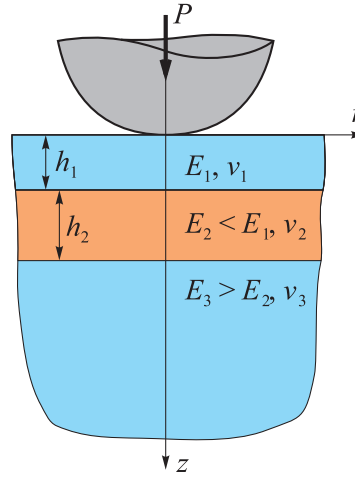


Рис. 1.39. Схема контакта индентора и трехслойного полупространства

На рис. 1.40 представлены распределения контактного давления для задачи, схема которой представлена на рис. 1.39, для частного случая равенства упругих свойств верхнего слоя покрытия и упругого полупространства. В том числе приведены результаты для случая $h_2=0$, который соответствует задаче

Герца для однородного упругого полупространства с радиусом области контакта a_H. Увеличение размера пятна контакта и уменьшение максимального значения контактного давления при увеличении толщины мягкого слоя является очевидным результатом. Для сравнения приведено распределение контактного давления, полученное для двухслойного полупространства с условиями (1.50) на границе раздела слоев. Податливость слоя $K^{(1)} = k_1^{(1)} p^* / R$ определяется из условий равенства внедрения при одинаковой нагрузке для двух рассматриваемых задач. Параметр податливости в тангенциальном направлении $K^{(2)} = k_1^{(2)} p^* / R$ полагается равным $K^{(2)} = 2K^{(1)}$.

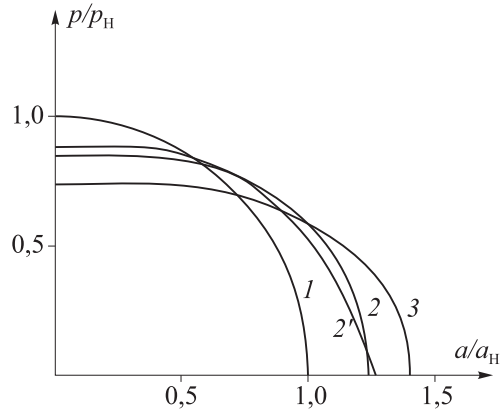


Рис. 1.40. Распределение контактного давления: $h_1 = a_H$; двухслойное покрытие — $h_2 = 0,\ 0,5a_H,\ 2a_H$ (кривые *1*, *2*, *3* соответственно), $E_2 = 1/3E_1 = 1/3E_3$; однослойное покрытие — $K^{(1)} = 0,7$ (кривая *2'*)

Относительная близость кривой *2'* и кривой *2* показывает, что для фиксированной нагрузки можно подобрать условия на границе раздела, позволяющие уменьшить число слоев в задаче.

Подобная редукция полезна в случае изучения фрикционного контакта, где расчет напряженного состояния существенно проще для однослойного покрытия, чем для двухслойного. Пример подобного исследования приведен ниже.

Исследование контактных и внутренних напряжений в металл-металлоидных покрытиях при их фрикционном нагружении

Благодаря сочетанию высокой твердости, износостойкости и стойкости к действию агрессивных сред, металл-металлоидные, в частности, никель-фосфорные покрытия нашли широкое применение в различных изделиях машиностроения, химической промышленности и электроники [172]. Стабильные и близкие по значению коэффициенты трения в вакууме и атмосфере, высокая электропроводность и отсутствие магнитных свойств делает их особенно перспективными для защиты узлов трения и электрических контактов аэрокосмической техники [111].

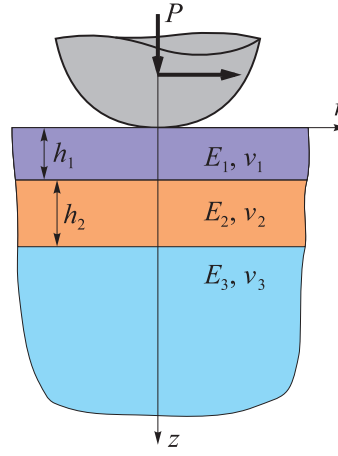


Рис. 1.41. Схема фрикционного контакта

Рассматривается фрикционный контакт трехслойного упругого полупространства и сферического контртела (рис. 1.41). Используя предположение о пренебрежимо малом влиянии касательных напряжений в области контакта на распределение контактного давления, рассмотрим осесимметричную задачу с граничными условиями (1.49), т. е. учитывается упругая деформация индентора, что необходимо ввиду высокой твердости покрытия. На границе раздела слоев выполняются условия полного сцепления.

Поскольку слой (2) является мягким относительно слоя (1) и полупространства (3), рассмотрим приближенную модель с граничными условиями (1.50).

В данном случае сравнение решения двух задач в постановке (1.14)–(1.16) с приближенным решением позволило определить параметры податливости в (1.50). Таким образом, возможно осуществить переход к решению задачи о фрикционном контакте со следующими условиями на границе раздела слоев:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(1)}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)},$$

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{k_1^1}\left(w^{(1)} - w^{(2)}\right), \tag{1.52}$$

$$\tau_{xz}^{(1)} = \frac{1}{k_1^2}\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}\right), \tau_{yz}^{(1)} = \frac{1}{k_1^2}\left(u_y^{(1)} - u_y^{(2)}\right).$$

Было рассмотрено покрытие из модифицированного никеля [30], модуль упругости которого в зависимости от модификации возрастает, начиная от $2 \cdot 10^{11}$ Па (модуль упругости чистого никеля); в расчетах в качестве верхнего предела принято значение $3 \cdot 10^{11}$ Па. Толщина покрытия 5 мкм. Модуль упругости промежуточного медного слоя — $1{,}3 \cdot 10^{11}$ Па, максимальная толщина слоя полагалась равной 0,5 мкм. Материал основного

тела (упругого полупространства) — никель. В качестве контртела использовался стальной шарик радиуса 4,7 мм, нагрузка составляла 100 мН. Коэффициент трения без смазки на первой стадии испытаний был равен 0,13.

На рис. 1.42 приведены распределения контактного давления, полученные для предельных значений модулей упругости покрытия — минимального (кривая *1*) и максимального (кривая *2*). Расчеты показали, что наличие тонкого медного слоя влияет на распределение контактного давления пренебрежимо мало. Распределение давления для покрытия из чистого никеля близко к распределению Герца. Промежуточный слой оказывает влияние на распределение внутренних напряжений в покрытии, в особенности вблизи границы раздела между слоями, поэтому в данном случае в качестве критерия соответствия приближенной модели использовались результаты расчета максимальных касательных напряжений на границе раздела (а именно, совпадение максимальных значений максимальных касательных напряжений при осесимметричном нагружении). Подобное совпадение при распределении давления, представленном на кривой *2* (рис. 1.42), получено при $k_1 = 3{,}02 \cdot 10^{17}$ Па/м. Значение k_2, как и в предыдущем случае, полагалось равным $2k_1$.

На рис. 1.43 представлено распределение максимальных касательных напряжений в покрытии при осесимметричном нагружении (рис. 1.43,а) и в условиях фрикционного контакта (рис. 1.43,б). Безразмерные значения напряжений отнесены к значению максимального контактного давления (кривая *2* на рис. 1.42). На основании расчета можно сделать вывод, что при данных параметрах фрикционного нагружения покрытия трение существенно влияет на величину максимальных касательных напряжений на поверхности (увеличивает их более чем на 30 %);

влияние трения на величину напряжений на границе раздела не столь значительно.

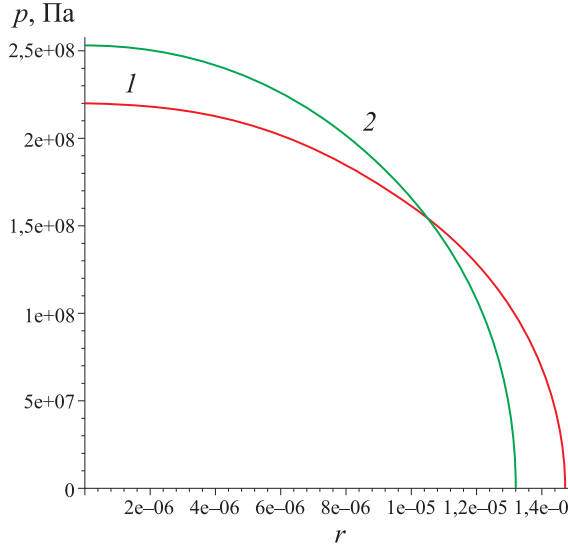


Рис. 1.42. Распределение контактного давления: $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па (кривая *1*); $E_1 = 3 \cdot 10^{11}$ Па (кривая *2*)

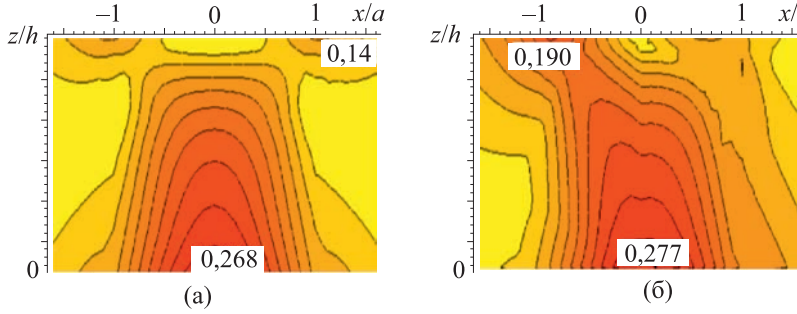


Рис. 1.43. Распределение максимальных касательных напряжений в покрытии при осесимметричном нагружении (а) и в условиях фрикционного контакта (б)

Анализ напряженно-деформированного состояния многослойного покрытия

В данном разделе исследуется задача об осесимметричном нагружении многослойных дорожных одежд, которые моделируются многослойным покрытием, скрепленным с упругим полупространством [104]. Анализ напряжений, возникающих в слоях и на границах раздела, позволяет оценить вероятность различных видов разрушения покрытия. Рассматривается влияние упругих свойств слоев на максимальные значения напряжений и перемещений.

Методы расчета многослойных дорожных конструкций для случая статического нагружения были разработаны в работах Б. И. Когана, М. Б. Корсунского [45, 15] и многих других ученых. В настоящее время для указанных расчетов обычно применяется метод конечных элементов, требующий значительных вычислительных ресурсов. Для экспресс-расчетов удобнее применять предложенный в данном исследовании численно-аналитический метод, основанный на теории интегральных преобразований, который позволяет проводить параметрические расчеты и анализировать работу многослойной дорожной конструкции при той или иной нагрузке.

Результаты этих расчетов могут быть также применены и для изучения такого взаимодействия в динамике, так как во многих практических случаях взаимодействие колеса автомобиля с дорогой носит квазистатический характер. В данной работе на примере двух различных нагружений дается анализ напряжений, возникающих в дорожной одежде. Указанный анализ может быть применен и для исследования причин разрушений, возникающих в дорожной одежде.

Ниже рассматривается модель дорожной одежды в виде многослойной конструкции, состоящей из отдельных упругих слоев; характеристики слоев известны из эксперимента [45, 15, 48]. Проскальзывание слоев не учитывается, нагрузка предполагается осесимметричной, равномерно распределенной по круговой области.

Дорожная одежда моделируется однородными упругими слоями. Рассматриваются четыре упругих слоя, скрепленных между собой, причем нижняя граница четвертого слоя скреплена с бесконечным упругим полупространством (грунтом). Верхняя граница первого слоя нагружена равномерным давлением p_0, распределенным внутри круга радиуса a.

Значения $h_1 ... h_4$ предполагались фиксированными и равными, соответственно, 5 см (h_1), 10 см (h_2), 25 см (h_3), 30 см (h_4).

Рассматривались два варианта нагружения:

А. a = 5 см, p_0 = 2 548 кПа (суммарная нагрузка 2 000 кГ);

В. a = 16,5 см, p_0 = 585 кПа (суммарная нагрузка 5 000 кГ).

Модули Юнга верхнего слоя и основания варьировались; варианты расчета представлены в табл. 1.5. Коэффициент Пуассона полагался неизменным и равным ν = 0,3.

Таблица 1.5

	E_1, МПа	E_2, МПа	E_3, МПа	E_4, МПа	E_5, МПа
Вариант I	3 200	2 000	300	100	30
Вариант II	4 000	2 000	300	100	30
Вариант III	5 000	2 000	300	100	30
Вариант IV	3 200	2 000	300	100	15

Модуль упругости асфальтобетона, из которого, как правило, устроен верхний слой дорожной одежды, сильно зависит от температуры, которая в течение суток может значительно меняться, поэтому в расчетах естественно рассмотреть различные значения модулей верхнего слоя. Модули нижних слоев дорожной одежды подвержены сезонным колебаниям в связи с изменением влажности, поэтому в расчетах рассмотрены соответствующие случаи.

Вариант I являлся базовым, варианты II и III соответствуют случаям более высокой твердости верхнего слоя, а вариант IV — ослаблению основания.

Во всех случаях исследовались следующие компоненты напряжений:

σ_r — растягивающие (сжимающие) напряжения;

τ_{rz} — касательные напряжения;

$\tau_{\max}$ — максимальные касательные напряжения.

Также рассчитывались вертикальные перемещения, определяющие прогиб нагруженной верхней границы многослойного основания.

Распределения напряжений σ_r и максимальных касательных напряжений вдоль оси z для вариантов IA и IB представлены на рис. 1.44.

Полученная в результате расчетов зависимость напряжений от координаты z показывает, что концентраторами напряжений являются первый, второй и отчасти третий слои. В третьем слое напряжения существенно затухают.

Скачок данных напряжений на границе раздела слоев объясняется условием непрерывности перемещений при скачкообразном изменении модуля упругости. Напряжения σ_z и τ_{rz} являются непрерывными функциями.

Существенное различие кривых на рис. 1.44,а и 1.44,б обусловлено разницей размера пятна контакта. В первом случае радиус пятна совпадает с толщиной первого слоя и для напряженного состояния определяющим моментом является изгиб верхнего слоя, вызывающий концентрацию растягивающих и максимальных касательных напряжений на границе раздела первого и второго слоев со стороны верхнего слоя. Тем не менее значительный перепад модулей упругости на границе второго и третьего слоев приводит к появлению там заметных локальных максимумов. При большом радиусе пятна контакта первый и второй слой изгибаются как единое целое (скачок значений напряжений на первой границе раздела невелик). Причиной является то, что отношение E_1/E_2 существенно меньше, чем E_2/E_3.

Таким образом, расчеты показывают, что границы раздела слоев являются концентраторами напряжений, что может привести к разрушению.

Далее будут рассмотрены напряжения на границах первого и второго, а также второго и третьего слоев. Напряжения на других границах раздела не рассматривались, поскольку их значения существенно меньше, что следует из результатов, представленных на рис. 1.44.

Напряжения σ_r (сжимающие – растягивающие). Распределения напряжений σ_r/p_0 для двух вариантов нагружения представлены на рис. 1.45. Здесь и далее кривые подписаны в соответствии с вариантами расчетов, приведенных в табл. 1.5.

Для варианта А (рис. 1.45,а) можно отметить увеличение максимального значения растягивающих напряжений в первом слое при увеличении твердости первого слоя и некоторое уменьшение этого значения при уменьшении модуля упругости E_5. Для варианта В (рис. 1.45,б) растягивающие напряжения имеют

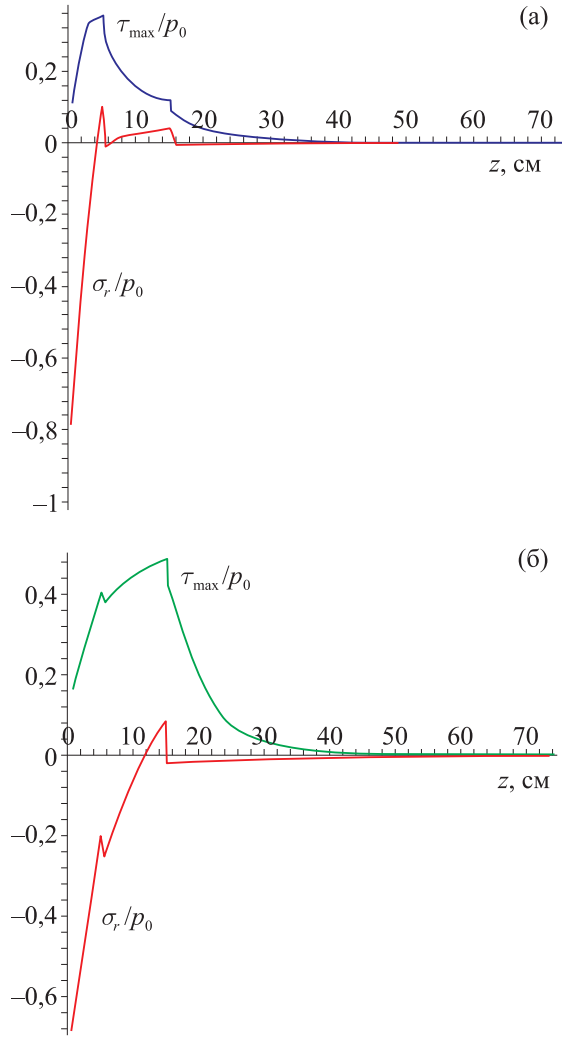


Рис. 1.44. Распределения напряжений σ_r и максимальных касательных напряжений τ_{max} по глубине многослойного основания: а — для круга нагружения радиусом 5 см (вариант А); б — для круга нагружения радиусом 16,5 см (вариант В)

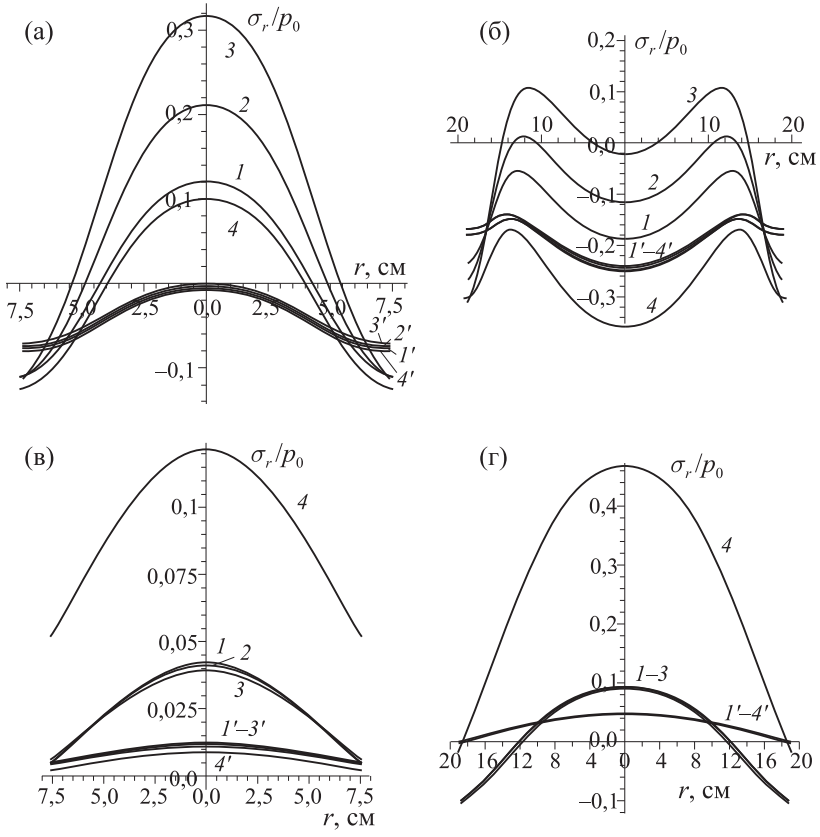


Рис. 1.45. Распределения напряжений σ_r на границе первого и второго (а, б), и второго-третьего (в, г) слоев; а, в — для круга нагружения радиусом 5 см (вариант А); б, г — для круга нагружения радиусом 16,5 см (вариант В). Кривые *1–4* соответствуют распределению напряжений на границе со стороны верхнего слоя, *1′–4′* — со стороны нижнего слоя

место только в случаях, представленных кривыми *2* и *3*, соответствующих более твердому верхнему слою. Наличие двух максимумов обусловлено малой толщиной первого слоя относительно

радиуса области нагружения (на поверхности максимальные значения растягивающих напряжений имеют место на границе круга нагружения).

В то же время на границе второго и третьего слоев (рис. 1.45,в и 1.45,г) максимальные значения растягивающих напряжений в первом слое незначительно уменьшаются при увеличении относительной твердости первого слоя и существенно увеличиваются при ослаблении основания (варианты А и В). Из этого следует, что ослабление основания приводит к усилению изгиба первого и второго слоев как единого целого. Увеличение твердости верхнего слоя приводит к более локальным изменениям поля напряжений, вероятно, это обусловлено малой толщиной данного слоя.

Максимальные касательные напряжения. Рис. 1.46 иллюстрирует влияние увеличения твердости верхнего слоя и ослабления основания на распределение максимальных касательных напряжений и их максимальные значения.

Сравнение вариантов А и В показывает, что при относительно небольшом радиусе круга нагружения (рис. 1.46,а и 1.46,в) увеличение твердости верхнего слоя приводит к значительному росту максимальных значений как растягивающих, так и максимальных касательных напряжений на нижней границе первого слоя. Ослабление основания приводит к некоторому перераспределению напряжений — уменьшению значений напряжений на первой границе раздела и неопасному увеличению напряжений на второй границе раздела.

Если радиус круга нагружения относительно большой (рис. 1.46,б и 1.46,г), также наблюдается рост значений максимальных касательных напряжений при увеличении твердости верхнего слоя. Но более опасным при данном виде нагружения

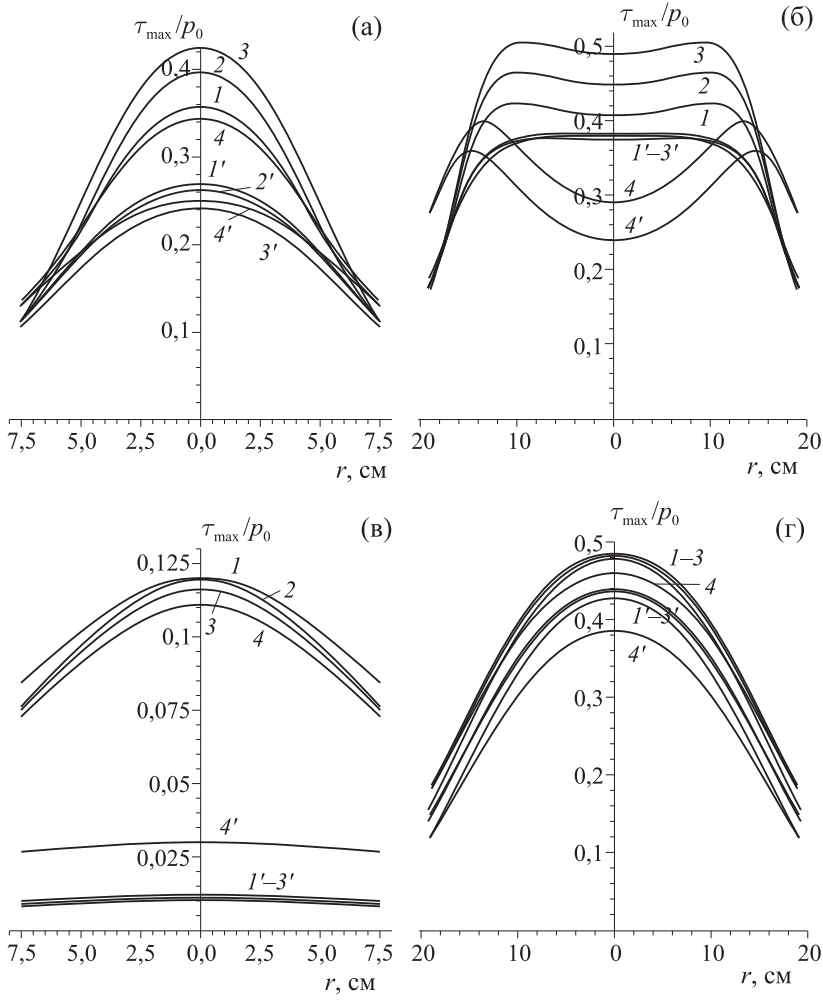


Рис. 1.46. Распределения максимальных касательных напряжений τ_{max} на границе первого и второго (а, б) и второго-третьего (в, г) слоев: а, в — для круга нагружения радиусом 5 см (вариант А); б, г — для круга нагружения радиусом 16,5 см (вариант В). Кривые *1–4* соответствуют распределению напряжений на границе со стороны верхнего слоя, *1′–4′* — со стороны нижнего слоя.

представляется ослабление основания, поскольку оно приводит к концентрации растягивающих напряжений на границе раздела второго и третьего слоев.

Напряжения τ_{rz}. На рис. 1.47 представлены распределения касательных напряжений τ_{rz} на границах первого-второго и второго-третьего слоев. Данные напряжения не имеют скачка на границе слоев в соответствии с граничными условиями (1.17).

Напряжения τ_{rz} во всех случаях больше на первой границе раздела. Они уменьшаются при увеличении твердости первого слоя и растут при ослаблении основания, что особенно заметно для варианта В, соответствующего большему радиусу круга нагружения (рис. 1.47,б).

Анализ деформаций. На рис. 1.48 показан прогиб под нагрузкой верхней границы первого слоя. Следует отметить уменьшение прогиба при увеличении твердости основания, это уменьшение существенно для меньшего размера области нагружения и незначительно для большой области нагружения (рис. 1.48,а). Ослабление основания приводит к существенному увеличению прогиба, особенно для случая большого радиуса области нагружения (рис. 1.48,б).

1.7. Определение модуля упругости покрытий по результатам индентирования

В приложении к тонким покрытиям существенным является вопрос об определении упругих свойств материалов, которые могут существенно отличаться от свойств тех же материалов в большом объеме, что связано с технологией нанесения, определяющей структуру покрытия. Кроме того, зачастую новые материалы создаются именно в виде покрытий и тонких пленок, и идентификация их объемных свойств затруднительна.

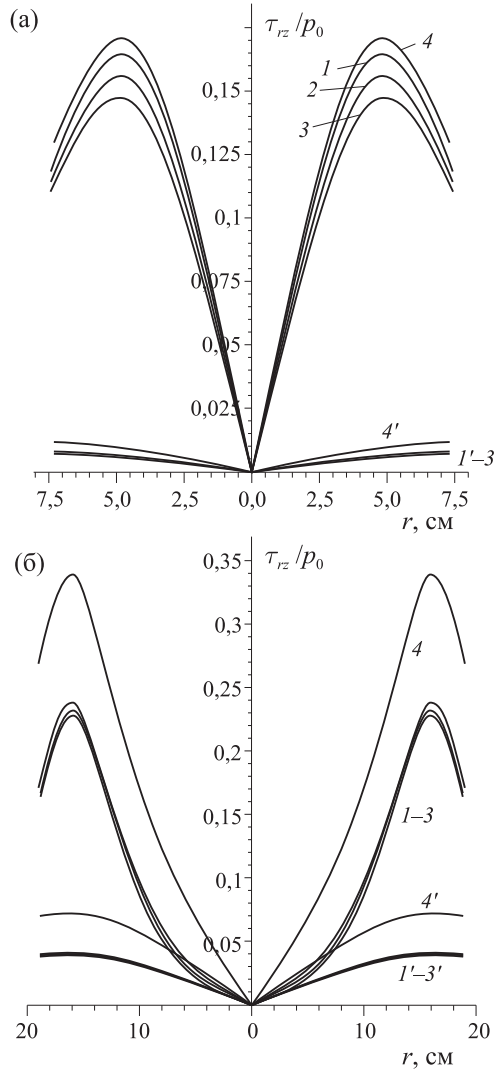


Рис. 1.47. Распределения напряжений τ_{rz} на границе первого и второго (кривые *1–4*) и второго-третьего (кривые *1′–4′*) слоев: а — для круга нагружения радиусом 5 см (вариант А); б — для круга нагружения радиусом 16,5 см (вариант В)

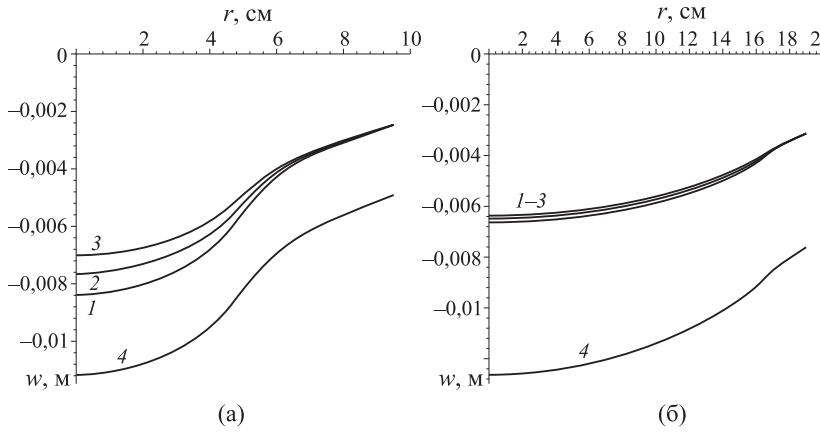


Рис. 1.48. Вертикальные перемещения верхней границы многослойного основания; а — для круга нагружения радиусом 5 см (вариант А), б — для круга нагружения радиусом 16,5 см (вариант В)

Для покрытий, как и для однородных материалов, модуль упругости может определяться по результатам индентирования. Принято считать, что при вдавливании пирамиды Берковича, являющейся в настоящее время наиболее распространенным видом головки инденторов, на глубину, не превышающую 1/10 толщины покрытия, влиянием подложки можно пренебречь и пользоваться стандартным программным обеспечением, созданным для однородных тел. Но в случае относительно твердых покрытий при интерпретации результатов индентирования необходимо учитывать деформацию более мягкой подложки. Пример индентирования пирамидой Берковича однородного материала и того же материала с нанесенным на него твердым покрытием приведен на рис. 1.49 [110]. Четкий отпечаток здесь сменяется размытым, что свидетельствует о пластической деформации подложки и изгибе покрытия. В рамках данного ис-

следования разработан метод расчета упругих характеристик тонких твердых покрытий на основе индентирования конусом с известным радиусом закругления (наноиндентирование) и сферическим индентором (микроиндентирование).

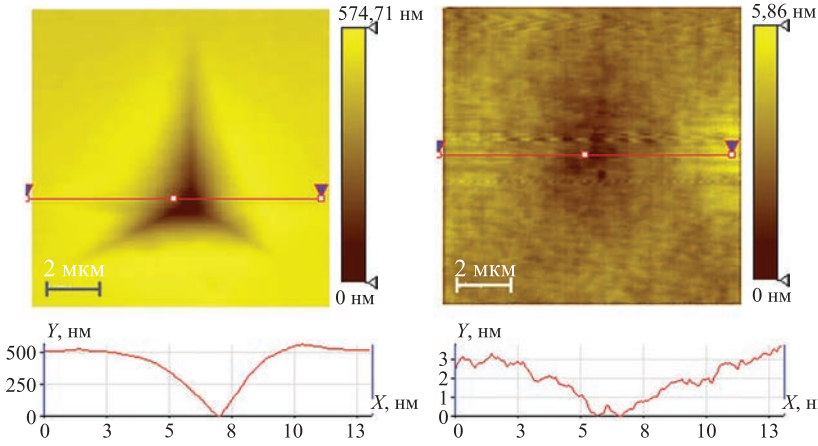


Рис. 1.49. Отпечатки и рельеф поверхности образцов поликарбоната (а), поликарбоната с термоотверждающимся силоксановым покрытием (б) после индентирования. Максимальная нагрузка — 10 мН [110]

Эксперимент по наноиндентированию образцов с покрытиями проводился с помощью измерительного комплекса NanoTest 600 (MicroMaterialsLtd., Англия) [30]. В данном эксперименте применялся алмазный конический индентор с углом при вершине 60° и радиусом закругления 10 мкм, обеспечивалось разрешение по нагрузке 60 мкН и по глубине индентирования 0,04 нм. Вдавливание проводилось в режиме контролируемой нагрузки, с преднагрузкой 0,1 мН. Снимались зависимости нагрузка-глубина, на стадиях нагрузки и разгрузки. Разгрузка проводилась с той же скоростью, что и нагружение. Были про-

ведены 10 экспериментов в разных точках поверхности. Максимальная нагрузка составляла 10, 100 и 500 мкН.

Эксперименты по микроиндентированию проводились на UMT «Cetr» с использованием стального сферического индентора с радиусом 6,35 мм. Максимальная нагрузка — 0,2 Н. Все эксперименты по индентированию проводились в условиях антивибрационной защиты и отсутствия тепловых потоков.

Расчет модуля упругости покрытия проводился на основе решения контактной задачи для двухслойного упругого полупространства и гладкого индентора с граничными условиями (1.49), в которых учитывается упругая деформация индентора. При этом предполагалось полное сцепление покрытия с подложкой.

В данном случае обратить задачу с тем, чтобы определить неизвестный модуль упругости при известных значениях нагрузки и внедрения, невозможно, поскольку заранее неизвестен вид функции распределения давления. В то же время возможно решить серию контактных задач с изменяющимся модулем упругости, построить кривую зависимости внедрения от величины модуля упругости в выбранном диапазоне и при фиксированной нагрузке и остановиться на том значении, которое обеспечивает экспериментальное значение внедрения. Большое количество точек на кривой разгрузки позволяет получить и большое количество значений модуля упругости, которые при малой погрешности эксперимента и расчетов близки друг к другу. Использовался следующий алгоритм: из десяти кривых разгрузки выбирались пять, обеспечивающих наименьший разброс, затем вычислялась усредненная экспериментальная кривая разгрузки, на которой выбирались десять точек с разными нагрузками. Для этих точек рассчитывался модуль упругости, после чего определялось среднее значение.

На рис. 1.50 представлены примеры расчета зависимости внедрения от нагрузки, полученные для относительно жестких (а) и относительно мягких (б) покрытий (кривые *3*). Для сравнения приведены кривые, полученные по теории Герца для однородных материалов со свойствами подложки (кривые *1*) и покрытия (кривые *2*). Мы видим, что для относительно мягких покрытий неучет податливости подложки дает ничтожно малую погрешность при расчетах для малых внедрений, тогда как для относительно жестких покрытий погрешность может быть существенной даже при внедрении, не превышающем 10 % от толщины покрытия.

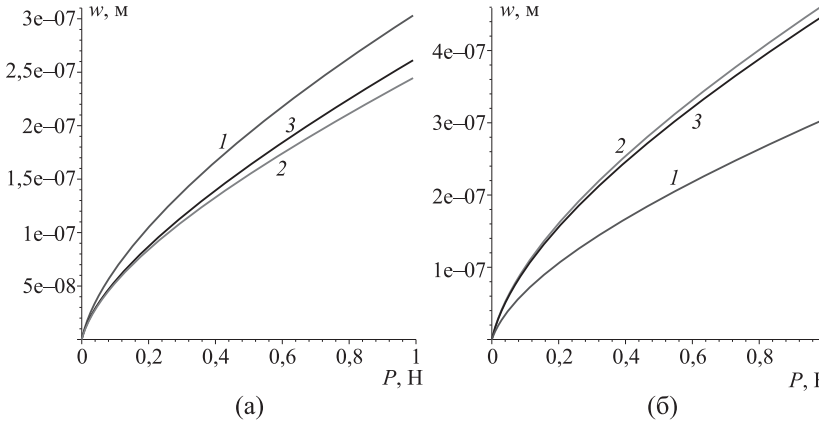


Рис. 1.50. Зависимость внедрения от нагрузки, рассчитанная для внедрения стального шарика диаметром 3 мм в сталь без покрытия (кривые *1*) — модуль упругости стали 210 ГПа; в покрытие толщиной 2 мкм (кривые *3*) на стали, отношение модулей упругости покрытия и подложки 2,5 (а) и 0,4 (б); в однородный материал с упругими характеристиками относительно твердых (а) и мягких (б) покрытий (кривые *2*)

Рассмотрим результаты индентирования Ni-P покрытий толщиной 3 мкм, сформированных на стальной подложке. На рис. 1.51 представлены кривые нагружения-разгрузки, полученные на комплексе NanoTest 600 при максимальной нагрузке 100 мкН. Нагрузка и геометрия контакта подбирались так, чтобы обеспечить упругое вдавливание, при котором кривые нагружения и разгрузки должны совпадать, тем не менее результаты, на первый взгляд, соответствуют случаю упруго-пластической деформации. Следует отметить, что модуль упругости, рассчитанный программным комплексом прибора по теории Герца, мало отличается от модуля упругости стали, из чего можно сделать вывод, что несовпадение кривых нагружения и разгрузки обусловлено большой шероховатостью поверхности (см. рис. 1.52). При этом кривые разгрузки при наложении демонстрируют хорошее совпадение и могут быть использованы для расчетов.

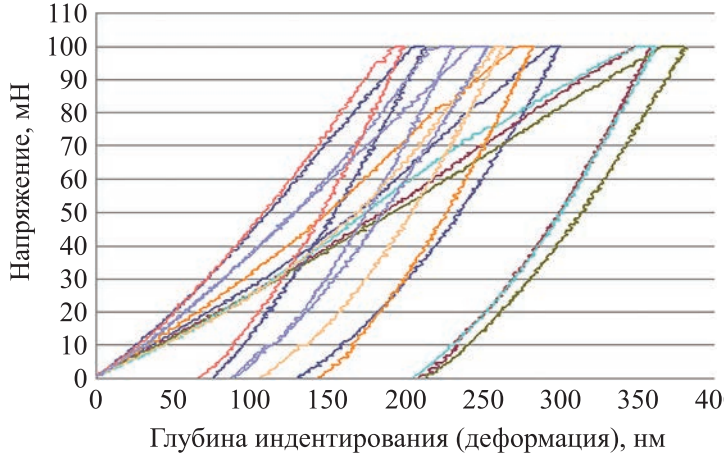


Рис. 1.51. Результаты индентирования Ni-P покрытия (толщиной 2 мкм) на стали

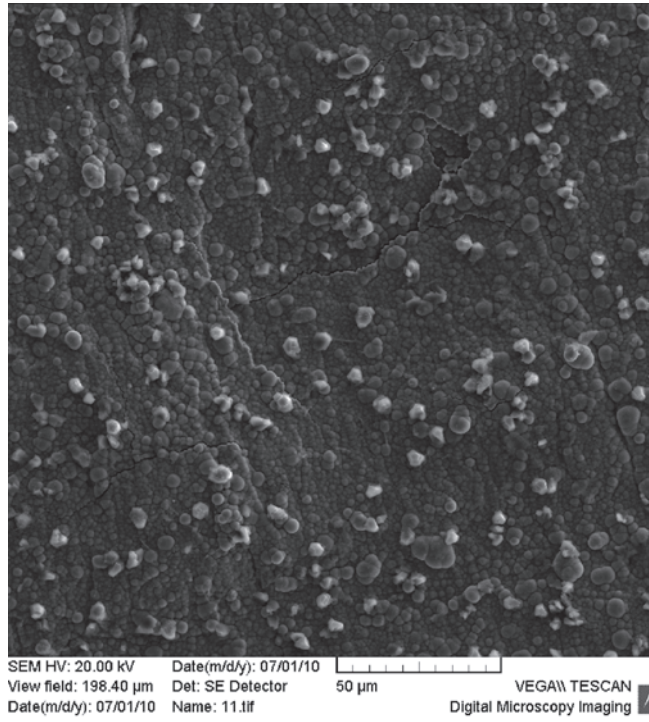


Рис. 1.52. Поверхность Ni-P покрытия [30]

На рис. 1.53 представлены: *1* — экспериментальная кривая (средние значения, полученные из кривых нагружения рисунка 1.51); *2* — расчетная кривая, полученная для композиции сталь с модулем упругости 210 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,3 и покрытие толщиной 2 мкм с модулем упругости 420 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,22; *3* и *4* — расчетные кривые, полученные по теории Герца для однородных материалов с модулями упругости подложки и покрытия соответственно. Удовлетворительное совпадение кривых *1* и *2* позволяет использовать полученное значение модуля упругости для дальнейших расчетов.

На рис. 1.54 представлены усредненные результаты эксперимента и расчетов для случая микроиндентирования. В этом случае большой радиус кривизны индентора приводит к тому, что на площадке контакта оказывается большое количество неровностей, малая нагрузка на каждую неровность исключает микроразрушения неровностей (что возможно при вдавливании алмазного конуса), и в итоге кривые нагружения и разгрузки достаточно хорошо соответствуют случаю полной упругости. При этом расчетный модуль упругости в случае микроиндентирования меньше (395 ГПа), что, несомненно, вызвано наличием неровностей в области контакта.

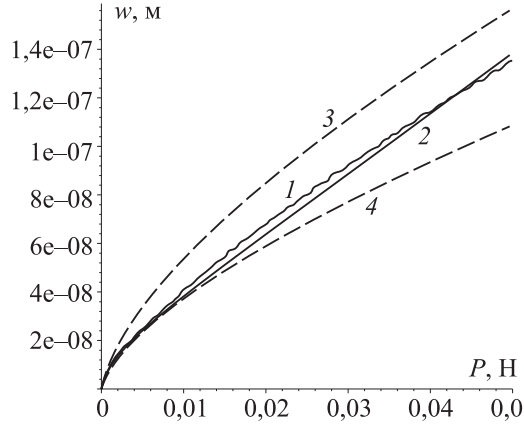


Рис. 1.53. Зависимость внедрения от нагрузки для композиции Ni-P покрытие — стальная подложка (наноиндентирование); *1* — усредненные результаты эксперимента, *2* — расчетная кривая, *3* и *4* — расчетные кривые для однородных материалов, Ni-P и стали соответственно

Качество поверхности покрытия является важным, но не единственным условием успешного проведения эксперимента

по упругому индентированию. Этот факт хорошо иллюстрируют результаты, полученные для покрытий, состоящих из оксидов металлов и полученных по технологии, разработанной для нанесения сверхтонких (от 60 нм) твердых покрытий.

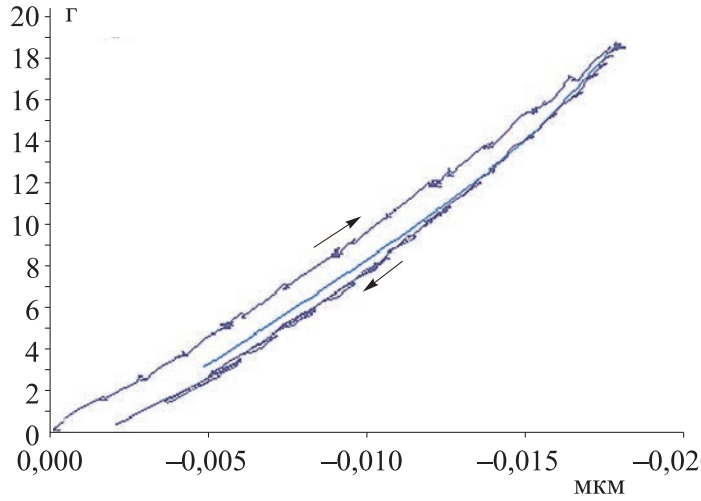
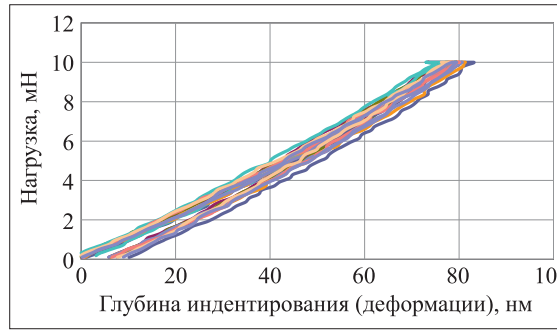
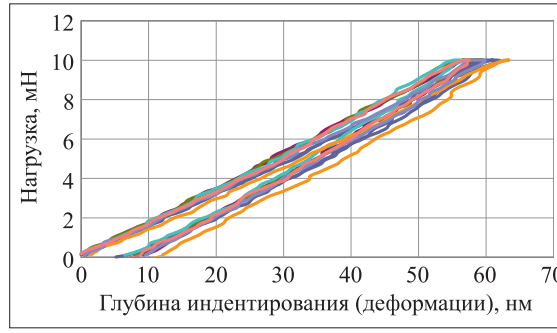


Рис. 1.54. Зависимость внедрения от нагрузки для композиции Ni-P покрытие — стальная подложка (микроиндентирование); усредненная экспериментальная (со стрелками) и расчетная кривые

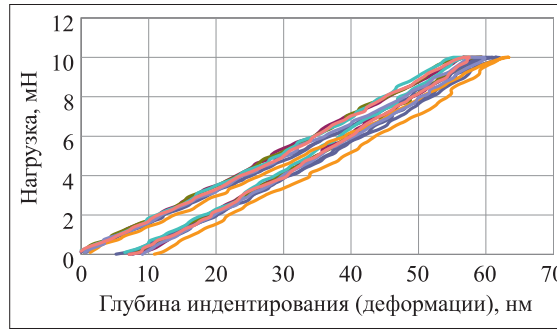
Специально для эксперимента на комплексе NanoTest были подготовлены образцы покрытий на кварцевом стекле, шероховатость поверхности составила менее, чем 5 нм [102]. Также был подготовлен один образец без покрытия. Результаты индентирования представлены на рис. 1.55. На рис. 1.55,а представлены результаты для кварца без покрытия. Расчетный модуль упругости, полученный с помощью программного обеспечения комплекса NanoTest, составил 100 ГПа, что существенно больше табличного значения 70 ГПа. Разница между кривыми нагрузки



(а)



(б)



(в)

Рис. 1.55. Результаты индентирования кварца без покрытия (а), кварца с покрытием из оксида циркония толщиной 300 нм (б), кварца с покрытием из оксида алюминия толщиной 70 нм (в)

и разгрузки мала и сопоставима с общей погрешностью измерения, т. е. индентирование является упругим и не разрушает поверхность кварца. Оксидные покрытия тверже кварца, поэтому следовало ожидать, что и в случае кварца с покрытием кривые нагружения-разгрузки будут совпадать. В ряде случаев, например для покрытия из оксида циркония (рис. 1.55,б), разница между кривыми не превысила погрешности измерения, модуль упругости был рассчитан с хорошей степенью точности и составил 220 ГПа. В другом случае, когда эксперимент проводился с покрытием из оксида алюминия, были получены результаты, свидетельствующие о наличии податливого слоя, который после индентирования не восстановился (рис. 1.55,в). Поскольку это не может быть кварц и материал покрытия, следует предположить либо наличие загрязнений на поверхности, либо наличие дефектного слоя на границе раздела покрытия с подложкой. В этом случае полученное расчетное значение модуля упругости 280 ГПа следует считать приблизительным.

Глава 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ АДГЕЗИИ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПОКРЫТИЯ ИЛИ ПОДЛОЖКИ

В предыдущей главе рассматривалось контактное взаимодействие покрытий с гладким индентором в рамках теории упругости. Ниже будет показано, что изложенные в первой главе методы могут быть адаптированы и усовершенствованы для учета явлений, выходящих за рамки чисто упругих взаимодействий — вязкоупругости материалов и наличию сил адгезионного притяжения, особенно важных на микроуровне.

Покрытия толщиной меньше микрона не являются редкостью и используются, например, в микро-электромеханических системах (MEMS) [120]. Кроме того, механические свойства покрытий в настоящее время определяются методами наноиндентирования, с использованием диапазонов сил и внедрений, при которых не учитывать адгезию нельзя [124]. Еще одним примером могут являться покрытия из таких материалов, как некоторые виды полимеров, которые проявляют адгезионные свойства на макроуровне. Таким образом, решение контактных задач для слоистых тел с учетом адгезии является актуальной задачей механико-математического моделирования.

Одна из наиболее распространенных моделей адгезионного взаимодействия разработана Джонсоном, Кендаллом, Робертсом (JKR), в ее основе лежит принцип баланса энергии, а силы адгезии действуют внутри области контакта. Упрощенная модель JKR применима в случае высоких значений поверхностной энергии, причем для податливых поверхностных слоев. Контакт упругих слоистых тел при наличии адгезии, использующих модели на основе теории JKR, исследовался в работах [155, 174, 179, 180]. При этом в них использовались энергетические подходы, позаимствованные из механики разрушений, такие как скорость высвобождения энергии [179, 180] и коэффициент интенсивности напряжений [155]. Контакт жесткого индентора произвольной формы с упругим полупространством, покрытым упругим слоем, исследовался с помощью метода граничных элементов в [174]. Для решения использовался алгоритм быстрых преобразований Фурье. В перечисленных выше работах [155, 174, 179, 180] использовался метод граничных элементов. В работах [123, 129, 165] получены полуаналитические решения задач о контакте слоистых упругих оснований с использованием моделей адгезии, основывающихся на теории JKR. Асимптотическое решение контактной задачи о нагружении поперечно-изотропного упругого слоя для этой же модели адгезии получено в [121].

В случае, если рассматривается контакт податливых покрытий на жестком основании, может быть эффективным применение одномерной модели материала. Преимуществом такого подхода является возможность использовать более точные формы потенциала адгезионного взаимодействия, рассматривать задачи со сложной геометрией контакта, а также минимизировать численную составляющую решения задачи. Так, например,

в [29] было получено решение периодической контактной задачи о скольжении волнистого индентора по вязкоупругому слою Кельвина, учитывая адгезию, описываемую моделью Можи–Дагдейла [166]. В рамках этой модели адгезионное давление аппроксимируется постоянным значением, действующим внутри области адгезионного взаимодействия, которая определяется величиной зазора между поверхностями. Применимость одномерной модели ограничена требованиями к свойствам материала подложки. Помимо того, что моделируемый слой должен быть значительно мягче основания, указанная модель не подходит для описания мягких покрытий с большим значением коэффициента Пуассона, например, резиновых.

В работе [96] рассматривается уточненная постановка контактной задачи, где считается, что силы адгезии прикладываются не к границе деформируемого тела как контактное давление, а к точкам внутри тела, причем граница тела свободна от нагрузок. Получены решения для тонкого упругого слоя на жестком основании и для упругого полупространства.

Модель Можи–Дагдейла использовалась для решения осесимметричной контактной задачи для слоистых тел при наличии адгезии [178, 181]. При этом использовалось упрощающее предположение об отсутствии влияния адгезии на размер площадки контакта. В [178] получено полуаналитическое решение задачи о контакте с адгезией жесткого сферического индентора и упругого основания, сцепленного с упругим слоем. В [181] решение было получено для случая нескольких слоев, сцепленных с упругим основанием. Решение осесимметричной задачи осуществлялось с помощью интегральных преобразований Ханкеля.

Переходя ко второй теме раздела — контактному взаимодействию слоистых тел с учетом вязкоупругости, следует отме-

тить, что резины и другие полимеры часто используются в качестве покрытий для обеспечения демпфирования, снижения шума и других эффектов во время трения. Во многих случаях материалы намного более податливы, чем подложки. Фрикционное взаимодействие таких покрытий можно рассматривать в рамках модели вязкоупругого слоя, сцепленного с жестким полупространством. Одномерная модель вязкоупругого слоя широко используется для решения трехмерных контактных задач, например, в работах [25, 63, 72, 95, 158, 173]. Плоские квазистатические контактные задачи для вязкоупругого слоя (модель материала с постоянным коэффициентом Пуассона) решены в работах В. М. Александрова и А. В. Марка [10, 70].

Методы решения пространственных квазистатических контактных задач для инденторов, скользящих по вязкоупругому полупространству, были разработаны в работах [7, 31, 97, 146, 159]. Влияние адгезионной составляющей трения на диссипацию энергии проанализировано в работах [31, 146]. Решение контактной задачи может быть использовано для расчета и анализа внутренних напряжений в вязкоупругом материале [97]. Метод, разработанный для вязкоупругого полупространства, был также использован для построения аппроксимации вязкоупругого слоя [169].

В случае вязкоупругих материалов с покрытием не было найдено моделей для расчета распределения давления и рассеяния энергии при скольжении индентора с постоянной скоростью. В то же время есть экспериментальные работы, например, [122]. Относительно твердые покрытия используются для улучшения трения и износостойкости резин или для защиты материалов от химического разложения.

2.1. Пространственная контактная задача для тел с покрытиями при наличии адгезии

В этом разделе представлено решение контактной задачи для упругого двухслойного основания и индентора произвольной формы при наличии адгезии, на основе которого можно проанализировать совместное влияние адгезионных сил и различной податливости материалов покрытия и подложки на результаты индентирования, а также исследовать напряженное состояние, возникающее в покрытии и подложке.

Рассмотрим задачу о внедрении жесткого гладкого индентора произвольной формы под действием нормальной силы Q в двухслойное упругое полупространство (рис. 2.1).

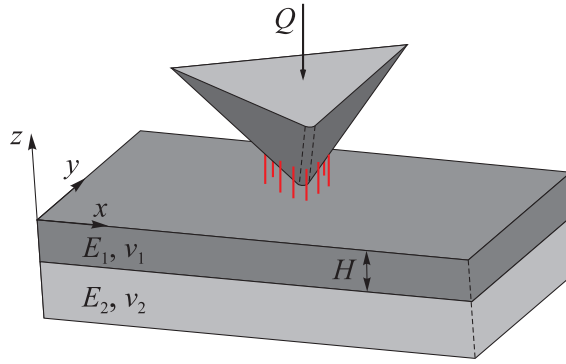


Рис. 2.1. Схема контакта

Система координат (x, y, z) связана с индентором, начало системы координат находится в точке первоначального касания индентора и слоя. Материалы слоя и полупространства характеризуются модулем Юнга и коэффициентом Пуассона E_i, ν_i (i = 1 для слоя и i = 2 для полупространства). Адгезионное взаимодей-

ствие между поверхностью покрытия и индентором зависит от зазора δ и описывается моделью Можи–Дагдейла:

$$p_a = \begin{cases} p^*, & 0 < \delta \le \delta^*, \\ 0 & \delta^* < \delta. \end{cases} \tag{2.1}$$

Рассматриваются следующие граничные условия при $z = 0$:

$$\begin{aligned} & w^{(1)}(x,y) = f(x,y) + D, \ \ (x,y) \in \Omega, \\ & \sigma_z^{(1)} = -p^*, \ \ (x,y) \in \Omega^*, \\ & \sigma_z^{(1)} = 0, \ \ (x,y) \notin \Omega, \ \ (x,y) \notin \Omega^*, \\ & \tau_{xz}^{(1)} = 0, \ \ \tau_{yz}^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь Ω — область контакта, Ω^* — область адгезионного взаимодействия, $w(x,y)$ — вертикальные смещения поверхности слоя, D — внедрение индентора, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} — нормальные и касательные напряжения. Форма индентора описывается функцией $f(x,y)$. Контактные давления $p(x,y) = -\sigma_z(x,y)$ и области Ω, Ω^* неизвестны.

Зазор в (2.1) определяется соотношением:

$$\delta(x,y) = f(x,y) + D - w^{(1)}(x,y). \tag{2.3}$$

Выполняется также условие равновесия

$$Q = \iint\limits_{\Omega} p(x,y)\,dxdy \tag{2.4}$$

и условие равенства $p*$ нормальных напряжений на границе области контакта Ω.

Условия на нижней границе слоя ($z = -H$, где H — толщина слоя) соответствуют полному сцеплению:

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \quad u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, \quad u_y^{(1)} = u_y^{(2)},$$
$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}. \tag{2.5}$$

Здесь $u_x^{(i)}$, $u_y^{(i)}$ — горизонтальные перемещения материала слоя ($i = 1$) и полупространства ($i = 2$).

Рассмотрим сначала пространственную контактную задачу при $p^* = 0$, т. е. без учета сил адгезии. В отличие от контактных задач, рассмотренных в предыдущей главе, здесь не предполагается обязательное наличие осевой симметрии.

Пусть постоянная нагрузка q, распределенная внутри квадрата со стороной $2a$, действует на двухслойное упругое основание. Условия на верхней границе слоя имеют вид:

$$\sigma_z = -q, \ \ |x| \le a, |y| \le a,$$
$$\sigma_z = 0, \ \ |x| > a, |y| > a, \tag{2.6}$$
$$\tau_{xz} = 0, \ \ \tau_{yx} = 0.$$

Эта задача решена в [75] с помощью методов, основанных на использовании двойных интегральных преобразований Фурье, которые позволяют рассчитать напряжения и упругие перемещения в слое и полупространстве. В частности, показано, что нормальные перемещения на верхней границе слоя определяются соотношением

$$w_a(x_a, y_a, 0) = -\frac{1+\nu_1}{E_1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \Delta(\gamma, \varphi, \lambda, \chi) \cos(x_a \gamma \cos\varphi) \cos(y_a \gamma \sin\varphi) d\gamma d\varphi. \tag{2.7}$$

Здесь x_a, y_a, w_a — безразмерные координаты и нормальные смещения поверхности, отнесенные к полуширине квадрата a, E_1, ν_1 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала

слоя, $\chi = \dfrac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)}$ — отношение приведенных модулей упругости слоя и упругого полупространства, γ, φ — координаты в пространстве двойных интегральных преобразований Фурье, $\lambda = H / a$ — безразмерная толщина слоя, $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)$ получена в результате решения системы линейных функциональных уравнений, полученных из граничных условий (2.5), (2.6) в результате использования бигармонических функций для определения напряжений и перемещений, а также примененного к постоянной нагрузке двойного интегрального преобразования Фурье. Общий вид $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)$ является громоздким и здесь не приводится, но важно отметить, что эта функция линейно зависит от $\bar{q}$ — результата применения двойного преобразования Фурье к постоянному давлению q:

$$\bar{q} = q\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\gamma\cos\varphi)\sin(\gamma\sin\varphi)}{\gamma^2\sin\varphi\cos\varphi}. \qquad (2.8)$$

В связи с тем, что постоянное давление q линейно входит в функцию $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)$ и может быть вынесено за знак интеграла, (2.6) может быть взято за основу при решении контактной задачи — определении контактного давления $p(x,y)$ в виде кусочно-постоянной функции.

Из (2.2) и (2.4) получим следующее уравнение для определения контактного давления:

$$\begin{pmatrix} 4a^2 & \cdots & 4a^2 & 0 \\ k_1^1 & \cdots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \cdots & k_N^N & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \qquad (2.9)$$

где $p_1 \ldots p_N$ — неизвестные постоянные давления в каждом из N элементов, $f_1 \ldots f_N$ определяются формой индентора. Коэффициенты k_i^j получены из (2.2):

$$k_i^j = -\frac{1+\nu_1}{E_1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \Delta'(\gamma, \chi, \varphi, \lambda) \cos(y_{ij} \gamma \sin\varphi) \cos(x_{ij} \gamma \cos\varphi) d\gamma d\varphi. \quad (2.10)$$

Здесь $(x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2}$ — расстояние между центрами элементов-квадратов, $\Delta'(\gamma, \chi, \varphi, \lambda) = \Delta(\gamma, \chi, \varphi, \lambda) / q$.

Решение уравнения (2.9) в произвольной, априори превышающей искомую, области контакта включает, вообще говоря, отрицательные давления в некоторых элементах-квадратах. На следующей итерации давление в этих элементах полагается нулевым, ранг матрицы системы (2.9) сокращается за счет данных нулевых элементов, и система решается заново. В результате итерационного процесса определяется положительное контактное давление $p(x, y)$ и область контакта Ω.

Для решения контактной задачи с учетом сил адгезии применяется процедура, похожая на цикл нагружение-разгрузка. Сначала решается задача без адгезии, при этом индентор нагружен силой Q_0, такой, что область контакта Ω_0^* заведомо включает в себя искомую область адгезионного взаимодействия Ω^* и область контакта Ω для задачи с адгезией при нагрузке $Q < Q_0$. Затем нагрузка уменьшается на шаг ΔQ, определяется новая область контакта, давление, а также вертикальные смещения границы подложки. С учетом вертикальных смещений, а также положения границы области Ω_0^*, происходит поиск элементов поверхности, соответствующих геометрическим критериям возникновения адгезионного взаимодействия в (2.1), затем

пересчет значений вертикальных перемещений поверхности, а также определение силы притяжения индентора к поверхности Q_{adh}. Система линейных уравнений с учетом сил адгезии приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 4a^2 & \cdots & 4a^2 & 0 \\ k_1^1 & \cdots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \cdots & k_N^N & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 - k \cdot \Delta Q + Q_{adh} \\ f_1 + w_1^{adh} \\ \vdots \\ f_N + w_N^{adh} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $Q_{adh} = \sum_{i=1}^{N} 4 p_i^* a^2$, $\begin{pmatrix} w_1^{adh} \\ \vdots \\ w_N^{adh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 & \cdots & k_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^N & \cdots & k_N^N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1^* \\ \vdots \\ p_N^* \end{pmatrix}$.

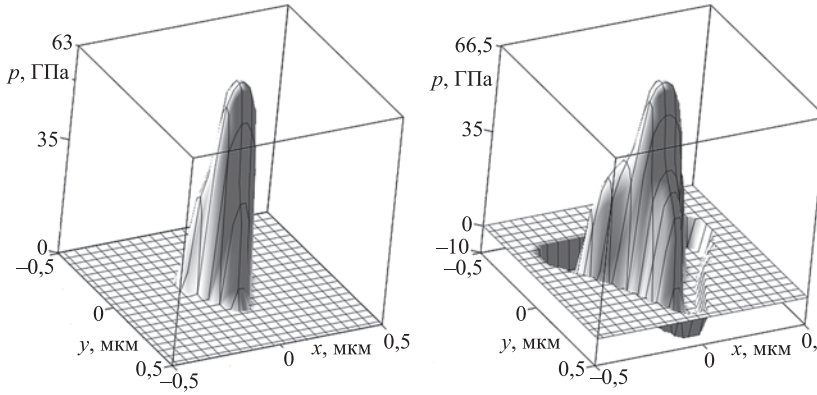
Здесь k — номер итерации, w^{adh} — перемещения, вызванные действием адгезионных сил (p_i^* может принимать значение p^* либо 0 в зависимости от выполнения условия (2.1)). Нагрузка уменьшается пошагово до тех пор, пока не достигнет значения Q, необходимого по условиям задачи. В результате определяется область контакта, область адгезионного взаимодействия и распределение контактного давления. Затем полученные на поверхности распределения нормальных напряжений используются для определения внутренних напряжений подобно тому, как подобный расчет проводился для аналогичной задачи без адгезии [98].

Разработанный метод решения может быть использован для решения пространственных задач для тел с покрытиями при произвольной форме гладкого индентора. С практической точки зрения наиболее востребованной является задача о вдавливании пирамиды Берковича при малых нагрузках в двухслойное упру-

гое полупространство. Этот тип головок широко используется при наноиндентировании, он представляет собой трехгранную пирамиду с закругленным концом. По ГОСТ Р.8.904-2015 радиус закругления может быть до 50 нм, в ходе эксплуатации увеличивается. При исследовании тонких пленок все чаще индентирование происходит в упругом режиме, что не позволяет определять твердость исследуемых материалов, но может дать информацию об их упругих свойствах.

Для демонстрации возможностей метода было исследовано вдавливание силой $Q = 0{,}002$ Н трехгранной пирамиды, геометрия которой определяется ГОСТ Р.8.904-2015, но радиус закругления составляет 0,3 мкм, в покрытие толщиной 0,1 мкм с модулем Юнга 350 ГПа, нанесенное на подложку с модулем 70 ГПа. Коэффициенты Пуассона для материалов слоя и полупространства полагались равными 0,3 и 0,4 соответственно. Адгезионное взаимодействие характеризовалось параметрами $p^* = 10$ ГПа, $\delta^* = 2$ нм. Выбор величины критического зазора обусловлен характерным радиусом действия сил Ван-дер-Ваальса, значение p^* является достаточно высоким, чтобы получить при расчетах результаты, демонстрирующие влияние адгезии. На рис. 2.2 приведены распределения контактного давления под индентором, причем на рис. 2.2,а представлен результат, полученный с учетом взаимного притяжения поверхностей, а на рис. 2.2,б — без учета сил адгезии. Сложная форма индентора приводит к тому, что в центре площадки контакта (под скруглением) распределение давления близко к осесимметричному, ближе к границе контактные давления имеют значительный градиент под гранями пирамиды; форма области контакта близка к треугольной. При наличии адгезии на периферии области кон-

такта имеет место отрицательное давление, и, в соответствии с соотношением (2.1), в зазоре, не превышающем δ^*, имеет место постоянное отрицательное давление. При наличии адгезии площадь области контакта и максимальное значение контактного давления больше, что соответствует выполнению условия равновесия (2.3) при наличии априори неизвестных адгезионных сил.



(а) (б)

Рис. 2.2. Влияние адгезии на нормальные напряжения на поверхности при вдавливании пирамиды

Другим распространенным типом наконечника при индентировании является скругленный конус либо сфера. В связи с меньшим количеством геометрических параметров в этом случае более удобно провести полный анализ совместного влияния сил адгезии и слоистой структуры основания на решение контактной задачи и распределение внутренних напряжений. С этой целью введем систему безразмерных параметров, характеризующих как входные данные, использованные при расчетах, так

и результаты. Используем безразмерные координаты $(x', y') = (x, y) / R$, где R — радиус сферы, безразмерные смещения поверхности слоя $w'(x', y') = w^{(1)}(x, y) / R$, безразмерную нагрузку $Q' = Q / R^2 E_1$, относительную жесткость слоя $\chi = E_1 / E_2$, его относительную толщину $\lambda = H / R$, а также безразмерные константы в модели Можи–Дагдейла (2.1): p_a / E_1, δ^* / R. Безразмерные контактные давления отнесены к модулю Юнга слоя $p'(x, y) = p(x, y) / E_1$, подобным образом вводятся и безразмерные напряжения.

На рис. 2.3–2.5 представлены результаты расчета нормального смещения поверхности в условиях контактного взаимодействия для упругого полупространства (рис. 2.3), относительно мягкого (рис. 2.4) и относительно жесткого слоя (рис. 2.5). Решение для упругого полупространства было получено при $\chi = 1$ с целью верификации модели и последующего сравнения результатов. Здесь и далее на кривых литерой *A* обозначена точка нулевого значения контактного давления, литерой *B* — граница области контакта, *C* — внешняя граница области Ω^*, в которой действуют силы адгезии. В некоторых случаях точки *A* и *B* расположены очень близко, что связано с большим градиентом давления вблизи границы области контакта. Зависимость вертикального смещения от координаты, монотонная для случая без адгезии (кривая *1*), имеет максимум при наличии адгезии, причем, чем больше значение p_a, тем больше величина этого максимума. Также увеличивается размер площадки контакта, при этом ширина зоны адгезионного взаимодействия вне области контакта (между точками *B* и *C*) с увеличением значения p_a сначала растет, затем уменьшается. Последний результат

находится в соответствии с выводом Можи [166], что при больших значениях адгезионного давления ширина этой зоны стремится к нулю.

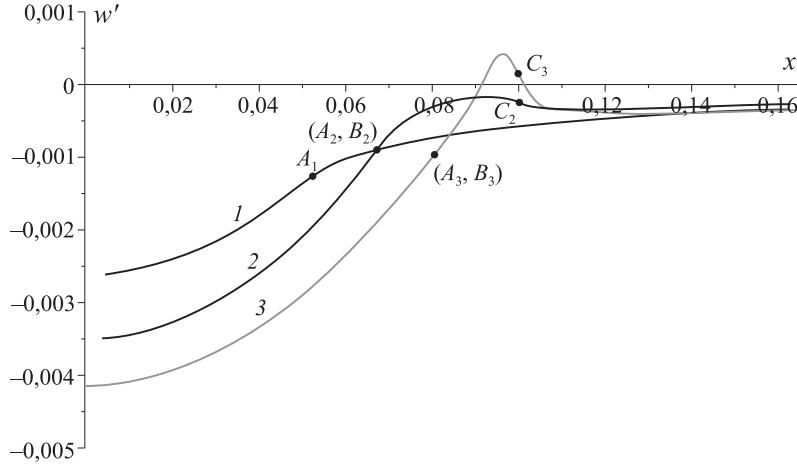


Рис. 2.3. Нормальные смещения поверхности упругого полупространства $\nu = 0{,}3$, $Q' = 0{,}238 \cdot 10^{-3}$, $\delta^*/R = 0{,}6667 \cdot 10^{-3}$ и $p_a/E_1 = 0,\ 0{,}0143,\ 0{,}0714$ для кривых *1–3* соответственно

Рис. 2.4 иллюстрирует влияние величины адгезионного давления на смещение поверхности слоя, более податливого, чем основание. Влияние адгезионных сил на форму поверхности в целом проявляется так же, как и для полупространства, но следует отметить, что для более тонкого слоя ширина кольцевой области Ω^*, в которой действуют силы адгезии, меньше, чем для толстого, особенно для относительно высоких значений p_a.

На рис. 2.5 представлены аналогичные результаты для относительно жестких покрытий. Характерной особенностью является отсутствие немонотонной зависимости нормальных смеще-

ний поверхности жесткого слоя от координаты, зафиксированных для полупространства и податливого слоя на относительно жесткой подложке. Единственным исключением является кривая *3* в левой части рисунка. В этом случае радиус пятна контакта почти в пять раз превышает толщину слоя, что приводит к относительному уменьшению влияния слоя на результат решения задачи. Интересно отметить, что для относительно тонкого слоя имеет место существенное различие кривых *2* и *3*, в то время как для более толстого слоя эти кривые достаточно близки.

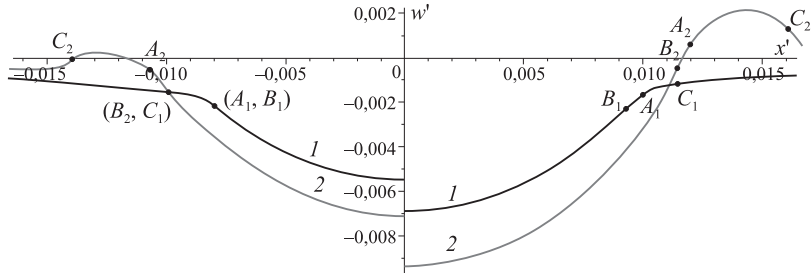


Рис. 2.4. Нормальные смещения поверхности двухслойного упругого полупространства ($\chi = 0{,}1$) для двух вариантов его толщины: $H / R = 0{,}017$ (левая часть) и $H / R = 0{,}083$ (правая часть); $p_a = 0{,}0143,\ 0{,}0714$ (кривые *1–2*), $\nu_1 = 0{,}4$, $\nu_2 = 0{,}3$, $\delta^* / R = 0{,}6667 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0{,}159 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, для относительно податливых покрытий имеет место немонотонная зависимость нормальных смещений поверхности слоя от расстояния от центра области контакта. Подобный эффект прилипания материала слоя к индентору наблюдается и для упругого полупространства, но отсутствует в случае относительно жестких слоев, за исключением очень тонких, когда слой мало влияет на решение контактной задачи.

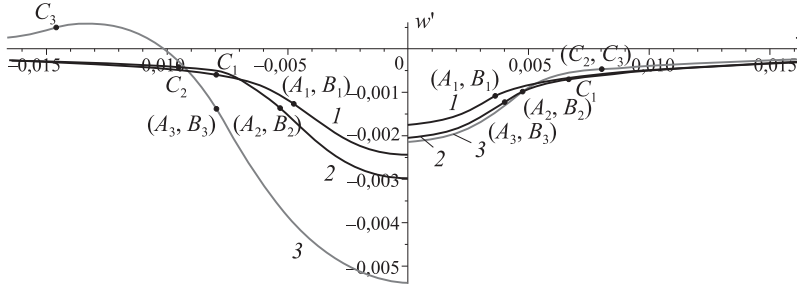


Рис. 2.5. Нормальные смещения поверхности двухслойного упругого полупространства ($\chi = 5$) для двух вариантов его толщины: $H / R = 0,017$ (левая часть) и $H / R = 0,05$ (правая часть); $p_a = 0,14 \cdot 10^{-2},\ 0,27 \cdot 10^{-2},\ 0,57 \cdot 10^{-2}$ (кривые *1–3*), $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,3$, $\delta^* / R = 0,6667 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0,4762 \cdot 10^{-4}$

Результаты решения контактной задачи при наличии адгезии были использованы для расчета напряженного состояния в слое и основании, представленного на рис. 2.6–2.9 для относительно жестких и относительно податливых упругих слоев при различных значениях p_a. Общую картину распределения растягивающих-сжимающих напряжений представляет рис. 2.6, полученный для относительно податливых (а) и относительно жестких (б) слоев. Наиболее светлыми являются области растяжения (отрицательные значения напряжений), темные области соответствуют сжатию. Если для относительно жестких покрытий реализуется напряженное состояние, характерное для изгиба, которое отличается от случая взаимодействия без адгезии только количественными показателями, то в случае относительно податливых покрытий за счет адгезионного взаимодействия на периферии области контакта и под областью Ω^* возникают растягивающие напряжения, которых нет при $p_a = 0$.

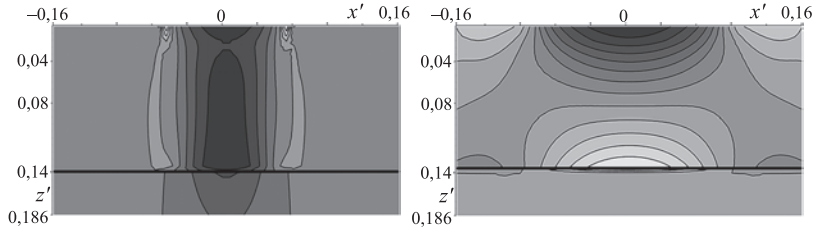
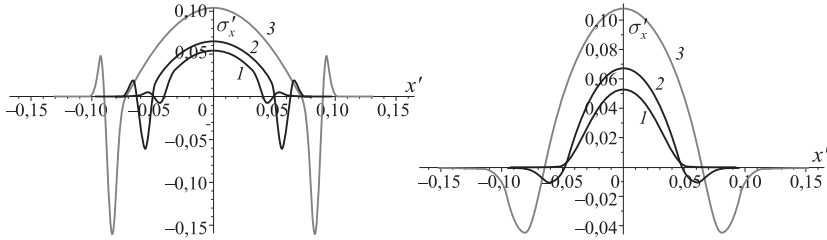


Рис. 2.6. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений для относительно податливых, $\chi = 0{,}1$ (а) и относительно жестких, $\chi = 5$ (б) слоев и полупространства: а — $p_a = 1{,}14 \cdot 10^{-1}$, $H / R = 0{,}017$, $\nu_1 = 0{,}4$, $\nu_2 = 0{,}35$, $H / R = 0{,}0166$, $\delta^* / R = 0{,}166 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0{,}198 \cdot 10^{-2}$; б — $p_a = 2{,}85 \cdot 10^{-2}$, $H / R = 0{,}0833$, $\nu_1 = 0{,}35$, $\nu_2 = 0{,}35$, $\delta^* / R = 0{,}333 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0{,}158 \cdot 10^{-3}$

Анализ влияния величины параметра p_a на растягивающие-сжимающие напряжения σ'_x на поверхности слоя и на границе раздела покрытия с подложкой можно провести на основе кривых, представленных на рис. 2.7, 2.8 (относительно податливый и жесткий слои соответственно). На поверхности податливого слоя (рис. 2.7,а) возникает интересный эффект резкого перехода от сжатия к растяжению вблизи границы области контакта. В области Ω^* происходит переход растягивающих напряжений в сжимающие с локальным максимумом на внешней границе Ω^*. Описанные выше эффекты тем более выражены, чем больше величина p_a. На границе раздела слоя с основанием (б) максимальные сжимающие напряжения в центре области контакта передаются почти в полном объеме, а растягивающие напряжения значительно меньше, чем на поверхности. Для $p_a / E_1 = 0{,}071$ (кривая *1*) имеет место только сжатие.



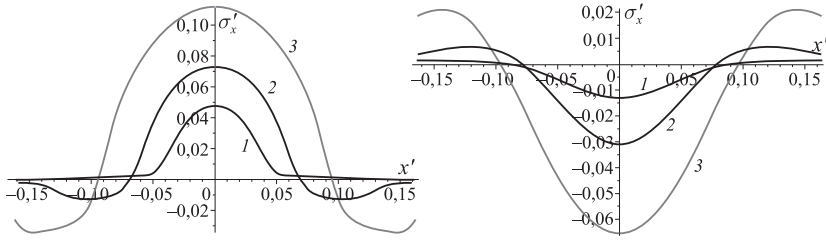
(а) (б)

Рис. 2.7. Растягивающие-сжимающие напряжения на поверхности (а) и на границе раздела слоя с полупространством (б): $p_a / E_1 = 0{,}071,\ 0{,}143,\ 0{,}286$ (кривые *1–3*); $\chi = 0{,}1$, $H / R = 0{,}017$, $\nu_1 = 0{,}4$, $\nu_2 = 0{,}35$, $H/R = 0{,}0166$, $\delta^*/R = 0{,}166 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0{,}198 \cdot 10^{-2}$

При малых значениях p_a, аналогично случаю без адгезии, на поверхности относительно жесткого слоя (рис. 2.8,а) имеет место только сжатие. С увеличением p_a возникают зоны растяжения с локальными максимумами, не привязанными непосредственно к границам областей Ω или Ω^* (в отличие от случая относительно податливых покрытий). На границе раздела слоя с основанием (рис. 2.8,б) за счет изгиба слоя происходит зеркальное отражение картины распределения напряжений на поверхности. Как и при отсутствии адгезии, максимальное растяжение реализуется на границе раздела слоя с основанием под центром области контакта, и значение максимума тем больше, чем больше значение p_a.

Таким образом, в результате адгезии на поверхности относительно податливых слоев возникает эффект резкого перехода от сжатия к растяжению вблизи границы области контакта и обратно вблизи границы области адгезионного взаимодействия.

В случае отсутствия адгезии при тех же входных параметрах задачи растяжения на поверхности слоя нет. На поверхности относительно жестких слоев также могут возникать области растяжения при достаточно больших значениях адгезионного давления, но максимальные растягивающие напряжения имеют место на границе раздела слоя и полупространства под центром области контакта. Они также растут с ростом адгезионных сил.

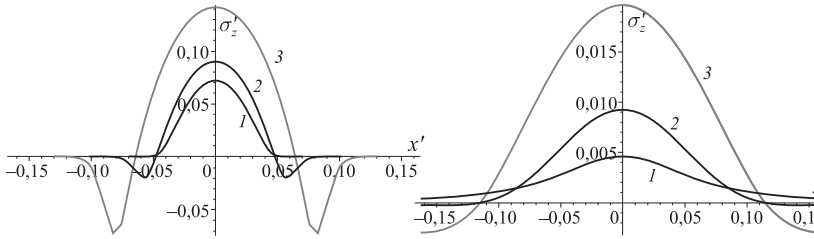


(а) (б)

Рис. 2.8. Растягивающие-сжимающие напряжения на поверхности (а) и на границе раздела слоя с полупространством (б): $p_a / E_1 = 0{,}286 \cdot 10^{-2}, 0{,}143 \cdot 10^{-1}, 0{,}286 \cdot 10^{-1}$ (кривые *1–3*); $\chi = 5$, $H/R = 0{,}0833$, $\nu_1 = 0{,}35$, $\nu_2 = 0{,}35$, $\delta^*/R = 0{,}333 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0{,}158 \cdot 10^{-3}$

Концентрация растягивающих напряжений может служить причиной образования трещины в материале слоя. Другой причиной разрушения композиции слой-основание могут быть отрицательные нормальные напряжения, стремящиеся отделить слой от основания. Подобный результат был получен при решении задачи для относительно жесткого слоя без адгезии [183] при одной из использованных комбинаций входных параметров задачи, но в этом случае максимальные значения напряжений

составили не более 3 % от максимального значения контактного давления. Распределение σ_z' на границе раздела слоя и основания представлено на рис. 2.9 для относительно податливого (а) и относительно жесткого (б) слоев. Все параметры расчета аналогичны использованным при построении кривых рис. 2.7, 2.8. Результаты в данном случае являются предсказуемыми. При малых значениях параметра p_a для обоих типов слоев напряжений, работающих на отрыв слоя, не обнаружено. С увеличением значений p_a появляются отрицательные нормальные напряжения. В случае относительно податливых слоев эти напряжения сконцентрированы под областями отрицательных давлений на поверхности, а в случае жестких слоев они распределены более равномерно и, в целом, меньше по отношению к максимальному значению контактного давления.



(а) (б)

Рис. 2.9. Нормальные напряжения на границе раздела полупространства с относительно податливым (а) и жестким (б) слоями: а — $p_a / E_1 = 0{,}071,\ 0{,}143,\ 0{,}286$ (кривые *1–3*); $\chi = 0{,}1$, $H/R = 0{,}017$, $\nu_1 = 0{,}4$, $\nu_2 = 0{,}35$, $H/R = 0{,}0166$, $\delta^*/R = 0{,}166 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0{,}198 \cdot 10^{-2}$; б — $p_a/E_1 = 0{,}286 \cdot 10^{-2},\ 0{,}143 \cdot 10^{-1},\ 0{,}286 \cdot 10^{-1}$ (кривые *1–3*); $\chi = 5$, $H/R = 0{,}0833$, $\nu_1 = 0{,}35$, $\nu_2 = 0{,}35$, $\delta^*/R = 0{,}333 \cdot 10^{-3}$, $Q' = 0{,}158 \cdot 10^{-3}$

2.2. Квазистатическая задача о скольжении индентора по двухслойному основанию при наличии вязкоупругости

В данном разделе решение квазистатической задачи о скольжении гладкого индентора по линейно-вязкоупругому слою (или вязкоупругому полупространству, покрытому жестким покрытием) основано на развитии классических методов решения задач для слоистых упругих тел.

Рассмотрим контактную задачу для жесткого гладкого индентора и слоя толщиной h, скрепленного с полупространством. Индентор скользит с постоянной скоростью V вдоль оси Ox; он нагружен вертикальной силой Q (рис. 2.10). Начало системы координат (x, y, z) расположено в центре индентора, ось Oz направлена перпендикулярно ненагруженной поверхности слоя. Начало системы координат расположено в точке первоначального контакта слоя с индентором.

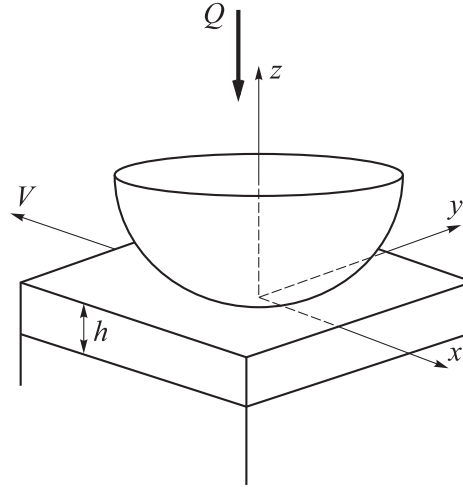


Рис. 2.10. Схема контакта

На поверхности действуют следующие граничные условия ($z = 0$):

$$\begin{aligned} &w(x,y) = f(x,y) + D, \quad (x,y) \in \Omega, \\ &\sigma_z = 0, \quad (x,y) \notin \Omega, \\ &\tau_{xz} = 0, \ \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь Ω — область контакта, $w(x, y)$ — нормальные смещения поверхности, D — максимальное смещение индентора, $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — нормальные и тангенциальные напряжения. Форма индентора описывается функцией $f(x, y)$.

Используется также уравнение равновесия:

$$Q = \iint_{\Omega} p(x,y)dxdy. \tag{2.13}$$

На границе раздела слоя и полупространства выполняются условия полного сцепления. Если рассматривается пластина, обладающая изгибной жесткостью, сцепленная с вязкоупругим полупространством, имеем следующие условия на перемещения при $z = –h$:

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \ u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, \ u_y^{(1)} = u_y^{(2)}. \tag{2.14}$$

Здесь u_x и u_y — тангенциальные перемещения. Индексы (1) и (2) использованы для слоя и полупространства соответственно. Для случая вязкоупругого слоя на жестком основании условия на границе раздела имеют вид:

$$w = 0, \quad u_x = 0, \quad u_y = 0. \tag{2.15}$$

Таким образом, вязкоупругий материал используется в качестве покрытия либо подложки в сочетании с существенно более жестким материалом. Механические свойства линейного вязкоуп-

ругого материала определяются следующими соотношениями между напряжениями и деформациями [31]:

$$\gamma(t)=\frac{1}{G}\tau(t)+\frac{1}{G}\int_{-\infty}^{t}\tau(t)K(t-\tau)d\tau;$$

$$e_x(t)=\frac{1}{E}\left[\sigma_x(t)-\nu(\sigma_y(t)+\sigma_z(t))\right]+\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{t}\left[\sigma_x(t)-\nu(\sigma_y(t)+\sigma_z(t))\right]K(t-\tau)d\tau;$$

$$e_y(t)=\frac{1}{E}\left[\sigma_y(t)-\nu(\sigma_x(t)+\sigma_z(t))\right]+\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{t}\left[\sigma_y(t)-\nu(\sigma_x(t)+\sigma_z(t))\right]K(t-\tau)d\tau;$$

$$e_z(t)=\frac{1}{E}\left[\sigma_z(t)-\nu(\sigma_y(t)+\sigma_x(t))\right]+\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{t}\left[\sigma_z(t)-\nu(\sigma_y(t)+\sigma_x(t))\right]K(t-\tau)d\tau;$$

$$K(t)=k\exp\left(-\frac{t}{\omega}\right).$$

(2.16)

Здесь ν — коэффициент Пуассона, E и G — модуль Юнга и модуль сдвига соответственно. Ядро ползучести является экспоненциальной функцией, которая зависит от времени релаксации $1/k$ и времени запаздывания ω.

Сначала рассмотрим нагрузку, равномерно распределенную внутри квадрата со стороной *2a*, которая движется с постоянной скоростью по вязкоупругому слою. Условия на поверхности задаются соотношением (2.6). Нормальные перемещения поверхности определяются соотношением, аналогичным (2.7), которое для целей этого раздела удобно записать в виде:

$$w'(x',y',0)=$$
$$=-\frac{1}{2G}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\infty}\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)\cos(x'\gamma\cos\varphi)\cos(y'\gamma\sin\varphi)\,d\gamma\,d\varphi. \qquad (2.17)$$

Здесь x', y', w' — безразмерные координаты и перемещения, отнесенные к полуширине квадрата *a*. Выражение, определяющее

$\Delta(\gamma,\varphi,\lambda,\chi)$, является очень громоздким, но для случая жесткой подложки ($\chi=0$) оно упрощается:

$$\Delta(\gamma,\varphi,\lambda)=\overline{q}\left(\frac{-24\nu^2e^{-4\gamma\lambda}-8\nu^2+26\nu e^{-4\gamma\lambda}+0{,}4\nu\gamma\lambda(e^{-4\gamma\lambda}+1)}{-e^{-2\gamma\lambda}(16\nu^2+4\gamma^2\lambda^2+10)+e^{-4\gamma\lambda}(1+24\nu)+4\nu-3}+\right.$$

$$\left.+\frac{8\nu e^{-2\gamma\lambda}(\gamma\lambda+1)+14\nu-6-0{,}3\gamma\lambda e^{-4\gamma\lambda}-0{,}2\gamma\lambda e^{-2\gamma\lambda}-0{,}3\gamma\lambda-6e^{-4\gamma\lambda}-4e^{-2\gamma\lambda}}{-e^{-2\gamma\lambda}(16\nu^2+4\gamma^2\lambda^2+10)+e^{-4\gamma\lambda}(1+24\nu)+4\nu-3}\right),$$

$$\overline{q}=q\frac{4}{\pi^2}\frac{\sin(\gamma\cos\varphi)\sin(\gamma\sin\varphi)}{\gamma^2\sin\varphi\cos\varphi}. \tag{2.18}$$

В случае пластины, обладающей изгибной жесткостью, сцепленной с упругим полупространством ($\chi=\infty$), также возможно вывести $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda)$, хотя соотношение является более громоздким, чем (2.18).

Случай распределенной нагрузки, движущейся с постоянной скоростью по вязкоупругому полупространству, был рассмотрен в [6] в предположении, что модуль сдвига является оператором, зависящим от времени, а коэффициент Пуассона является постоянной величиной. Следуя [6], получаем нормальные перемещения поверхности вязкоупругого слоя из (2.17) в системе координат, связанной с центром квадрата:

$$w'(x',y',0)=-\frac{1}{2G}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta(\gamma,\varphi,\lambda)\cos(y'\gamma\sin\varphi)\times$$

$$\times\left(\cos(x'\gamma\cos\varphi)+\int_{-\infty}^{0}K(-\tau)\cos((x'+V'\tau)\gamma\cos\varphi)d\tau\right)d\gamma d\varphi, \tag{2.19}$$

где $K(t)$ — ядро ползучести, V' — отнесенная к a скорость скольжения, G — длительный модуль сдвига.

Если использовать ядро ползучести из (2.16), то интеграл по времени, определяющий в (2.19) составляющую вертикальных перемещений, обусловленную реологическими свойствами материала, вычисляется аналитически. В результате получим следующее соотношение:

$$w'(x',y',0) = -\frac{1}{2G}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta(\gamma,\varphi,\lambda)\cos(y'\gamma\sin\varphi)\times$$
$$\times\left(\cos(x'\gamma\cos\varphi) + c\frac{\omega V'\gamma\cos\varphi\sin(x'\gamma\cos\varphi)+\cos(x'\gamma\cos\varphi)}{1+(V'\omega\gamma\cos\varphi)^2}\right)d\gamma d\varphi. \tag{2.20}$$

Здесь c — отношение времени релаксации ко времени последействия. В связи с тем, что постоянное давление q линейно входит в функцию $\Delta(\gamma,\varphi,\lambda)$ и может быть вынесено за знак интеграла, (2.20) может быть взято за основу при решении контактной задачи — определении контактного давления $p(x, y)$ в виде кусочно-постоянной функции.

Из (2.12) и (2.13) получим следующее уравнение для определения контактного давления:

$$\begin{pmatrix} 4a^2 & \cdots & 4a^2 & 0 \\ \kappa_1^1 & \cdots & \kappa_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \kappa_1^N & \cdots & \kappa_N^N & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

где $p_1 \ldots p_N$ — неизвестные постоянные давления в каждом из N элементов, $f_1 \ldots f_N$ определяются формой индентора. Коэффициенты κ_i^j получены из (2.20):

$$\kappa_i^j = -\frac{1}{2G}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta'(\gamma,\varphi,\lambda)\cos(y_{ij}\gamma\sin\varphi)\times$$

$$\times\left(\cos(x_{ij}\gamma\cos\varphi)+c\frac{\omega V'\gamma\cos\varphi\sin(x_{ij}\gamma\cos\varphi)+\cos(x_{ij}\gamma\cos\varphi)}{1+(V'\omega\gamma\cos\varphi)^2}\right)d\gamma d\varphi. \tag{2.22}$$

Решение уравнения (2.21) в произвольной, априори превышающей искомую, области контакта включает отрицательные давления в некоторых элементах-квадратах. На следующей итерации давление в этих элементах полагается нулевым. В результате итерационного процесса определяется положительное контактное давление $p(x, y)$ и область контакта Ω.

Полученные распределения контактного давления используются для расчета внутренних напряжений в вязкоупругом слое или полупространстве [75]:

$$\sigma_x = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\left(\Delta_x(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)-\cos^2\varphi\,\Delta_u(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)\right)\times$$

$$\times\cos(x'\gamma\cos\varphi)\cos(y'\gamma\sin\varphi)\gamma d\gamma d\varphi,$$

$$\sigma_y = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\left(\Delta_y(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)-\sin^2\varphi\,\Delta_u(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)\right)\times$$

$$\times\cos(x'\gamma\cos\varphi)\cos(y'\gamma\sin\varphi)\gamma d\gamma d\varphi,$$

$$\sigma_z = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta_z(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)\cos(x'\gamma\cos\varphi)\cos(y'\gamma\sin\varphi)\gamma d\gamma d\varphi,$$

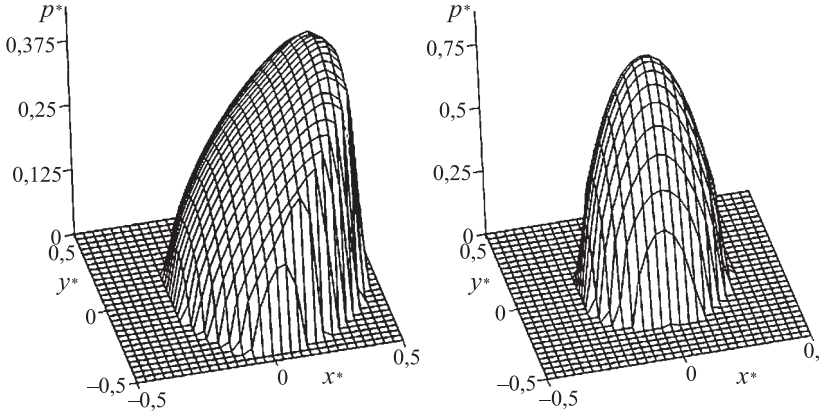
$$\tau_{xy} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta_{xy}(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)\sin(x'\gamma\cos\varphi)\sin(y'\gamma\sin\varphi)\gamma d\gamma\sin\varphi\cos\varphi d\varphi,$$

$$\tau_{xz} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta_{xz}(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)\sin(x'\gamma\cos\varphi)\cos(y'\gamma\sin\varphi)\gamma d\gamma\cos\varphi d\varphi,$$

$$\tau_{yz} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\Delta_{yz}(\nu,\gamma,\varphi,\lambda)\cos(x'\gamma\cos\varphi)\sin(y'\gamma\sin\varphi)\gamma d\gamma\sin\varphi d\varphi. \tag{2.23}$$

Поскольку единственным механическим параметром, который входит в соотношения для расчета напряжений в многослойном упругом полупространстве, является коэффициент Пуассона (постоянный в рассматриваемой модели), соотношения (2.23) могут быть без изменений использованы для расчета напряжений.

Изложенный выше метод был использован для исследования скольжения жесткого сферического индентора с радиусом кривизны R по вязкоупругому слою. Для анализа результатов были использованы следующие безразмерные параметры: безразмерные координаты $(x^*, y^*) = (x, y)/R$, скорость $V^* = V\omega / R = V'\omega a / R$, толщина полосы $h^* = h/R$, нагрузка $Q^* = Q / R^2 G_l$ (G_l — длительный модуль сдвига) и контактное давление $p^*(x, y) = p(x, y)/G_l$.



(а) (б)

Рис. 2.11. Распределение контактного давления ($V^* = 1/3$ (а), $V^* = 10$ (б), $h^* = 0{,}1$, $c = 5$, $\nu = 0{,}3$, $Q^* = 0{,}15$)

На рис. 2.11 представлены распределения контактного давления при двух характерных скоростях. При более низкой скорости имеет место существенная несимметрия распределения контактного давления в сечении, параллельном направлению скольжения. Это обусловлено влиянием релаксационных свойств материала. Таким образом, возникает момент M сил, направленных противоположно направлению движения индентора (называемых деформационной составляющей силы трения). Коэффициент сопротивления скольжению, обусловленный диссипацией энергии, определяется соотношением [146]:

$$\mu^* = \frac{M}{QR} = \frac{\iint\limits_{\Omega} xp(x,y)dxdy}{R\iint\limits_{\Omega} p(x,y)dxdy}. \qquad (2.24)$$

При увеличении скорости (рис. 2.11,б) размер площадки контакта уменьшается, максимальное значение давления растет, и при данных значениях параметров имеет место близкое к симметричному распределение контактного давления. Аналогичный эффект был получен ранее для упрощенных моделей вязкоупругого слоя на жестком основании [72] и вязкоупругого полупространства [7, 31, 146].

Результаты исследования влияния скорости скольжения на коэффициент μ^*, характеризующий деформационную составляющую силы трения, представлены на рис. 2.12. Зависимости являются немонотонными — при увеличении скорости скольжения потери на диссипацию энергии сначала возрастают, а затем уменьшаются. Сравнение результатов, полученных для слоя и полупространства, показывает, что максимальные значения μ^* больше при скольжении штампа по полупространству, но в слу-

чае полосы при малых значениях скоростей диссипативные потери несколько выше.

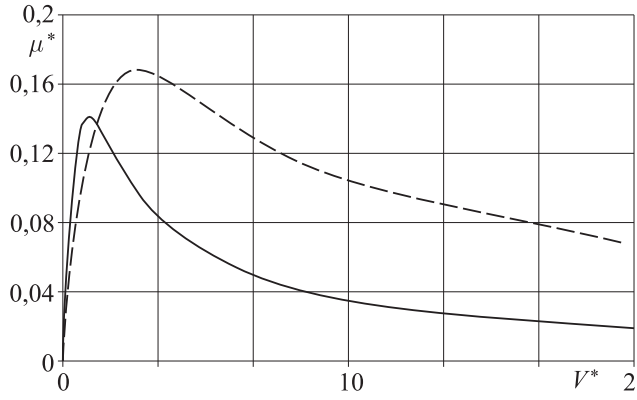


Рис. 2.12. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения $h^* = 0{,}1$ (сплошная кривая), $h^* = \infty$ (пунктирная кривая), $c = 5$, $\nu = 0{,}3$, $Q^* = 0{,}05$

На основании результатов, представленных на рис. 2.13, 2.14, можно проанализировать влияние толщины покрытия на контактные характеристики. Скорость скольжения была выбрана так, чтобы реологические свойства материала влияли на распределение контактного давления. Следует отметить, что кривая для случая полупространства имеет характерные перегибы; ранее подобные результаты были получены в работах [31, 146, 159]. Для относительно тонкого слоя форма кривой больше напоминает результаты, также полученные ранее для упрощенной модели вязкоупругого слоя [72]. Зависимость величины максимального значения контактного давления от толщины покрытия (рис. 2.14) была рассчитана для относительно малого значения скорости скольжения $V^* = 1/60$, при котором слабо проявляются

реологические свойства материала. Другие значения безразмерных параметров соответствуют параметрам рис. 2.13. Полученная зависимость является монотонно убывающей.

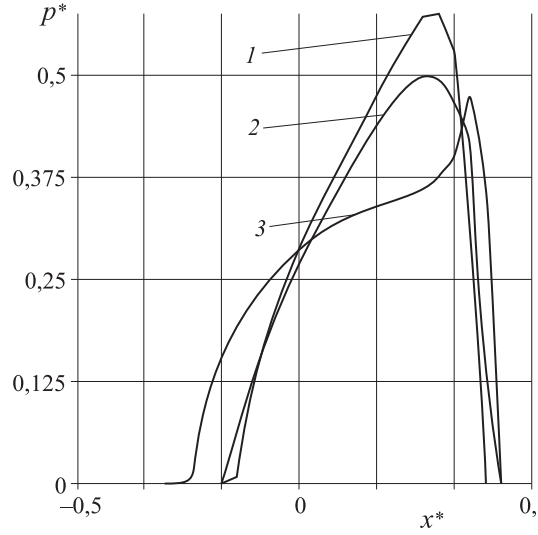


Рис. 2.13. Распределения контактного давления в центральном сечении плоскостью $0y$; $h^* = 0{,}03, 0{,}1, \infty$ (кривые *1–3* соответственно), и следующих значениях безразмерных параметров: $c = 5$, $\nu = 0{,}3$, $Q^* = 0{,}1$, $V^* = 0{,}5$

Влияние толщины вязкоупругого слоя на коэффициент сопротивления скольжению анализируется для скорости, которая обеспечивает относительно большое значение коэффициента трения (рис. 2.15). Увеличение значения μ^* при увеличении толщины слоя предсказуемо. Интересно отметить, что коэффициент трения увеличился на 15 процентов с увеличением толщины в четыре раза.

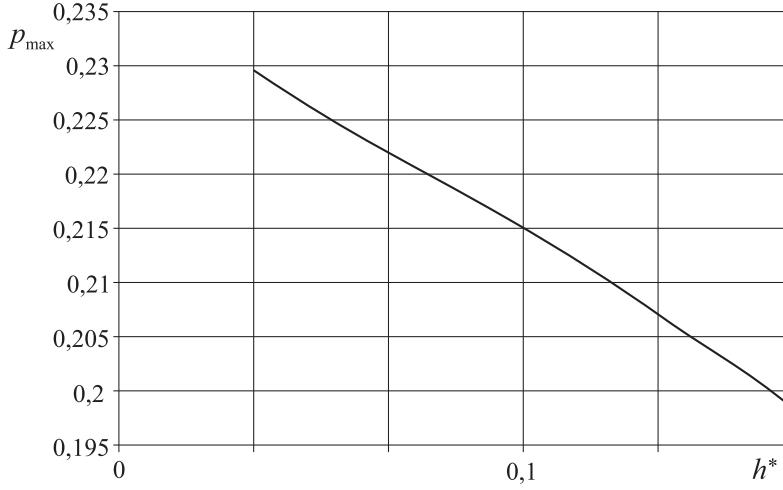


Рис. 2.14. Зависимость максимального значения контактного давления от толщины слоя: $c = 5,\ \nu = 0{,}3,\ Q^* = 0{,}1,\ V^* = 1/60$

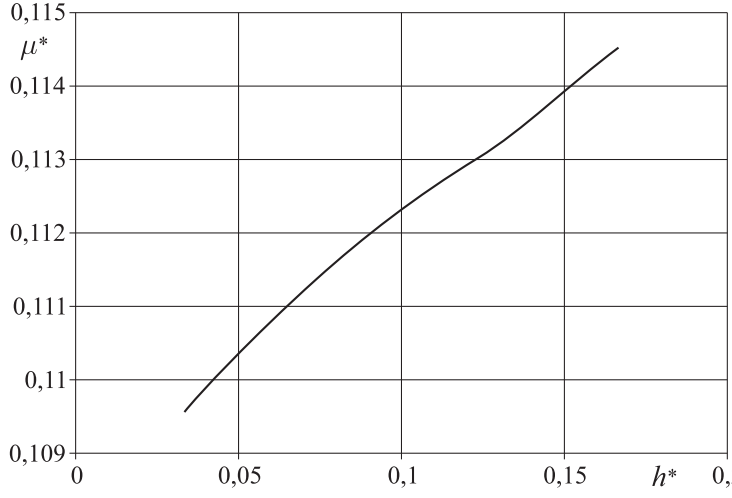


Рис. 2.15. Зависимость коэффициента трения от толщины слоя: $c = 5$, $\nu = 0{,}3,\ Q^* = 0{,}1,\ V^* = 0{,}5$

Поскольку вязкоупругие материалы часто бывают слабо сжимаемыми, важной для анализа характеристикой является коэффициент Пуассона. Приведенные на рис. 2.16 результаты показывают, что величина коэффициента Пуассона существенно влияет на распределение контактного давления как в случаях относительно малых и относительно высоких скоростей скольжения, когда решение близко к упругому (рис. 2.16,а и в), но и в случае, когда распределение контактного давления существенно несимметрично (рис. 2.16,б). В последнем случае интересно также проанализировать влияние коэффициента Пуассона на величину μ^*. Кривой *1* на рис. 2.16,б соответствует $\mu^* = 0{,}1013$, кривой *2* — $\mu^* = 0{,}1357$, кривой 3 — $\mu^* = 0{,}1439$. Таким образом, увеличение коэффициента Пуассона приводит к увеличению максимального значения контактного давления и уменьшению размеров области контакта и коэффициента, характеризующего сопротивление скольжению за счет гистерезисных потерь.

Полученные распределения контактного давления использовались для анализа внутренних напряжений в вязкоупругом слое. На рис. 2.17 представлено распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности. Концентрация растягивающих напряжений может вызвать разрушение материала. Максимум этих напряжений находится на поверхности для всех рассмотренных сочетаний входных параметров. Отрицательные значения напряжений относятся к сжимающим, а положительные — к растягивающим. Максимум сжимающих напряжений находится в точке максимального контактного давления. На передней части площадки контакта происходит резкий перепад напряжений от положительных до отрицательных или нулевых значений. За зоной контакта возникают локальные максимумы

растягивающих напряжений. Анализ показал, что значения этого максимума существенно зависят от коэффициента Пуассона и толщины слоя.

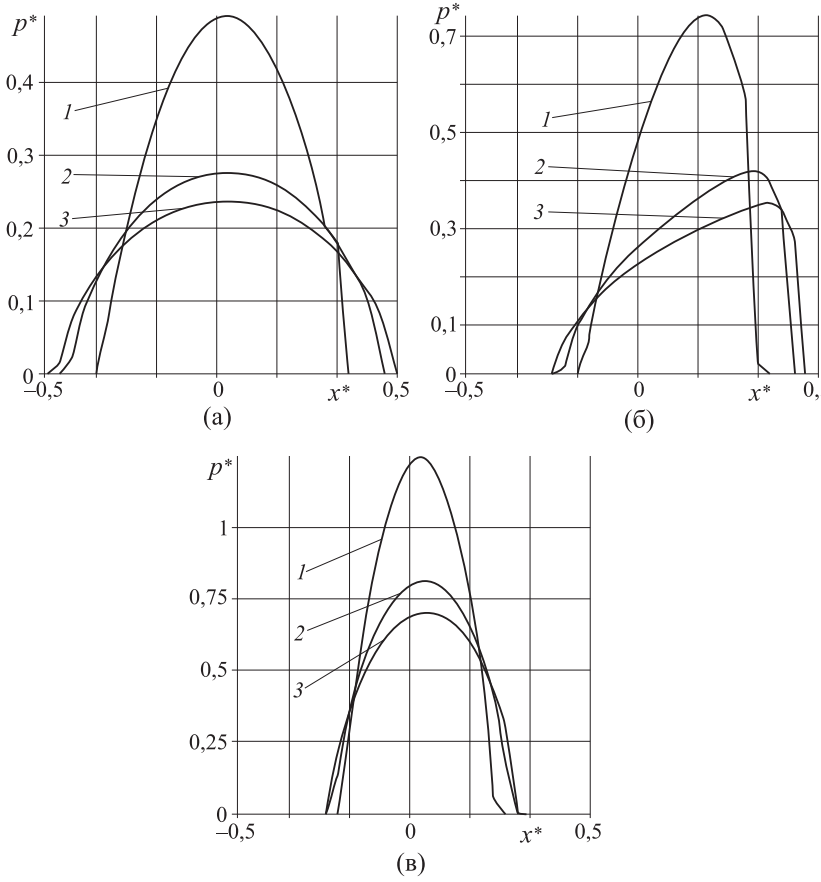


Рис. 2.16. Распределения контактного давления для разных скоростей и значений коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}45,\ 0{,}3,\ 0{,}2$ (кривые *1–3* соответственно): а — $V^* = 1/60$; б — $V^* = 0{,}3$, в — $V^* = 10$; $c = 5$, $h^* = 0{,}1$, $Q^* = 0{,}1$

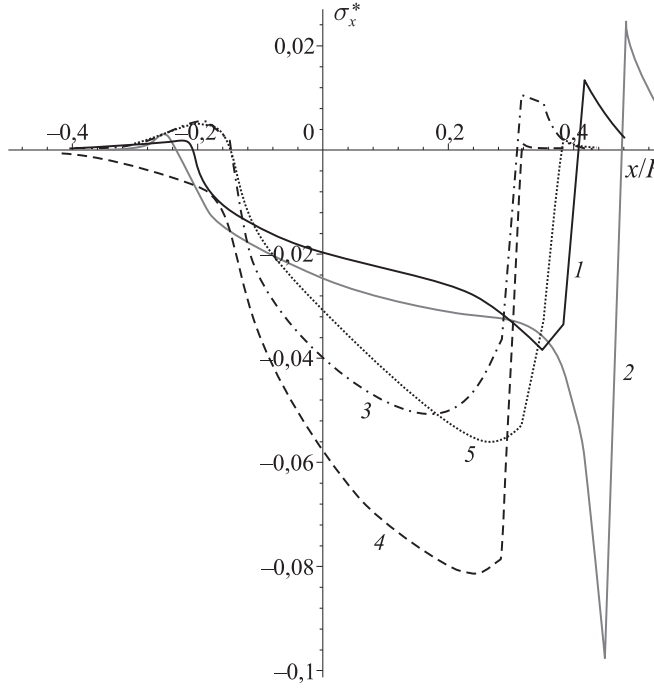


Рис. 2.17 Растягивающие-сжимающие напряжения на поверхности слоя: $V^* = 0{,}333$ (кривые *1*, *2*, *4*, *5*), $V^* = 1{,}666$ (кривая *3*); $c = 5$ (кривые *1*, *3–5*), $c = 20$ (кривая *2*); $h^* = 0{,}1$ (кривые *1–4*), $h^* = 0{,}033$ (кривая *5*); $\nu = 0{,}3$ (кривые *1–3*, *5*), $\nu = 0{,}45$ (кривая *4*); $Q^* = 0{,}1$ (кривые *1*, *3–5*), $Q^* = 0{,}035$ (кривая *2*)

На рис. 2.18 представлены результаты расчета распределения напряжений τ_{xz}^* на границе раздела слоя и подложки. Эти напряжения равны нулю на поверхности слоя и достигают максимума на границе раздела. Концентрация напряжений τ_{xz}^* может быть причиной отслаивания. Здесь важны абсолютные значения напряжений, поскольку положительный и отрицательный

знаки определяют направление их действия. Максимумы напряжений находятся под границей области контакта, причем абсолютный максимум напряжений имеет место под передней частью области контакта. Из рассмотренных входных параметров задачи влияние коэффициента Пуассона наиболее существенно: кривые *1* и *4* рассчитаны для ν = 0,3 и 0,45 соответственно, при этом максимумы τ_{xz}^* отличаются более чем в 2 раза.

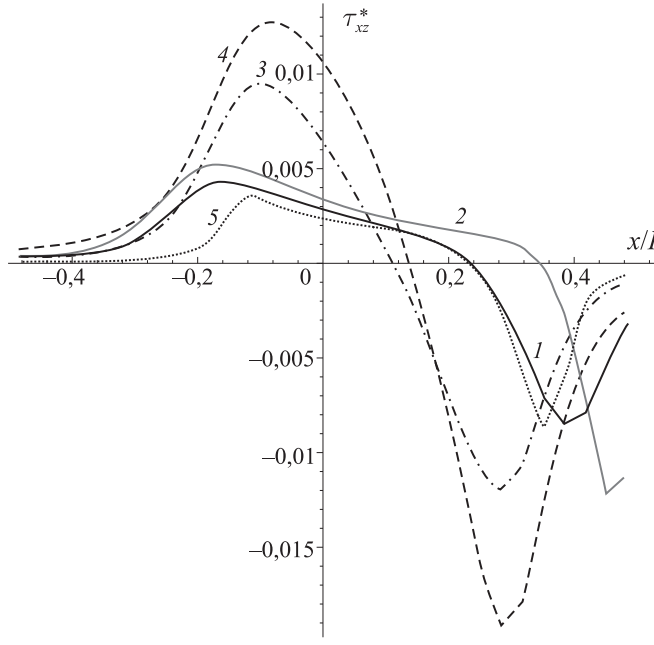


Рис. 2.18. Распределения напряжений τ_{xz}^* на границе раздела слоя и основания: $V^* = 0{,}333$ (кривые *1*, *2*, *4*, *5*), $V^* = 1{,}666$ (кривая *3*); $c = 5$ (кривые *1*, *3–5*), $c = 20$ (кривая 2); $h^* = 0{,}1$ (кривые *1–4*), $h^* = 0{,}033$ (кривая *5*); $\nu = 0{,}3$ (кривые *1–3*, *5*), $\nu = 0{,}45$ (кривая *4*); $Q^* = 0{,}1$ (кривые *1*, *3–5*), $Q^* = 0{,}035$ (кривая *2*)

Влияние толщины слоя на характер распределения и максимальные значения максимальных касательных напряжений можно проанализировать по рис. 2.19. Для относительно толстого слоя была получена почти симметричная картина распределения напряжений; это означает, что толщина слоя влияет на проявление реологических свойств материала при скольжении по нему индентора. Увеличение толщины слоя в 5 раз приводит к уменьшению максимума напряжения внутри слоя почти в 3 раза.

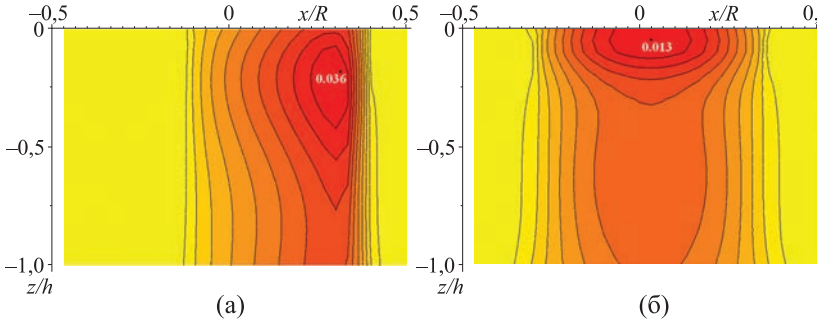
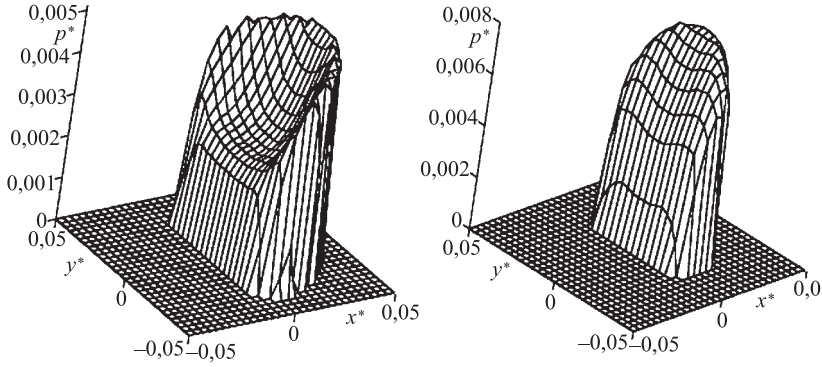


Рис. 2.19. Максимальные касательные напряжения в слое: $V^* = 0{,}333$; $c = 5$; $\nu = 0{,}3$; $Q^* = 0{,}1$; $h^* = 0{,}033$ (а), $h^* = 0{,}166$ (б)

Далее проанализируем результаты, полученные для противоположного случая — на поверхности вязкоупругого полупространства находится жесткая пластина, которая может изгибаться.

На рис. 2.20 представлено распределение контактного давления, полученное для двух скоростей скольжения: $V^* = 0{,}05$ (а); $V^* = 0{,}2$ (б). На обоих рисунках заметна существенная несимметрия распределения давления, обусловленная вязкоупругостью полупространства. Можно наблюдать «эффект кресла»

(рис. 2.20,а), обусловленный одновременно изгибом слоя и вязкоупругостью. На рис. 2.21 представлены распределения давления для двух скоростей скольжения и четырех значений толщины слоя. Здесь уменьшение давления в центре зоны контакта можно наблюдать более явно. Стоит отметить, что это явление имеет место при относительно небольших значениях толщины слоя, в то время как при более толстых слоях распределение давления больше похоже на то, что получается при решении задачи Герца.



(а) (б)

Рис. 2.20. Распределения контактного давления: $c = 6$; $h^* = 0{,}0133$; $\nu = 0{,}4$; $Q^* = 2{,}0$; $V^* = 0{,}05$ (а); $V^* = 0{,}2$ (б)

На рис. 2.22 приведены зависимости коэффициента трения, возникающего за счет несовершенной упругости, от скорости скольжения для различных значений толщины покрытия. Так же, как и в случае вязкоупругого слоя, этим зависимостям свойственна немонотонность. Максимальные значения зависят от толщины покрытия.

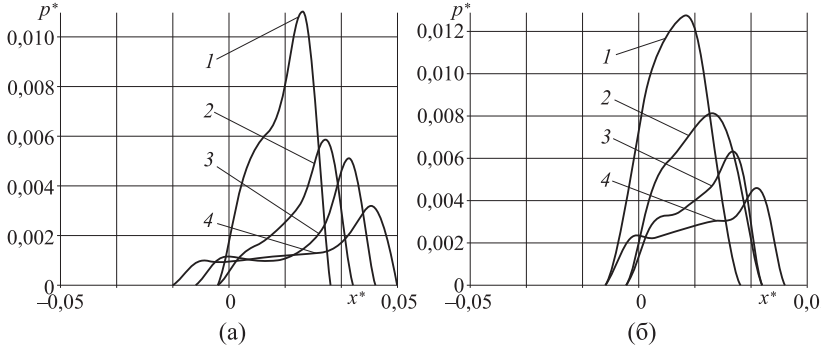


Рис. 2.21. Распределения контактного давления для разных значений скорости и толщины слоя: $c = 6$; $\nu = 0{,}4$; $Q^* = 2{,}0$; $V^* = 0{,}05$ (а); $V^* = 0{,}2$ (б), $h^* = 0{,}05$ (кривая *1*), $h^* = 0{,}02$ (кривая *2*), $h^* = 0{,}0133$ (кривая *3*), $h^* = 0{,}0066$ (кривая *4*)

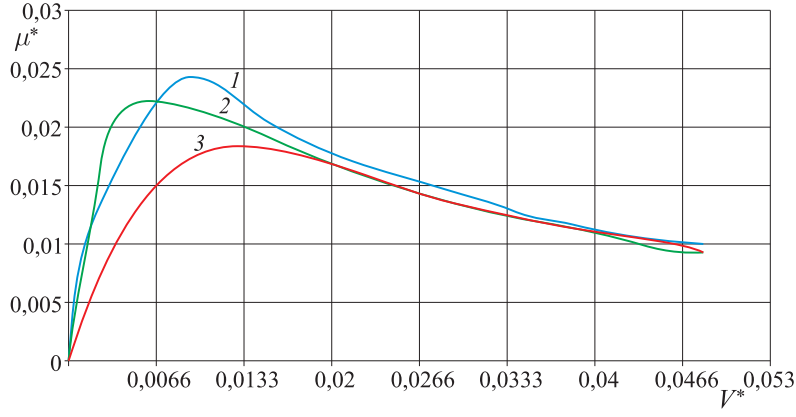


Рис. 2.22. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения: c = 5, ν_1 = 0,3, ν_1 = 0,4, Q' = 1,0, E_1/E_2 = 10, h^* = 0,0016 (кривая *1*), h^* = 0,0033 (кривая *2*), h^* = 0,0066 (кривая *3*)

Влияние толщины слоя на коэффициент трения было проанализировано для большого диапазона значений. Результаты

представлены на рис. 2.23 для двух величин скорости скольжения. Форма кривых *1* и *2* почти одинакова, и они расположены одна над другой. Наблюдается немонотонная зависимость сопротивления скольжению от толщины слоя в диапазоне тонких слоев. При этом, как правило, амплитуда коэффициента трения больше для относительно малых скоростей скольжения.

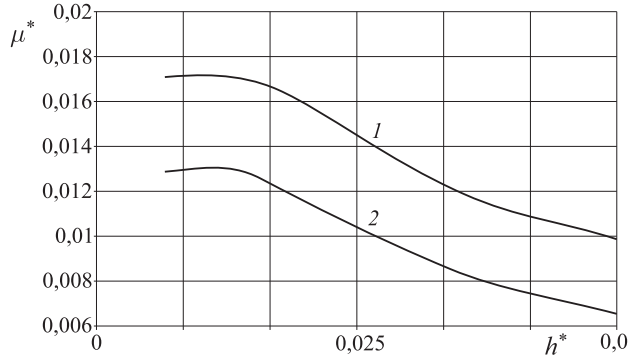
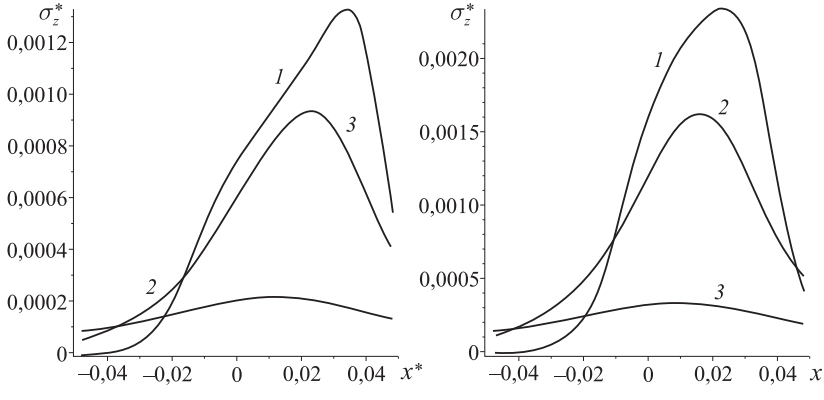


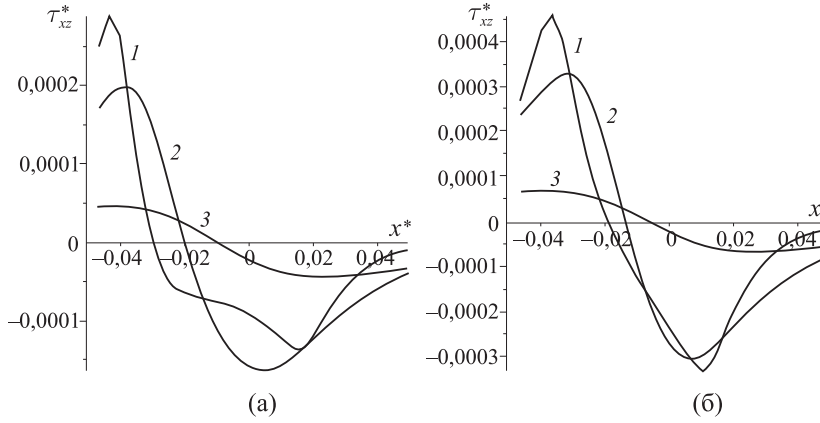
Рис. 2.23. Зависимость коэффициента трения от толщины слоя: $c = 6$; $\nu = 0{,}4$; $Q^* = 2{,}0$; $V^* = 0{,}05$ (кривая *1*); $V^* = 0{,}2$ (кривая *2*)

Результаты, представленные на рис. 2.24 и 2.25, иллюстрируют влияние толщины жесткой пластины на нормальные и касательные напряжения на границе раздела для двух различных скоростей. Можно отметить, что для самого толстого покрытия нормальное распределение напряжений наиболее равномерно, а для тонкого слоя распределение ближе к контактному давлению. Этим можно объяснить эффект уменьшения гистерезисных потерь с увеличением толщины покрытия. Влияние толщины слоя на касательные напряжения на границе раздела практически такое же, как и в случае вязкоупругого слоя, связанного с жесткой подложкой, который описан выше.



(а) (б)

Рис. 2.24. Нормальные напряжения на границе раздела слоя и полупространства: $c = 6$; $\nu = 0{,}4$; $Q^* = 2{,}0$; $V^* = 0{,}05$ (а); $V^* = 0{,}2$ (б), $h^* = 0{,}0066$ (кривая *1*), $h^* = 0{,}0165$ (кривая *2*), $h^* = 0{,}05$ (кривая *3*)



(а) (б)

Рис. 2.25. Касательные напряжения на границе раздела слоя и полупространства: $c = 6$; $\nu = 0{,}4$; $Q^* = 2{,}0$; $V^* = 0{,}05$ (а); $V^* = 0{,}2$ (б), $h^* = 0{,}0066$ (кривая *1*), $h^* = 0{,}0165$ (кривая *2*), $h^* = 0{,}05$ (кривая *3*)

В целом по результатам исследования просматривается закономерность, что чем толще жесткое покрытие, тем меньше проявляются реологические свойства подложки. Этот вывод, сделанный по результатам моделирования, удалось проверить экспериментально [184].

Глава 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ

Важной особенностью фрикционного контакта является наличие неровностей на взаимодействующих поверхностях. По типу микрогеометрии можно разделить поверхности на две группы, которые объединены общим признаком — дискретным характером контактирования, а именно поверхности с регулярным микрорельефом (как правило, специально созданным) и шероховатые поверхности.

Если каким-либо образом определена форма поверхности $f(x, y)$, возможно численное решение контактной задачи [91], причем точность зависит от возможностей вычислительной техники и качества измерений. Результаты, очевидно, носят частный характер. Кроме того, они становятся непригодными при изменении формы, например, в процессе поверхностного разрушения (изнашивания).

Периодические контактные задачи являются одним из способов моделирования шероховатости. Плоская периодическая контактная задача для синусоидального штампа и упругого однородного основания рассмотрена в монографии И. Я. Штаермана [116]. Решение плоской периодической задачи для системы штампов с учетом сил трения приведено в работах Е. А. Кузнецова и Г. А. Гороховского [57–61], где также есть подробный

анализ напряженно-деформированного состояния приповерхностных слоев. В работе [44] рассмотрена периодическая контактная задача для поверхности, имеющей синусоидальную волнистость в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Подобные модели позволяют в некоторых случаях получить аналитические зависимости для контактных характеристик и проанализировать влияние множественности взаимодействий для поверхностей с регулярным рельефом. Ограниченность результатов связана с одноуровневостью модели и невозможностью проанализировать влияние дискретности в областях с большим градиентом давления.

Широкое распространение при расчетах контактных характеристик шероховатых поверхностей нашла модель Гринвуда–Вильямсона [150]. Суть модели состоит в следующем: неровности моделируются набором сфер одинаковой кривизны с заданным распределением по высоте, связь контактного давления с деформацией неровностей определяется соотношением Герца, учитывается число неровностей на единицу площади, их форма и распределение по высоте. Решение задачи сводится к системе интегральных уравнений для определения давлений в области контакта и осуществляется численно при помощи итерационной процедуры. При существенных достоинствах модели — определении сближения, номинального и фактического давления и области контакта, она не учитывает взаимного влияния отдельных неровностей. Этой же проблематике посвящены работы Н. Б. Демкина [41, 42], а также Н. Б. Демкина и В. В. Измайлова [43], в которых рассмотрены упругие и упругопластические задачи для шероховатых тел, а параметры модели связаны с характеристиками шероховатости, принятыми в инженерных науках для описания шероховатых поверхностей.

Пространственные задачи для системы цилиндрических или сферических штампов с учетом их взаимного влияния исследованы в работах И. Г. Горячевой [21], И. Г. Горячевой и М. Н. Добычина [26, 27]. Предположение о сохранении круговой формы пятна фактического контакта, а также замена действия штампов, отличных от рассматриваемого, сосредоточенными силами позволило свести задачу к системе алгебраических уравнений. Данная модель позволила исследовать влияние характера расположения штампов (плотности контакта) на распределение нагрузок между ними для системы штампов одинаковой и различной высоты. Поскольку порядок системы уравнений соотносим с количеством неровностей, эта модель хороша для случая не очень большого количества областей контакта. Позднее И. Г. Горячевой [23, 24, 144] был использован принцип локализации, состоящий в том, что как дискретные единицы рассматриваются неровности, ближайшие к произвольно выбранной, действие остальных заменяется приложенной распределенной нагрузкой. Подобный подход позволил на примере периодических контактных задач для одноуровневой и разноуровневой систем инденторов изучить вопрос взаимного влияния инденторов и насыщенности контакта. Периодическая контактная задача также использовалась при решении двухуровневой контактной задачи (внедрение шероховатого индентора) для определения контактных характеристик на макроуровне с учетом параметров микрогеометрии.

В последнее время в связи с развитием технологии нанесения тонких покрытий повысился интерес к исследованию контактных задач для слоистых тел с учетом шероховатости их поверхностей. Это связано с тем, что при толщине покрытий, сравнимой с размерами единичной области контакта неровности, па-

раметры микро-геометрии оказывают существенное влияние на места концентрации напряжений в приповерхностных слоях и, следовательно, на характер разрушения покрытий.

Одним из первых исследований в этом направлении является работа [65], где шероховатости моделируются сферическими сегментами, расположенными на разных уровнях. При расчете контактного взаимодействия сфер и полимерного покрытия предполагается, что контактные давления распределены по Герцу, а взаимное влияние неровностей не учитывается. Исследуются упругие и упруго-пластические деформации полимерного слоя.

Приближенный подход к определению контактных характеристик шероховатых тел при наличии покрытий предложен в работе [167]. Суть его состоит в применении модели Гринвуда–Вильямсона к определению контактных характеристик тел с мягкими покрытиями путем введения корректирующих множителей. Значения этих множителей определяются из решения осесимметричной задачи для сферы и упругого полупространства с покрытием при определенном соотношении модулей упругого покрытия и основания [127, 128]. Таким образом, одним из существенных недостатков развитого в [167] приближенного подхода является неучет взаимного влияния микроконтактов при расчете контактных характеристик.

Численное решение плоской задачи о контакте жесткого индентора с двухслойным шероховатым телом, профиль поверхности которого близок к реальному (используется снятая с поверхности профилограмма), приведено в работе С. Дш. Коула и Р. С. Сейлса (S. J. Cole, R. S. Sayles) [131]. Подобная задача решается в работе [177], но, в отличие от предыдущей работы, шероховатым является контр-тело. В этих работах на основе ин-

тегральных преобразований Фурье по профилограмме строятся численные расчеты, дающие в результате контактные характеристики и напряженно-деформированное состояние. Однако эти результаты носят ограниченный характер, поскольку задача рассмотрена в плоской постановке и только для заданного профиля поверхности; из-за случайного характера распределения шероховатостей из решения трудно проанализировать влияние параметров микро-геометрии. Позднее подобный подход был распространен и на пространственные задачи без трения [170] и с трением [171], в результате в [171] показано, что влиянием трения при решении контактной задачи можно было пренебречь, а использование результатов профилографирования поверхностей затруднило анализ влияния параметров микрогеометрии на характеристики контакта на микроуровне.

В данной главе предложены подходы и построены модели для изучения контактного взаимодействия тел с упругими покрытиями с учетом дискретного характера нагружения, обусловленного наличием шероховатости или микрорельефа поверхности. Рассмотрена периодическая контактная задача, исследованы напряжения, возникающие в покрытии и подложке при периодическом характере нагружения. Построены модели контактного взаимодействия индентора и тела с покрытиями при наличии шероховатости на одном из взаимодействующих тел.

3.1. Периодическая контактная задача

Рассмотрим задачу о контакте периодической системы недеформируемых осесимметричных инденторов, расположенных в узлах гексагональной решетки (рис. 3.1) и двухслойного упругого полупространства. На границе раздела упругого слоя и уп-

ругого полупространства имеют место условия (1.30), учитывающие степень сцепления слоя с полупространством.

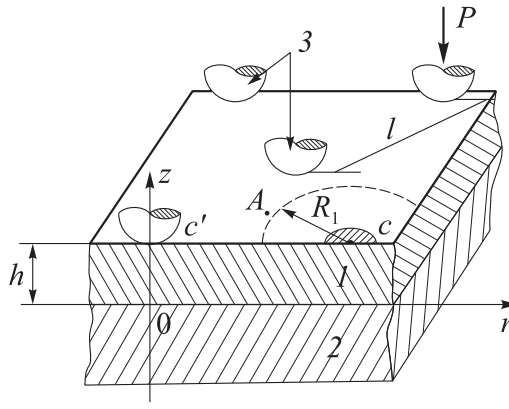


Рис. 3.1. Контакт периодической системы индентров (*3*) и упругого слоя (*1*), скрепленного с упругим полупространством (*2*)

На верхней границе покрытия ($z = H$) выполняются следующие условия:

$$
\begin{aligned}
& w^{(1)}(\bar{r}) = f(\bar{r} - \bar{r}_i) - \delta, \quad \bar{r} \in \omega_i = \left\{ \left| \bar{r} - \bar{r}_i \right| < a \right\}, \\
& \sigma_z^{(1)} = 0, \quad \bar{r} \notin \omega_i, \quad i = 1, 2, ..., \infty, \\
& \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = 0, \quad 0 \le \left| \bar{r} \right| < \infty,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

здесь $f(r)$ — форма произвольного индентора, a — радиус пятен контакта ω_i.

Нагрузка P', приложенная к каждому индентору, и номинальное давление p_n связаны соотношением:

$$P' = (\sqrt{3}/2)\, p_n l^2, \tag{3.2}$$

где l — период гексагональной решетки.

Уравнение равновесия используется в виде:

$$P' = \int_0^a \int_0^{2\pi} p(r) r dr d\varphi, \tag{3.3}$$

Наряду со сформулированной выше задачей рассмотрим следующую задачу в осесимметричной постановке:

$$\begin{aligned} &w^{(1)}(r) = f(r), && 0 \le r \le a, \\ &\sigma_z^{(1)} = 0, && a < r < R_1, \\ &\sigma_z^{(1)} = p_n, && R_1 < r < \infty, \\ &\tau_{rz}^{(1)} = 0, && 0 \le r < \infty_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

То есть рассматривается единый осесимметричный индентор с формой, описываемой функцией $f(r)$ с центром в точке C (рис. 3.1). На основе принципа локализации [24] действие других инденторов заменяется действием номинального давления p_n, действующего при $r > R_1$. Радиус R_1 рассчитывается исходя из условия равновесия и соотношения (3.2):

$$R_1 = (p / (\pi p_n))^{1/2} = (\sqrt{3} / (2\pi))^{1/2} l \cong 0{,}525l. \tag{3.5}$$

Математическая оценка погрешности подобной замены для случая однородного упругого полупространства приведена в [24]. Оценка для случая двухслойного упругого полупространства будет приведена ниже.

Решение задачи с граничными условиями (3.4) осуществляется методом суперпозиции и проводится в два этапа. Первый этап — определение формы $g(r)$ свободной от нагрузки круговой области ($0 \le r \le R_1$) на верхней границе упругого слоя, в то время как при $R_1 < r < \infty$ действует давление p_n. Для того, чтобы

исключить из расчетов бесконечно удаленную точку, эта задача решается при следующих условиях на поверхности:

$$\begin{aligned} p(r) &= -p_n, \qquad 0 \le r \le R_1, \\ p(r) &= 0, \qquad\quad R_1 < r < \infty, \end{aligned} \tag{3.6}$$

решение которой $\overline{g}(r)$ совпадает с $g(r)$ с точностью до константы:

$$\overline{g}(r) = g(r) + D. \tag{3.7}$$

На втором этапе полученная функция $\overline{g}(r)$ используется при формулировке условий сопряжения штампа и верхней границы упругого слоя. Граничные условия формулируются в виде, аналогичном (1.15) с измененной функцией $f_1(r)$:

$$\begin{aligned} & p_1\kappa_1^{(m)} + p_2\kappa_2^{(m)} + \ldots + p_1\kappa_N^{(m)} = f_1(r_m), \\ & f_1(r) = \big(f(r) - f(a)\big) - \big(\overline{g}(r) - \overline{g}(a)\big) \\ & \quad (i = 1, 2 \ldots N-1). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Таким образом, как и в главе 1, исключается из условий неизвестная константа D. Система замыкается уравнением равновесия в форме (1.18). Неизвестный радиус площадки контакта определяется методом итераций до выполнения условия равенства давления нулю на границе области контакта. Точность полученного решения проверяется путем увеличения числа N.

Расчеты проводились для системы сферических штампов: $f(r) = r^2/2R$, где R — радиус кривизны индентора. Приведенные ниже результаты получены для случая полного сцепления покрытия с подложкой.

Была выделена система безразмерных параметров, от которых зависит решение контактной задачи: относительная тол-

щина слоя $\lambda' = H / l$, относительный радиус кривизны индентора $\rho' = R / l$, характеризующий также плотность контакта, относительный модуль упругости слоя $\chi = E_1 / E_2$, относительное номинальное давление p_n / E_2 и коэффициенты Пуассона материалов слоя и полупространства.

В качестве исследуемых характеристик рассматривались контактное давление $p(r) / p_n$ и относительный радиус области контакта a / l.

Для удобства анализа результатов было выделено два типа покрытий: относительно твердые ($\chi > 1$) и относительно мягкие ($\chi < 1$).

Относительно твердые упругие покрытия

Расчеты для относительно твердого поверхностного слоя проводились при $p_n / E_2 = 0{,}1$ и значениях коэффициента Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$. На рис. 3.2 и 3.3 представлены кривые распределения давления на единичном пятне контакта при различных значениях параметров ρ' и λ'. При этом полагалось, что $\chi = 10$. Для кривых *1–5* на рис. 3.2 толщина слоя менялась соответственно от бесконечности до нуля (непокрытое полупространство) при постоянном значении параметра $\rho' = 2$. Расчеты показывают, что при уменьшении толщины слоя значения максимальных давлений уменьшаются, а радиус пятна контакта возрастает. Однако для каждой фиксированной толщины слоя этот радиус меньше того, который получается в расчетах без учета влияния пригрузки от соседних инденторов, т. е. для уединенного единичного пятна контакта. Этот вывод иллюстрируется на рис. 3.2 кривыми *5* и *5′*, построенными для однородного полупростран-

ства при разных значениях параметра ρ': кривая *5* для $\rho' = 2$ и кривая *5'* для $\rho' = 0$, что соответствует решению Герца.

Рис. 3.3 иллюстрирует характер изменения вида функции давления при изменении параметра λ'. Для этого давление $p(r)$ отнесено к соответствующему максимальному давлению p_0 и рассматривается как функция относительной координаты r/a. Кривая *1* соответствует решению Герца для однородного полупространства, кривые *2* и *3* построены для $\lambda' = 0,25;\ 0,14$ соответственно и $\rho' = 2$. Расчеты показывают, что распределение давления тем больше отличается от решения Герца (кривая *1*), чем больше параметр a/H: $a/H = 1,2$ (кривая *2*), $a/H = 3,2$ (кривая *3*). Однако это различие становится ощутимым только при $a/H > 1$. Кривые *1–3* рис. 3.2, для которых $a/H < 1$, в указанном масштабе располагаются между кривыми *1* и *2* рис. 3.3.

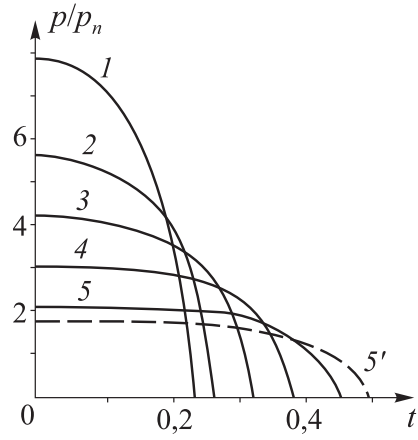


Рис. 3.2. Распределение давления на единичном пятне контакта при различных значениях толщины слоя: $\lambda' = \infty; 1,0; 0,5; 0,25; 0$ (кривые *1–5* соответственно), $\rho' = 2$, $\chi = 10$

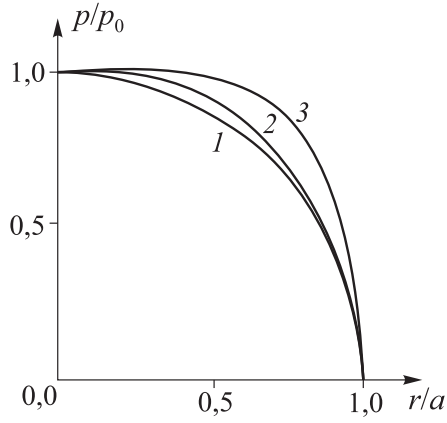


Рис. 3.3. Изменение вида функции давления при изменении параметра λ': кривая *1* — однородное упругое полупространство, $\lambda' = 0{,}25,\ 0{,}14$ — кривые *2* и *3* соответственно

Рис. 3.4 и 3.5 иллюстрируют влияние относительного модуля упругости покрытия χ на контактные характеристики при двух различных значениях λ': $\lambda' = 0{,}25,\ 0{,}14$ соответственно и $\rho' = 2$. Анализ полученных результатов показал, что с увеличением параметра χ размер площадки контакта уменьшается, а максимальное давление p_0 на ней возрастает, причем эта тенденция тем сильнее, чем больше относительная толщина упругого слоя.

Сходные результаты получились при анализе влияния относительной кривизны штампа (параметр ρ') на контактные характеристики (рис. 3.6). Увеличение варьируемого параметра ведет к увеличению области контакта и, соответственно, к уменьшению максимального контактного давления. При расчетах полагалось $\chi = 10,\ \lambda' = 1{,}0$.

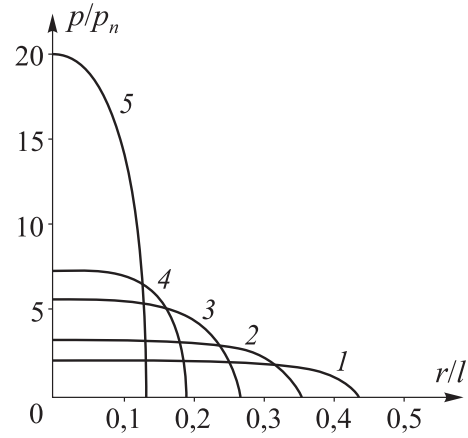


Рис. 3.4. Влияние относительного модуля упругости покрытия χ на контактные характеристики: $\lambda' = 1{,}0$; $\rho' = 2$; $\chi = 1{,}0,\ 4{,}0,\ 10{,}0,\ 20{,}0,\ 50{,}0$ (кривые *1–5* соответственно)

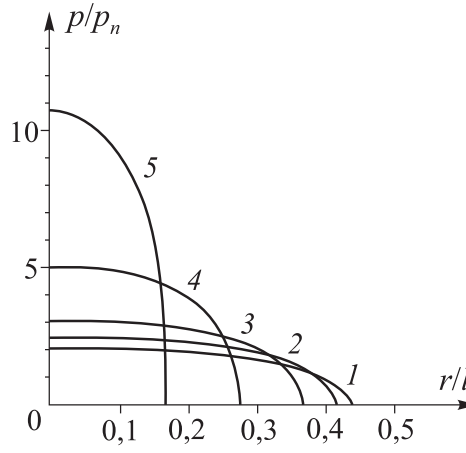


Рис. 3.5. Влияние относительного модуля упругости покрытия χ на контактные характеристики: $\lambda' = 2{,}5$; $\rho' = 2$; $\chi = 1{,}0,\ 4{,}0,\ 10{,}0,\ 20{,}0,\ 50{,}0$ (кривые *1–5* соответственно)

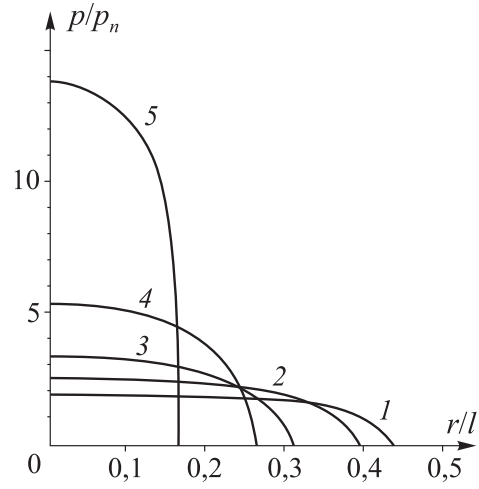


Рис. 3.6. Влияние относительной кривизны штампа на контактные характеристики: $\chi = 10$, $\lambda' = 1{,}0$; $\rho' = 15; 10; 4; 2; 0{,}5$ (для кривых *1–5* соответственно)

Для анализа влияния пригрузки от соседних штампов были проведены расчеты контактных характеристик для единичного штампа так, чтобы значения χ, параметра $\tilde{\lambda} = H / R$ (соответствующего комбинации параметров λ'/ρ), а также нагрузка на индентор полагались равными значениям аналогичных параметров, используемых при расчетах, результаты которых обсуждались выше. Сравнение полученных контактных характеристик с предыдущими дало возможность проиллюстрировать влияние на них пригрузки, использовав дополнительный параметр $\hat{a} = a / a_0$, где a и a_0 — полученные при одинаковых значениях параметров χ и $\tilde{\lambda}$ радиусы областей контакта для задачи с пригрузкой и без нее соответственно. Рис. 3.7 отражает зависимость $\hat{a}$ от параметров λ' и ρ' при фиксированных значениях $\chi = 10$,

$p_n/E_2 = 0{,}1$. Кривые *1–3* построены для значений $\rho' = 0{,}5,\ 2,\ 10$ соответственно. Кривым на рис. 3.8 соответствуют расчеты, проведенные при $\rho' = 10$ и при разных значениях χ. Общим свойством функции $\hat{a}(\tilde{\lambda})$ (рис. 3.7, 3.8) является, по-видимому, стремление их к некоторой асимптоте при увеличении толщины упругого слоя, что соответствует уменьшению влияния подложки на контактные характеристики. При этом асимптотическое зна-

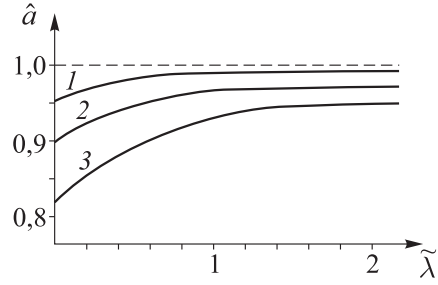


Рис. 3.7. Зависимость радиуса пятна контакта, отнесенного к радису пятна контакта изолированного индентора, от толщины покрытия при $\chi = 10,\ p_n / E_2 = 0{,}1;\ \rho' = 0{,}5,\ 2,\ 10$ (кривые *1–3*)

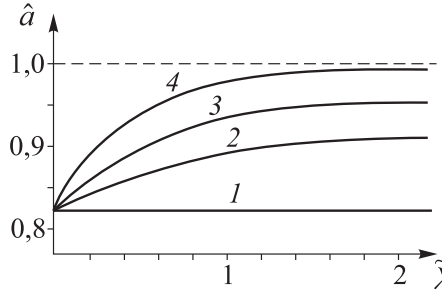


Рис. 3.8. Зависимость радиуса пятна контакта, отнесенного к радису пятна контакта изолированного индентора, от толщины покрытия при $\rho' = 10,\ p_n / E_2 = 0{,}1;\ \chi = 1,\ 3,\ 10,\ 50$ (кривые *1–4*)

чение зависит от комбинации параметров χ и ρ' и возрастает с увеличением χ (рис. 3.8), а с увеличением ρ' убывает (рис. 3.7). Кроме того, убывание функций с уменьшением значений λ' показывает, что наибольшее влияние пригрузка оказывает в случае относительно тонких упругих слоев.

Относительно мягкие упругие покрытия

Для относительно мягкого поверхностного слоя при расчетах полагалось $p_n / E_2 = 0{,}005$ и $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$.

На рис. 3.9 представлены распределения контактных давлений, полученные при $\chi = 0{,}1$ для слоев разной толщины (кривые *1–4* соответственно). Результаты показывают, что чем толще

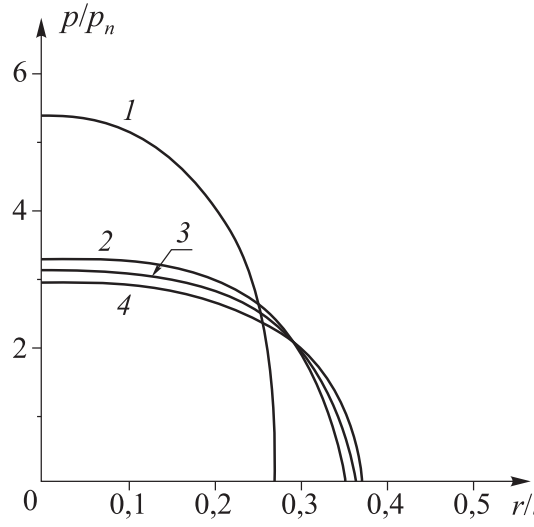


Рис. 3.9. Распределения контактных давлений для слоев разной толщины $\lambda' = 0{,}1,\ 0{,}5,\ 1{,}0,\ \infty$ (кривые *1–4* соответственно), $\chi = 0{,}1$, $\rho' = 1$, $p_n / E_2 = 0{,}005$

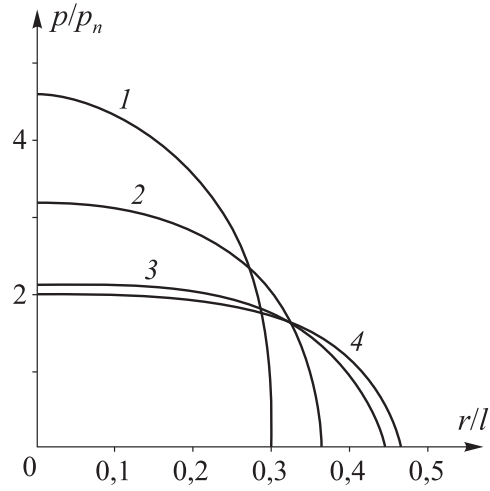


Рис. 3.10. Распределения контактных давлений для разного радиуса инденторов $\rho' = 1, 2, 5, 10$ (кривые *1–4* соответственно), $\chi = 0{,}1$, $\lambda' = 1{,}0$, $p_n / E_2 = 0{,}005$

слой, тем больше радиус пятна контакта и меньше максимальное контактное давление. При этом следует отметить, что близость кривых *2* и *3* к кривой *4*, соответствующей случаю $\lambda' \to \infty$, позволяет сделать вывод, что начиная с некоторой толщины слоя λ^* (величина которой зависит от параметров χ и ρ'), влияние более твердой подложки на контактные характеристики становится незначительным. Аналогичные расчеты, проведенные для других значений параметра χ, показывают, что с его уменьшением значение λ^* растет.

На рис. 3.10 показано, как растет область контакта и изменяется распределение контактного давления при увеличении относительного радиуса кривизны штампа ρ' для $\chi = 0{,}1$ и $\lambda' = 1{,}0$.

3.2. Оценка влияния характера распределения пригрузки на контактные характеристики

С целью оценки близости полученных в результате решения задачи с граничными условиями (3.4) контактных характеристик к решению задачи с условиями (3.1) было проведено сравнение полученного радиуса пятна контакта a с радиусом области контакта a_1, который получается, если при постановке задачи принять во внимание еще один слой или несколько слоев инденторов. В рамках осесимметричной постановки последние моделируются кольцами толщины Δa, середина которых расположена на расстоянии, отделяющем центры инденторов от рассматриваемого индентора. Распределение давления в кольце из соображения равенства нулю на внешней и внутренней его границах предполагалось в виде:

$$\tilde{p}(r) = \tilde{p}_0 \sqrt{(1 - r/\tilde{r}_1)(1 - r/\tilde{r}_2)}\,, \tag{3.9}$$

где $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ — внутренний и внешний радиусы кольца соответственно, $\tilde{p}_0$ — максимальное давление, рассчитанное из условия:

$$\int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \tilde{p}(r) r dr = n \int_0^a p(r) r dr, \tag{3.10}$$

где n — количество инденторов в слое. Расстояние R_1, начиная с которого действие более далеких слоев инденторов заменяется распределенным давлением, рассчитывается так, чтобы внутрь круга с данным радиусом попадали учитываемые слои инденторов, а среднее давление в круге было равно p_n. Так, для одного слоя инденторов получаем:

$$R_1 = l\sqrt{7\sqrt{3}/(2\pi)}\ . \tag{3.11}$$

Были проведены расчеты для системы сферических инденторов ($f(r)=r^2/2R$) при $R/l=4$, которые показали, что учет влияния одного ближайшего слоя инденторов приводит к радиусу площадки контакта a_1, отличному от a на 6 %, в то время как $a=0{,}33l$. Разницу полученных распределений давлений иллюстрирует рис. 3.11. Из этого следует, что при этой и меньшей плотности контакта основной метод расчета обеспечивает достаточную точность.

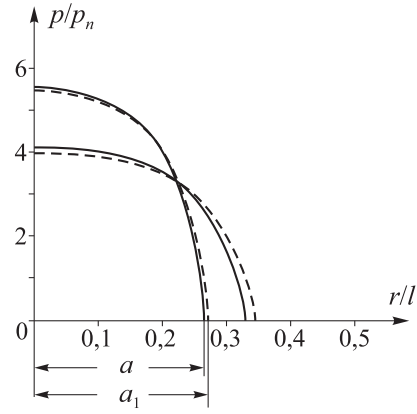


Рис. 3.11. Распределения контактного давления, полученные с помощью основного (пунктирные кривые) и уточненного (сплошные кривые) методов расчета

3.3. Определение и анализ напряженного состояния двухслойного упругого полупространства при множественном характере нагружения

Рассматривается упругий слой толщины H, скрепленный с упругим полупространством и нагруженный давлением $p(r)$

по круговым областям ω_i $(i=1,2...\infty)$ радиуса a, расположенным в узлах гексагональной решетки с периодом l (рис. 3.1). На границе раздела упругого слоя и упругого полупространства имеют место условия (1.30), учитывающие степень сцепления слоя с полупространством.

На верхней границе слоя:

$$\sigma_z^{(1)} = \begin{cases} p(x,y), & (x,y) \in \omega_i, \\ 0, & (x,y) \notin \omega_i, \end{cases}$$
$$\omega_i = \left\{ x,y : (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \le a^2 \right\}, \qquad (3.12)$$
$$i = 1,2...\infty.$$

Определение поля внутренних напряжений при постановке задачи с граничными условиями (3.12) возможно методом наложения полей напряжений, полученных для отдельных круговых областей нагружения ω_i путем решения соответствующей осесимметричной задачи. Метод решения осесимметричной задачи о нагружении многослойного упругого полупространства при неполном сцеплении слоев подробно изложен в главе 1. Как будет показано ниже, подобная суперпозиция необходима при высокой плотности контакта, но в некоторых случаях можно использовать следующий приближенный подход.

Рассмотрим осесимметричное приближение, состоящее в замене фактического дискретного давления на номинальное для части области нагружения. Погрешность подобного подхода будет исследована ниже. В рамках приближенного подхода для определения напряженного состояния под нагруженными и ненагруженными зонами исследуются простые осесимметричные модели с осями симметрии, проходящими через центр произвольной фиксированной области нагружения ω_i и через центр ненагруженной области.

В первом случае рассматриваются следующие граничные условия на верхней границе слоя (рис. 3.12):

$$\sigma_z^{(1)} = \begin{cases} p(r), & r \le a, \\ 0 \quad , & a < r \le R_1, \\ p_n \quad , & r > R_1. \end{cases} \tag{3.13}$$

Граничные условия (3.13) отличаются от граничных условий (3.12) заменой заданного дискретного распределения давления в окрестности рассматриваемой фиксированной области нагружения радиуса a на номинальное давление p_n. Номинальное давление p_n и радиус R_1 рассчитываются исходя из известной характеристики относительной площади областей нагружения $\overline{A} = A_r / A_n$, где A_r — суммарная площадь нагруженных областей, а A_n — общая площадь поверхности.

$$p_n = \frac{2\overline{A}}{a^2}\int_0^a p(r) r dr, \quad R_1 = \frac{a}{\sqrt{\overline{A}}}. \tag{3.14}$$

Для рассматриваемого случая нагружения областей, расположенных в узлах гексагональной решетки с шагом l,

$$\overline{A} = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{3} l^2}, \quad R_1 = l\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}. \tag{3.15}$$

Аналогичным образом строится осесимметричное приближение для определения напряженного состояния вблизи центра ненагруженной области. Рассматривается слой нагруженных областей, ближайший к точке A (рис. 3.1), соответствующей центру ненагруженной области, действие остальных слоев заменяется действием распределенной нагрузки.

$$\sigma_z^{(1)} = \begin{cases} p^*, & (r,\varphi) \in \omega^*, \\ 0, & (r,\varphi) \notin \omega^*, \\ p_n, & r > R_2. \end{cases} \tag{3.16}$$

Здесь ω^* — объединение областей с центрами на одинаковом (минимальном) расстоянии от точки A. Радиус R_2 определяется соотношением:

$$R_2 = l\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}. \tag{3.17}$$

Очевидно, что решение задачи с граничными условиями (3.13) адекватно описывает напряженное состояние только при небольшой плотности контакта и для точек, находящихся непосредственно под центром нагруженной области, что может быть использовано для экспресс-анализа напряжений. Если необходимо получить полное распределение напряжений в покрытии, необходимо проводить суперпозицию напряжений, возникающих от ближайших к рассматриваемому пятен контакта (в нашем случае их 6), действие остальных также заменяется распределенным давлением.

Специфика задачи состоит в том, что области нагружения распределены до бесконечности, что приводит к необходимости в процессе решения вычислять интегралы для бесконечных областей. Чтобы избежать этого, для решения задачи (3.13) используется наложение поля постоянного напряжения $p(r) = p_n \quad (0 < r < \infty, z = 0)$ на результаты, полученные вследствие решения задачи с граничными условиями:

$$\sigma_z^{(1)} = \begin{cases} p(r) - p_n, & r \le a, \\ -p_n, & a < r \le R_1, \\ 0, & r > R_1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Задача с условиями (3.16) принимает вид:

$$\sigma_z^{(1)} = \begin{cases} p^* - p, & (r,\varphi) \in \omega^*, \\ -p_n, & (r,\varphi) \notin \omega^*, \\ 0, & r > R_2. \end{cases} \qquad (3.19)$$

Таким же образом рассматриваются задачи, в которых принимаются во внимание области нагружения, ближайшие к рассматриваемой.

При анализе внутренних напряжений, возникающих в двухслойном упругом полупространстве в условиях множественного контакта с системой сферических инденторов, была использована следующая система безразмерных параметров: $\chi = E_1/E_2$, ν_1, ν_2, $\lambda' = H/l$, $\rho' = R/l$ (относительная плотность контакта), $K = kp_n/l$, p_n/E_2. Здесь также используется дополнительный параметр $\lambda^* = H/R$, связывающий толщину поверхностного слоя с радиусом индентора.

Относительно твердые покрытия

На рис. 3.12 представлены изолинии напряжений σ_r в твердом покрытии ($\chi = 20$), нагруженном системой инденторов с плотностью $\rho' = 0{,}6$. Плоскость вертикального сечения проходит через центры двух инденторов C и C' (рис. 3.1). На рисунке также показано расчетное распределение давлений в областях контакта. Сравнение радиуса области контакта ($a \cong 0{,}34l$) с толщиной слоя ($h = 0{,}22l$) позволяет считать покрытие относительно тонким ($h/a < 1$). Максимальные сжимающие (отрицательные) напряжения имеют место на верхней границе слоя, тогда как положительные растягивающие концентрируются на границе раздела слоя и полупространства; то есть имеет место из-

гиб твердого покрытия. На границе раздела находятся два локальных максимума: основной под индентором ($\sigma_r \cong 5{,}42p_n$ при $y = 0$, $x = 0$, $x = l$ и $z = 0$) и меньший по значению — между двумя инденторами ($\sigma_r \cong 3{,}69p_n$ при $y = 0$, $x = 0{,}5$ и $z = 0$). Также локализуются и минимумы на поверхности покрытия. Интересно отметить, что абсолютные значения максимальных сжимающих и растягивающих напряжений больше, чем максимальное значение контактного давления $p(x, y)$.

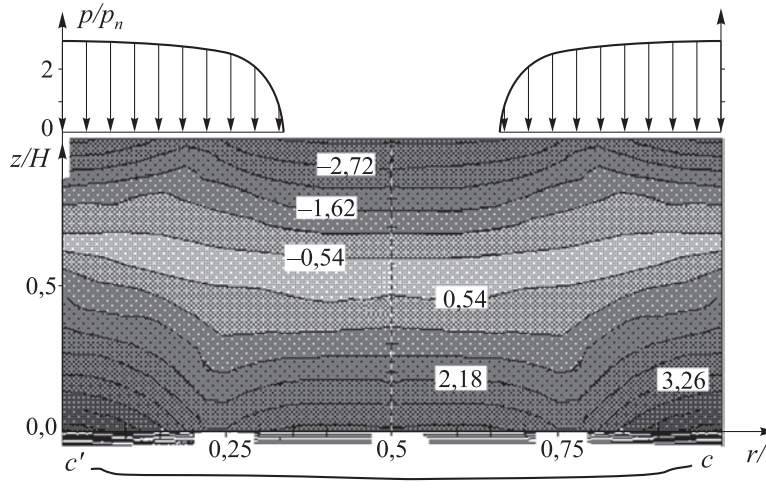


Рис. 3.12. Распределение контактных давлений и изолинии растягивающих-сжимающих напряжений $\sigma_r(r,z)/p_n$ в твердом покрытии и в подложке: $p_n = 0{,}2E_2$, $\chi = 20$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $\rho' = 0{,}6$, $K = \infty$, $\lambda' = 0{,}22$

Изгиб покрытий может привести к их разрушению. Периодическое распределение максимумов растягивающих напряжений на границе раздела покрытия с подложкой может привести к появлению системы вертикальных трещин, которые начи-

наются на границе раздела и распространяются вглубь покрытия.

Расчеты показывают, что перепад напряжений на границе раздела покрытия с подложкой тем больше, чем больше относительная твердость покрытия. На рис. 3.13 представлено распределение сжимающих-растягивающих напряжений σ_r под центром пятна контакта для разных значений параметров λ', K и χ. Кривая *1* соответствует тем же значениям параметров, что и результаты, показанные на рис. 3.12 для случая полного сцепления. Кривая *2* получена при $K = 50$. Сравнение кривых *1* и *2* показывает, что, как и в случае единичного контакта, уменьшение степени сцепления приводит к увеличению растягивающих напряжений, в особенности на границе раздела. Оценку влияния относительной твердости покрытия можно провести, сравнивая кривые *1* ($\chi = 20$) и *3* ($\chi = 5$), полученные при $\lambda = 0{,}22$, а также кривые *4* ($\chi = 20$) и *5* ($\chi = 5$) при значении $\lambda = 0{,}135$. Анализ результатов показывает, что уменьшение толщины покрытия и увеличение его твердости приводит к увеличению изгибных деформаций в покрытии. Увеличение толщины покрытия может предотвратить появление в нем вертикальных трещин.

На рис. 3.14 и 3.15 приведены результаты расчета максимальных касательных напряжений в слое и полупространстве. На рис. 3.14 представлены результаты для относительно толстого твердого покрытия ($\chi = 20$, $\lambda' = 0{,}5$). Максимальные значения напряжений реализуются внутри покрытия ($\tau_m = 4{,}02$ при $r = 0$ и $z = 0{,}6H$). Локальный максимум с меньшим значением находится на границе раздела покрытия с подложкой. Для тонких покрытий распределение напряжений принципиально другое. На рис. 3.15 показано распределение максимальных касательных напряжений под центром пятна контакта. Кривые рис. 3.15,а ил-

люстрируют влияние относительной толщины покрытий и степени сцепления покрытия с подложкой на рассматриваемую функцию. В рассмотренном диапазоне толщин чем тоньше покрытие, тем больше значения напряжений на границе раздела. Интересно отметить, что неполное сцепление покрытия с подложкой, увеличивающее растягивающие напряжения на границе раздела по сравнению со случаем полного сцепления, в данном случае уменьшает значения максимальных касательных напряжений вблизи границы.

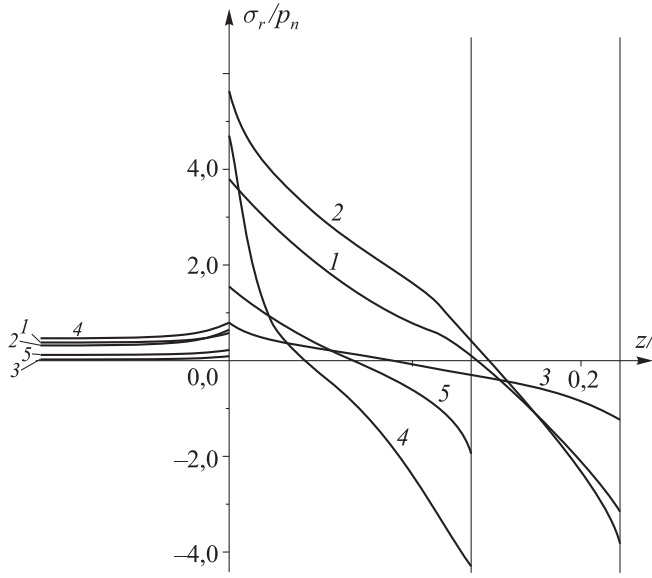


Рис. 3.13. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений $\sigma_r(r,z)/p_n$ в покрытии и полупространстве при $p_n = 0{,}2E_2$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $\rho' = 0{,}6$, $\chi = 20$ (кривые *1*, *2*, *4*), $\chi = 5$ (кривые *3*, *5*), $K = \infty$ (кривые *1*, *3*, *4*, *5*), $K = 50$ (кривая *2*), $\lambda' = 0{,}22$ (кривые *1*, *2*, *3*), $\lambda' = 0{,}135$ (кривые *4*, *5*)

С целью оценки влияния характера распределения давления внутри зон нагружения на напряженное состояние были проведены также расчеты функции $\tau_{\max}$ на оси под центром зоны нагружения при замене расчетного распределения давления под сферическим штампом распределением давления Герца [44]. Результаты сравнительных расчетов приведены на рис. 3.15,б. Кривые *1* и *2* на рис. 3.15,б совпадают с кривыми *2* и *3* рис. 3.15,а, кривые *1'* и *2'* получены для приближенного (герцевского) распределения давления, при расчетах полагались равными радиусы пятен контакта и суммарная нагрузка на пятно. Отличие кривых показывает, что разница в распределении давления перестает влиять на напряжения на некоторой глубине, и глубина эта тем меньше, чем меньше значение параметра a/H (a/H = 1,54 для кривых *2, 2'* и a/H = 0,64 для кривой *1, 1'*).

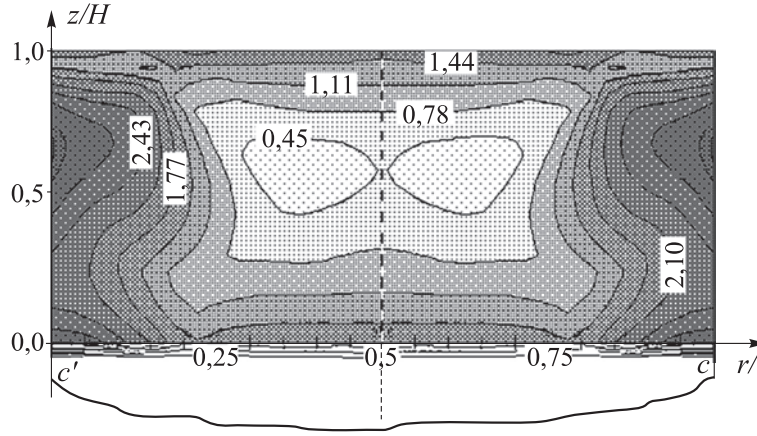


Рис. 3.14. Изолинии максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}(r, z)/p_n$ в относительно твердом покрытии и в подложке при $p_n = 0{,}2E_2$, $\chi = 20$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $\rho' = 0{,}6$, $K = \infty$, $\lambda = 0{,}5$

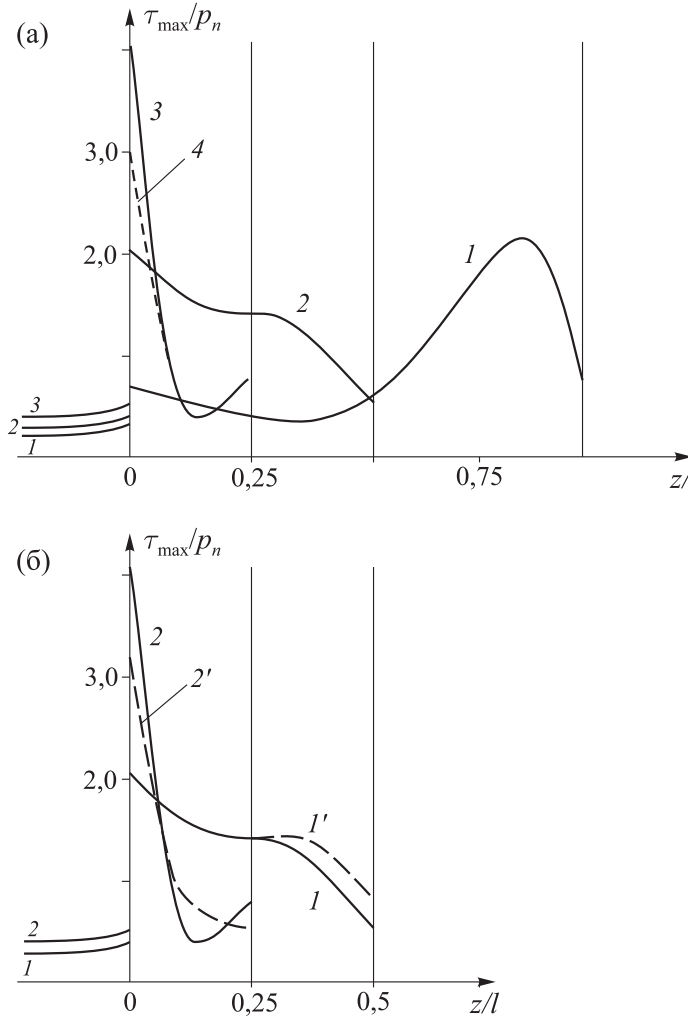


Рис. 3.15. Распределение максимальных касательных напряжений τ_{max} $(r,z)/p_n$ в покрытии и подложке под центром зоны нагружения для разных толщин покрытия: $p_n = 0{,}1E_2$, $\chi = 10$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $\rho' = 0{,}6$, $K = \infty$ (кривые *1*, *2*, *3*), $K = 50$ (кривая *4*), $\lambda' = 1$ (кривая *1* (а)), $\lambda' = 0{,}5$ (кривая *2* (а), кривая *1* (б)), $\lambda' = 0{,}25$ (кривые *3*, *4* (а), кривая *2* (б))

На величину и положение главного максимума максимальных касательных напряжений под центром круга нагружения влияет также плотность контакта, которую характеризует параметр ρ (относительный радиус кривизны штампов). Сравнение кривых на рис. 3.16 показывает, что при больших значениях параметра ρ' и, соответственно, параметра a/H (кривые *3* и *3'*) перепад максимальных касательных напряжений на фиксированной глубине значительно меньше перепада, имеющего место при менее плотном контакте (кривые *1* и *1'*).

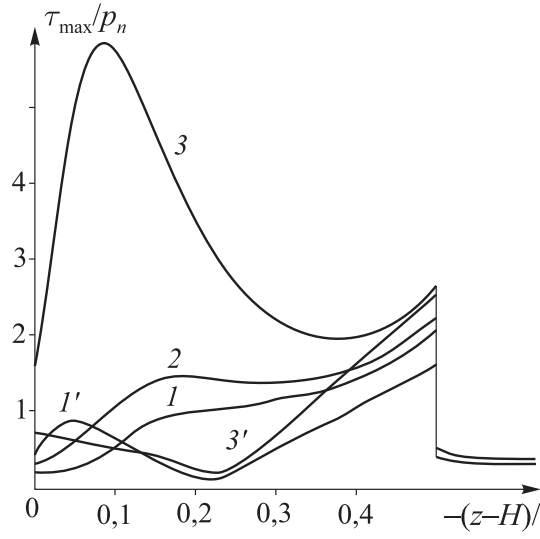


Рис. 3.16. Влияние относительного радиуса кривизны инденторов на распределение максимальных касательных напряжений в покрытии и подложке: $p_n / E_2 = 0{,}1$, $\chi = 10$, $\lambda' = 0{,}5$; $\rho' = 4, 2, 0{,}5$ для кривых *1, 2, 3* соответственно. Кривые *1', 3'* — распределения под центром ненагруженной области, кривые *1, 2, 3* — под центром области нагружения

На рис. 3.17 представлена функция амплитуды максимальных касательных напряжений $\Delta\tau_{max}(z) = (\tau_{max})_{max}(z) - (\tau_{max})_{min}(z)$. Согласно ряду расчетов при малой и средней плотности контакта минимальные значение максимальных касательных напряжений находятся под центральной точкой ненагруженной зоны (точка *A* на рис. 3.1). При уменьшении плотности контакта значения напряжений под точкой *A* стремятся к нулю. Результаты, представленные на рис. 3.17, получены для относительно тонких покрытий при разных значениях плотности контакта. Максимальные значения функции перепада напряжений имеют место на поверхности и на границе раздела покрытия с подложкой. При увеличении плотности контакта эти значения уменьшаются. В особенности взаимное влияние соседних инденторов сказывается на величине максимума на границе раздела. Расчеты показали, что для относительно толстых покрытий эта величина близка к нулю.

На рис. 3.18 представлено распределение касательных напряжений $\tau_{rz}(r)$ на границе раздела покрытия с подложкой под двумя соседними инденторами. Кривые *1* и *2* получены для разной относительной твердости покрытия ($\chi = 5$ — кривая *1* и $\chi = 10$ — кривая *2*, остальные значения параметров совпадают). Сравнение кривых *1* и *3* позволяет оценить влияние относительной толщины покрытия на распределение напряжений ($\lambda' = 0{,}2$ — кривая *1*, $\lambda = 0{,}1$ — кривая *3*).

Нормальные напряжения σ_z также на границе раздела покрытия с подложкой под двумя соседними инденторами представлены на рис. 3.19. При некоторых комбинациях параметров χ, λ', K на границе раздела возникают отрицательные нормальные напряжения.

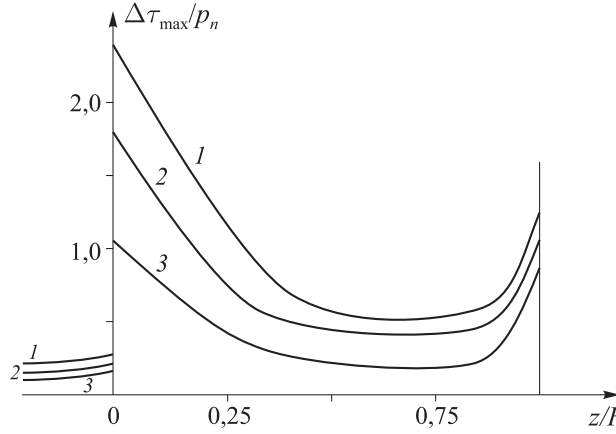


Рис. 3.17. Распределение $\Delta\tau_{max}(z)/p_n$ в покрытии и подложке при разной плотности контакта: $p_n = 0{,}05E_2$, $\chi = 5$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $K = \infty$, $\lambda^* = 0{,}01$, $\rho' = 0{,}6$ (кривая *1*), $\rho' = 0{,}8$ (кривая *2*), $\rho' = 1{,}0$ (кривая *3*)

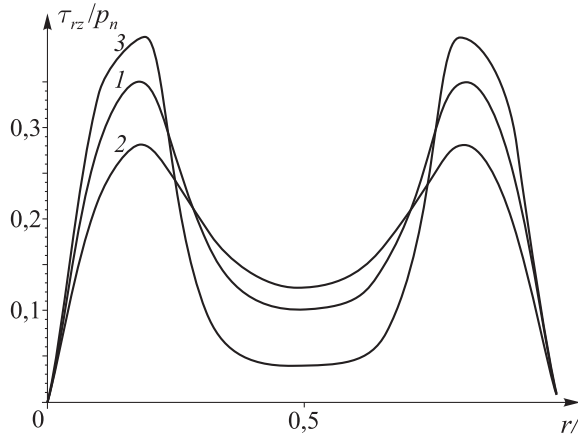


Рис. 3.18. Распределение напряжений $\tau_{rz}(r)/p_n$ на границе раздела покрытия с подложкой $p_n = 0{,}05E_2$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $K = \infty$, $\rho' = 0{,}8$, $\chi = 5$ (кривые *1*, *3*), $\chi = 10$ (кривая *2*), $\lambda' = 0{,}2$ (кривые 1, 2), $\lambda' = 0{,}1$ (кривая *3*)

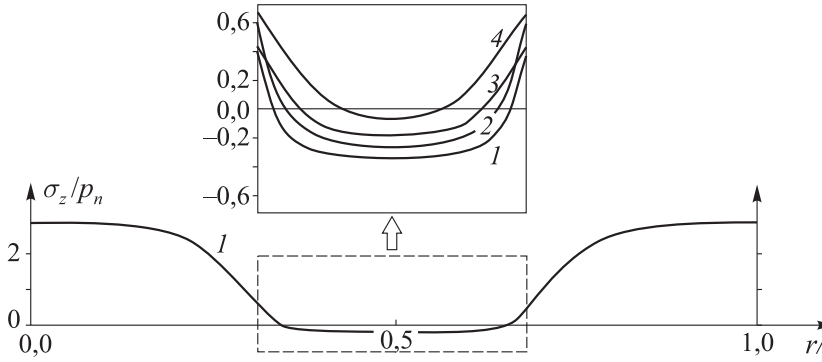


Рис. 3.19. Распределение напряжений $\sigma_z(r,z)/p_n$ на границе раздела покрытия с подложкой: $p_n = 0{,}2E_2$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_2 = 0{,}4$, $\rho' = 0{,}6$, $\chi = 20$ (кривые *1*, *2*, *3*), $\chi = 5$ (кривая *4*), $K = \infty$ (кривые *1*, *3*, *4*), $K = 50$ (кривая *2*), $\lambda' = 0{,}22$ (кривые *1*, *2*, *4*), $\lambda' = 0{,}35$ (кривая *3*)

Относительно мягкие покрытия

Полученные контактные характеристики для разных значений параметров χ, ρ', λ' использовались для расчета функции $\tau_{\max}$ на осях *Oz* и *O'z*. Некоторые из результатов расчетов представлены на рис. 3.20 и 3.21. Для относительно мягких слоев, как и для относительно твердых, функция $\tau_{\max}$ имеет скачок на границе раздела слоя и полупространства.

Рис. 3.20 иллюстрирует влияние относительной толщины слоя на характер распределения вдоль оси *Oz* функции $\tau_{\max}$. Результаты были получены при следующих значениях параметров: $\lambda' \to \infty$ (кривая 4); 0,1; 0,5; 1,0 (кривые *1*, *2*, *3* соответственно); $p_n/E_2 = 0{,}005$; $\chi = 0{,}1$; $\rho' = 2$.

Кривые с одинаковыми номерами на рис. 3.20 и 3.9 соответствуют одним и тем же значениям параметров. Расчеты показывают, что максимальное значение функции $\tau_{\max}$ достигается

внутри слоя или внутри полупространства, последнее имеет место при уменьшении параметра λ.

Результаты, представленные на рис. 3.21, показывают зависимость функции $\tau_{\max}$ на оси *Oz* (сплошные кривые *1–3*) и *O'z* (пунктирные линии *1'–3'*) от параметра ρ'. Также, как и в случае $\chi > 1$, перепад значений функции $\tau_{\max}$ на фиксированной глубине уменьшается с увеличением значения параметра ρ'.

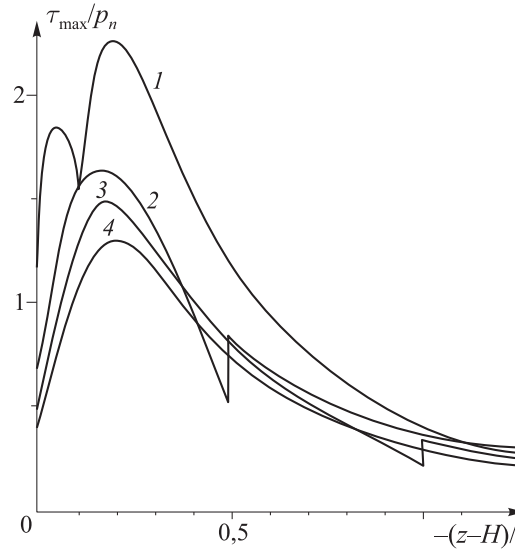


Рис. 3.20. Распределение максимальных касательных напряжений под центром пятна контакта: $\lambda' \to \infty$ (кривая 4); 0,1; 0,5; 1,0 (кривые *1, 2, 3* соответственно); $p_n/E_2 = 0,005$; $\chi = 0,1$; $\rho' = 2$

Анализ функции $\Delta\tau_{\max}(z)$ показал, что в случае мягких покрытий ее поведение определяется, главным образом, значениями напряжений $\tau_{\max}(z)$ под центром нагруженной области,

т. е. зависимости этой функции от исследуемых параметров качественно совпадают с зависимостями, приведенными ранее для единичного контакта в главе 1.

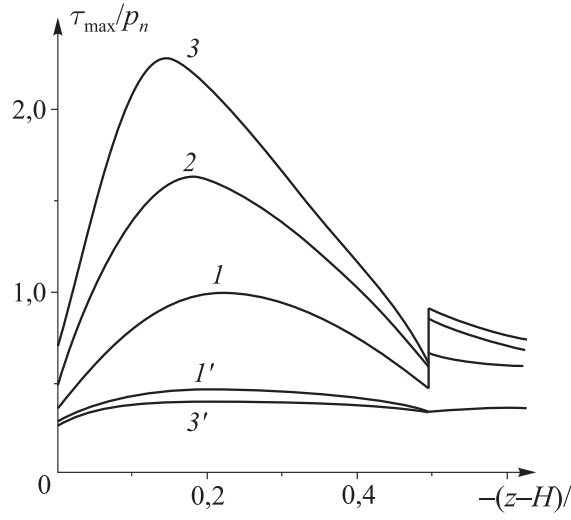


Рис. 3.21. Распределение максимальных касательных напряжений под центром пятна контакта (кривые *1, 2, 3*) и под центром ненагруженной области: $\rho' = 10$ (кривые *1, 1'*); 2 (кривая *2*); 1 (кривые *3, 3'*); $p_n/E_2 = 0,005$; $\chi = 0,1$; $\lambda' = 0,5$

Оценка точности приближенной модели

В целях оценки правомерности приближенных моделей было проведено сравнение результатов, полученных для более точной и приближенной модели. Уточнение модели состояло в расчете напряжений под фиксированной областью нагружения с учетом влияния ближайших шести штампов. Погрешность в определении напряжений под центром области нагружения для случая наиболее плотного контакта $(a/l = 1/2)$ колебалась в пре-

делах от 8 до 15 % (в зависимости от выбранной компоненты напряжений и входных параметров задачи). Для упрощения расчетов в данном случае рассматривалась параболическая функция распределения давления, допускающая аналитическое преобразование Ханкеля и позволяющая свести погрешность вычислений к погрешности расчета интегралов типа (1.24), по сути, являющихся обратными интегральными преобразованиями Ханкеля. В качестве примера на рис. 3.23 приведены распределения максимальных касательных напряжений по толщине покрытия и в подложке под центром области нагружения (кривая *1*) и под границей области нагружения (кривая *2*), причем граница области

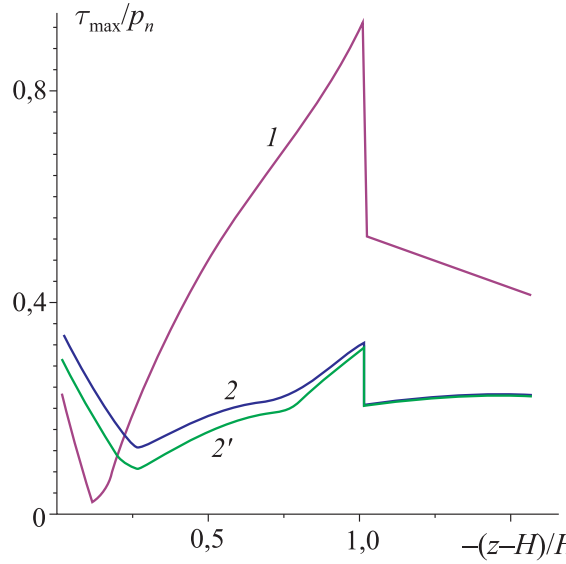


Рис. 3.22. Распределение максимальных касательных напряжений под центром (кривая *1*) и на границе (кривые *2* и *2′*) области нагружения для уточненной (кривые *1* и *2*) и приближенной моделей (кривая *2′*): $a/H = 0{,}5$, $a/l = 0{,}4$, $\chi = 0{,}3$

нагружения находится на отрезке, соединяющем центр выбранной области приложения нагрузки с центром соседней области. Выбор этой точки обусловливает некоторое увеличение значений напряжений вблизи поверхности по сравнению с результатами расчетов для приближенной модели (кривая *2'*), но уже на границе раздела покрытия с подложкой кривые *2* и *2'* сливаются. При данных параметрах расчета под центром области контакта отличие результатов пренебрежимо мало.

3.4. Анализ функции дополнительного смещения

Функция дополнительного смещения, определяемая в результате решения периодической контактной задачи, является фактором, определяющим зависящую от номинального давления податливость контакта за счет наличия слоя микронеровностей. В данном разделе приведен анализ функции дополнительного смещения, которая определяется как вертикальное перемещение центра произвольно выбранного индентора без учета исключенной из расчетов неизвестной константы, при различных геометрических параметрах задачи. Использовалась периодическая система сферических инденторов. Во всех расчетах предполагалось выполнение условий полного сцепления покрытия с подложкой.

На рис. 3.23 приведена функция дополнительного смещения, полученная для относительно твердых покрытий при разных значениях относительной толщины покрытия. Следует отметить, что при относительно больших значениях параметра λ подложка мало влияет на функцию дополнительного смещения. Расчеты, проведенные для других значений относительной твер-

дости покрытия, показали, что чем больше относительная твердость покрытия, тем больше относительная толщина покрытия, при которой влиянием подложки можно пренебречь. Подобный эффект получен и для случая относительно мягких покрытий (рис. 3.24). Этот эффект важен, поскольку покрытия, являющиеся относительно толстыми на микроуровне, могут таковыми не являться, когда рассматривается контактная задача на макроуровне.

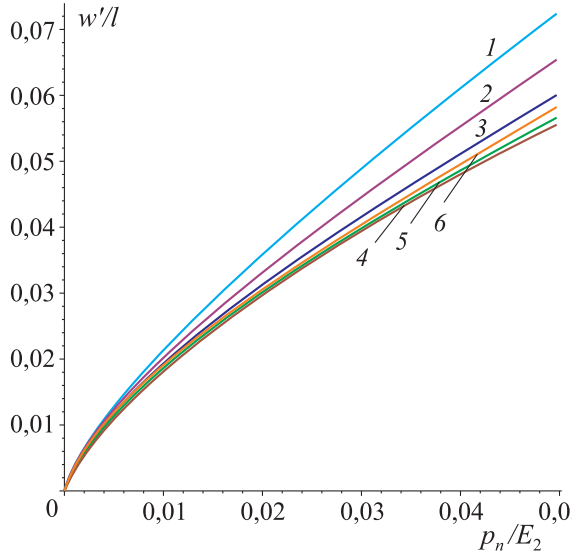


Рис. 3.23. Влияние толщины покрытия на функцию дополнительного смещения для относительно твердых покрытий: $\chi = 2$, R/l = 0,5, $\nu_1 = 0{,}25$, $\nu_2 = 0{,}3$, $\lambda' = 0{,}1$ (кривая *1*), $\lambda' = 0{,}2$ (кривая *2*), $\lambda' = 0{,}5$ (кривая *3*), $\lambda' = 1{,}0$ (кривая *4*), $\lambda' = 2{,}0$ (кривая *5*), $\lambda' = 10{,}0$ (кривая *6*)

На рис. 3.25,а и 3.25,б представлены функции дополнительного смещения, полученные для относительно твердых (а)

и относительно мягких (б) покрытий для разных значений относительного радиуса микро-индентора. В обоих случаях очевидным результатом является уменьшение дополнительного смещения при увеличении радиуса индентора, менее очевидным является различие в форме кривых для твердых и мягких покрытий. Для твердых покрытий при увеличении нагрузки наблюдается более быстрый рост значений функции за счет усиления влияния более мягкой подложки на условия контакта. Сближение кривых, наблюдающееся при равномерном увеличении радиуса инденторов, вероятно, обусловлено насыщением контакта и усилением эффекта взаимного влияния.

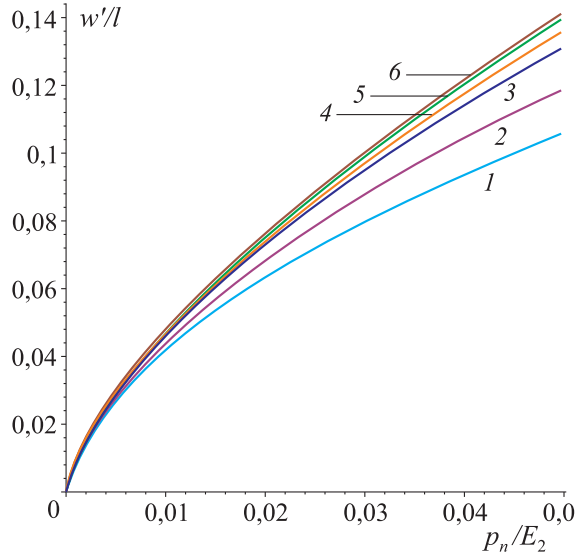


Рис. 3.24. Влияние толщины покрытия на функцию дополнительного смещения для относительно мягких покрытий: $\chi = 0{,}5$, R/l = 0,5, $\nu_1 = 0{,}4$, $\nu_2 = 0{,}3$, $\lambda' = 0{,}1$ (кривая *1*), $\lambda' = 0{,}2$ (кривая *2*), $\lambda' = 0{,}5$ (кривая *3*), $\lambda' = 1{,}0$ (кривая *4*), $\lambda' = 2{,}0$ (кривая *5*), $\lambda' = 10{,}0$ (кривая *6*)

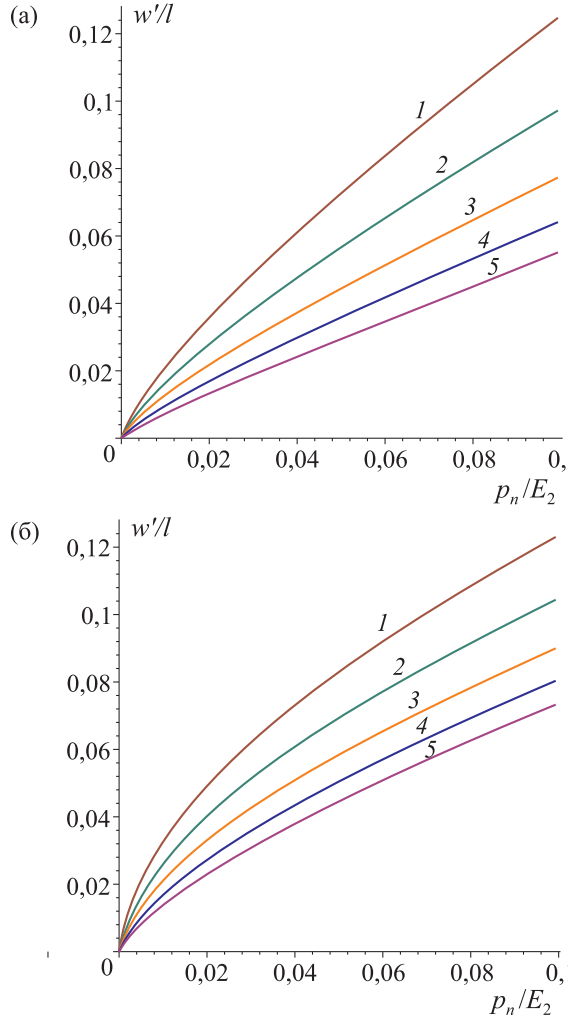


Рис. 3.25. Влияние относительного радиуса инденторов на функцию дополнительного смещения для относительно твердых и относительно мягких покрытий: $\chi = 2{,}0$, $\nu_1 = 0{,}25$ (а), $\chi = 0{,}5$, $\nu_1 = 0{,}4$ (б), $\nu_2 = 0{,}3$, $\lambda' = 0{,}1$; R/l = 0,5 (кривая *1*), R/l = 1,0 (кривая *2*), R/l = 2,0 (кривая *3*), R/l = 4,0 (кривая *4*), R/l = 8,0 (кривая *5*)

Усиление взаимного влияния инденторов для случая однородного полупространства наблюдается при увеличении нагрузки на систему инденторов [24]. Для слоистых тел этот эффект менее очевиден, поскольку с увеличением нагрузки и увеличением размера произвольного пятна контакта происходит уменьшение относительной толщины покрытия и усиление влияния подложки. Чтобы сравнить эффект взаимного влияния для относительно твердых и относительно мягких покрытий были получены зависимости функции дополнительного смещения для относительно твердых и относительно мягких покрытий от радиуса инденторов при фиксированном значении нагрузки (рис. 3.26). Для сравнения на рисунках приведены кривые, полученные для единичного контакта при аналогичных условиях нагружения. Как и следует предполагать, при малых радиусах взаимное влияние инденторов пренебрежимо мало, но при больших радиусах пренебрежение взаимным влиянием приводит к существенной погрешности. Также можно отметить, что при данных значениях параметров расчета взаимное влияние более существенно для относительно твердых покрытий.

3.5. Решение двухуровневой контактной задачи

Рассматривается контакт осесимметричного шероховатого индентора и двухслойного упругого полупространства (рис. 3.27). Условия на верхней границе упругого слоя ($z = 0$) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & w^{(1)}(x,y) = \tilde{f}(x,y) + D, \quad (x,y) \in \Omega, \\ & \sigma_z^{(1)}(x,y) = 0, \quad (x,y) \notin \Omega, \\ & \tau_{xz}^{(1)}(x,y) = \tau_{yz}^{(1)}(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

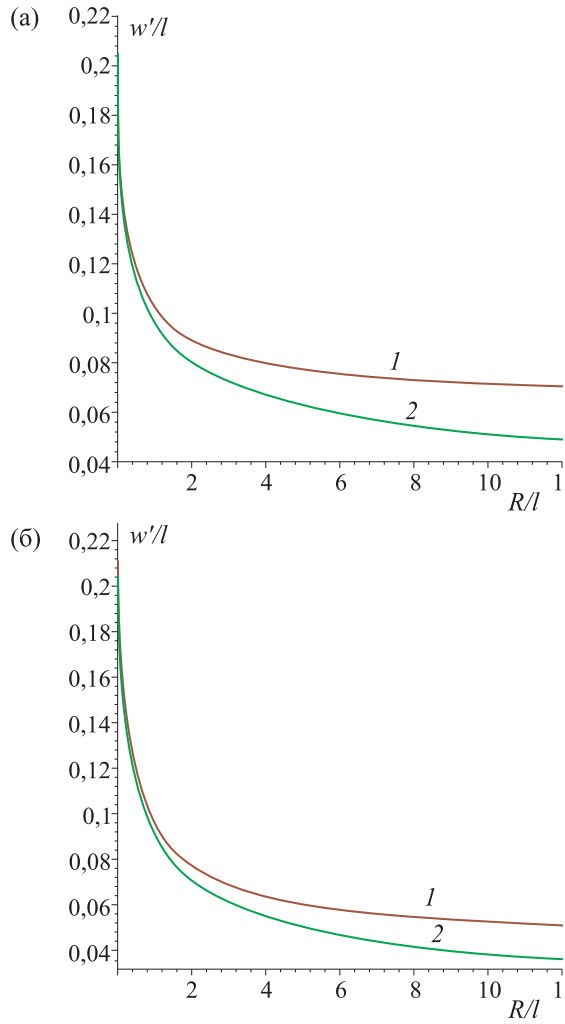


Рис. 3.26. Зависимость функции дополнительного смещения от относительного радиуса инденторов для относительно твердых и относительно мягких покрытий: $\chi = 2{,}0$, $\nu_1 = 0{,}25$ (а), $\chi = 0{,}5$, $\nu_1 = 0{,}4$ (б); $\nu_2 = 0{,}3$, $\lambda' = 0{,}1$, $p_2/E_2 = 0{,}1$ (кривая *1*); кривая *2* получена для единичного контакта

где $w^{(1)}$ — вертикальное перемещение верхней границы упругого слоя, $\tilde{f}(x,y)$ — функция, описывающая форму поверхности шероховатого индентора, Ω — состоящая из отдельных пятен фактическая область контакта.

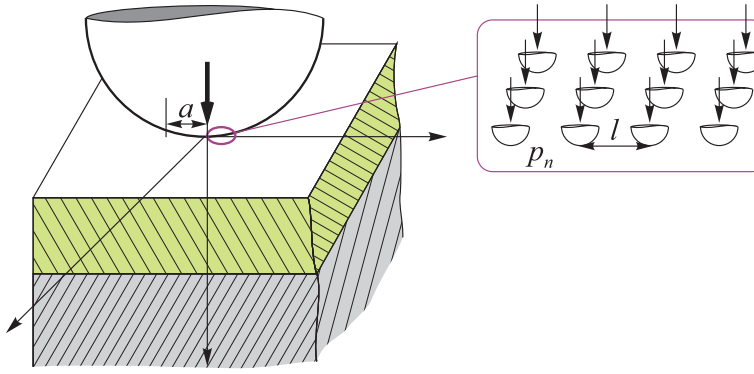


Рис. 3.27. Схема контакта на двух масштабных уровнях

В предположении, что размер области Ω много больше характерного расстояния между неровностями l, можно разделить задачу с граничными условиями (2.20) на две взаимосвязанные задачи о контакте на микро- и макроуровне. Следуя [23, 24] запишем следующее соотношение для определения номинальных давлений и неизвестного радиуса номинальной области контакта Ω:

$$w(x,y) = C\left[p(x,y)\right] + A\left[p(x,y)\right]. \qquad (3.21)$$

Здесь $p(x,y)$ — неизвестное номинальное давление, $C\left[p(x,y)\right]$ — зависящая от номинального давления функция дополнительного смещения, которая определяется в результате

решения задачи о множественном контакте на микроуровне. При отсутствии шероховатостей $C[p(x,y)] \equiv 0$, и задача сводится к рассмотренной в главе 1 контактной задаче, коротко описанной здесь как $w(x,y) = A[p(x,y)]$.

Функция $C[p(x,y)]$ зависит от параметров микрогеометрии. Одним из способов моделирования шероховатой поверхности является ее представление в виде периодической системы инденторов, в том числе и одноуровневой, описанной в предыдущих разделах данной главы. Таким образом, можно выделить следующие два этапа решения задачи:

- задача о контакте периодической системы осесимметричных инденторов;
- использование макрохарактеристик, полученных при решении периодической задачи, для определения распределения номинального давления и номинальной области контакта.

Решение периодической контактной задачи, рассмотренной выше, позволяет получить функцию дополнительного смещения, которая используется при решении двухуровневой контактной задачи. Анализ функции дополнительного смещения, ее зависимость от параметров микрогеометрии, толщины и жесткости покрытия, был приведен в предыдущем разделе. Здесь же рассмотрим пример функции, связывающей давление с дополнительным смещением поверхности в области контакта, необходимый для иллюстрации метода ее использования (рис. 3.23).

Особенностью задачи является тот факт, что функция дополнительного смещения определяется численно, т. е. для ее использования при решении задачи (3.19) требуется аппроксимация. Другой особенностью задачи является определение номи-

нального давления в виде кусочно-постоянной функции путем решения системы линейных уравнений типа (1.26). Из этого следует, что единственно возможной является аппроксимация функции дополнительного смещения кусочно-линейной функцией:

$$w' = S_m + v_m p_n, \quad p_{m-1} \le p_n \le p_m, \quad m = 1...M . \qquad (3.22)$$

Число линейных сегментов M определяется расчетным модулем в зависимости от полученных для каждого конкретного случая результатов.

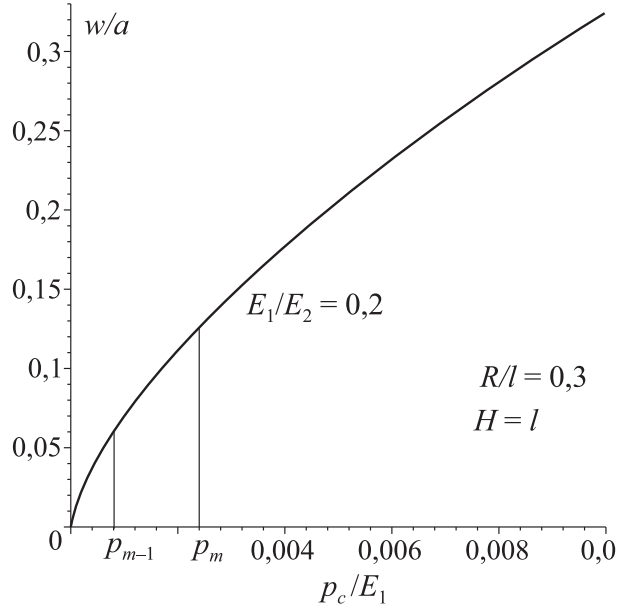


Рис. 3.28. Периодическая контактная задача: зависимость максимального вертикального смещения от номинального давления для относительно мягких (E_1/E_2 = 0,2) покрытий

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & p_1 k_1^{(i)} + p_2 k_2^{(i)} + \ldots + w'(r_i) + \ldots + p_N k_N^{(i)} = f(r_i), \\ & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ & \pi \sum_{i=1}^{N} p_i (r_i^2 - r_{i-1}^2) = P, \\ & w' = S_m + \nu_m p_i, \quad p_{m-1} \le p_i \le p_m. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Здесь S_m, ν_m — параметры линейного сегмента m. Поскольку априори неизвестно, какой из сегментов описывает функцию дополнительного смещения для неизвестного значения давления p_i, система решается методом итераций. В качестве начального приближения рассматривается решение осесимметричной задачи, полученное для индентора без учета влияния микронеровностей.

Полученные контактные давления могут быть использованы для расчета внутренних напряжений с учетом параметров контактного взаимодействия на макро- и микроуровне. Определение максимального значения номинального давления в области контакта позволяет при переходе к периодической задаче рассчитать фактические максимальные давления, реализуемые в контакте. Особый интерес представляют фактические напряжения под шероховатостями, их концентрация может привести к разрушению тонких приповерхностных слоев материала покрытий.

Распределение контактных давлений и внутренних напряжений зависит от величин модулей упругости слоя и полупространства E_1 и E_2, радиуса индентора R', нагрузки P, а также от параметров периодической задачи — радиуса микроиндентора R и периода решетки l. Наиболее интересным представляется исследование влияния размеров микроиндентеров.

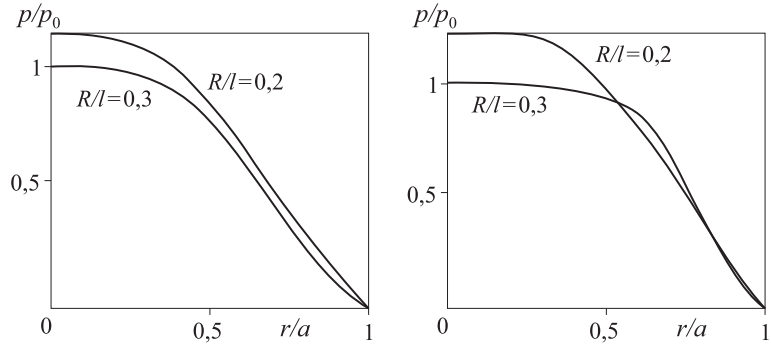


Рис. 3.29. Контактные давления $p(r)$, полученные для двух величин плотности контакта в случае относительно мягких покрытий (E_1/E_2 = 0,05, E_1 = 1,01 ГПа, H/R' = 0,01, P = 10 Н) (а) и относительно жестких покрытий (E_1/E_2 = 2,5, E_1 = 300 ГПа, H/R' = 0,01, P = 10 Н) (б)

Рис. 3.29 иллюстрирует влияние плотности контакта на микроуровне на контактное давление для относительно мягкого (рис. 3.29,а) и относительно твердого (рис. 3.29,б) упругого слоя. Уменьшение плотности контакта ведет к увеличению максимального контактного давления на макроуровне (величины p_0 и a, использованные для получения безразмерных величин, получены для случая большей плотности контакта).

Максимальные касательные напряжения определялись с учетом микро- и макрохарактеристик взаимодействия. Распределения напряжений в двухслойном полупространстве, представленные на рис. 3.30,а, б, получены под центром области контакта (x = 0, y = 0). Локализация максимальных касательных напряжений вблизи поверхности обусловлена концентрацией напряжений на микроуровне: максимумы напряжений, обусловленные действием микронеровностей, находятся очень близко к поверхности (практически на поверхности в масштабе рас-

смотренных здесь толщин покрытий). Интересно отметить, что для относительно мягких покрытий (рис. 3.30,а) влияние плотности контакта существенно вблизи поверхности, на большей глубине кривые сливаются. Для более твердых покрытий разница между напряжениями, рассчитанными для разной плотности контакта, сохраняется по всей толщине покрытия (рис. 3.30,б).

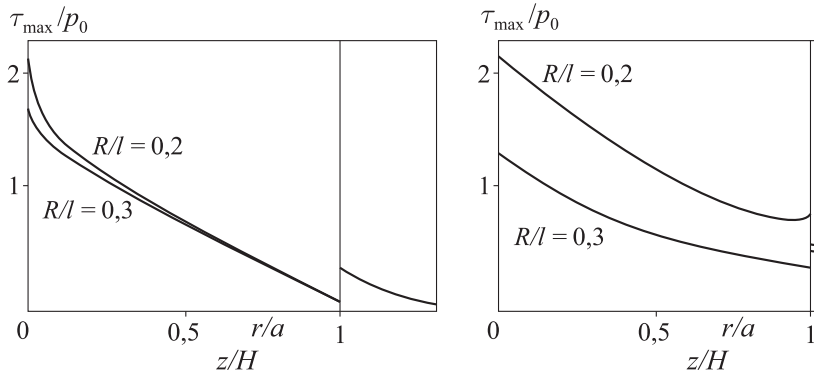


Рис. 3.30. Максимальные касательные напряжения в покрытии и подложке под центром области контакта, полученные для двух величин плотности контакта в случае относительно мягких покрытий (E_1/E_2 = 0,05, E_1 = 1,01 ГПа, H/R' = 0,01, P = 10 Н) (а) и относительно жестких покрытий (E_1/E_2 = 2,5, E_1 = 300 ГПа, H/R' = 0,01, P = 10 Н) (б)

Данные распределения напряжений существенно отличаются от распределения максимальных касательных напряжений, полученных без учета влияния микронеровностей (рис. 3.31 и 3.32,а). Параметры расчета максимальных касательных напряжений, представленных на рис. 3.31, совпадают с параметрами расчетов для относительно мягких покрытий, приведенных на рис. 3.29,а и 3.30,а.

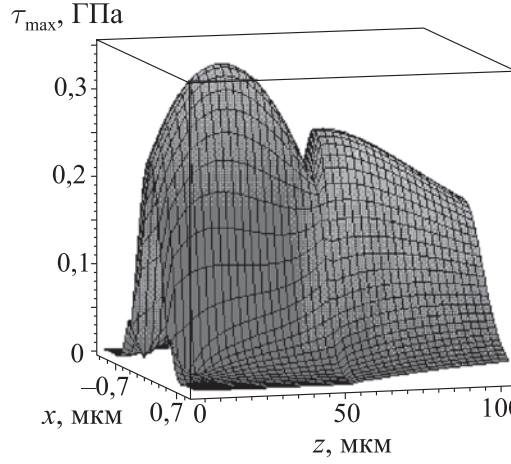
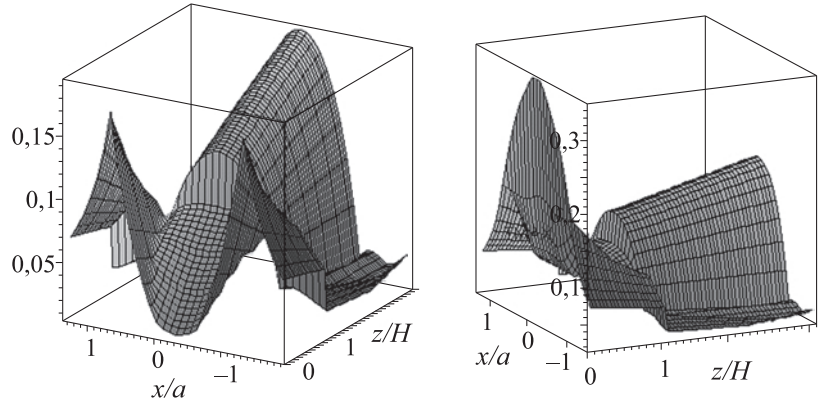


Рис. 3.31. Распределение максимальных касательных напряжений в покрытии и подложке: E_1/E_2 = 0,05 (E_1 = 1,01 ГПа), H/R' = 0,01, P = 10 Н

На рис. 3.32 проиллюстрировано влияние микронеровностей на внутренние напряжения в слое и полупространстве для случая относительно жестких покрытий. Максимальные касательные напряжения на рис. 3.32,а соответствуют случаю гладкого индентора. Напряжения, представленные на рис. 3.32,б, рассчитаны с учетом микронеровностей (плотность контакта определяется величиной R/l = 0,3). Здесь, также как и в случае относительно мягких покрытий, наблюдается значительный рост величины подповерхностных напряжений, обусловленный наличием в контакте микронеровностей. При этом напряжения на границе раздела слоя и основания и на большей глубине почти не зависят от влияния микронеровностей для данной толщины покрытия.



(а) (б)

Рис. 3.32. Максимальные касательные напряжения (τ_{max}/p_0) в слое и полупространстве: E_1/E_2 = 2,5, E_2 = 120 ГПа, H/R' = 0,01, P = 10 Н, $p_0 = 0{,}01E_1$ (а), R/l = 0,3 (б)

3.6. Задача о контактном взаимодействии гладкого индентора и шероховатого двухслойного упругого полупространства

Результаты, представленные в разделе 3.5, получены в предположении, что шероховатый индентор взаимодействует с гладким покрытием. В ряде случаев более актуальной является другая постановка — о взаимодействии шероховатого покрытия и гладкого индентора. Такого типа контактное взаимодействие может быть в подшипниках качения с керамическими шариками, а также при индентировании покрытий высокотвердыми коническими и сферическими инденторами.

В данном разделе представлена приближенная постановка, позволяющая исследовать макрохарактеристики подобного контакта. Рассмотрим двухслойное упругое полупространство, на

поверхности которого находятся микронеровности, взаимодействующее со сферическим гладким индентором (рис. 3.33). Предположим, что характерные высота микронеровностей h и расстояние между неровностями l много меньше толщины слоя и радиуса области контакта на макроуровне.

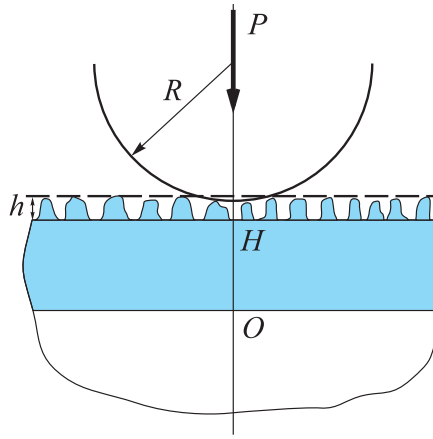


Рис. 3.33. Схема контакта гладкого индентора и упругого тела с шероховатым покрытием

Запишем граничное условие на поверхности в виде, сходном с соотношением (3.19):

$$w(x,y) = \tilde{C}\left[p(x,y)\right] + \tilde{A}\left[p(x,y)\right]. \qquad (3.24)$$

Здесь $\tilde{C}\left[p(x,y)\right]$ — приближенная функция дополнительного смещения, полученная в предположении, что при достаточно большой толщине покрытия влиянием подложки на функцию дополнительного смещения можно пренебречь. Подобное предположение косвенно подтверждается результатами исследования влияния толщины покрытия на функцию дополнительного

смещения, полученными в разделе 3.4. Функция $\tilde{A}[p(x,y)]$ описывает решение на макроуровне задачи о контакте гладкого индентора с гладким двухслойным полупространством, где толщина слоя равна H. В данном случае это решение также можно считать приближенным. Таким образом, шероховатость представлена в виде дополнительного слоя, обладающего зависящей от номинального давления нормальной податливостью.

Задача о контакте периодической системы инденторов и однородного упругого полупространства подробно исследована в [23, 24]. В частности, получена и исследована функция дополнительного смещения в задаче о контакте периодической одноуровневой системы сферических инденторов, расположенных в узлах гексагональной решетки, и упругого полупространства. Показано, что при малой плотности контакта функция дополнительного смещения может быть описана следующим соотношением:

$$\tilde{C}[p(x,y)] = \left(\frac{p(x,y)}{E^*}\right)^{2/3} \gamma_1\left(\frac{R}{l}\right)\left(1+\gamma_2\left(\frac{R}{l}\right)\frac{p(x,y)}{E^*}\right) + B\frac{p(x,y)}{E^*},$$

$$\gamma_1\left(\frac{R}{l}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{9l}{2R}\right)^{1/3}, \quad \gamma_2\left(\frac{R}{l}\right) = \frac{R}{l}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\right)^{1/3}, \tag{3.25}$$

$$B = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} - 2\sqrt{\frac{14}{\pi\sqrt{3}}}, \quad E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_0^2}{E_0}\right).$$

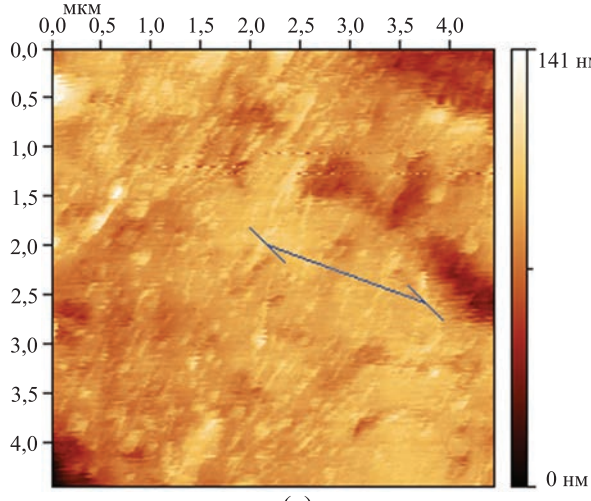
С учетом особенностей решения контактной задачи для тела с покрытием на макроуровне данная функция также должна быть аппроксимирована как кусочно-линейная. Сложность заключается в том, что при $p(x,y)=0$ производная функции равна бесконечности. В связи с этим алгоритм построения приближенной кусочно-линейной функции включает выбор начальной точ-

ки первого линейного сегмента в окрестности $p(x, y) = 0$, расчет изменения производной и определения точки смены сегментов из условия изменения значения производной на 10 % от начала до конца сегмента. Далее решается система уравнений типа (3.21).

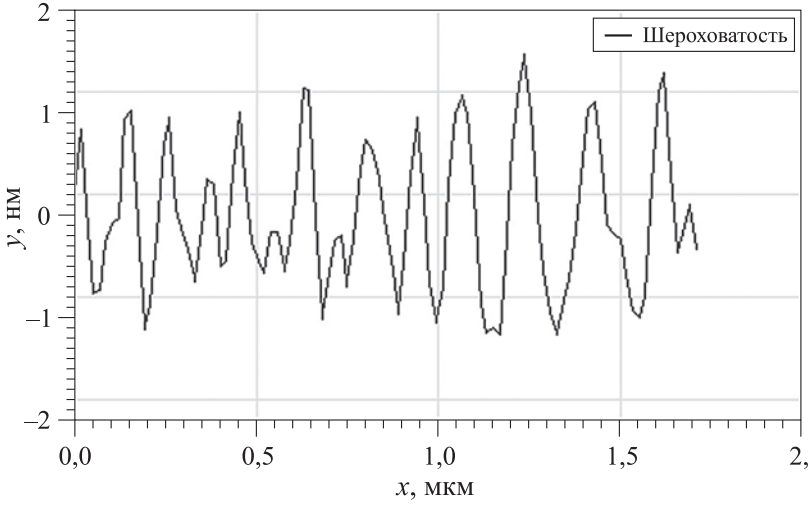
Очевидно, что данная приближенная постановка задачи позволяет исследовать только характеристики контактного взаимодействия на макроуровне. Наиболее интересным представляется анализ зависимости внедрения от нагрузки для разных параметров микрогеометрии, в рамках рассматриваемой периодической задачи это расстояние между инденторами и радиус микроиндентора.

В качестве примера рассмотрим реальную композицию керамическое покрытие-подложка, в которую вдавливается гладкий алмазный сферический индентор с радиусом закругления 1 мм. Покрытие имеет толщину 3 мкм, модуль упругости покрытия — 410 ГПа, модуль упругости стальной подложки — 210 ГПа. Проведено химическое полирование поверхности покрытия. В результате шероховатость поверхности такова, что может быть с достаточной степенью адекватности описана периодической моделью. На рис. 3.34 приведены фотография поверхности покрытия и профиль поверхности, полученные на атомно-силовом микроскопе в Лаборатории трибологии ИПМех РАН.

Среднее расстояние между неровностями составляет 0,15 мкм, разброс вычисленных радиусов отдельных неровностей достаточно велик, что может быть связано с поточечным измерением высот. Представленные выше данные послужили основой для расчетов. Варьируемыми параметрами являлись расстояние между инденторами и радиус микроиндентора.



(а)



(б)

Рис. 3.34. Фотография поверхности керамического покрытия и профиль поверхности, полученные на атомно-силовом микроскопе

На рис. 3.35 приведены зависимости внедрения от нагрузки для двух характерных значений периода гексагональной решетки l (рис. 3.35, а и б) и трех значений безразмерного радиуса микроиндентора R/l. На рисунках также для сравнения приведены результаты, полученные для гладкого покрытия (кривые *1*). Сравнение кривой *1* с кривыми *2–4* показывает, что шероховатость делает систему более податливой.

Следует отметить, что для рассмотренных входных параметров задачи влияние радиуса неровности на смещение макроиндентора меньше, чем влияние расстояния между неровностями. Так, относительный радиус единичной неровности меняется в 5 и в 4 раза при переходе от кривых *2* к кривым *3* и от кривых *3* к кривым *4* соответственно, при этом рост дополнительного смещения за счет уменьшения плотности контакта относительно невелик. В то же время увеличение в два раза расстояния между неровностями приводит к заметному увеличению внедрения при аналогичных нагрузках.

Таким образом, чем более дискретным является контакт, тем важнее принимать во внимание шероховатость поверхности покрытий. Упругое вдавливание (индентирование) является одним из методов определения модуля упругости покрытия, материал которого часто не существует в больших объемах, неучет шероховатости поверхности при интерпретации результатов экспериментов по индентированию может привести к заниженным расчетным модулям упругости покрытия.

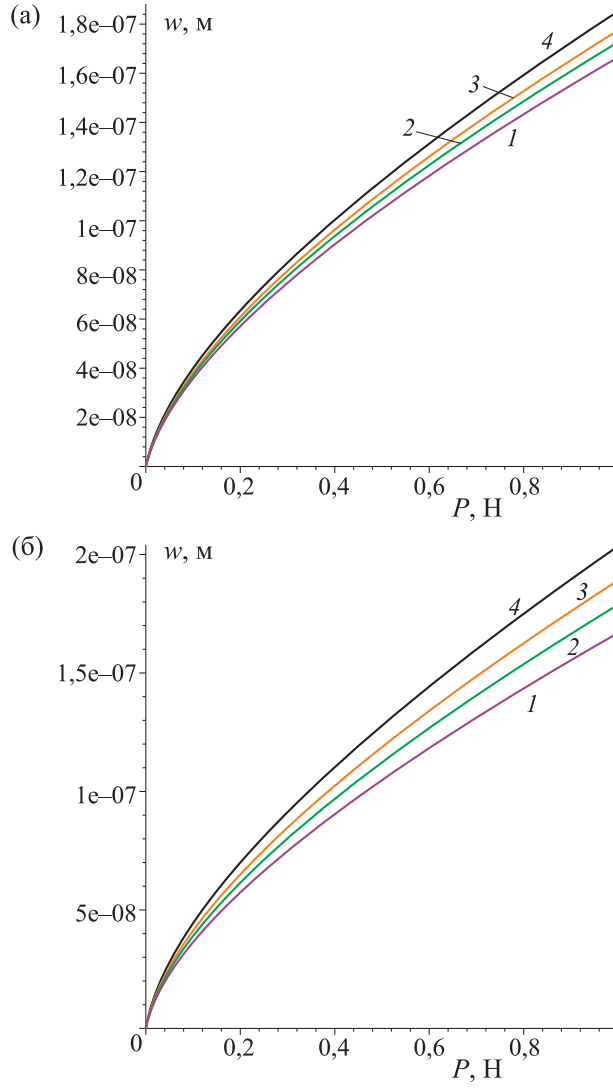


Рис. 3.35. Зависимость внедрения индентора в двухслойное упругое полупространство от нагрузки: E_1 = 410 ГПа, E_2 = 210 ГПа, E_0 = 1 141 ГПа, $\nu_1 = 0{,}25$, $\nu_1 = 0{,}3$, $\nu_1 = 0{,}2$, радиус макроиндентора — 1 мм

Глава 4

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНО-УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Наличие микрогеометрии при фрикционном контакте приводит к многоцикловому нагружению материала при скольжении; одним из результатов подобного циклического воздействия является разрушение тонких приповерхностных слоев материала по усталостному механизму.

Контактная усталость при фрикционном нагружении — тип разрушения поверхностных слоев материала, обусловленный накоплением поврежденности при циклическом нагружении. На микроуровне при контакте шероховатых поверхностей накопление поврежденности приводит к усталостному изнашиванию. На макроуровне возникают трещины, идущие с поверхности вглубь материала, либо трещина инициируется под поверхностью, в последнем случае образуются выщербины на поверхности контакта. Разрушения усталостного типа характерны для условий трения качения и скольжения с малым значением коэффициента трения.

Первые исследования в области контактной усталости при качении были вызваны потребностью подшипниковой промышленности, которая в массовом масштабе производила подшипники качения. Образование характерных ямок на контактных

поверхностях А. Пальмгрен (A. Palmgren) [172] связывал с явлением усталости при качении. В знакопеременном нагружении материала при качении он увидел полную аналогию с усталостным механизмом разрушения. Малые и весьма устойчивые по глубине размеры выщербин натолкнули его на мысль, что причиной разрушения являются максимальные касательные напряжения, возникающие под поверхностью контакта. Он полагал, что долговечность по этому виду разрушения (на основе опытов по объемной усталости) обратно пропорциональна степенной функции напряжений. Помимо подобного подхода, оправдавшего себя при исследовании подшипниковых сталей, существуют и другие модели, учитывающие, например, максимальные значения растягивающих напряжений, температурный фактор и т. д. В случае контактно-усталостного механизма разрушения покрытий (например, в подшипниках качения) выкрашивание чаще всего происходит с границы раздела покрытия с подложкой; подробный обзор работ на эту тему приведен в работе А. Эрдемира (A. Erdemir) [136], а также в работе [182] коллектива исследователей из США.

Усталостный износ является одним из видов контактной усталости, которая имеет место на микроуровне. И. В. Крагельский впервые предположил, что усталость поверхностного слоя при упругом взаимодействии близка по своей природе к многоцикловой усталости — объемному свойству материала [51].

Основными этапами моделирования контактно-усталостных повреждений являются: выбор критериев образования и развития поверхностных или подповерхностных трещин; расчет полей напряжений и температур в подповерхностном слое; расчет накопления поврежденности в нем; определение наиболее вероятного места зарождения трещины; описание развития

трещины. При моделировании используются методы и модели механики контактного взаимодействия и механики разрушения [24].

Для определения процесса накопления поврежденности в подповерхностном слое материала часто используется феноменологический подход, включающий в себя выбор модели, описывающей процесс накопления повреждений; построение алгоритма расчета полей напряжений, температур в подповерхностном слое, а также других характеристик, входящих в функцию скорости накопления повреждений; проведение расчетов с учетом параметров реальных материалов и анализ результатов. Такой подход применим к исследованию как поверхностного разрушения, так и разрушения внутри тела. При этом следует отметить, что объемные прочностные свойства материалов и свойства поверхностных слоев могут как совпадать [52], так и отличаться. Существуют разные физические подходы к моделированию поврежденности, в которых скорость накопления поврежденности рассматривается как функция напряжений в данной точке, температуры и других параметров, в зависимости от механизма разрушения, вида материала и т. д. Важным параметром является начальная поврежденность материала; в случае однородных материалов она может быть постоянной, не зависящей от координаты, в том числе и нулевой, либо монотонно меняться; в случае композитов начальная поврежденность может меняться скачкообразно, например, значительная начальная поврежденность может быть локализована на границе раздела покрытия с подложкой.

Контактно-усталостные разрушения принято связывать с растягивающими либо максимальными касательными напряжениями, их абсолютными значениями либо амплитудой напря-

жений в рамках одного цикла нагружения. Одной из возможных моделей для исследования контактной усталости является модель линейного суммирования повреждения [52, 143] (в каждый момент времени приращение поврежденности не зависит от величины накопленной поврежденности), при этом считается, что скорость накопления усталостных повреждений связана с амплитудным значением максимальных касательных напряжений в рассматриваемой точке степенной зависимостью.

В [49] приведены примеры использования экспериментальных методов определения параметров материала в подобных степенных зависимостях, описывающих накопление поврежденности, при этом использованы результаты испытания на усталость различных материалов, в том числе подшипниковых сталей.

В случае, когда накопление контактно-усталостных повреждений не является единственным механизмом разрушения поверхностных слоев материалов, но имеет место также изнашивание (адгезионное, абразивное и проч.), необходимо учитывать этот фактор при исследовании процесса накопления повреждений. В работах [106, 145] приведены результаты расчетов, анализ которых позволяет сделать вывод, что наличие поверхностного изнашивания для однородных упругих тел приводит либо к тому, что повреждения не успевают накапливаться, либо к замедлению процесса накопления повреждений. Таким образом, накопление поврежденности и изнашивание являются конкурирующими механизмами разрушения поверхностных слоев однородных материалов. В случае, когда в материале имеются дефекты — концентраторы напряжений, именно они являются зоной вероятного разрушения, и удаление поверхностных слоев

материалов вследствие изнашивания не всегда замедляет накопление поврежденности вблизи дефектов.

Помимо испытаний по контактно-усталостной долговечности в моделировании могут быть использованы результаты объемных испытаний материалов в условиях циклического растяжения-сжатия, верчения и изгиба. Существует большое количество моделей [16], позволяющих связать сложное напряженное состояние, реализуемое в условиях контактного взаимодействия, с результатами данных испытаний на малоцикловую усталость, в том числе и модели, учитывающие процессы накопления поврежденности [161, 162]. В работе [16] приведены результаты для двух моделей многоосного усталостного нагружения, которые иллюстрируют важность правильного выбора модели и необходимость ее дополнительной верификации.

Усталостное изнашивание практически всегда имеет место при фрикционном взаимодействии поверхностей. Экспериментально установлено [52], что при усталостном изнашивании частицы отделяются от поверхности в дискретные моменты времени и размер частицы сравним с диаметром единичного пятна контакта. Усталостный износ преимущественно имеет место при упругом характере контактирования. В то же время он является сопутствующим при других видах износа (например, при адгезионном и абразивном изнашивании).

Моделирование усталостного износа на микроуровне должно включать в себя решения задач механики контактного взаимодействия, при постановке которых принимается во внимание макро- и микрогеометрия взаимодействующих тел, неоднородность механических свойств поверхностных слоев, а также неоднородность температурного поля, и задач механики разру-

шения, используемых для описания отделения с поверхности частиц материала. Выбор критерия разрушения является наиболее сложным этапом моделирования, поскольку процессы, вызывающие отделение частиц, могут иметь различную природу. Тип износа зависит от материалов пары трения, условий нагружения, кинематики, наличия и природы смазки и других обстоятельств. Однако есть ряд общих свойств, которые отличают разрушение поверхности в условиях фрикционного контакта. Прежде всего, вблизи пятен фактического контакта шероховатых тел имеет место высокая концентрация напряжений, определяемая характером нагружения, микрогеометрией тел, коэффициентом трения и т. д. Фрикционное тепловыделение на пятнах фактического контакта приводит к значительному росту температуры в поверхностном слое. Наконец, вследствие миграции пятен фактического контакта при относительных перемещениях поверхностей происходит циклическое изменение полей напряжений и температур в приповерхностном слое.

В работах И. Г. Горячевой и О. Г. Чекиной проведены исследования процесса усталостного изнашивания на базе одномерной модели накопления поврежденности в поверхностном слое (модель отслаивания) [24, 39, 143], а также на базе модели, основанной на термокинетической теории прочности [80] и позволяющей воспроизвести многократное отделение частиц износа и изменение микрогеометрии поверхностей в зависимости от геометрических характеристик контактирующих тел, механических и теплофизических параметров материалов и условий нагружения [40].

Некоторые из рассмотренных выше исследований явились основой данной работы в части использования и развития пред-

ложенных авторами методов. Физическое описание процессов, происходящих при трении тел с покрытиями, содержащееся в других работах, позволило сформулировать некоторые задачи, решенные автором.

Поверхностное изнашивание наиболее часто проявляется при использовании относительно мягких покрытий; в случае относительно жестких покрытий помимо поверхностного изнашивания может иметь место нарушение связи покрытия с подложкой и его отслаивание вследствие контактно-усталостного разрушения [132]. Процесс накопления контактно-усталостной поврежденности на макроуровне может заканчиваться удалением материала в количествах, не позволяющих в дальнейшем полноценно использовать деталь с дефектной поверхностью. На микроуровне накопление контактно-усталостной поврежденности приводит к массовому отделению частиц малого размера, так называемому усталостному изнашиванию. Характерной особенностью усталостного разрушения поверхностей является то обстоятельство, что после единичного акта разрушения, произошедшего в некоторый момент времени, оставшаяся часть материала, характеризующаяся известной функцией распределения повреждений, вновь вступает в контакт, т. е. материал несет в себе следы истории процесса.

В данной главе предложены модели для исследования процесса накопления контактно-усталостных повреждений, а также кинетики усталостного разрушения двухслойного упругого полупространства и вязкоупругого слоя, скрепленного с жесткой подложкой. В последнем случае использовался критерий приведенных напряжений, обоснование использования которого приведено в разделе 4.4.

4.1. Накопление контактно-усталостных повреждений в двухслойном полупространстве при неполном сцеплении слоев (единичный контакт)

В ряде случаев при нанесении покрытия на границе раздела покрытия с подложкой образуется дефектный слой, который характеризуется наличием пор, микротрещин [74]. Подобный слой может образоваться и при нанесении покрытия из материала, аналогичного основному (например, при восстановлении изношенных поверхностей). В условиях многоциклового фрикционного нагружения покрытия (в особенности твердые) могут разрушаться вследствие накопления контактно-усталостных повреждений на границе раздела с подложкой [132]. Вероятное наличие дефектов, обусловленных технологией нанесения, может объяснить различную устойчивость к разрушению покрытий из одного материала, нанесенных при разных температурных и механических условиях [133].

В [24, 37] показано, что при контактном взаимодействии наличие дефектов вблизи поверхности одного из взаимодействующих тел влияет на внутренние и контактные напряжения. В данном разделе рассматривается влияние дефектности границы раздела покрытия с основным материалом на поле напряжений, возникающее при фрикционном нагружении для покрытий разной толщины. Приводится пример расчета накопления контактно-усталостных повреждений в материале колеса, к которому применена технологическая операция наплавки [62].

Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим задачу о нагружении двухслойного упругого полупространства распределенными нормальной $p(x, y)$ и тан-

генциальной $\mu p(x,y)$ нагрузками, действующими внутри области Ω (рис. 4.1). Слой (*1*) и полупространство (*2*) характеризуются различными упругими постоянными (E_1, ν_1 для слоя и E_2, ν_2 для полупространства). Условия на верхней границе слоя имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)}(x,y) = p(x,y), \quad \tau_{xz}^{(1)} = -\mu p(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ &\sigma_z^{(1)} = 0, \qquad \tau_{xz}^{(1)} = 0, \qquad (x,y) \notin \Omega, \\ &\tau_{yz}^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\sigma_z^{(i)}$, $\tau_{xz}^{(i)}$, $\tau_{yz}^{(i)}$ — напряжения в упругом слое (i = 1) и упругом полупространстве (i = 2). Данные условия соответствуют фрикционному нагружению при движении в направлении оси 0x.

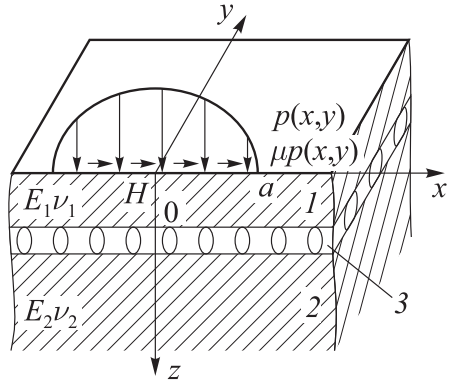


Рис. 4.1. Схема нагружения двухслойного полупространства с системой дефектов на границе раздела

Между слоем толщины H и полупространством расположена система дефектов (*3* на рис. 4.1). Было показано [24], что наличие системы дефектов между слоями можно учесть, поставив следующие граничные условия при z = 0:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)},$$

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{k_1^{(1)}}\left(w^{(1)} - w^{(2)}\right), \quad \tau_{xz}^{(1)} = \frac{1}{k_1^{(2)}}\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}\right), \quad \tau_{yz}^{(1)} = \frac{1}{k_1^{(2)}}\left(u_y^{(1)} - u_y^{(2)}\right). \tag{4.2}$$

Здесь $u_x^{(i)}, u_y^{(i)}, u_z^{(i)}$ (i = 1, 2) — упругие перемещения в слое и полупространстве. Коэффициенты $k_1^{(1)}$ и $k_1^{(2)}$ характеризуют степень поврежденности дефектного слоя. Когда их значения равны нулю, постановка сводится к задаче о нагружении двухслойного упругого полупространства с полным сцеплением на границе раздела. Метод решения подобных задач подробно изложен в главе 1. Особенностью данной постановки является наличие двух параметров на границе раздела, характеризующих не только тангенциальную податливость сцепления, но и нормальную податливость дефектного слоя. Подобная формулировка граничных условий использовалась в главе 1 (раздел 1.6) при исследовании возможности замены мягкого промежуточного слоя граничными условиями типа (3.2). Как показано в разделе 1.6, наличие дополнительного параметра, определяющего нормальную податливость дефектного слоя на границе раздела, не усложняет решение контактной задачи; точно также оно не усложняет процесс определения напряжений при фрикционном нагружении.

Предположим теперь, что распределенная нагрузка действует на двухслойное полупространство периодически, в результате нагружения и разгрузки в материале происходит накопление повреждений.

При скольжении периодической системы инденторов происходит циклическое нагружение поверхности, вызывающее неоднородное циклическое поле внутренних напряжений, что является причиной накопления в основании усталостных повреждений и разрушения поверхностных слоев материала.

Для моделирования процесса накопления контактно-усталостных повреждений в материале, подвергнутом описанному выше периодическому воздействию, необходимо провести выбор функции, связывающей скорость накопления поврежденности с напряженным состоянием упругого слоя.

При построении модели контактно-усталостного разрушения поверхности используется макроскопический подход, который состоит в построении положительной неубывающей во времени функции $Q(M, t)$, характеризующей меру повреждения материала в точке $M(x, y, z)$ и зависящей от амплитудных значений напряжений в данной точке. Для исследования накопления поврежденности используется модель линейного суммирования повреждения (в каждый момент времени приращение поврежденности не зависит от величины накопленной поврежденности). Разрушение наступает в момент времени t^*, когда эта функция достигнет заданного порогового значения.

Существуют разные физические подходы к моделированию поврежденности, в которых скорость накопления поврежденности $\partial Q(x, y, z, t)/\partial t$ рассматривается как функция напряжений в данной точке, температуры и других параметров в зависимости от механизма разрушения, вида материала и других факторов [133].

В данном исследовании предполагалось, что скорость $\partial Q(x, y, z, t)/\partial t$ накопления усталостных повреждений связана с амплитудным значением $\Delta\tau_1$ максимальных касательных напряжений в рассматриваемой точке степенной зависимостью вида

$$q(x, y, z, t) = \frac{\partial Q(x, y, z, t)}{\partial t} = c\left(\Delta\tau_{\max}(x, y, z, t)\right)^m, \qquad (4.3)$$

где c и m — некоторые постоянные, определяемые экспериментально, $\Delta\tau_{\max}(x,y,z,t)$ — разница между максимальным и минимальным значениями максимальных касательных напряжений в точке (x,y,z) за один цикл нагружения.

Разрушение наступит тогда, когда поврежденность в некоторой точке достигает критической величины. В нормированной системе отсчета это условие можно записать в виде

$$Q(x,y,z,L)=1, \tag{4.4}$$

где L — количество циклов до разрушения.

Поскольку минимальные значения максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ за цикл равны нулю, количество L циклов до разрушения можно рассчитать из соотношения:

$$\int_0^L c\tau_{\max}^m(x,y,z,n)dn + Q_0(x,y,z)=1. \tag{4.5}$$

Здесь $Q_0(x,y,z)$ — начальная поврежденность в рассматриваемой точке.

Движение нагрузки происходит вдоль оси $0x$, поэтому приращение поврежденности, происходящее за один цикл, зависит от значения следующей функции:

$$\tau_1'(y,z)=\max_{x=0..\infty}\tau_{\max}(x,y,z), \tag{4.6}$$

которая соответствует максимальному по координате x значению напряжений при любых фиксированных значениях y, z. Тогда поврежденность, накопленная за N циклов, определяется из соотношения:

$$Q(x,y,z)=Nc(\tau'_{\max}(z,y))^m+Q_0(x,y,z). \tag{4.7}$$

Примеры расчета внутренних напряжений и накопления усталостных повреждений

Ниже приведены результаты расчетов напряжений внутри упругого слоя и упругого основания. Расчеты проведены для частного случая совпадения упругих свойств слоя и полупространства. Этот случай является практически важным, поскольку соответствует условиям, возникающим в подповерхностных слоях изношенных деталей, восстановленных методом наплавки рабочих поверхностей. При подобной модификации возможно возникновение системы дефектов на границе наплавленного и основного материала, а также вблизи этой границы.

Для расчетов использовалась функция распределения контактного давления вида:

$$p(x,y) = p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \qquad (4.8)$$

соответствующая случаю контакта параболического штампа и однородного упругого основания. Известно [24], что дефектный слой влияет на контактные напряжения, но за исключением случаев малых значений h ($h/a \ll 1$) поправкой к функции $p(x, y)$ можно пренебречь. В данном случае для расчетов использовались величины $h/a > 0{,}3$, которые являются достаточно большими, чтобы можно было не учитывать влияние дефектов на распределение давлений при контакте.

Были использованы безразмерные параметры $K_i = 2k_i p^*/(a+b)$ (i = 1, 2), где p^* — среднее давление. В данном случае для модельных исследований использовалось два варианта значений, соответствующих разному уровню дефектности. Рассматривались максимальные касательные напряжения τ_1,

являющиеся важной характеристикой при оценке усталостной долговечности.

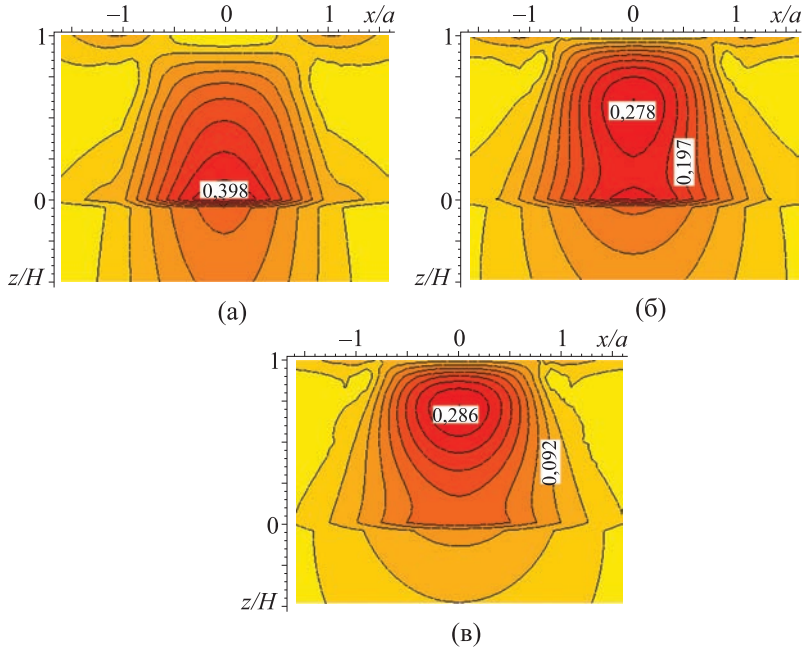


Рис. 4.2. Распределение максимальных касательных напряжений в покрытии и подложке (y = 0), трение отсутствует: H/a = 0,625 (а), H/a = 1,0 (б), H/a = 1,325 (в); K_1 = 0,6, K_2 = 0,8, a/b = 8/7

На рис. 4.2 приведены результаты расчета максимальных касательных напряжений в покрытии и в подложке в плоскости, проходящей через центр области нагружения и параллельной направлению скольжения (вдоль оси 0x). Трение отсутствует, варьируется относительная толщина покрытия. Значения напряжений являются безразмерными и отнесены к максимальному давлению p_0. Чтобы оценить влияние приложенных к поверхнос-

ти тангенциальных сил на напряжения в двухслойном основании, были проведены расчеты для ненулевой силы трения (μ = 0,3) (рис. 4.3); другие параметры расчета соответствуют использованным для результатов, представленных на рис. 4.2.

Анализ результатов на рис. 4.2 показывает, что функция $\tau_{\max}(x, y)/p_0$ имеет локальные максимумы на поверхности, на нижней границе слоя, а также может иметь локальный максимум внутри слоя. При отсутствии тангенциальных сил на поверхности главным является либо максимум на нижней границе слоя (рис. 4.2,а), либо, при больших толщинах, максимум внутри слоя (рис. 4.2,б и в). Появление тангенциальной распределенной нагрузки приводит к увеличению значений локальных максимумов, в особенности на поверхности. Максимум на поверхности может стать главным при некоторых значениях параметров, как, например, на рис. 4.3,б.

Результаты расчетов максимальных значений напряжений в зависимости от толщины слоя обобщены на рис. 4.4. При этом рассмотрены два варианта значений коэффициента K_1 и K_2; рис. 4.4,а получен при K_1 = 0,6, K_2 = 0,8, а рис. 4.4,б — при K_1 = = 0,2, K_2 = 0,27, что соответствует меньшей поврежденности дефектного слоя. Кривые *1* и *1'* построены для максимальных значений $\tau_{\max} / p_0$ на нижней границе слоя (z = 0), кривые *2* и *2'* — внутри слоя $0 < z < H$ (эти максимумы возникают для $H > H^*$, в данном случае $H^* \approx 0{,}8$), кривые *3* и *3'* — на верхней границе слоя ($z = H$). При этом кривые *1*, *2*, *3* построены для случая отсутствия касательных напряжений на поверхности, а кривые *1'*, *2'*, *3'* — при наличии сил трения (μ = 0,3). При относительно больших значениях коэффициентов K_i значения максимумов на нижней границе тонкого слоя могут достигать значений, суще-

ственно превышающих максимально возможные в однородном упругом полупространстве.

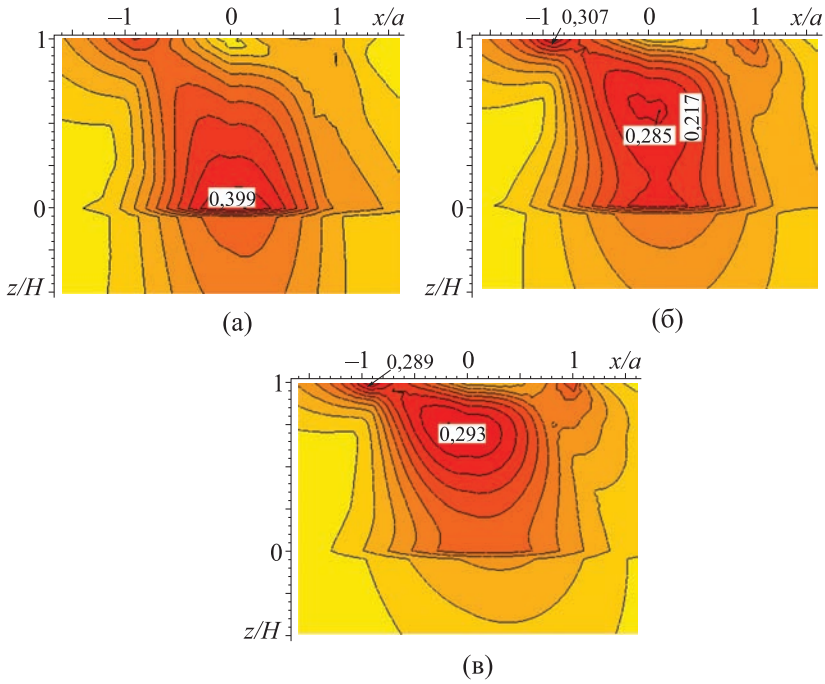


Рис. 4.3. Распределение максимальных касательных напряжений в покрытии и подложке (y = 0): μ = 0,3, H/a = 0,625 (а), H/a = 1,0 (б), H/a = 1,325 (в); K_1 = 0,6, K_2 = 0,8, a/b = 8/7

Зависимость максимальных касательных напряжений на нижней границе слоя от толщины немонотонна, т. е. существует толщина упругого слоя, при котором вероятность отслаивания является наибольшей. Дефектность промежуточной области, определяемая в модели параметрами K_1 и K_2, также влияет на распределение напряжений и на степень их концентрации на грани-

це перехода. Таким образом, анализ показал, что даже при отсутствии трения на поверхности в межслойной границе возникают значительные максимальные касательные напряжения, которые могут стать источником разрушения слоя.

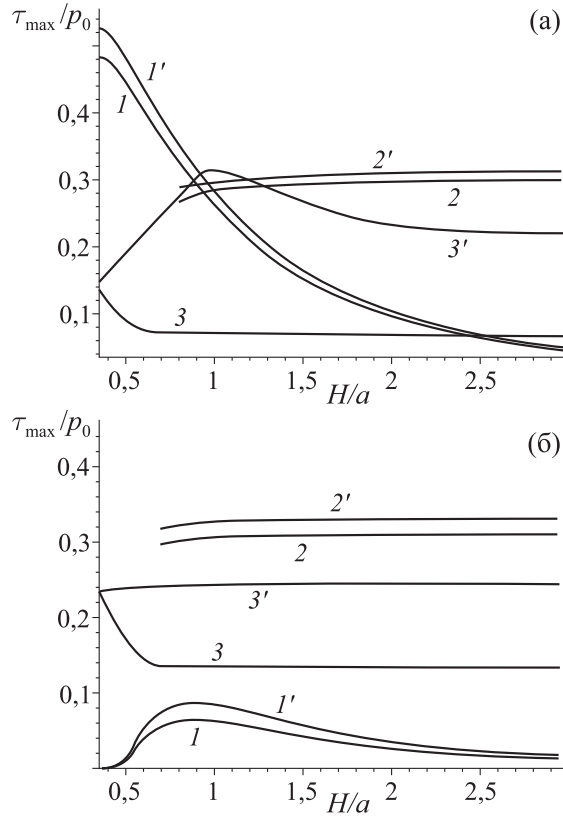


Рис. 4.4. Зависимость величин локальных максимумов максимальных касательных напряжений от толщины упругого слоя: K_1 = 0,6, K_2 = 0,8 (а), K_1 = 0,2, K_2 = 0,27 (в); на границе раздела (кривые *1, 1′*), в слое (кривые *2, 2′*), на поверхности (кривые *3, 3′*); μ = 0 (кривые *1, 2, 3*), μ = 0,3 (кривые *1′, 2′, 3′*)

Распределения максимальных касательных напряжений являются основой для определения функции накопления повреждений Q. В качестве примера рассмотрим изменение функции Q в зависимости от числа циклов нагружения для колеса, наплавленного по поверхности катания. Начальная поврежденность предполагалась равной нулю. Механические свойства материала, выраженные в значениях параметров c и m в соотношениях (4.3), (4.5), (4.7), определялись для колесной стали на основе экспериментов, в ходе которых исследовалось контактно-усталостное разрушение поверхностных слоев материала [49, 62]. Для расчетов использовались следующие значения параметров [49]: m = 9,94, $c = 0{,}6 \cdot 10^{-32}$, p_0 = 1 010 МПа, a = 8 мм, b = = 6 мм. Распределение функции $Q(y, z, N)$ в зависимости от числа циклов нагружения N представлено на рис. 4.5.

В данном случае разрушение инициируется на поверхности (рис. 4.5,б), т. е. происходит поверхностный износ и контактная поверхность смещается вглубь тела. Одновременно с износом происходит накопление усталостных повреждений внутри слоя, что приводит к акту подповерхностного разрушения (рис. 4.5,в построен с учетом смещения границы в результате поверхностного износа, h' — новая толщина слоя).

Результаты, представленные на рис. 4.6, позволяют оценить влияние величины коэффициентов K_1 и K_2 на процесс накопления поврежденности. Кривые *1* и *2* построены для оси 0z при $N = 1{,}1 \cdot 10^6$, когда поврежденность на поверхности достигает предельного значения при K_1 = 0,6, K_2 = 0,8 (кривая *1*). При K_1 = 0,2, K_2 = 0,27 поврежденность в слое меньше, особенно на поверхности и на нижней границе, в то же время ее значения несколько больше в основном материале.

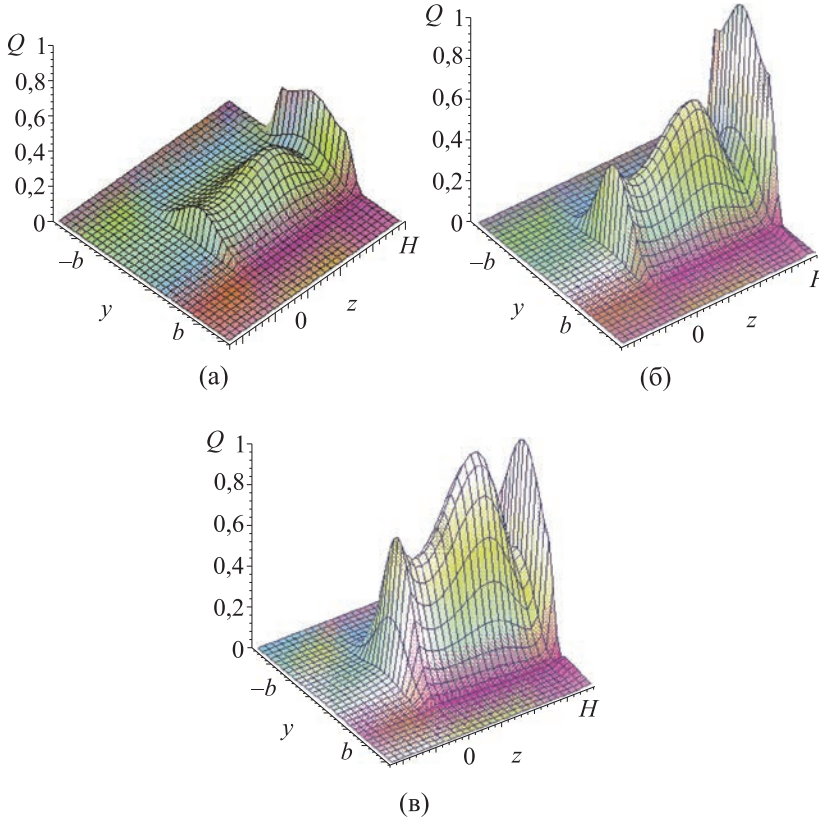


Рис. 4.5. Распределение функции $Q(y, z, N)$ в зависимости от числа циклов нагружения N: $N = 0{,}44 \cdot 10^6$ (а), $N = 1{,}1 \cdot 10^6$ (б), $N = 1{,}7 \cdot 10^6$ (в) ($K_1 = 0{,}6$, $K_2 = 0{,}8$, $h/a = 1{,}0$, $\mu = 0{,}3$)

Следует отметить, что в данном случае начальная поврежденность Q_0 полагалась равной нулю, что маловероятно при наличии дефектного слоя на глубине H. Можно предположить, что при рассматриваемом распределении напряжений и наличии начальной поврежденности разрушение произойдет на нижней границе упругого слоя.

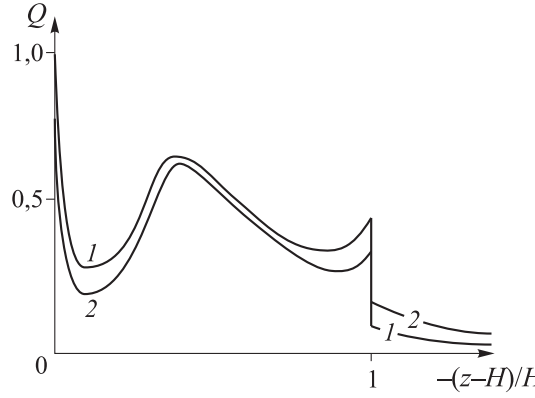


Рис. 4.6. Распределение функции поврежденности вдоль оси 0z при $N = 1{,}1 \cdot 10^6$; $K_1 = 0{,}6$, $K_2 = 0{,}8$ (кривая *1*), $K_1 = 0{,}2$, $K_2 = 0{,}27$ (кривая *2*)

4.2. Моделирование контактно-усталостного разрушения двухслойного упругого полупространства

В данном разделе предложена модель для исследования кинетики усталостного разрушения двухслойного упругого полупространства периодической системой инденторов, моделирующих микронеровности поверхности.

Постановка задачи и метод решения

Рассматривается скольжение по границе двухслойного упругого полупространства периодической системы сферических инденторов с радиусом R (рис. 4.7). Инденторы расположены в узлах гексагональной решетки с периодом l. Направление движения совпадает с направлением оси $(0x)$. Предполагается, что на систему действуют средние по периоду давление p_n и касательные напряжения τ_n, уравновешивающие тангенциальные

напряжения, действующие на площадках контакта, которые связаны между собой законом Амонтона–Кулона, т. е. $\tau_n = \mu p_n$, где μ — коэффициент трения скольжения.

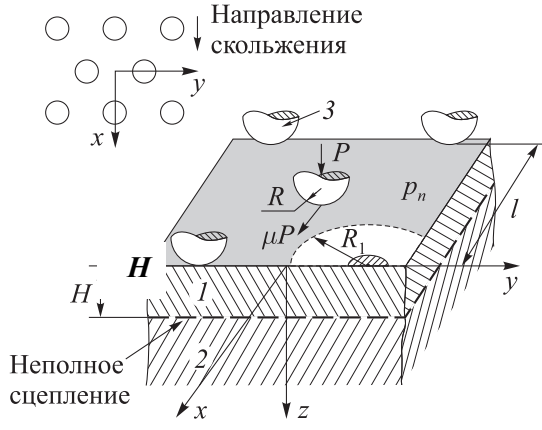


Рис. 4.7. Схема фрикционного контакта периодической системы инденторов и двухслойного упругого полупространства

При скольжении периодической системы инденторов происходит циклическое нагружение поверхности, вызывающее неоднородное циклическое поле внутренних напряжений, что является причиной накопления в материалах усталостных повреждений и разрушения поверхностных слоев.

Для моделирования разрушения верхнего слоя, подвергнутого описанному выше периодическому воздействию, предложен следующий алгоритм исследования:

- расчет контактных давлений в периодической контактной задаче для двухслойного полупространства;
- расчет внутренних напряжений с учетом сил трения для множественного контакта;

- выбор функции, связывающей скорость накопления поврежденности с напряженным состоянием упругого слоя и расчет поврежденности;
- исследование кинетики разрушения.

Расчет контактных давлений, имеющих место для отдельного пятна контакта в периодической контактной задаче, подробно описан в главе 3. Там же исследовано напряженное состояние, имеющее место при множественном нагружении упругого полупространства без учета сил трения. В данном разделе аналогичная задача рассматривается для условий фрикционного контакта.

Напряжения внутри упругого слоя находились из следующих условий на верхней границе слоя ($z = 0$), заданных в напряжениях:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)}(x,y) = p_s(x,y), \quad \tau_{xz}^{(1)} = -\mu p_s(x,y), && (x,y) \in \omega_i, \\ &\sigma_z^{(1)} = 0, \qquad\qquad \tau_{xz}^{(1)} = 0, && (x,y) \notin \omega_i, \\ &\tau_{yz}^{(1)} = 0, && -\infty < x, y < \infty. \end{aligned} \tag{4.9}$$

На нижней границе слоя ($z = 0$) граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} \\ &\tau_{xz}^{(1)} = \frac{1}{k}\left(v_x^{(1)} - v_x^{(2)}\right), \ \tau_{yz}^{(1)} = \frac{1}{k}\left(v_y^{(1)} - v_y^{(2)}\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

т. е. учитывается степень сцепления покрытия с подложкой.

Для определения внутренних напряжений использовался принцип суперпозиции. Напряжения рассчитывались внутри одного периода. Рассматривались три нагруженных пятна контакта, расположенных по углам треугольной области со сторонами,

равными периоду решетки l, среднее давление на период полагалось равным p_n, а также в постановке учитывались касательные силы, распределенные вне круга радиуса $R_2 = \sqrt{3P/\pi p_n}$, что позволяет учесть вклад в напряженное состояние остальных пятен контакта. Расчет напряжений проводился с помощью метода, основанного на двойных интегральных преобразованиях Фурье. Этот метод позволяет для некоторых граничных условий (в частности, для кусочно-постоянного распределения нагрузки на верхней границе слоя) получить аналитические функции, которые можно численно проинтегрировать и таким образом рассчитать все внутренние напряжения.

Также как и в предыдущем разделе, при построении модели контактно-усталостного разрушения поверхности используется макроскопический подход, т. е. определяется положительная неубывающая во времени функция $Q(M, t)$, характеризующая меру повреждения материала в точке $M(x, y, z)$ и зависящая от амплитудных значений напряжений в данной точке. Используется модель линейного суммирования повреждения, разрушение наступает в момент времени t^*, когда функция поврежденности достигнет заданного порогового значения.

Также полагалось, что скорость $\partial Q(x, y, z, t)/\partial t$ накопления усталостных повреждений связана с амплитудным значением $\Delta\tau_1$ максимальных касательных напряжений в произвольной точке полупространства зависимостью (4.3).

В силу периодичности рассматриваемой здесь задачи функция поврежденности не зависит от координат x и y и является функцией только координаты z и времени t, которое можно выразить через число циклов N, т. е. $Q = Q(z, N)$.

На основании (4.3) можно рассчитать поврежденность $Q(z, N)$, накопившуюся в произвольной фиксируемой точке z в течение N циклов, используя следующее соотношение:

$$Q(z,N) = \int_0^N q_n(z,n)dn + Q_0(z), \tag{4.11}$$

где $Q_0(z)$ — распределение начальной поврежденности в материале, а $q_n(z,n)$ — скорость накопления поврежденности, не зависящая от координат x, y.

Разрушение наступит тогда, когда поврежденность в некоторой точке достигает критической величины. В нормированной системе отсчета это условие можно записать в виде

$$Q(z,N^*) = 1, \tag{4.12}$$

где N^* — количество циклов до разрушения.

Расчет распределения напряжений в упругом слое позволяет определить максимальные амплитудные значения максимальных касательных напряжений вдоль оси ($0x$), которая совпадает с направлением скольжения системы инденторов. Предполагалось, что максимальные амплитудные значения имеют место в плоскости, проходящей через геометрический центр области контакта (x_c, y_c). Это предположение было проверено путем расчета напряжений при комбинации параметров, обеспечивающей относительно большую плотность контакта. Такими параметрами являются радиус индентора R, период гексагональной решетки l, среднее давление p_n, действующее на период. Таким образом, можно ввести функцию $\Delta\tilde{\tau}_1(z,n)$, которая определяет максимальные амплитудные значения максимальных касательных напряжений, не зависит от координат x, y и изменяется с изменением толщины покрытия при разрушении.

Подставляя (4.3) в (4.11) и учитывая условие (4.12), получим следующее соотношение, позволяющее рассчитать количество N^* циклов до разрушения при переменных максимальных касательных напряжениях:

$$\int_0^L c(\Delta\tilde{\tau}_1(z,n))^m dn + Q_0(z) = 1. \qquad (4.13)$$

Начальную поврежденность Q_0 будем считать равной нулю, хотя обычно зона сцепления упругого слоя с основанием предполагает некоторую начальную поврежденность, обусловленную технологией создания двухслойных тел.

Расчет функции поврежденности $Q(z, N)$ проводился путем последовательного суммирования. Так, для определения числа циклов до первого разрушения, происходящего на глубине h_1, использовалось следующее соотношение, вытекающее из (4.13):

$$\begin{aligned} &N^* = (c(\max \Delta\tilde{\tau}_1(z,n))^m)^{-1}, \quad 0 \le z \le H, \\ &Q^*(z) = N^* c(\Delta\tilde{\tau}_1(z,n))^m. \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Здесь N^* — число циклов до первого разрушения, Q^* — поврежденность, которая должна учитываться при дальнейшем исследовании процесса накопления. Акт разрушения приводит к уменьшению толщины покрытия и, следовательно, к изменению вида зависимости от координаты z амплитудных значений максимальных касательных напряжений. Число циклов до следующего разрушения N_1 определяется из соотношения:

$$\max(Q^*(z) + c(\Delta\tilde{\tau}_1(z,n))^m N_1) = 1, \quad 0 \le z \le h_1. \qquad (4.15)$$

Поскольку функция $Q^*(z)$ после отслаивания и удаления материала имеет на вновь образовавшейся поверхности значение, предельно близкое критическому, поверхностное изнаши-

вание, т. е. непрерывное уменьшение толщины упругого слоя обязательно имеет место после первого акта разрушения. Следует отметить, что функция $\Delta\tilde{\tau}_1(z,0)$ может иметь максимум и на поверхности, тогда значение h_1 определяется только шагом сетки, используемой при расчете.

Помимо поверхностного изнашивания, ввиду дискретного изменения вида функций $\Delta\tilde{\tau}_1(z,n)$ относительно n, возможны еще акты подповерхностного разрушения, т. е. дискретного изменения толщины слоя. Между этими актами также происходит изнашивание.

Результаты расчетов при постоянном значении номинальной нагрузки

Изложенный выше алгоритм был использован для расчета кинетики усталостного изнашивания двухслойного упругого полупространства периодической системой инденторов, расположенных в узлах гексагональной решетки и имеющих сферическую форму. В случае малых деформаций форма индентора описывается функцией $f(r) = r^2/(2R)$, где R — радиус индентора.

Анализ системы уравнений для определения напряженного состояния поверхностного слоя (покрытия) выявил следующие безразмерные параметры, от которых зависит решение: $\chi = E_1/E_2$ — относительная жесткость покрытия, $\lambda' = H/l$ — относительная толщина покрытия, R/l — относительный радиус индентора, p_n/E_1 — безразмерное среднее давление, $K = kp_n/l$ — безразмерная величина, характеризующая степень сцепления покрытия с подложкой, μ — коэффициент трения. Наибольший интерес для исследования кинетики усталостного разрушения поверхностного слоя при выбранной выше функции скорости

накопления повреждений представляет анализ распределения максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}(x, y, z)$. Как показано в главе 3 для контакта без сил трения, характер напряженного состояния внутри слоя и полупространства и, в частности, распределения $\tau_{\max}(x, y, z)$ существенно зависит от значения параметра χ. Покрытия разделяются на относительно жесткие ($\chi > 1$) и относительно мягкие ($\chi < 1$) в зависимости от относительных механических характеристик поверхностного слоя. Расчеты максимальных касательных напряжений, приводимые ниже, проведены для относительно жесткого покрытия.

Рис. 4.8 иллюстрирует распределение изолиний функции $\tau_1(x, y, z)$ в плоскости $y = 0$ (рис. 4.7) для разных значений относительной толщины поверхностного слоя и коэффициента трения (χ = 2, R/l = 8, p_n/E_1 = 0,001, $\nu_1 = \nu_2$ = 0,3, λ' = 0,3 (а, б), λ' = 0,15 (в), μ = 0 (а), μ = 0,4 (б, в)).

Результаты, представленные на рис. 4.8,а и 4.8,б, относятся к случаю относительно толстых покрытий, поскольку, как показали расчеты размера области контакта для указанных значений параметров, толщина покрытия в 2,05 превышает радиус области контакта. Тем не менее на границе раздела слоя и основания можно проследить скачок напряжений, обусловленный разницей механических свойств материалов. Сравнение результатов, представленных на рис. 4.8,а и 4.8,б, позволяет оценить влияние значения коэффициента трения на распределение максимальных касательных напряжений. Трение приводит к смещению области максимальных значений напряжений в сторону, противоположную направлению движения (такой же эффект был отмечен для контакта с трением сферического индентора и однородного упругого полупространства [151]). Кроме того,

величина максимума, находящегося под поверхностью, возрастает от $17{,}21p_n$ для контакта без трения до $23{,}28\ p_n$ при $\mu = 0{,}4$.

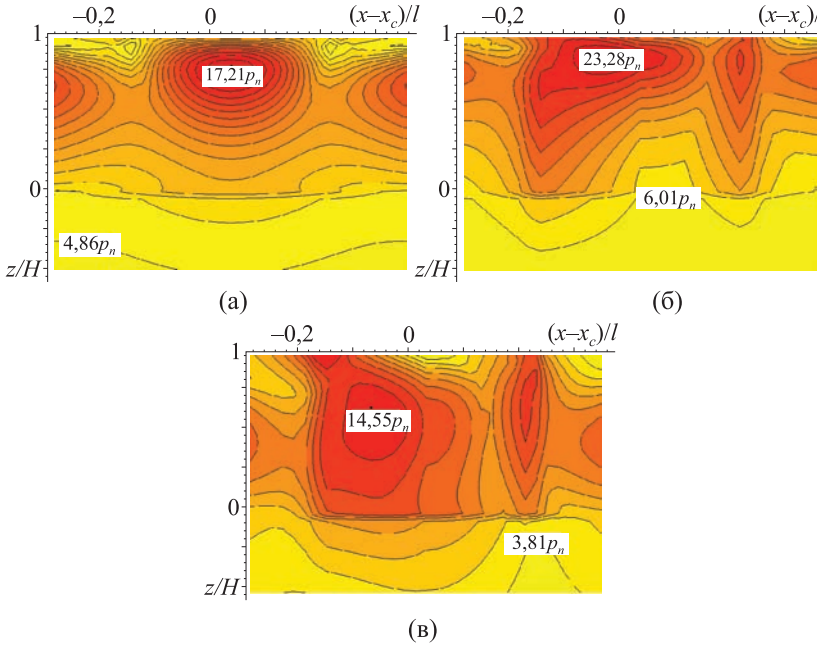


Рис. 4.8. Распределение максимальных касательных напряжений в покрытии и подложке: $K = 0$, $\chi = 2$, $R/l = 8$, $p_n/E_1 = 0{,}001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}3$ (а, б), $\lambda = 0{,}15$ (в), $\mu = 0$ (а), $\mu = 0{,}4$ (б, в)

На рис. 4.8,в представлено распределение напряжений для покрытия, толщина которого в два раза меньше. В этом случае радиус области контакта $a = 0{,}921H$. Максимальное значение напряжений составляет $14{,}55p_n$ и достигается при $z = 0{,}351H$. При этом на поверхности также имеется локальный максимум $\tau_1(x_c - 0{,}156l, 0, 0) = 13{,}02\,p_n$, но его значение меньше. Следует отметить, что для однородного полупространства при значениях

коэффициента Пуассона 0,3 (такое же значение использовалось в приведенных здесь расчетах) и коэффициента трения 0,4 максимум выходит на поверхность. В случае относительно жесткого покрытия, как было показано выше, такой эффект не является обязательным, что может быть объяснено дополнительным сжатием верхней границы упругого слоя вследствие его изгиба под действием локальной нагрузки.

Полученные распределения максимальных касательных напряжений $\tau_1(x, y, z)$ были использованы для построения функции $\Delta\tilde{\tau}_1(z, 0)$, представляющей собой разницу между наибольшим и наименьшим значениями максимальных касательных напряжений на фиксированной глубине (функция амплитудных значений $\tau_1(x, y, z)$). На рис. 4.9 представлены распределения амплитудных значений максимальных касательных напряжений, позволяющие оценить влияние сил трения, толщины упругого слоя и плотности контакта на вид функции $\Delta\tilde{\tau}_1(z, 0)$. Учет сил трения (кривые *1′*, *2′*, *3′* в сравнении с кривыми *1*, *2*, *3*) приводит к увеличению амплитудных значений максимальных касательных напряжений, в особенности вблизи поверхности. Кривые *2*, *2′* построены для случая более тонкого покрытия, чем кривые *1*, *1′*, *3*, *3′*. Уменьшение толщины ведет к уменьшению амплитудных значений, что может быть объяснено уменьшением максимальных значений контактного давления и увеличением радиуса отдельного пятна контакта. Сравнение кривых *1*, *1′* с кривыми *3*, *3′* позволяет проанализировать влияние относительной плотности контакта. Уменьшение радиуса индентора при сохранении расстояния между ними (уменьшение плотности контакта) приводит к тому, что амплитудные значения в точках, близких к поверхности, совпадают с максимальными значениями максималь-

ных касательных напряжений, т. е. эффект взаимного влияния пятен контакта становится пренебрежимо малым.

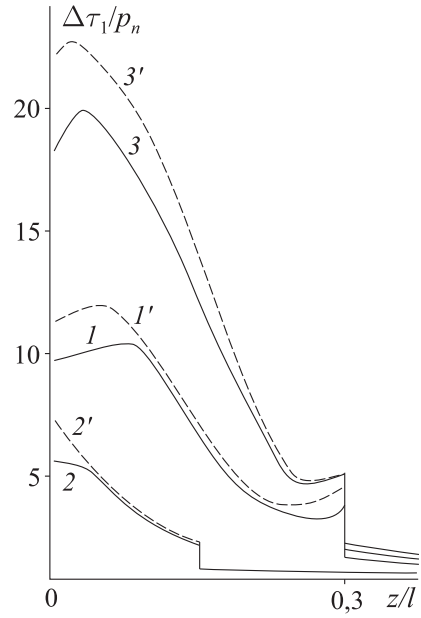


Рис. 4.9. Амплитуда максимальных касательных напряжений: $K = 0$, $\chi = 2$, $p_n/E_1 = 0{,}001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}3$ (кривые *1*, *1′*, *3*, *3′*); $\lambda = 0{,}15$ (кривые *2*, *2′*); $\mu = 0$ (кривые *1*, *2*, *3*); $\mu = 0{,}3$ (кривые *1′*, *2′*, *3′*); $R/l = 8$ (кривые *1*, *1′*, *2*, *2′*); $R/l = 2{,}5$ (кривые *3*, *3′*)

На рис. 4.10 амплитудное значение максимальных касательных напряжений на границе раздела покрытия с подложкой представлено как функция безразмерного коэффициента K, характеризующего степень сцепления покрытия с подложкой. Амплитуда максимальных касательных напряжений увеличивается с уменьшением степени сцепления покрытия с подложкой. Для больших значений коэффициента K (приближение к случаю от-

сутствия сцепления) эта функция стремится к асимптотическому значению, величина которого зависит от значения коэффициента трения и относительной толщины покрытия. Сравнение кривых *1* и *2* показывает, что амплитудное значение напряжений уменьшается при увеличении толщины слоя, таким же образом влияет уменьшение значения коэффициента трения (кривые *1* и *3*).

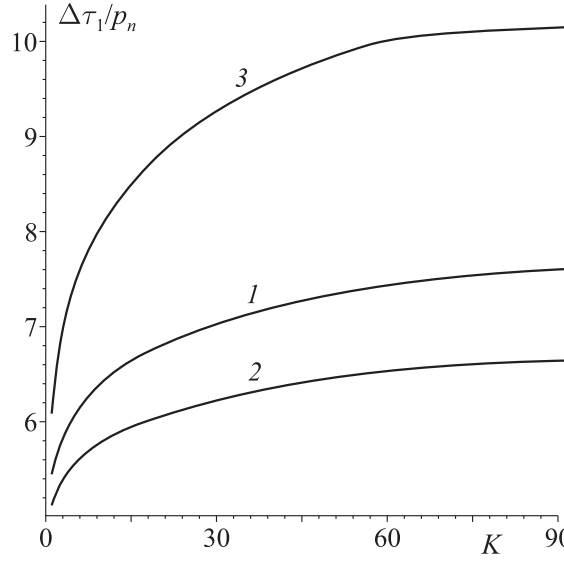


Рис. 4.10. Зависимость амплитуды максимальных касательных напряжений на границе раздела покрытия с подложкой от степени их сцепления: $\chi = 2$, $p_n/E_1 = 0{,}001$, $R/l = 8$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}15$ (кривые *1*, *3*); $\lambda = 0{,}3$ (кривая *2*); $\mu = 0$ (кривые *1*, *2*); $\mu = 0{,}3$ (кривая *3*)

Для исследования эволюции поврежденности материала покрытия был рассмотрен случай фрикционного нагружения, соответствующий кривой *1′* рис 4.9. Как следует из (3.14), поврежденность зависит от показателя степени m и множителя c.

В условиях, когда амплитудные значения максимальных касательных напряжений являются функцией расстояния от поверхности слоя, можно исключить из рассмотрения множитель c, если рассматривать временные отрезки относительно N^* — числа циклов до первого разрушения. Тогда показатель степени m становится единственным параметром, определяющим вид функции поврежденности.

Распределение поврежденности по толщине упругого слоя в разные моменты времени представлено на рис. 4.11 для случаев $m = 2$ (рис. 4.11,а) и $m = 5$ (рис. 4.11,б) при значениях параметров: $\chi = 2$, $R/l = 8$, $p_n/E_1 = 0{,}001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}3$, $\mu = 0{,}3$. Сплошные кривые соответствуют случаю полного сцепления покрытия с подложкой, штриховые — неполному сцеплению. В обоих случаях кривая *1* соответствует первому акту подповерхностного разрушения. Новая толщина слоя составляет 0,84 от первоначальной. В дальнейшем процесс разрушения проходит различным образом. В случае $m = 2$ функция поврежденности при $n > N^*$ всегда имеет два максимума — главный максимум на поверхности и постоянно увеличивающийся локальный максимум на границе раздела слоя и основания. Таким образом, имеет место поверхностное изнашивание и, при достижении функцией поврежденности критического значения на границе раздела, отслаивание покрытия.

При $m = 5$ функция поврежденности после первого акта разрушения образует локальный максимум не только на границе раздела слоя и основания, но и на некоторой глубине внутри слоя. Этот локальный максимум со временем достигает критического значения и происходит следующий акт подповерхностного разрушения. В данном случае имеют место четыре акта подповерхностного разрушения. Между актами разрушения

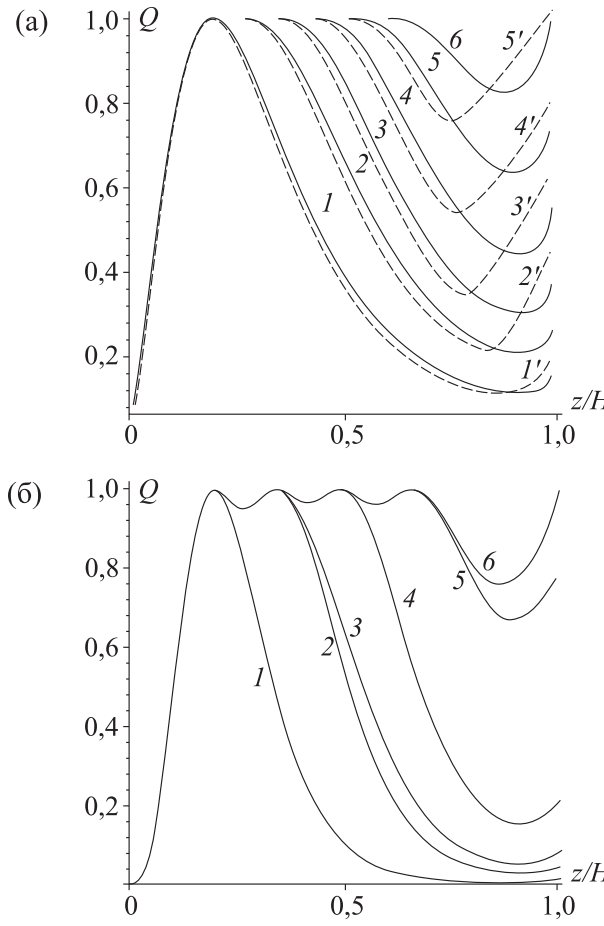


Рис. 4.11. Функция поврежденности в упругом слое; $m = 2$ (а), $m = 5$ (б); число циклов: $n/N^* = 1$ (кривые *1*, *1′*), 1,298 (кривые *2*, *2′*), 1,611 (кривые *3*, *3′*), 1,902 (кривые *4*, *4′*), 2,209 (кривые *5*, *5′*), и 2,612 (кривая *6*) на (а); $n/N^* = 1$ (кривые *1*, *1′*), 2,133 (кривые *2*, *2′*), 2,333 (кривые *3*, *3′*), 3,599 (кривые *4*, *4′*), 5,783 (кривые *5*, *5′*), и 6,067 (кривая *6*) на (б); $K = 0$ (кривые *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*), $K = 100$ (кривые *1′*, *2′*, *3′*, *4′*, *5′*); $\chi = 2$, $p_n/E_1 = 0{,}001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda' = 0{,}3$, $\mu = 0{,}3$, $R/l = 8$

происходит поверхностное изнашивание. Так же, как и в случае $m = 2$, происходит накопление поврежденности на границе раздела слоя и основания, приводящее в итоге к отслаиванию покрытия.

Результаты расчета кинетики разрушения представлены на рис. 4.12 для m = 2 (кривая *1*), m = 5 (кривые *2* и *3*, отличающиеся степенью сцепления покрытия с подложкой). Для сравнения приведена кривая *4*, построенная для однородного полупространства, материал которого обладает теми же упругими и прочностными свойствами (m = 2), что и материал покрытия. Условия нагружения совпадают с условиями для двухслойного полупространства. Функция h_n / H характеризует смещение верхней границы упругого слоя (уменьшение толщины покрытия) вследствие его разрушения. Скачкообразные изменения функции соответствуют актам подповерхностного разрушения, сопровождающегося послойным отделением материала покрытия. Между ними происходит поверхностный износ, скорость которого не является постоянной. При m = 5 временной отрезок перед каждым следующим актом разрушения увеличивается, а толщина отделяемых слоев уменьшается. Сравнение кривых *2* и *3* позволяет сделать вывод о слабом влиянии неполного сцепления покрытия с подложкой на скорость изнашивания при данных значениях параметров.

Подобные исследования влияния показателя степени на процесс накопления контактно-усталостной повреждаемости проводились ранее для однородного полупространства при отсутствии трения [37]. Сравнение результатов показало, что характер влияния показателя степени m в законе накопления повреждений на кинетику разрушения (увеличение или уменьшение количества актов подповерхностного разрушения) подобен

в обоих случаях. В то же время для случая однородного упругого полупространства при действии на систему постоянного номинального давления было установлено существование установившегося режима изнашивания, характеризуемого постоянной скоростью поверхностного износа, рассчитываемой аналитически. Акты подповерхностного износа в виде отделения слоя конечной толщины проявлялись только на начальной стадии неустановившегося изнашивания (приработки). Расчеты, проведенные для фрикционного нагружения однородного упругого полупространства (кривая *3*) также показали, что скорость изнашивания стремится к постоянному значению.

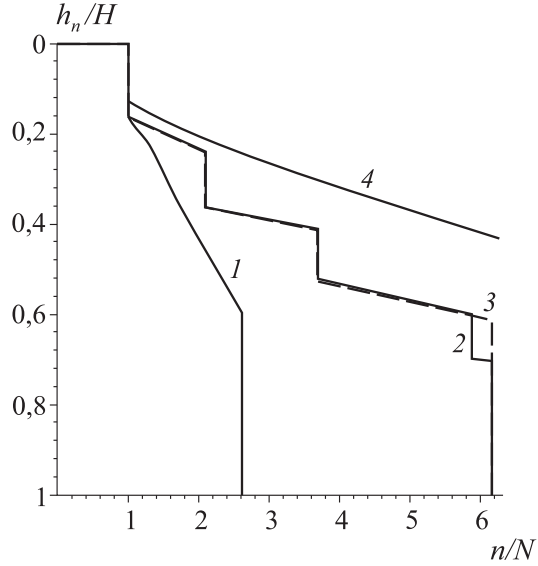


Рис. 4.12. Кинетика изменения толщины слоя; $\chi = 2$ (кривые *1*–*3*), $\chi = 1$ (кривая *4*), $p_n/E_1 = 0{,}001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}3$, $\mu = 0{,}3$, $R/l = 8$; $m = 2$ (кривые *1*, *4*), $m = 5$ (кривые *2*, *3*), $K = 0$ (кривые *1*, *2*, *4*), $K = 100$ (кривая *3*)

Таким образом, проведенное выше исследование показало существенное отличие кинетики изнашивания двухслойного полупространства от изнашивания однородного. При наличии поверхностного относительно жесткого слоя процесс разрушения, как правило, не выходит на установившийся режим, скорость поверхностного изнашивания и толщина отделяемых фрагментов уменьшаются с уменьшением толщины слоя; возрастает поврежденность границы слоя с основанием, в результате чего в определенный момент возникает отслаивание покрытия.

В данных расчетах предполагалось, что начальная поврежденность материала слоя, в том числе и на границе раздела слоя с основанием, равна нулю. Заметим, что при заданной ненулевой начальной поврежденности на границе раздела может произойти более раннее отслаивание поверхностного слоя (покрытия).

Результаты расчетов при изменяющемся номинальном давлении

Реальные шероховатые поверхности редко имеют структуру, позволяющую моделировать их одноуровневой системой инденторов. Сложное высотное распределение неровностей, волнистость поверхности, различного типа вибрации, имеющие место при фрикционном контакте, влияют на процесс накопления повреждений. Изучить это влияние можно, если рассмотреть нагружение с переменным значением номинального давления. В случае однородного упругого полупространства результаты, полученные для случайного характера распределения нагрузки в заданных диапазонах [39], позволили объяснить некоторые экспериментальные данные по изнашиванию при трении. В связи с этим для исследования процесса накопления контактно-усталостных повреждений в покрытии также был выбран слу-

чайный характер распределения нагрузки. Пример распределения номинального давления во времени представлен на рис. 4.13. Рассматривались колебания номинального давления в пределах ±80 % от среднего значения, расчеты перепада максимальных касательных напряжений проводились с шагом 0,1 от среднего номинального давления. Для суммирования поврежденности случайным образом проводилась выборка матрицы с перепадами максимальных касательных напряжений вида:

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_{\max}^{(1,1)} & 0 & & & \\ \Delta\tau_{\max}^{(2,1)} & \Delta\tau_{\max}^{(2,2)} & 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \Delta\tau_{\max}^{(NN,1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta\tau_{\max}^{(NN,NN)} \end{pmatrix}, \qquad (4.16)$$

где NN — число точек на отрезке от 0 до H (толщина покрытия), которое определяет, в каких точках рассчитывается перепад максимальных касательных напряжений и функция поврежденности. В данном случае для выбранного шага дискретного изменения давления и выбранного диапазона таких матриц было 17. Первый столбец матрицы определяет перепад максимальных касательных напряжений в покрытии начальной толщины; последний столбец, содержащий единственный элемент, получен для случая покрытия, изношенного до минимально возможной толщины H/NN.

Для исследования влияния характера изменения давления на процесс накопления поврежденности были проведены расчеты, позволяющие сравнить результаты с полученными в предыдущем разделе. На рис. 4.14 представлено распределение поврежденности по толщине упругого слоя в разные моменты времени

при случайном характере распределения нагрузки, а на рис. 4.15 приведено сравнение кинетики изменения толщины слоя при постоянном номинальном давлении и меняющемся случайным образом. Кривые *1* на рис. 4.12 и рис. 4.15 совпадают.

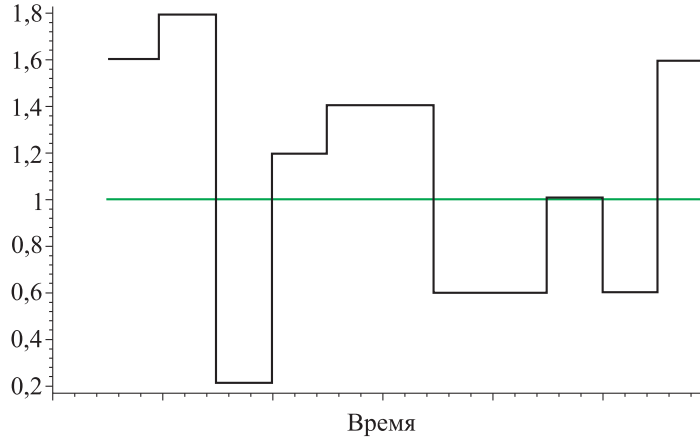


Рис. 4.13. Пример случайного процесса изменения номинального давления при фрикционном контакте

Первое, что стоит отметить при сравнении результатов: переменный характер нагружения приводит к появлению трех актов отделения слоев конечной толщины вместо одного, далее имеет место только поверхностное изнашивание. Для рассмотренного количества циклов разрушение на границе раздела не наступило, следовательно, имеет место замедление процесса накопления контактно-усталостных повреждений на границе раздела. Толщина первого отделяемого слоя конечной толщины меньше в случае случайно меняющегося номинального давления. Максимумы функции поврежденности в слое и на границе раздела слоя и полупространства являются более размытыми.

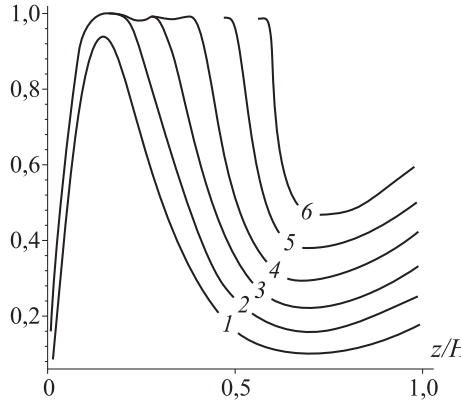


Рис. 4.14. Распределение поврежденности в покрытии (случайный характер распределения номинального давления); $m = 2$; число циклов: $n/N^* = 1$ (кривая *1*), 1,298 (кривая *2*), 1,611 (кривая *3*), 1,902 (кривая *4*), 2,209 (кривая *5*), 2,612 (кривая *6*); $K = 0$; $\chi = 2$, $p_n/E_1 = 0{,}001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}3$, $\mu = 0{,}3$, $R/l = 8$

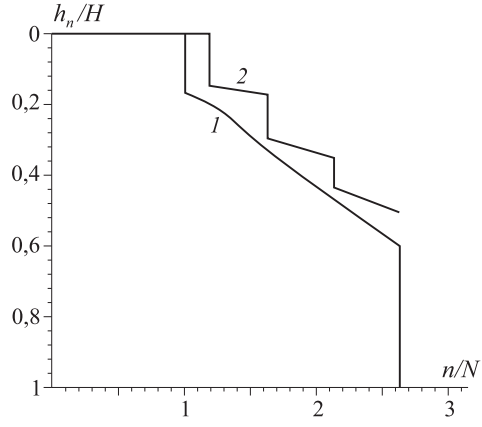


Рис. 4.15. Кинетика изменения толщины слоя; $\chi = 2$, $p_n/E_1 = 0{,}001$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $\lambda' = 0{,}3$, $\mu = 0{,}3$, $R/l = 8$; $m = 2$, $K = 0$, постоянное значение номинального давления (кривая *1*), случайный характер распределения номинального давления (кривая *2*)

4.3. Исследование контактно-усталостного изнашивания двухслойного упругого полупространства при смещении границы упругого слоя

Постановка задачи

В предыдущем разделе проводился анализ кинетики контактно-усталостного изнашивания в предположении, что этот механизм изнашивания является единственным либо доминирующим настолько, что другими процессами, происходящими на поверхности, можно пренебречь. Тем не менее при фрикционном контакте обычно имеют место и другие механизмы изнашивания (адгезионный, абразивный и др.), которые изменяют толщину покрытия и, таким образом, влияют на функцию накопления контактно-усталостных повреждений.

Рассмотрим следующие условия смещения границ упругого слоя во времени (рис. 4.16):

$$\begin{aligned} &z_1(t) = H_0 - V_1 t - \Delta H(Q), \\ &z_2 = \text{const}, \\ &H = z_1(t) - z_2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Здесь H_0 — начальная толщина покрытия, V_1 — постоянная скорость изнашивания, имеющая природу, отличную от усталостной, $\Delta H(Q)$ — зависящее от накопленной поврежденности смещение верхней границы слоя.

Анализ максимальных касательных напряжений, проведенный в главе 2 для относительно мягких покрытий, показал, что в этом случае напряжения на границе раздела покрытия с подложкой могут быть больше в материале подложки. В таком случае необходимо рассматривать процесс накопления контакт-

но-усталостных повреждений не только в покрытии, но и в подложке. В этом случае повышается количество входных параметров в задаче. Исходные данные, необходимые для расчета напряженного состояния и поврежденности, сведены в табл. 4.1.

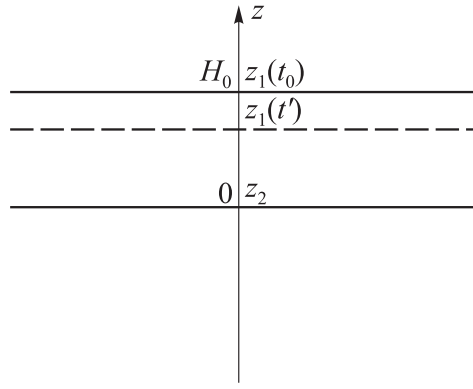


Рис. 4.16. Схема смещения границы упругого слоя

Таблица 4.1. Данные, необходимые для расчета напряженного состояния и поврежденности

Расчет напряженного состояния	Расчет поврежденности
Модули упругости покрытия и подложки	Параметры в законе накопления контактно-усталостных повреждений в покрытии и подложке
Начальная толщина покрытия	Скорость изнашивания покрытия (дополнительные, не контактно-усталостные механизмы изнашивания)
Нагрузка (среднее давление)	
Коэффициент трения	
Геометрия контакта	

Результаты расчетов

Ниже будут приведены данные, которые были использованы для расчета кинетики накопления контактно-усталостных повреждений в относительно мягком слое на поверхности стали и описаны результаты этих расчетов.

Модуль упругости подложки полагался равным $E_2 =$ $= 162$ ГПа; модуль упругости поверхностного $E_1 = 70$ ГПа. Номинальное давление $p_n = 66{,}4$ МПа. Из подборки шероховатых поверхностей, характерных для стали, была выбрана шероховатость, обеспечивающая наиболее быстрое накопление контактно-усталостных повреждений (рис. 4.17), т. е. характеризующаяся относительно большим расстоянием между неровностями и малым радиусом закругления в области контакта. Кроме того, данная шероховатость в первом приближении может моделироваться одноуровневой системой инденторов. В предыдущих разделах показано, что увеличение радиуса и уменьшение периода решетки в модели приводит к тому, что поле напряжений становится более равномерным и перепад напряжений, возникающий при скольжении, уменьшается; следовательно, уменьшается и скорость накопления повреждений в материале. Начальная толщина поверхностного слоя H_0 принималась равной 10 мкм, коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

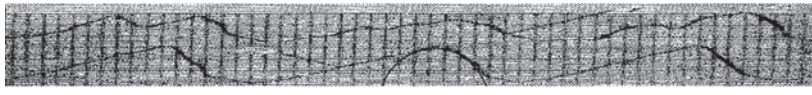


Рис. 4.17. Профили поверхности, использованные при построении модели шероховатости; радиус неровности — 17 мкм, период — 87 мкм

Скорость изнашивания, не имеющего усталостную природу, полагалась равной 0,5 мкм за $0{,}5 \cdot 10^6$ циклов нагружения, под циклом нагружения здесь следует понимать проскальзывание на расстояние, равное одному периоду решетки в модели.

Для расчета были выбраны следующие параметры в законе накопления поврежденности: для материала подложки $c = 0{,}3 \cdot 10^{-16}$, $m = 1{,}1$; для материала слоя использовались два варианта — $c = 3 \cdot 10^{-26}$, $m = 2$ и $c = 4 \cdot 10^{-31}$, $m = 2{,}5$.

Результаты расчета напряжений. На рис. 4.18 приведены результаты расчета перепада напряжений по толщине слоя и в подложке при разной толщине слоя. Значение 10 мкм соответствует положению границы раздела пленки и подложки, 0 — начальное положение поверхности контакта. При изнашивании либо усталостном разрушении слоя меняется толщина покрытия. Кривые *1–6* соответствуют толщинам 10,0, 8,5, 7,0, 5,5, 4,0, 2,5 мкм. Рост значений напряжений связан с ростом общей жесткости системы пленка-подложка при уменьшении толщины пленки. Точка максимума меняет свое положение относительно границы раздела. При этом всегда на границе раздела есть локальная концентрация напряжений.

Расчет накопления поврежденности ($c = 3 \cdot 10^{-26}$, $m = 2$). Здесь будут приведены и описаны результаты исследования процесса накопления контактно-усталостных повреждений в случае, когда скорость изнашивания, не имеющего усталостную природу, и скорость роста пленки вглубь пренебрежимо малы и не учитываются (I), во втором случае учитывается только смещение границы, связанное с износом (II).

На рис. 4.19 приведены распределения функции поврежденности по глубине на разных стадиях процесса. Функция поврежденности достигает максимально возможного значения, со-

ответствующего разрушению под поверхностью, на расстоянии 1,5 мкм (кривая *1*). Происходит резкое изменение толщины слоя. Поврежденность на новой поверхности также имеет предельное значение, поэтому с каждым новым циклом уменьшается толщина слоя, т. е. имеет место изнашивание, обусловленное накоплением контактно-усталостных повреждений. Одновременно с этим происходит накопление поврежденности в области локального максимума напряжений — на границе раздела пленки и основного материала, и когда в этой области поврежденность достигает предела, происходит отслаивание пленки. Результаты расчета обобщены на рис. 4.18, где представлена зависимость толщины пленки от числа циклов.

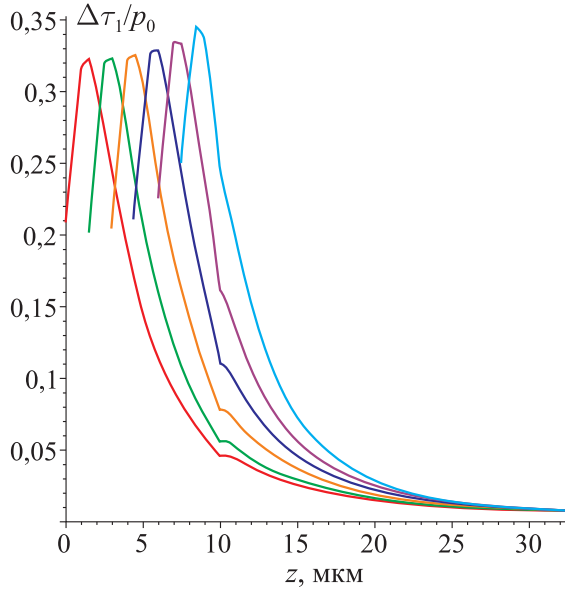


Рис. 4.18. Перепад максимальных касательных напряжений в слое и в основном материале, $p_n = 0{,}17 \cdot 10^{11}$ Па

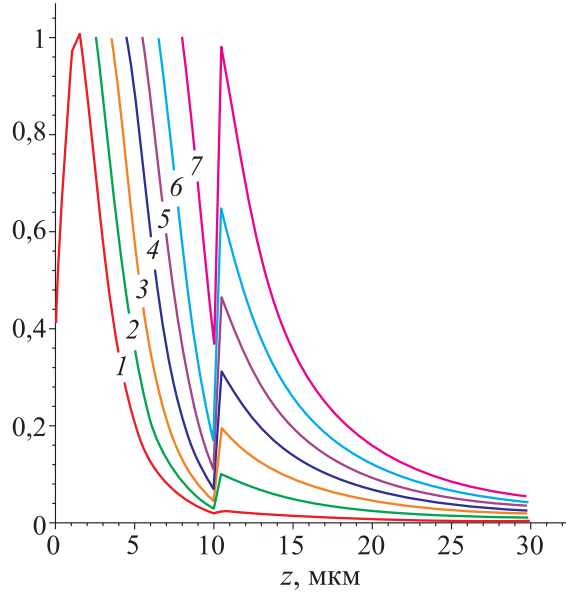


Рис. 4.19. Распределение поврежденности по глубине (I). Кривые *1–7* соответствуют количеству циклов N = 1 040 000, 1 182 896, 1 519 908, 1 814 781, 2 108 647, 2 395 835, 2 892 943 соответственно

В расчетах, результаты которых приведены на рис. 4.21 и 4.22, учитывалось смещение границы пленки из-за изнашивания, не имеющего усталостную природу. Кривые *1* и *2* получены для относительно малого числа циклов, когда функция поврежденности не достигает порогового значения, но есть смещение поверхности, обусловленное износом. В отличие от результатов, приведенных на рис. 4.19 и 4.20, нет мгновенного изменения толщины пленки на глубине 1,5 мкм, но скорость изнашивания здесь резко возрастает, а затем опять падает. Более быстрое уменьшение толщины пленки приводит к ускорению полного отслаивания пленки на границе раздела. Следует отметить, что

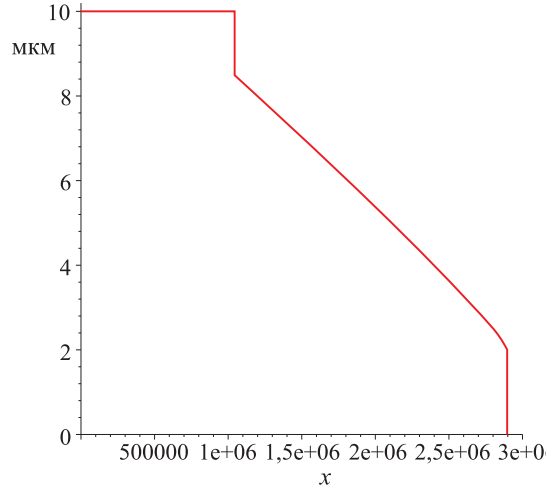


Рис. 4.20. Зависимость толщины пленки от числа циклов (I)

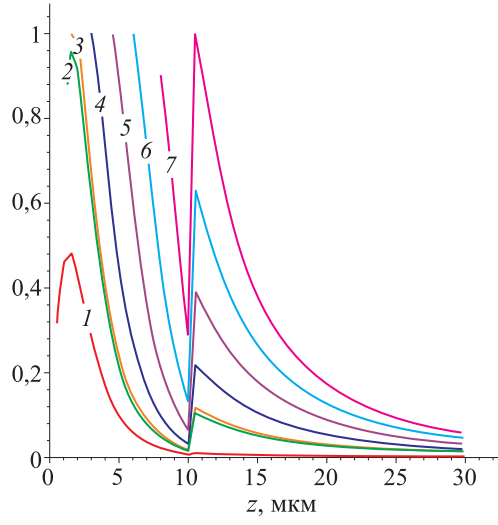


Рис. 4.21. Распределение поврежденности по глубине (II). Кривые *1–7* соответствуют количеству циклов N = 500 000, 1 000 000, 1 063 000, 1 446 000, 1 903 000, 2 340 000, 2 782 000 соответственно

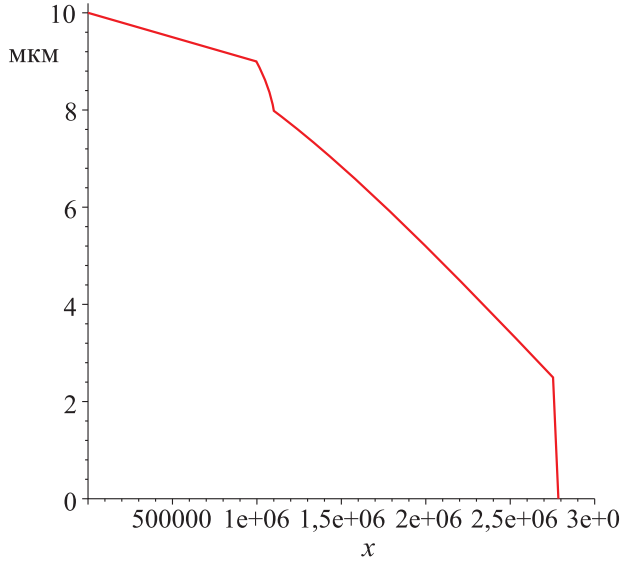


Рис. 4.22. Зависимость толщины пленки от числа циклов (II)

при повышении скорости изнашивания при определенных значениях (при рассматриваемых значениях параметров достаточно, чтобы за 10^6 циклов толщина покрытия уменьшалась на 1,5 мкм) поврежденность внутри пленки не успевает накапливаться и процессы разрушения в материале пленки не реализовываются, что не предотвращает отслаивание пленки.

Расчет накопления поврежденности ($c = 4 \cdot 10^{-31}$, $m = 2{,}5$). Чтобы понять, насколько существенно на результатах расчетов может отразиться изменение параметров в законе накопления контактно-усталостных повреждений, была проведена вторая серия расчетов, все остальные параметры и все стадии расчетов аналогичны параметрам и стадиям первой серии. Параметры изменялись так, чтобы в случае (I) момент первого отделения слоя пленки конечной толщины совпадал для обеих серий расчетов.

Тем не менее результаты двух серий отличаются. Во всех случаях во второй серии меньше скорость изнашивания, обусловленного контактной усталостью, и позже наступает момент отслаивания пленки с границы с основным материалом. Рис. 4.23, 4.25 иллюстрируют эволюцию функции накопления контактно-усталостных повреждений, рис. 4.24, 4.26 — изменение толщины пленки для случаев (I) и (II).

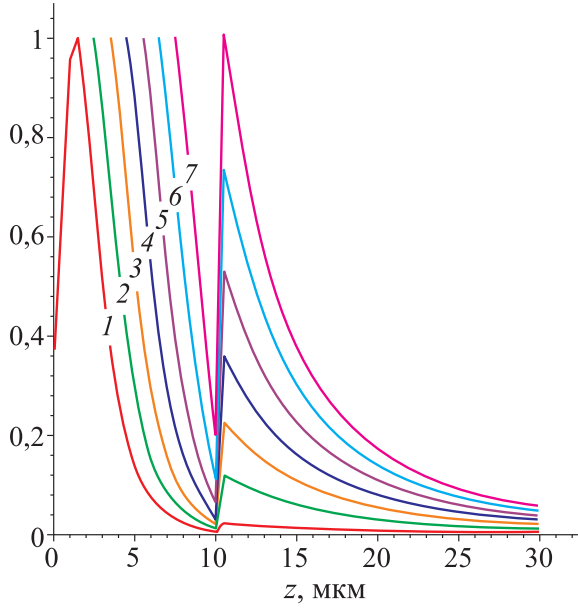


Рис. 4.23. Распределение поврежденности по глубине (I). Кривые *1–7* соответствуют количеству циклов N = 1 027 000, 1 416 491, 1 759 622, 2 101 215, 2 432 201, 2 748 491, 3 054 110 соответственно

Анализ результатов позволяет сделать следующий вывод, что в относительно мягком слое может иметь место послойное его разрушение в результате развития подповерхностной трещины,

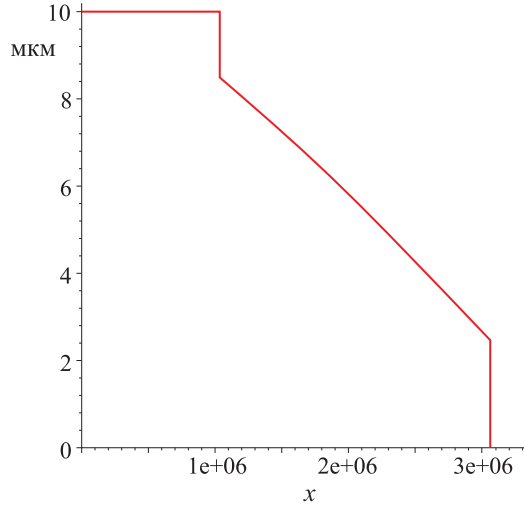


Рис. 4.24. Зависимость толщины пленки от числа циклов (I)

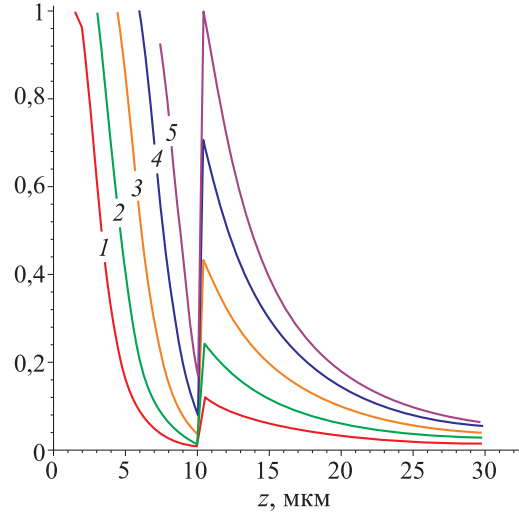


Рис. 4.25. Распределение поврежденности по глубине (II). Кривые *1–5* соответствуют количеству циклов N = 1 065 000, 1 523 000, 2 039 000, 2 531 000, 2 906 000 соответственно

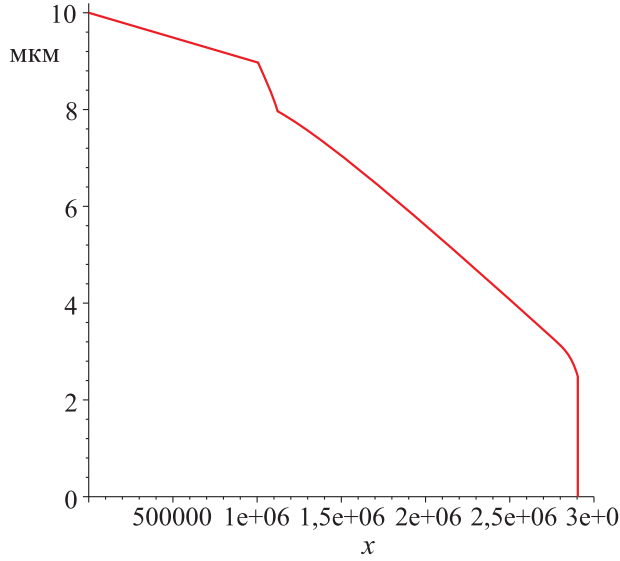


Рис. 4.26. Зависимость толщины пленки (мкм) от числа циклов (II)

поверхностный износ, имеющий усталостную природу, и отслаивание пленки по границе с основным материалом. Преобладание того или иного типа разрушения зависит от прочностных свойств материалов и амплитудных значений напряжений, которые определяются упругими свойствами, толщиной поверхностного слоя, нагрузкой, формой инденторов и плотностью их расположения.

Наличие процессов изнашивания поверхностного слоя, имеющих природу, отличную от усталостной, приводит к ускорению процесса отслаивания пленки, при этом, если эта скорость достаточно велика (при рассматриваемых значениях параметров достаточно, чтобы за 10^6 циклов толщина покрытия уменьшалась на 1,5 мкм), поврежденность внутри пленки не успевает накапливаться и процессы разрушения не реализуются.

4.4. Контактно-усталостное изнашивание вязкоупругого слоя

Модель вязкоупругого слоя уместно использовать для исследования материалов, реологическими свойствами которых нельзя пренебречь. Наиболее очевидный пример — покрытия из эластомеров.

Первые публикации, в которых было установлено, что усталостное разрушение поверхностных слоев материалов — один из основных механизмов износа полимеров, появились в 1956–1966 годах [53–55, 85, 86, 88, 130, 157]. Несмотря на то, что это наименее интенсивный вид износа, для ряда узлов трения он является основным. В [54] исследовалось скольжение сферического индентора по резиновому диску. Было обнаружено, что вначале на диске появляется небольшая дорожка трения, затем длительное время индентор скользит без значительных изменений, и, наконец, по истечении определенного количества циклов, начинается наиболее интенсивное отделение частиц износа. Таким образом, существует фаза накопления поврежденности (так называемый инкубационный период) и фаза интенсивного износа.

При экспериментальном исследовании явлений усталости при одноосном нагружении и кручении в качестве критериев для зарождения дефектов в материале чаще всего выбираются деформации, поскольку они легко могут быть определены в эксперименте через перемещения [164]. В теории сопротивления материалов среди прочих критериев наступления предельно упругого состояния рассматривалось приведенное напряжение [14], которое использовалось в критерии усталостного разрушения в экспериментах И. В. Крагельского и Е. Ф. Непомнящего [54] на

основании решения контактной задачи, полученного М. А. Савериным [50].

В работе [32] представлены результаты моделирования усталостного изнашивания эластомеров, опирающиеся на критерий приведенных напряжений, который нашел подтверждение в экспериментах, описанных в [54]. Установлено, что скорость изнашивания с поверхности после инкубационного периода плавно растет, а затем стабилизируется.

В данном разделе представлены результаты моделирования усталостного изнашивания покрытий из эластомеров. При моделировании использованы методы и подходы, разработанные при исследовании усталостного изнашивания упругих покрытий и описанные в предыдущих разделах. Как и в случае упругих слоев, учитывается непрерывное изменение контактных характеристик и напряженного состояния при уменьшении толщины покрытия вследствие износа.

Решение контактной задачи и расчет напряжений в покрытии

Рассматривается одноуровневая система сферических инденторов радиуса R, расположенных в узлах гексагональной решетки с периодом l. Среднее давление p_n, действующее на систему, не меняется.

Контактная задача решается для единичного индентора без учета взаимного влияния. Рассматривается контакт жесткого гладкого индентора и вязкоупругого слоя толщиной h; слой находится в идеальной адгезии с жестким полупространством. Индентор, нагруженный нормальной силой $Q = \sqrt{3} p_n l^2 / 2$, движется с постоянной скоростью. Система координат связана с индето-

ром в точке начального контакта индентора и слоя. В движущейся системе координат все напряжения и смещения не зависят от времени. Решение этой задачи полностью приведено в разделе 2.2, там же описана модель вязкоупругого материала.

Полученное распределение давления используется для расчета внутренних напряжений в вязкоупругом слое. Напряжения в слоистом упругом полупространстве зависят только от коэффициента Пуассона [75], который является постоянным для рассматриваемой вязкоупругой модели слоя. Поскольку рассматривается система инденторов, напряженное состояние в покрытии определяется с учетом взаимного влияния инденторов методом суперпозиции.

Метод расчета поврежденности и кинетики изнашивания

Для исследования накопления поврежденности, характеризуемой неубывающей во времени функцией $Q(x, y, z, t)$, используется модель линейного суммирования повреждений [24]. Разрушение наступает в момент времени t^*, когда эта функция достигнет заданного порогового значения.

Скорость накопления повреждений зависит от свойств материала и условий контактного взаимодействия. Выбор модели накопления поврежденности, как правило, опирается на экспериментальные данные. В случае эластомеров результаты, полученные в [54], являются классическими и могут быть использованы для построения модели накопления повреждений в поверхностных слоях эластомеров. В этой работе число циклов до разрушения связывается со значениями приведенных напряжений. В соответствии с гипотезой о линейном суммировании повреждений запишем следующее соотношение для скорости накопления поврежденности [24]:

$$q(x,y,z,t)=\frac{\partial Q(x,y,z,t)}{\partial t}=g\left(\frac{\Delta\sigma_p(x,y,z,t)}{E}\right)^m, \qquad (4.18)$$

где g и m — некоторые постоянные, определяемые экспериментально, $\Delta\sigma_p(x,y,z,t)$ — амплитудные значения приведенных напряжений в точке (x, y, z). Для расчета приведенных напряжений [14] после определения компонент тензора напряжений найдем главные напряжения $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ ($\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$), как корни уравнения:

$$\det\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma\end{vmatrix}=0. \qquad (4.19)$$

Тогда приведенное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_p=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}. \qquad (4.20)$$

При скольжении рассматриваемой системы штампов функция поврежденности не зависит от координат x и y и является функцией только координаты z и времени t, которое можно выразить через число циклов N, т. е. $Q=Q(z,N)$.

Расчет распределения напряжений в вязкоупругом покрытии позволяет определить максимальные значения приведенных напряжений вдоль оси ($0x$), которая совпадает с направлением скольжения системы инденторов. Максимальные значения амплитуды приведенных напряжений, отнесенные к модулю Юнга E, обозначим как $\tilde{\sigma}_p(z)$. Они имеют место в плоскости, проходящей через геометрический центр области контакта. Следует отметить, что в процессе изнашивания поле напряжений посто-

янно меняется, поскольку меняется толщина вязкоупругого покрытия.

На основании (4.18) можно рассчитать поврежденность $Q(z, N)$, накопившуюся в произвольной фиксируемой точке z в течение N циклов, используя следующее соотношение:

$$Q(z,N)=\int_0^N q_n(z,n)\Delta t\,dn+Q_0(z), \tag{4.21}$$

где $Q_0(z)$ — распределение начальной поврежденности в материале, Δt — время одного цикла, а $q_n(z,n)$ — скорость накопления поврежденности, не зависящая от координат x, y.

Разрушение наступит тогда, когда поврежденность в некоторой точке достигает критической величины. В нормированной системе отсчета это условие можно записать в виде:

$$Q(z,N^*)=1, \tag{4.22}$$

где N^* — количество циклов до разрушения.

Из (4.18), (4.21), (4.22) получим соотношение, позволяющее рассчитать количество циклов до разрушения при переменном поле напряжений:

$$\int_0^{N^*} g(\tilde{\sigma}_p(z))^m\Delta t\,dn+Q_0(z)=1. \tag{4.23}$$

При нулевой начальной поврежденности для определения числа циклов до первого разрушения, происходящего на глубине h, где приведенные напряжения достигают максимума, можно использовать следующее соотношение, вытекающее из (4.23):

$$\begin{aligned} &N^*=(g\Delta t(\max\tilde{\sigma}_p(z))^m)^{-1},\\ &Q^*(z)=N^*g\Delta t(\tilde{\sigma}_p(z))^m,\quad z\le -h. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь $Q^*(z)$ — поврежденность, которая должна учитываться при дальнейшем исследовании процесса накопления.

Поскольку функция $Q^*(z)$ после отслаивания и удаления материала имеет на вновь образовавшейся поверхности значение, предельно близкое критическому, поверхностное изнашивание обязательно имеет место после первого акта разрушения. Следует отметить, что функция $\tilde{\sigma}_p(z)$ может иметь максимум и на поверхности, тогда значение h определяется только шагом сетки, используемой при расчете.

Ранее было показано [103], что помимо поверхностного изнашивания возможны еще акты подповерхностного разрушения, т. е. дискретного изменения толщины слоя, вероятность такого сценария определяется, главным образом, величиной параметра m. Так, при $m = 2$ (и при меньших значениях параметра), после первого акта подповерхностного разрушения в дальнейшем происходит только процесс поверхностного изнашивания.

Анализируя результаты, полученные в [54], можно сделать вывод, что экспериментальные результаты могут быть описаны соотношением (4.18), причем параметр m для рассмотренных в [54] материалов эластомеров почти одинаков и близок к 0,3, а параметр g существенно различается.

Результаты расчетов

Для расчетов используются следующие безразмерные параметры: безразмерные координаты $(x', y') = (x, y) / R$, скорость $V' = V\omega / R$, толщина слоя $h' = h / R$, номинальное давление $p'_n = p_n / E$ и контактное давление $p'(x, y) = p(x, y) / E$. Реологические свойства материала покрытия характеризуются параметром $c = k\omega$ — отношением времени запаздывания ко времени релаксации.

Ниже будет проведен анализ влияния скорости скольжения на контактное давление, распределение приведенных напряжений в покрытии, функцию поврежденности на разных этапах процесса изнашивания и кинетику износа — уменьшения толщины слоя.

Расчеты проведены при следующих значениях параметров: $c = 5,\ \nu = 0,4,\ p_n' = 4,2 \cdot 10^{-2}$. Начальная толщина слоя $h' = 0,667$.

На рис. 4.27 представлены распределения контактного давления под единичным индентором в начальный момент времени, полученные при разных скоростях.

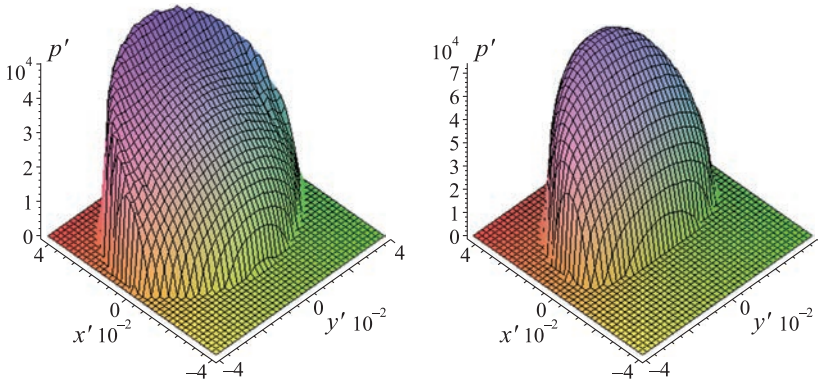


Рис. 4.27. Распределение контактного давления при V' = 0,0208 (а), V' = 0,0625 (б)

Следует отметить, что выбранные скорости обеспечивают существенное различие распределения контактного давления — максимальное значение давления почти в полтора раза выше для случая большей скорости.

Для расчета кинетики изнашивания необходимо на каждом шаге расчетов при уменьшении толщины покрытия проводить заново расчет контактных характеристик и внутренних напряжений. Для иллюстрации того, насколько существенно меняются напряжения при уменьшении толщины покрытия, на рис. 4.28 показаны распределения приведенных напряжений, отнесенных к максимальному значению контактного давления p_0, для начальной толщины покрытия и при уменьшении толщины втрое.

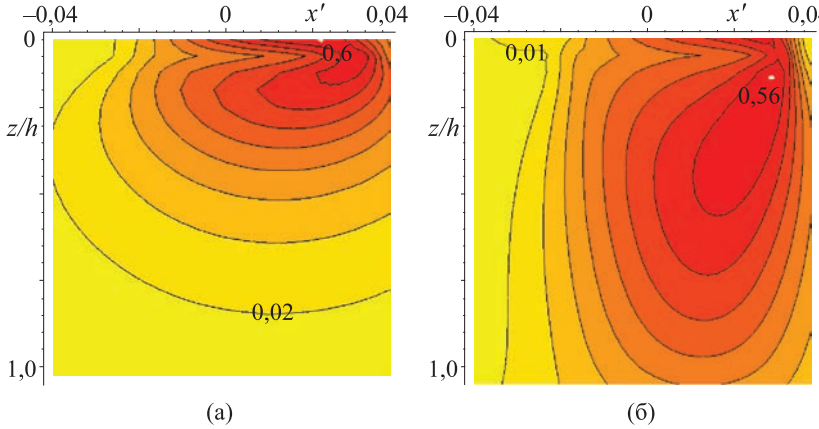


Рис. 4.28. Распределение приведенных напряжений при $V' = 0{,}0208$ $h' = 0{,}1$ (а), $h' = 0{,}33$ (б)

В нашем случае имеется два локальных максимума приведенных напряжений — поверхностный и подповерхностный. В случае более толстого покрытия поверхностный максимум является главным, в случае более тонкого — подповерхностный. Минимум напряжений в любом случае находится на поверхности, что обусловлено взаимным влиянием полей напряжений под каждым индентором. Максимальные значения контактных дав-

лений в случае более тонкого слоя в 1,2 раз больше, чем при контакте со слоем начальной толщины.

Для анализа кинетики усталостного изнашивания был проведен расчет процесса накопления контактно-усталостных повреждений. Линейная зависимость поврежденности от параметра g в (4.21) позволяет включить его в безразмерный комплекс $S' = gN\Delta tl'$, характеризующий путь трения. Величина m, как было отмечено в предыдущем разделе, для некоторых резин может быть принята равной 0,3 и использована в расчетах.

На рис. 4.29 представлены распределения функции поврежденности в разные моменты времени. Заметно, что на поздних стадиях изнашивания функция становится близкой к линейной.

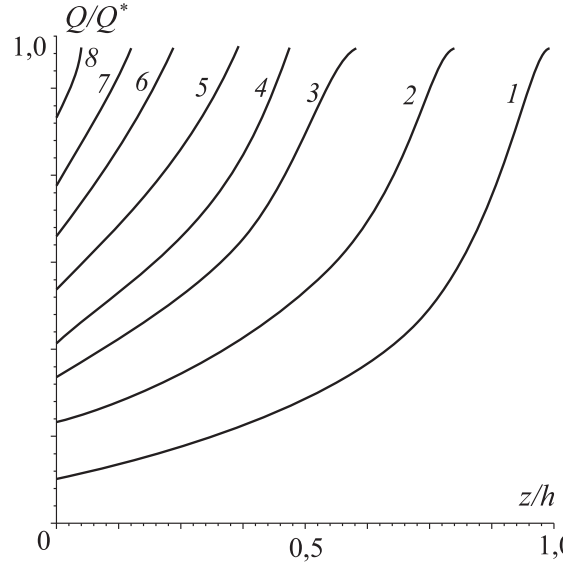


Рис. 4.29. Распределение в слое функции поврежденности на разных стадиях процесса износа: N/N^* = 1, 1,35, 1,53, 1,63, 1,73, 1,80, 1,85, 1,90 для кривых *1–8* соответственно; V' = 0,0208

Для анализа влияния скорости скольжения на скорость изнашивания были построены кривые, представленные на рис. 4.30. Для чистоты сравнения скорость изнашивания оценивалась как число циклов до разрушения, поскольку время прохождения одного периода при скольжении системы инденторов будет в этом случае сильно отличаться. Увеличение скорости скольжения приводит к уменьшению числа циклов в инкубационном периоде и к более быстрому износу. Скорость износа вскоре после инкубационного периода становится почти постоянной. Видимо, это связано с тем, что наряду с увеличением максимальных значений контактного давления в процессе износа имеет место выравнивание значений напряжений по толщине слоя.

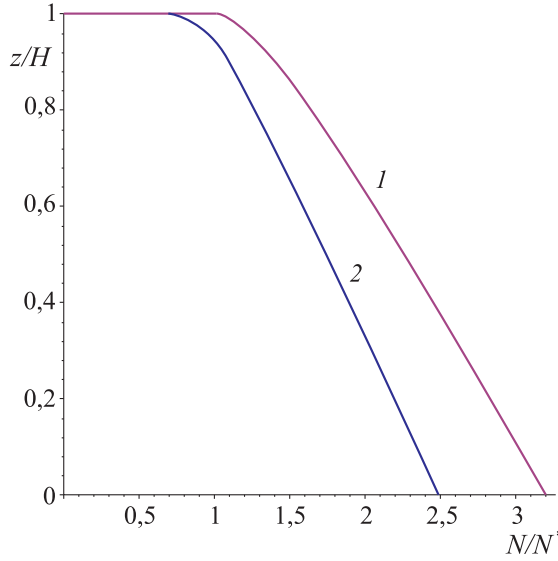


Рис. 4.30. Смещение поверхности слоя при $V' = 0{,}0208$ (кривая *1*), $V' = 0{,}0625$ (кривая *2*)

Таким образом, на основании анализа зависимости скорости изнашивания от входных параметров задачи установлен характер влияния скорости скольжения на время зарождения усталостных повреждений и интенсивность изнашивания в приработочном и установившемся режимах изнашивания. Скорость изнашивания с поверхности после инкубационного периода плавно растет, а затем стабилизируется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзикович С. М. Внедрение сферического индентора в полупространство с функционально-градиентным упругим покрытием // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418. № 2. С. 186.
2. Айзикович С. М., Александров В. М., Васильев А. С., Кренев Л. И., Трубчик И. С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. — М.: Физматлит, 2011.
3. Айзикович С. М., Васильев А. С. Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. №. 1. С. 129–137.
4. Айзикович С. М., Калайда А. В., Кренев Л. И., Соболь Б. В. Экспериментальное и численно-аналитическое исследование взаимодействия штампа с неоднородным основанием // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2010. № 5. С. 59–62.
5. Александров В. М. Контактные задачи в трибологии // Механика и научно-технический прогресс. — М., 1988. Т. 3. — С. 170–180.
6. Александров В. М., Горячева И. Г. Движение с постоянной скоростью распределенной нагрузки по вязкоупругому полупространству // Смешанные задачи механики деформи-

руемого тела: Матер. 5-й Рос. конф. с междунар. участием. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. — С. 23–25.

7. Александров В. М., Горячева И. Г., Торская Е. В. Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // Докл. РАН. 2010. Т. 430. № 4. С. 490–493.
8. Александров В. М., Клиндухов В. В. Контактные задачи для двухслойного упругого основания с неидеальной механической связью между слоями // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 84–92.
9. Александров В. М., Коваленко Е. В. О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа // ДАН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 827–831.
10. Александров В. М., Марк А. В. Квазистатическая периодическая контактная задача для вязкоупругих слоя, цилиндра и пространства с цилиндрической полостью // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. № 5. С. 162–168.
11. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с упругими покрытиями и прослойками. — М.: Наука, 1983. — 488 с.
12. Альперин И. Г. Задача о бесконечно длинной балке на упругой полуплоскости // ПММ. 1939. Т. 2. № 3.
13. Басков П. Б., Сахаров В. В., Берикашвили В. Ш., Ивкина О. В., Косов Д. Е., Мосягина И. В., Фролов Н. Н., Шарипова М. А. Оксидная наноуровневая модификация поверхности неорганических материалов. // Рос. хим. ж. 2012. Т. 56. № 1–2. С. 36–43.
14. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. — М.: Высшая школа, 1961. — 537 с.

15. Бируля А. К. Конструирование и расчет нежестких одежд автомобильных дорог. — М.: Транспорт, 1964. — 168 с.
16. Бураго Н. Г., Журавлев А. Б., Никитин И. С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22–33.
17. Галеркин Б. Г. Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле с помощью трех функций: собр. соч. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 391 с.
18. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1953. — 264 с.
19. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М., 1980.
20. Галин Л. А., Горячева И. Г. Пространственная контактная задача о движении штампа с трением // ПММ. 1982. Т. 46, № 6. С. 1016–1022.
21. Горячева И. Г. Контактные задачи в трибологии. Дисс. докт. физ.-мат. наук. 1987.
22. Горячева И. Г. Контактная задача теории упругости для системы изнашиваемых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 62–68.
23. Горячева И. Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. № 6. С. 1036–1044.
24. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. — М.: Наука, 2001. — 478 с.
25. Горячева И. Г., Губенко М. М., Маховская Ю. Ю. Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // Приклад-

ная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 1 (323). С. 99–107.

26. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Теоретические основы метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов // Машиноведение. 1979. № 6. С. 66–71.
27. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Оценка точности метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов // Машиноведение. 1980. № 1. С. 70–77.
28. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. — М., 1988.
29. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Скольжение волнистого индентора по поверхности вязкоупругого слоя при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 90–103.
30. Горячева И. Г., Мышкин Н. К., Торская Е. В., Корнев Ю. В., Гуцев Д. М., Кудрицкий В. Г. Моделирование фрикционного взаимодействия композиционных покрытий триботехнического назначения // Трение и износ. 2012. Т. 33. № 6. С. 557–565.
31. Горячева И. Г., Степанов Ф. И., Торская Е. В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 6. С. 853–863.
32. Горячева И. Г., Степанов Ф. И., Торская Е. В. Моделирование усталостного изнашивания эластомеров // Физическая мезомеханика. 2018 Т. 21. № 6. С. 66–74.
33. Горячева И. Г., Торская Е. В. Анализ напряженного состояния тел с покрытиями при множественном характере нагружения // Трение и износ. 1994. Т. 16. № 3. С. 349–357.

34. Горячева И. Г., Торская Е. В. Периодическая контактная задача для системы штампов и упругого слоя, сцепленного с упругим основанием // Трение и износ. 1995. Т. 17. № 4. С. 642–652.

35. Горячева И. Г., Торская Е. В. Напряженное состояние двухслойного упругого основания при неполном сцеплении слоев // Трение и износ. 1998. Т. 19. № 3. С. 289–296.

36. Горячева И. Г., Торская Е. В. Моделирование контактно-усталостного разрушения двухслойного основания // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 426–436.

37. Горячева И. Г., Фельдштейн И. В. Анализ влияния внутренней системы дефектов на напряженное состояние упругих тел // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 5. С. 55–61.

38. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Управление формоизменением поверхностей при изнашивании. // Трение и износ. 1989. Т. 10. № 1. С. 5–12.

39. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Модель усталостного разрушения поверхностей // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 3. С. 389–400.

40. Горячева И. Г., Чекина О. Г. Изнашивание поверхностей: от моделирования микроразрушения к анализу формоизменения // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 131–147.

41. Демкин Н. Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей / Акад. наук СССР; Ин-т машиноведения. — М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. — 111 с.

42. Демкин Н. Б. Контактирование шероховатых поверхностей. — М.: Наука, 1970. — 227 с.

43. Демкин Н. Б., Измайлов В. В. Зависимость эксплуатационных свойств фрикционного контакта от микрогеомет-

рии контактирующих поверхностей // Трение и износ. 2010. Т. 31. № 1. С. 68–77.

44. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989.
45. Иванов Н. Н., Защепин А. Н., Корсунский М. Б., Мотылев Ю. Л., Пузаков Н. А., Тулаев А. Я. Проектирование нежестких дорожных одежд. — М.: Автотрансиздат, 1955. — 250 с.
46. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций. — М.: Высш. шк., 1972. — 752 с.
47. Коллинз Д. Повреждения материалов в конструкциях: Анализ, предсказание, предотвращение. — М.: Мир, 1984. — 624 с.
48. Конструирование и расчет дорожных одежд / Под ред. Н. Н. Иванова. — М.: Транспорт, 1973. — 328 с.
49. Контактно-усталостные повреждения колес грузовых вагонов / Под ред. С. М. Захарова. — М.: Интекст, 2004. — 160 с.
50. Костецкий Б. И. Сущность явлений трения и износа в деталях машин // Трение и износ в машинах: Труды 2-й Всесоюз. конф. — М.: АН СССР, 1951. Т. 4. — С. 201–208.
51. Крагельский И. В. Трение и износ, изд. 2-е. — М.: Машиностроение, 1968. — 480 с.
52. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. — М.: Машиностроение, 1977. — 576 с.
53. Крагельский И. В., Непомнящий Е. Ф. Об усталостном механизме при упругом контакте // Механика и машиностроение. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — С. 49–56.

54. Крагельский И. В., Непомнящий Е. Ф. Теория износа высокоэластичных материалов // Пластмассы в подшипниках скольжения. — М.: Наука, 1965. — С. 49–56.

55. Крагельский И. В., Резниковский М. М., Бродский Г. И., Непомнящий Е. Ф. О фрикционно-контактной усталости высокоэластичных материалов // Каучук и резина. 1965. № 9. С. 30–34.

56. Кузнецов В. И. Упругое основание. — М.: Гос. изд-во по науке и архитектуре, 1952.

57. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. О фактическом контактном давлении // Проблемы трения и изнашивания. 1977. Вып. 12. С. 10.

58. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Влияние шероховатости на напряженное состояние тел при фрикционном взаимодействии // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 9. С. 62–68.

59. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Колебательные процессы, сопровождающие внешнее трение шероховатых тел // Проблемы трения и изнашивания. 1979. Вып. 15. С. 8.

60. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Поля нормальных напряжений под скользящим периодическим индентором, моделирующим микрошероховатость поверхности // Проблемы трения и изнашивания. 1979. Вып. 16. С. 6.

61. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Влияние сил трения на распределение энергии под синусоидальным индентором // Проблемы трения и изнашивания. 1980. Вып. 18. С. 6.

62. Ларин Т. В. и др. Цельнокатанные железнодорожные колеса. — М.: Трансжелдориздат, 1956. — 188 с.

63. Любичева А. Н. Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы неровностей

по вязкоупругому основанию винклеровского типа // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 2. С. 125–133.

64. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1935. — 674 с.
65. Макушкин А. П., Крагельский И. В. Контактирование шероховатых поверхностей через полимерный слой // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 1. С. 5–15.
66. Макушкин А. П. Исследование напряженно-деформированного состояния полимерного слоя при внедрении в него сферического индентора. // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 5. С. 823–832.
67. Макушкин А. П. Напряженно-деформированное состояние упругого слоя при внедрении в него сферического индентора. Сообщение 1. Определение контактного давления // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 3. С. 423–434.
68. Макушкин А. П. Напряженно-деформированное состояние упругого слоя при внедрении в него сферического индентора. Сообщение 2. Напряжения в полимерном слое // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 4. С. 602–608.
69. Макушкин А. П. Полимеры в узлах трения и уплотнениях при низких температурах. — М.: Машиностроение, 1993. — 228 с.
70. Марк А. В. Равномерное движение прямоугольного и параболического штампов по вязкоупругому слою // Прикладная математика и механика (ПММ). 2008. Т. 72. Вып. 4. С. 681–688.
71. Можаровский В. В., Старжинский В. Е. Прикладная механика слоистых тел из композитов. — Минск: Наука и техника, 1988. — 271 с.

72. Морозов А. В., Маховская Ю. Ю. Теоретико-экспериментальная оценка деформационной составляющей коэффициента трения // Трение и износ. 2007. Т. 28. № 4. С. 335–344.

73. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.

74. Мышкин Н. К., Григорьев А. Я., Гуцев Д. М., Игнат М., Чайнет Э., Грандваллет В., Саутел Д. Триботехнические свойства тонких гальванических и химически осажденных Ni-P покрытий на меди // Трение и износ. 2010. Т. 31. № 6. С. 544–551.

75. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. — М.: Вычислительный центр АН СССР, 1970. — 258 с.

76. Петришин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А. К решению задач для многослойных оснований // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 138–143.

77. Петришин В. И., Приварников А. К. Основные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований // Прикладная механика. 1965. Т. 1. С. 58–66.

78. Приварников А. К., Ламзюк В. Д. Упругие многослойные основания. — Днепропетровск, 1985. — 162 с.

79. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. — М.: Наука, 1976. — 496 с.

80. Регель Р. В., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. — М.: Наука, 1974. — 560 с.

81. Раппопорт Р. М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства // Труды Ленинградского политехнического института, № 5. — Л., 1948.

82. Раппопорт Р. М. К вопросу о построении решений осесимметричной и плоской задачи теории упругости многослойной среды // Изв. ВНИИГ. 1963. Т. 73. С. 193–204.

83. Рапопорт Р. М. Равновесие слоистого упругого полупространства при действии поверхностных сил (трехмерная задача) // Изв. ВНИИГ. 1966. Т. 80. С. 62–75.

84. Рапопорт Р. М. К вопросу о построении решения осесимметричной и плоской задач теории упругости для многослойной среды // Изв. ВНИИГ. 1963. Т. 73. С. 193–204.

85. Ратнер С. Б. Износ полимеров как процесс усталостного разрушения // Теория трения и износа / Под ред. С. Б. Ратнер, Г. С. Клитеник, Е. Г. Лурье. — М.: Наука, 1965. — С. 156–159.

86. Ратнер С. Б., Лурье Е. Г. Истирание полимеров как кинетический термоактивационный процесс // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. № 4. С. 909–912.

87. Рафф А. В. Модифицированные поверхностные слои и покрытия // Трибология: исследования и приложения: опыт США и стран СНГ / Под ред. В. А. Белого, К. Лудемы, Н. К. Мышкина. — М.: Машиностроение; Нью-Йорк: Аллертон пресс, 1993. — С. 190–301.

88. Резниковский М. М., Лазарева К. Н. О связи между износостойкостью и другими физико-механическими свойствами резины // Каучук и резина. 1960. № 9. С. 17.

89. Ростовцев Н. А. Храневская И. Е. Решение задачи Буссинеска для полупространства при степенной зависимости

модуля упругости от глубины // ПММ. 1971. Вып. 6. С. 122–131.

90. Сахаров В. В., Басков П. Б., Ивкина О. В., Мосягина И. В., Фролов Н. Н., Кочубеева С. Л., Шарипова М. А. Термодеструкционный химический синтез функциональных наноуровневых и микроразмерных оксидных слоев // Высокие технологии в промышленности России (материалы и устройства функциональной электроники и микрофотоники): Труды 18-й Международной научно-технической конференции. — М., 2012. — С. 296–304.

91. Себра Дж., Берт Д. Влияние волнистости и шероховатости поверхностей на распределение нормального давления при герцевских контактах. // Проблемы трения и смазки: Труды американского общества инженеров-механиков, 1988, № 2, С. 63–71.

92. Солдатенков И. А. К решению контактной задачи теории упругости для толстой полосы со сцеплением // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 877–884.

93. Солдатенков И. А. Внедрение со сцеплением гладкого штампа в упругую полуплоскость при наличии внешней пригрузки // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 10–15.

94. Солдатенков И. А. Периодическая контактная задача плоской теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.

95. Солдатенков И. А. Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание // Трение и износ. 2015. Т. 36. № 3. С. 257–262.

96. Солдатенков И. А. Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: функ-

ция влияния для упругой композиции слой – полупространство // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 496–506.

97. Степанов Ф. И., Торская Е. В. Исследование напряженного состояния при скольжении штампа по вязкоупругому полупространству // Трение и износ. 2016. Т. 37. № 2. С. 133–138.
98. Степанов Ф. И., Торская Е. В. Моделирование индентирования относительно жестких покрытий индентором произвольной формы // Трение и износ. 2019. Т. 40. № 4. С. 417–423.
99. Степанов Ф. И., Торская Е. В. Моделирование скольжения индентора по вязкоупругому слою, сцепленному с жестким основанием // Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 74–82.
100. Торская Е. В. Анализ влияния трения на напряженное состояние тел с покрытиями // Трение и износ, 2002, Т. 23, № 2. С. 130–138.
101. Торская Е. В. Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений в двухслойном полупространстве при неполном сцеплении слоев // МТТ, 2011, № 6. С. 116–124.
102. Торская Е. В. Моделирование фрикционного взаимодействия шероховатого индентора и двухслойного упругого полупространства // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15. № 2. С. 31–36.
103. Торская Е. В. Моделирование усталостного изнашивания тел с покрытиями при фрикционном нагружении // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 1. С. 68–74.
104. Торская Е. В., Курбаткин И. И., Мезрин А. М., Морозов А. В., Муравьева Т. И., Фролов Н. Н., Сахаров В. В.

Механические и трибологические свойства наноструктурированных покрытий на основе многокомпонентных оксидов. // Трение и износ. 2013. Т. 34. № 2. С. 129–137.

105. Торская Е. В., Лушников Н. А., Лушников П. А. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных дорожных одежд // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 2. С. 204–210.
106. Торская Е. В., Сошенков С. Н. Влияние износа на процесс накопления контактно-усталостной поврежденности в системе колесо-рельс // Трение и износ, 2006. Т. 27. № 4. С. 378–387.
107. Трубчик И. С., Айзикович С. М., Кренев Л. И. Смешанные задачи теории упругости для градиентных материалов / Федеральное агентство по образованию, Гос. образовательное учреждение высш. проф. образования Донской гос. технический ун-т. — Ростов н/Д, 2009.
108. Усеинов А. С. Измерение модуля Юнга сверхтвердых материалов с помощью сканирующего зондового микроскопа «НаноСкан» // Приборы и техника эксперимента. 2004. № 1. С. 134–138.
109. Усеинов А. С., Кравчук К. С., Львова Н. Измерение износостойкости сверхтонких наноструктурированных покрытий // Наноиндустрия. 2011. № 4. С. 46–50.
110. Усеинов А. С., Кравчук К. С., Русаков А. А. Комплексное исследование физико-механических и трибологических свойств сверхтонких гальванических покрытий // Мир гальваники. 2011. № 3 (19). С. 51.
111. Усеинов А. С., Радзинский С. А., Кравчук К. С., Золкина И. Ю., Андреева Т. И., Симонов-Емельянов И. Д. Физико-механические свойства силоксанового покрытия на

полимерных подложках // Пластические массы. 2012. № 4. С. 14–18.

112. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л.: Наука, 1967. — 402 с.
113. Цеев Н. А., Козелкин В. В., Гуров А. А. Материалы для узлов сухого трения, работающих в вакууме. Справочник. — М.: Машиностроение. 1991. — 192 с.
114. Шапиро Г. С. Напряженное состояние бесконечной цилиндрической оболочки и неограниченной толстой плиты // Доклады АН СССР. 1942. Т. 37. № 9. С. 288.
115. Шапиро Г. С. О распределении напряжений в неограниченном слое. // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8. № 2. С. 167–168.
116. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 270 с.
117. Aizikovich S., Krenev L., Sevostianov I., Trubchik I. and Evich L. Evaluation of the elastic properties of a functionally-graded coating from the indentation measurements // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2011. Vol. 91. № 6. P. 493–515.
118. Aldrich-Smith G. Corrosion-wear of hard coated 316L austenitic stainless steel // PhD Thesis, University of Leeds, 2000.
119. Aldrich-Smith G., Jennett N.and Housden J. Adhesion of thin coatings / The VAMAS (TWA 22-2) interlaboratory exercise // Surface and Coatings Technology. 2005. Vol. 197 (2–3). P. 336–344.
120. Almuramady N., Borodich F. M., Goryacheva I. G., Torskaya E.V. Damage of functionalized self-assembly monomolecular layers applied to silicon microgear MEMS // Tribol. Int. 2019. Vol. 129. № 1. P. 202–213.

121. Argatov I. I., Borodich F. M., Popov V. L. JKR adhesive contact for a transversely isotropic layer of finite thickness // J. Phys. D. Appl. Phys. 2015. Vol. 49. № 4, 045307.
122. Bai C., Liang A., Cao Z., Qiang L., Zhang J. Achieving a high adhesion and excellent wear resistance diamond-like carbon film coated on NBR rubber by Ar plasma pretreatment // Diamond and Related Materials. 2018. Vol. 89. P. 84–93.
123. Barthel E., Perriot A. Adhesive contact to a coated elastic substrate // J. Phys. D: Appl. Phys. 2007. Vol. 40. № 4, P. 1059–1067.
124. Borodich F. M. The Hertz-type and adhesive contact problems for depthsensing indentation // Adv. Appl. Mech. 2014. Vol. 47. P. 225–366.
125. Borodich F. M., Keer L. M. Contact problems and depth-sensing nanoindentation for frictionless and frictional boundary conditions // International Journal of Solids and Structures. Vol. 41 (9–10). 2004. P. 2479–2499.
126. Cai S., Bhushan B. Three-dimensional sliding contact analysis of multilayered solids with rough surfaces // ASME J. Tribol. 2007. Vol. 129. P. 40–59.
127. Chen W., Angel P. Impact and contact stress analyses in multilayer media // Int. J. Solids Structures. 1972. Vol. 8. P. 1257–1281.
128. Chen W. Computation of stresses and displacements in layered media // Int. J. Engin. Sci. 1971. Vol. 9. P. 775–800.
129. Choi S. T. Extended JKR theory on adhesive contact of a spherical tip onto a film on a substrate // J. Mater. Res. 2012. Vol. 27. P. 113–120.
130. Clark W. T., Lancaster J.K. Breakdown and surface of carbons during repeated sliding // Wear. 1963. Vol. 6. № 6. P. 467–482.

131. Cole S. J., Sayles R. S. A numerical model for the contact of layered elastic bodies with real rough surfaces // Trib. 1991. № 11. P. 334–340.

132. Dahm K. L., Torskaya E., Goryacheva I., Dearnley P. A. Tribological effects on subsurface interfaces // Proc. IMechE. Pt J: Engineering Tribology. 2007. Vol. 221. № 3. P. 345–353.

133. Dahm K. L., Aldrich-Smith G., Dearnley P. A. Corrosion and corrosion wear behaviour of sputter-deposited Cr-based coatings // Euromat 99, V. 11 “Surface Engineering”, H. Dimigen Ed. Wiley VCH, Weinheim, 2000. P. 65–70.

134. Dearnley P. A., Dahm K. L., Cimenoglu H. The corrosion-wear behaviour of thermally oxidized CP-Ti and Ti-6Al-4V // Wear. 2004. Vol. 256 (5). P. 469–479.

135. Demkin N. B., Izmailov V. V. Surface topography and properties of frictional contacts // Tribology International. 1991. Vol. 24. № 1. P. 21–24.

136. Erdemir A. Rolling-contact fatigue and wear resistance of hard coatings on bearing-steel substrates // Surf. Coat. Technol. 1992. Vol. 54/55. P. 482–489.

137. Fabrikant V. I. Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2009. Vol. 223. № 11. P. 2487–2499.

138. Fabrikant V. I. Contact problems for several transversely isotropic elastic layers bounded to an elastic half-space // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2011. Vol. 91. № 3. P. 214–246.

139. Gao H., Chiu C. H., and Lee, J. Elastic contact versus indentation modeling of multi-layered materials // Int. J. Solids Struct. 1992. Vol. 29 (20). P. 2471–2492.
140. Giannakopoulos A. T., Suresh T. Indentation of solids with gradients in elastic properties. Part I Point force // Int. J. Solids Struct. 1997. Vol. 34 (19). P. 2357–2392.
141. Giannakopoulos A. E., Suresh S. Indentation of solids with gradients in elastic properties. Part II Axisymmetric indenters // Int. J. Solids Struct. 1997. Vol. 34 (19). P. 2393–2428.
142. Goodman L. E. Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // ASME J. Appl. Mech. 1962. Vol. 29. P. 515–522.
143. Goryacheva I. G. Contact mechanics in tribology. — Kluwer Academic Publishers, 1998. — 346 p.
144. Goryacheva I. G. Mechanics of discrete contact // Tribology International, 2006. Vol. 39. P. 381–386.
145. Goryacheva I. G., Soshenkov S. N., Torskaya E. V. Modelling of wear and fatigue defect formation in wheel-rail contact // Vehicle System Dynamics. 2013. Vol. 51. № 6. P. 767–783.
146. Goryacheva I. G., Stepanov F. I., Torskaya E. V. Effect of friction in sliding contact of a sphere over a viscoelastic half-space. Neittaanmäki et al. (eds.) // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. In series: Computational Methods in Applied Sciences. Springer, 2016. P. 93–104.
147. Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // Wear. 2010. Vol. 286 (11–12). P. 1417–1422.

148. Goryacheva I. G., Torskaya E. V. Stress and fracture analysis in periodic contact problem for coated bodies // Fatigue and Fracture of Engng Materials and Structures. 2003. Vol. 26. № 4. P. 343–348.

149. Goryacheva I., Feldstein I. The method of investigation of defects system influence on stress-strain state of elastic bodies // ZAMM. 1996. Vol. 76. № 5. P. 173–174.

150. Greenwood J. A., Williamson J. B. R. Contact of nominally flat surfaces // Proc. Roy. Soc. 1966. P. 295–300.

151. Hamilton G. M., Goodman L. E. The stress field created by a cylinder sliding contact // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. Vol. 33. 1966. P. 371–377.

152. Holmberg K., Matthews A. Coatings tribology — properties, mechanisms, techniques and applications in surface engineering // Tribology and Interface Engineering Series. 2009. № 56. — Elsevier, Amsterdam, The Netherlands. — 560 p.

153. Holmberg K., Laukkanen A., Ghabchi A., Rombouts M., Turunen E., Waudby R., Suhonen T., Valtonen K., Sarlin E. Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings // Tribology International. 2014. Vol. 72. P. 13–30.

154. Houmid Bennani H., Takadoum J. Finite element model of elastic stresses in thin coatings submitted to applied forces // Surface and Coatings Technology. 1999. Vol. 111. P. 80–85.

155. Johnson K. L., Sridhar I. Adhesion between a spherical indenter and an elastic solid with a compliant elastic coating // J. Phys. D: Appl. Phys. 2001. Vol. 34. № 5. P. 683–689.

156. Keer L. M., Zhou K. Stress field of a cluster of inhomogeneities embedded in an infinite matrix // Proceedings of the 7-th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Sep-

tember 7–11, 2009. Instituto Superior Technico, Lisbon, Portugal.

157. Kerridge M., Lancaster J.K. The stages in a process of severe metallic wear // Proc. Roy. Soc. 1956. Vol. 236. P. 250–254.
158. Klüppel M., Heinrich G. Rubber friction on self-affine road tracks // Rubber Chem. Technol., 2000. Vol. 73(4). P. 578–606.
159. Koumi K. E., Chaise T., Nelias D. Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2015. Vol. 80. P. 1–25.
160. Kuo C. H., Keer L. M. Contact stress analyses of a layered transversely isotropic half-space // Journal of Tribology. 1992. Vol. 114. P. 253–262.
161. Lemaitre J., Chaboche J. L. Mechanics of solid materials. — Cambridge: University Press, 1994. — 556 p.
162. Marmi A. K., Habraken A. M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling of Ti_6Al_4V alloy // Proc. 9th Int. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9) Parma, Italy, 2010. P. 559–567.
163. Marmi A. K., Habraken A. M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti_6Al_4V alloy // Int. J. Fatigue. 2009. Vol. 31. № 11. P. 2031–2040.
164. Mars W. V., Fatemi A. A literature survey of fatigue analysis approaches for rubber // Int. J. Fatigue. 2002. Vol. 24. P. 949–961.
165. Mary P., Chateauminois A., Fretigny C. Contact deformation of elastic coatings in adhesive contacts with spherical probes // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. Vol. 39. P. 3665–3673.
166. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci. 1992. Vol. 150. № 1. P. 243–269.

167. McCool J. I. Comparison of models for the contact of rough surfaces // Wear. 1976. Vol. 107. P. 37–60.
168. McCool J. I. Elastic behavior of coated rough surfaces // Proc. Leeds-Lyon Symposium on Mechanics of Coatings. 1990. Vol. 16. P. 157–165.
169. Menga N., Afferrante L., Carbone G. Effect of thickness and boundary conditions on the behavior of viscoelastic layers in sliding contact with wavy profiles // J. Mech. Phys. Solids, 2016. Vol. 95. P. 517–529.
170. Nogi T., Kato T. Influence of a hard surface layer on the limit of elastic contact. Part I. Analysis using a real surface model // ASME J. Tribol., 1997. Vol. 119. P. 493–500.
171. Nyqvist J. T., Kadiric A., Sayles R. S., Ioannides E. Three-dimensional analysis of multilayered rough surface contact // WTC2013 Proceedings (in electronic format), ISBN 9788890818509.
172. Palmgren A. Sliding friction in ball bearings // Eng. J. 1919. Vol. 107. P. 289.
173. Persson B. N. J. Theory of rubber friction and contact mechanics // J. Chem. Phys. 2001. Vol. 115(8). P. 3840–3861.
174. Qiang Li, Popov V. L. Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating // Acta Mech., 2019. Vol. 230. № 7. P. 2447–2453.
175. Reidel W. Electroless nickel plating. — Redwood Press, 1991.
176. Ronkainen H., Laukkanen A., Holmberg K. Modelling of friction and structural transformations in diamong-like carbon coating // Multiscale modelling and design for engineering application / Tarja Laitinen & Kim Wallin (eds.). VTT Technology 77. VTT. Espoo; Espoo, 2013. P. 47–62.

177. Sainsot Ph., Leroy J. M., Villechase B. Effect of surface coatings in a rough normally loaded contact // Mechanics of Coatings (Tribology Series 17). 1990. P. 151–156.
178. Sergici A. O., Adams G. G., Muftu S. Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // J. Mech. Phys. Solids. 2006. Vol. 54. P. 1843–1861.
179. Shull K. R., Ahn D., Chen W., Flanigan C. M., Crosby A. J. Axisymmetric adhesion tests of soft materials // Macromol. Chem. Phys., 1998. Vol. 199. P. 489–511.
180. Shull K. R. Contact mechanics and the adhesion of soft solids // Mater. Sci. Eng. Rep., 2002. Vol. 36. № 1. P. 1–45.
181. Stan G., Adams G. G. Adhesive contact between a rigid spherical indenter and an elastic multi-layer coated substrate // Int. J. Solids Struct., 2016. V. 87. P. 1–10.
182. Thom R., Moore L., Sproul W.D., Chang T. P. Rolling contact fatigue tests of reactively sputtered nitride coatings of Ti, Zr, Hf, Mo, Ti–Al, Ti–Zr, Ti–Al–V on 440C stainless steel substrates // Surf. Coatings Technol. 1993. Vol. 62. P. 423–427.
183. Torskaya E. V., Goryacheva I. G. The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid// Wear. 2003. Vol. 254, № 5–6. P. 538–545.
184. Torskaya E. V., Stepanov F. I., Tsukanov I. Y., Shkalei I. V. Sliding contact of coated viscoelastic solids: model and experiment // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1474. P. 012033.
185. Zhou K., Keer L. M., Wang Q. J., Ai X. L., Sawamiphakdi K., Glaws P., Paire M., Che F. X. Interaction of multiple inhomogeneous inclusions beneath a surface // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2012. Vol. 217. P. 25–33.

Научное издание

Торская Елена Владимировна

Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями

Дизайн обложки: А. А. Гурьянова
Технический редактор: А. В. Бакиев
Корректор А. В. Бекмачева

Подписано в печать 25.12.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,21. Уч.-изд. л. 18,34.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная № 1. Заказ № 20-92.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95

Отпечатано в цифровой типографии
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»