ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ "(МИИТ)

На правах рукописи

ВОЛОСОВ КОНСТАНТИН АЛЕКСАНДРОВИЧ

Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами

специальность - 05.13.01 - Системный анализ, управление и обработка информации

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва - 2007 г.

Содержание

Список иллюстраций

Введение

В диссертации рассмотрен метод (методика[1]) изучения эволюционных систем с распределенными параметрами с помощью точных решений, которые строятся новыми способами.

Общее понятие абстрактной системы сформировальсь в конце двадцатого века. Оно обладает большой общностью и дать его строгое определение достаточно сложно. Существует цикл работ В.Н. Афанасьева, В.Б. Колмановского, Ф.Л.Черноусько, В.Р. Носова, А.А.Меликяна, А.С.Братуся и других (см. ниже и [5], [24], [28], [160], [161]) по изучению различных эволюционных систем в различных областях науки и техники.

Цитирую [5]: "на описательном уровне под саморазвивающейся эволюционной системой можно понимать техническую, физическую, биологическую, экологическую и любую иную систему, для которой характерны изменения, протекающие в ней с течением времени. Математически эволюционные системы могут описываться различными способами. Укажем наиболее часто встречающиеся классы эволюционных систем и способы их описания:

-непрерывные системы, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ);

-дискретные системы, описываемые конечно-разностными уравнениями;

-системы с распределенными параметрами, описываемые эволюционными квазилинейными дифференциальными уравнениями с частными производными, параболического, гиперболического типа;

-системы с последействием, для описания которых

[1]термин "методика"применяется в значении "совокупность методов практического выполнения..."

используются функционально-дифференциальные уравнения.

Такие системы возникают тогда, когда протекание процесса определяется не только состоянием системы в данный момент, но также и предисторией процесса, [5], [28];

-**стохастические системы.** Стохастической системой может быть любая из вышеназванных систем, для описания которой используются вероятностные понятия и методы."

В этом описании выделены жирным шрифтом системы, которые в той или иной мере исследованы в данной работе. Ниже приведены некоторые примеры таких систем.

В книге [151] А.Е.Семечкина приводит исчерпывающую библиографию и прослеживает "...эволюцию системных исследований, начиная от мировоззренческих и методологических подходов ученых-представителей различных школ, до информационного обеспечения процедур системного анализа". В этой книге указнана роль и место нелинейных математических моделей в этой науке.

"Развитие общей теории систем и, в частности, систем управления объектами с распределенными параметрами привело к созданию структурной теории...В основе этой теории лежит понятие *распределенного блока* который соответствует определенному физическому процессу в сплошной среде ..."(См. об этом подробнее в [34]) Системный анализ дает возможность"...анализировать и синтезировать взаимосвязанные распределенные системы, в отдельных частях которых могут протекать процессы различной физической природы: тепловые, электрические, механические, магнитные и многие другие". Отметим, что в [34] основное внимание уделено линейному случаю. Подобную идею в теории оптимального управления движением развивал в своем докладе "Задачи динамики и управления для гибридных систем"А.Б. Куржанский 5 июня 2007 года в Санкт-Петербурге на международном когрессе "Нелинейный динамический анализ-2007".

В диссертации рассмотрены некоторые случаи нелинейных систем. Все рассмотренные нелинейные системы объединяются наличием ряда общих черт и общим взглядом на построение решений как традиционными точными и асимптотическими методами, так и оригинальными методами, предложенными автором. Эти новые методы базируются, на некотором интересном свойстве дифференциальных уравнений с частными производными.

На его основе можно строить новые точные решения не традиционным способом, как в двухмерном, так и многомерном случае. Эти результаты опубликованы в [62],[64], обсуждались на конференциях и докладывались на семинарах. (см. ниже.) Академик В.П.Маслов представил статью по данной теме в редакцию журнала Доклады РАН. Однако, ее нет в списке литературы согласно правилам ВАК.

В настоящее время общепризнанным является тот факт, что без применения математических методов исследования и последующего вычислительного эксперимента, практически невозможно провести исчерпывающее исследование и расчет сложного процесса. При этом сложные модели расщепляются на более простые, как на физическом, так и на математическом уровне.

Похожей точки зрения придерживаются и в [146]: "... модели многих задач механики и физики, как правило, очень сложны и не поддаются детальному теоретическому исследованию. Однако ряд их важных свойств можно понять, если разбить исходную задачу на более простые блоки или модули". Модульный анализ задачи и предварительное изучение свойств отдельных модулей требует развития качественных и аналитических методов исследования задач системного анализа.

Такой подход дает ряд преимуществ: уменьшение затрат, металлоемкости, времени анализа, что особенно важно при анализе крупногабаритных объектов; возможность анализа критических режимов, которые в реальности привели бы к разрушению объекта, к большим материальным потерям и жертвам, экологической катастрофе и т.д.

Такой подход позволяет выполнять анализ объектов "на микро-, макро- и метауровнях, различающихся степенью детализации рассмотрения процессов протекающих в объекте. "

Все рассмотренные в диссертации модели эволюционных систем являются нелинейными. И следовательно, в них проявляются характерные свойства, присущие нелинейным моделям определенного типа. Эти свойства выявлены в большом количестве исследований и суммированы, например, в [148], [118], [184]. Ниже цитируем эти работы.

Обсудим свойства, вытекающие из нелинейности модели эволюционной системы, и укажем их связь с диссертацией.

Первое следствие нелинейности [148] -

отсутствие принципа суперпозиции, свойственное линейным, однородным задачам. "Это объясняет, большое множество возможных направлений развития (эволюции) диссипативного процесса, а также определяет возникновение в сплошной среде дискретных пространственно- временных масштабов. Они характеризуют свойство нелинейной среды независящее от внешнего воздействия. Процесс эволюции диссипативного процесса приводит к самоорганизации". Первый шаг самоорганизации это появление пространственных диссипативных структур.

Здесь следует напомнить работы Г.Хакена, Р.Эшби, Х. фон Форстера, И. Пригожина, и многих других работы которые описаны и проанализированы в [151]. Кроме того, следует упомянуть, в этой связи, работы Д.М.Гвишиани, О.И.Ларичева,С.В.Емельянова, С.П.Капицы описанные в обзоре приведенном в [151]. Работы С.П. Курдюмова, Г.Г.Малинецкого [107], [110] имеют конкретные точки соприкосновения с диссертацией в Главе 5,6. Исследования проведенные в этих главах дополняют эти работы. См.также по вопросу о самоорганизации структур [116], [118].

Изучение эволюционных систем связанных с полулинейными параболическими

уравнениями является актуальной проблемой. Задача о химических часах рассмотренная И.Пригожиным описывается такой системой [151]. Важной задачей является моделирование эволюции решений, выход на автомодельное решение и выход на стационарное решение. (В том случае, когда стационарное решение существует.) Широко известна задача о распространении решения, которое описывает волны в среде с медленно меняющимися свойствами. В многомерной ситуации математические модели, связанные с уравнениями Фитц-Хью-Нагумо-Семенова и их обобщениями описывают эволюцию автоволн и спиральных волн [81], [82], [109], [202].

Следующий этап изучения таких систем связан с поиском возможности управления ими [29].

Свойства решений некоторых задач для полулинейных уравнений и систем обсуждалось в перечисленных работах следующих авторов: В.С.Бермана [18], [19], Ю.П.Гупало , А.Д.Полянина [80], Я.Б.Зельдовича, Г.И.Баренблатта, В.В.Либрович, Г.М.Махвиладзе [93]–[95], А.Н.Колмогорова, И.Г.Петровского, Н.С.Пискунова [105], С.Лефшец [113], А.В.Лыкова, Б.М.Берковского [115],

Дж.Марри [116] , В.П.Маслова, В.Г.Данилова, К.А.Волосова [118], [184], [53], Э.Скотта [149],
Э.И.Андрианкина [1]-[2], С.Н.Аристова [4], В.Г.Данилова , П.Ю.Субычева [86], [88], В.Г.Данилова, В.А.Лукашева [81], [82].

В сборнике [150] проведен обзор работ не только по интегрируемым уравнениям связанным с обратной задаче рассеяния, но и по работам связанным с полулинейными уравнениями. В перечисленных работах приведено большое количество других работ, прямо или косвенно касающихся обсуждаемых вопросов. Нет никакой возможности привести все ссылки. Следует отметить важные работы R. Hirota в [150] , A.C. Newell [199], J. Murray [198], T. Kawahara, M. Tanaka [194], B.F.Knerr [196], а также работы M.Ablowits, A. Zeppetella, J.Weiss, M. Tabor, F. Gareillo, R.Y.Field, подробные ссылки на которые приведены в [59], [200], [176] .

Большое количество точных решений полулинейных уравнений
приведены в справочниках. См. В.Ф.Зайцева, А.Д. Полянина, А.В. Вязьмина, А.И. Журова, Д.А. Казенина [98], [99], [135], [136], [201]. В эти справочники включены и результаты автора.

В диссертации в параграфе 1.7 главы 1 предложен новый метод построения точных решений полулинейных уравнений в параметрической форме в трехмерном случае. Произвольный, не фиксированные, дважды непрерывно дифференцируемые замены переменных исследователи- классики делали и ранее,смотри, например, широко известные учебники по уравнениям математической физики В.С.Владимирова, А.Н.Тихонов, А.А.Самарс
а также см. С.К. Годунов [79], Н.М.Беляев [13]. Целью исследования в этих работах, обычно, была классификация линейных уравнений с частными производными и приведение их к стандартному виду. В диссертации развивается и обобщается классический подход, использующий замену перемен-

ных, с целью построения точных решений квазилинейных и нелинейных уравнений с частными производными. Мы откажемся от исходного скалярного уравнения второго порядка с частными производными и переходим к системе уравнений первого порядка с частными производными на некоторую вектор —– функцию, которая содержит в качестве своих компонент как искомое решение, его производные, так и координатные функции замены переменных. Анализ условий разрешимости этой системы приводит к обнаружению неизвестных ранее тождеств. Если появляется необходимость получить более конкретный вид решения, надо конкретизировать функциональный произвол содержащийся в условии разрешимости. Это дает новые возможности изучения эволюционных систем и возможность построения новых точных решений в параметрической форме.

В книге [137] А.Д. Полянина,В.Ф.Зайцева, А.И. Журова на с.10 дано описание понятия "точное решение нелинейных уравнений математической физики". Решения построенные в главе 1-4 диссертации попадают в третий пункт этой классификации, а именно описываются, системами ОДУ, а в общей ситуации, системой уравнений первого порядка с частными производными. Решения построенные в главе 5 попадают в пункт 8 классификации методов приведенных в книге [137] А.Д. Полянина,В.Ф.Зайцева, А.И. Журова на с.10, а именно для их построения использовался тест Пенлеве.

Теперь рассмотрим модели, связанные с диссипативными структурами. Диссипативные структуры, введенные И. Пригожиным, являются основными объектами молодой, бурно развивающейся области науки-синергетики, тесно связанной с системным анализом и "самоорганизацией".

Подробная библиография по этому разделу приведена в Дж. Марри, В.Г. Данилов, В.П.Маслов [116]-[118], [184], А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.И.Михайлов [148], Э.Скотт [149], сборник переводов

Б.А.Дубровина, И.М.Кричевера, под редакцией С.П.Новикова [150], Д.Теркот, Дж.Шуберт [154], V.Krinsky [202].

Речь идет о некоторых определенным образом строго локализованных или почти локализованных (эффективная локализация) в пространстве решениях модельных нелинейных задач, эволюционирующих во времени и пространстве. Исследования показывают, что нелинейности изменяют не только количественные характеристики процессов, но и качественную картину их протекания. Нелинейности значительно усложняют теорию, так как анализ соответствующих математических моделей требует принципиально новых методов исследования, тесно связанных с теорией нелинейных уравнений в частных производных.

Наиболее общим свойством локализованных структур, которые присутствуют всюду в макромире, является наличие границы. При этом среди многообразия структур можно выделить как структуры с резко обозначенной границей, так и структуры границы которых **размыты**. (например, см. Рис. 1)

Примером пространственных дисспативных распределений и структур в биологии развития являются автоволны. См. вышеприведенные ссылки. Один пример локализованной структуры в макромире с ограниченным носителем, который является односвязным множеством, с резкой границей является рассмотрен во введении в [118].

Уравнение, изученное в [118] имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \mathrm{div}\ (u \ \mathrm{grad}\ u) - u(a(t) - b(t)u) = 0, \tag{0.1}$$

является вырождающимся квазилинейным параболическим уравнением в многомерном случае.

Коэффициент диффузии здесь пропорционален безразмерной концентрации $u(x,t,\varepsilon)$, которая является непрерывной функцией. Здесь имеет место естественный малый параметр $\varepsilon < 1$.

$a(t), b(t)$-заданные функции времени, описывающие распределение ресурсов,

поддерживающих жизнедеятельность популяции и закономерность рождения и гибели.

Подобными уравнениями моделируется эволюция и других биологических объектов.

С математической точки зрения, это уравнение имеет локализованные решения, тождественно равные нулю вне некоторой односвязной области при любом значении малого параметра ε.

Другим примером может служить процесс горения. В случае двух реагирующих газов процесс описан в [94], [95].

На Рис.1 показано распределение температуры T и концентраций реагирующих веществ (кривая 1- концентрация вещества A,
кривая 2- концентрация вещества - B ведущего центра). Так как химические реакции горения протекают с выделением тепла, зона продуктов реакции имеет максимальную температуру. Зона, в которой находятся реагенты, имеет более низкую температуру, при которой вероятность протекания химической реакции мала.

Процесс горения описывается известным уравнением Я.Б. Зельдовича. Одно из наиболее известных модельных уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\ u) - \gamma^2 u^2 (1-u) = 0, \tag{0.2}$$

Здесь $u(x,t,\varepsilon)-$ безразмерная температура, γ- заданная непрерывная функция, характеризующая неоднородность среды. ε - малый параметр,

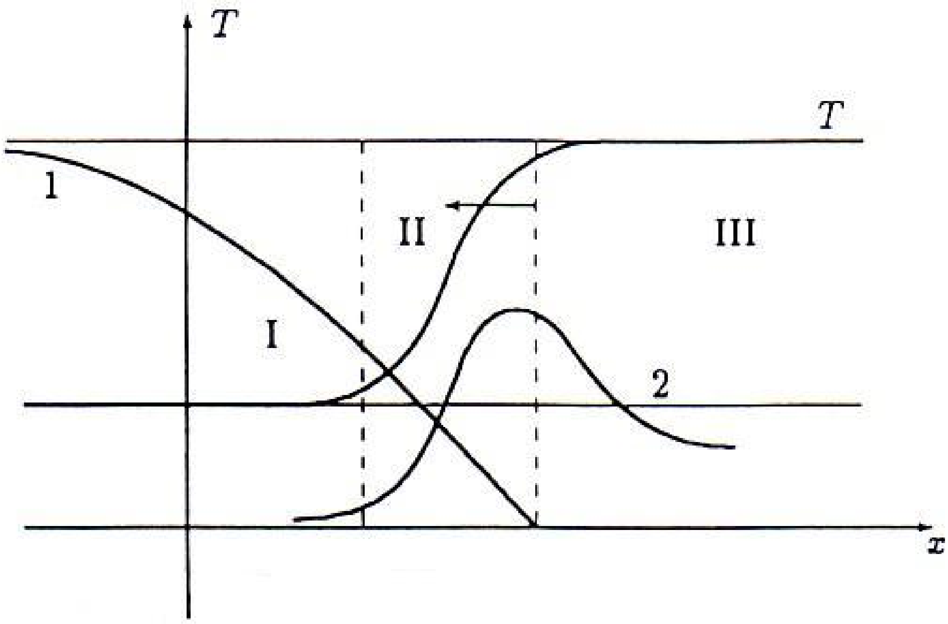

Рис. 1: Распределение температуры T и концентраций реагирующих веществ при горении. Кривая 1 показывает концентрацию вещества A. Кривая 2 - концентрацию вещества B- ведущего центра.

возникающий при переходе к безразмерным переменным, связан с критериями подобия. Здесь коэффициент переноса постоянный.

С математической точки зрения в описываемой математической модели существует решение - функция, которая имеет область определения $x \in R^1, \ t \in [0, T]$, а область изменения функции $u \in [0, 1]$. При этом, вне зоны горения решение экспоненциально мало при $\varepsilon \mapsto 0$, т.е. локализовано приближенно. Строгая локализация имеет место в пределе при $\varepsilon \mapsto 0$. Ширина фронта волны порядка ε . Такие уравнения, как указано выше, являются полулинейными.

В трехмерном случае имеется небольшое количество, в основном обладающих разным видом симметрий, решений. При произвольных непрерывных начальных данных задачи Коши принято проводить численные исследования. При этом строится неявная разностная схема в довольно большой, прямоугольной области на регулярной сетке. (Мы описываем простейший вариант.) Затем используется, например, метод переменных направлений. (См. [142], [146].) Трудоемкость такого исследования и затраты различных ресурсов весьма значительны.

В трехмерном случае в параграфах 1.7 Главы 1, в Главах 2-4 диссертации предлагается восстанавливать решение численным методом, при этом появляются ощутимые преимущества, более подробно описанные в тексте работы.

Такое свойство решения, как **локализация** хорошо изучено для квазилинейных параболических уравнений и появилось в работах Г.И.Баренблатта [14]-[17], Я.Б. Зельдовича, А.С.Компанеецa [92]-[94], Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшица [111]. Это свойство изучалось далее в поздних работах С.Н.Антонцева [3], А.А.Самарского, В.А.Галактионова, С.П.Курдюмова, С.А.Посашкова, Н.В.Змитриенко [12, 34, 35, 72-74, 96, 143-148]. См. также работы следующих авторов: И.С. Граника, Л.К. Мартинсона, К.Б.Павлова [77], [124]-[127], [133], А.С. Романова [134], А.С. Калашникова [102], В.П. Коробейникова [107], О.А.Олейник [131], М.И. Вишика [21], [37], А.И.Вольперта, С.И. Худякова [39], [40], П.П. Волосевича, Е.И. Леванова [41]- [43], B.H. Gilding , R.O.Kershner [190,195], В.В. Пухначева [139], С.И.Похожаева [138], Г.А.Рудных, Э.И.Семенова [140]. И работы А.С.Братусь [31]–[35],[180], В.П.Маслов , В.Г. Данилова, К.А.Волосова [83]–[87], [117]–[121], [182]–[185], [44]–[58]. См. также работы: В.С. Белоносова, Т.И. Зеленяка [32], Б.М. Берковского [175], Е.В.Толубинского [155], В.В.Бублика [178], B.F.Knerr [196], D.A. Larson [197], Л.К.Эдванса [163],Г.Эккера [164], M.J. Ablowitz, A. Zeppetella [166].

Свойство локализации используется в анализе эволюционных систем, которых касаются перечисленные работы. В этих системах протекают тепловые, диффузионные, гидродинамические, электромагнитные и другие процессы. При изучении этих явлений и процессов остаются вопросы, на которые впервые получены ответы в диссертации в Главе 6.

Для того, чтобы обсудить понятия **строгой локализации и эффективной локализации** решения и сравнить их, рассмотрим известную первую краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1}\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)-\gamma u^q=0,\\ kn>1,\ q>0,\ t\in[0,T],\ \gamma(t)\in C^2([0,T]).\end{gathered}\tag{0.3}$$

Это уравнение описывает нелинейные процессы переноса в случае степенной зависимости коэффициентов переноса [14] (Г.И. Баренблатт) от переносимой величины u и ее градиента $\frac{\partial u}{\partial x}$.

В частности, при $n = 1$, уравнение (0.3) можно рассматривать как уравнение нелинейной теплопроводности [72-74, 96, 143-148], а при $k = 1$ уравнение (0.3) можно рассматривать как уравнение переноса импульса в неньютоновской, дилатантной жидкости [134] в изотермическом случае. В общем случае [14] это уравнение турбулентной фильтрации. Обычно рассматривают монотонные $\frac{\partial u^k}{\partial x} \geq 0$, неотрицательные локализованные $u \geq 0$ решения уравнения (0.3) с граничными условиями

$$u(0,t) = u_1(t),\ t \in [0,T],\ u_1 \in C^1([0,T]), u(\infty,t) = 0, \tag{0.4}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0(x), & x \in (x_0, 0], \\ 0, & x \in (-\infty, x_0]. \end{cases} \tag{0.5}$$

Здесь sup $u_0 < \infty$. Кроме того, требуется выполнение условия непрерывности и ограниченности потока

$$\left(\left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial u^k}{\partial x} \right) |_{x=x_f(t)} = 0,\ x_f(0) = x_0 = \text{const} < 0,,$$
$$t \in [0,T],\ \ \sup \left(\left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial u^k}{\partial x} \right) < \infty. \tag{0.6}$$

Предполагается, что выполнено условие согласования $u_1(0) = u_0(0)$.

Определения **строгой локализации и эффективной локализации** приведены в [148] и в первом параграфе Главы 6. Задача (0.3)-(0.6) изучалось также в [51].

Следующим **фундаментальным** следствием нелинейности является необходимость определения **обобщенного решения**.

При произвольных начальных и граничных условиях необходимо учитывать, что решения обобщенные.

Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x}\right) + F(u) = 0,$$
$$k > 1, u(x,t) \geq 0, x \in R^1,\ t \in [0,T]. \qquad (0.7)$$

Следуя работам [102], [130], [131] О.А.Олейник, А.С.Калашникова, приведем определение обобщенного решения уравнения (0.7), как неотрицательную непрерывную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условию Гёльдера по переменным $x,\ t$, для которой в области

$\Omega = [x_0, x_1] \bigotimes [t_0, t_1] \subset {R^2}_+$ выполняется тождество

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}(u\varphi_t + u^k\varphi_{xx} - F(u)\varphi)dxdt - \int_{x_0}^{x_1} u\varphi dx|_{t_0}^{t_1} -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} u^k\varphi_x dt|_{x_0}^{x_1} = 0, \qquad (0.8)$$

каковы бы ни были числа $t_0 < t_1,\ x_0 < x_1$ и пробная (основная, финитная) функция $\varphi(x,t)$, имеющая непрерывные производные функции $\varphi_t,\ \varphi_x,\ \varphi_{xx}$ и равная нулю при $x = x_0$ и $x = x_1$. См. также О.А.Ладыженская, В.А.Солонников Н.Н.Уральцева [112], С.Н.Антонцев [3],и [52]. В этих работах показано , что разрывы производных решения $u(x,t)$ уравнений (0.7) могут наблюдаться только при выходе на нулевой невозмущенный фон, т.е. в точках, где $u = 0$ и уравнение вырождается. (Это линия слабого разрыва). В данной работе, при построении решений, в главе 6 приходится учитывать тот факт, что решения имеют слабую особенность на линии слабого разрыва, а вне ее обобщенное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению в обычном классическом смысле.

Параболические уравнения выводятся в предположении о мгновенной релаксации потока переносимой величины. Если это не так, то изучают модели связанные с

гиперболическими квазилинейными уравнениями [128]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(P(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - F(u) = 0. \qquad (0.9)$$

Математические модели переноса связанные с квазилинейными гиперболическими уравнениями объединяют в себе все полезные свойства :

a) Понятие локализации решения изменяется в определенном смысле (см. Главу 6.).

б) Возмущения распространяются с конечной скоростью по ненулевому фону.

c) Решение имеет слабый разрыв, отделяющий область, в которой функция изменяется от невозмущенной области, в которой функция решения постоянна.

d)Число возможных вариантов различных степенных особенностей на фронте слабого разрыва, как показано в данной работе, равно четырем. Причем, в двух случаях фронт слабого разрыва движется и в двух случаях неподвижен.

В диссертации продолжено изучение локализованных решений квазилинейных гиперболических уравнений и приведены новые результаты в параграфе 6.2-6.4 Главы 6.

Все выше описанные уравнения могут содержать естественный малый параметр и переменные, медленно меняющиеся коэффициенты. Таким образом, подводя итог сказанному, с математической точки зрения, рассматриваемый класс задач характеризуется явлением локализации и конечной скоростью распространения возмущения, т.е. носитель решения есть замкнутое подмножество области, в которой решается задача, и меняется со временем таким образом, что его граница движется в пространстве с некоторой конечной скоростью. На границе носителя решение имеет слабый разрыв, поэтому одновременно с задачей построения асимптотического решения в [53,54, 118] по малому параметру и по гладкости, возникает задача о распространении особенности (слабого разрыва).

В работе [123] проведена классификация особенностей допускаемых нелинейным гиперболическими уравнениями без вторых производных по переменной x(без диффузии). Часть этих результатов приведена в [184].

В отличии от моделей связанных с линейными гиперболическими уравнениями в которых может распространяться любая наперед заданная особенность, и в моделях связанных с линейными параболическими уравнениями, в которых любая особенность мгновенно сглаживается, в квазилинейных

параболических уравнениях существует, и притом конечное, число типов особенностей, которые могут распространяться по нулевому фону.

Эти особенности в общем положении имеют вид $|n_0^\alpha|$, где n_0- расстояние вдоль нормали к фронту слабого разрыва (граница носителя), а показатель $\alpha > 0$ степени определяется конкуренцией различных процессов и отвечающих им нелинейных слагаемых в уравнении.

При классификации типов особенностей решения на фронте слабого разрыва используются знания о ветвлении решений. Теория ветвлений решений нелинейных уравнений рассмотрена М.М.Вайнбергом, В.А.Треногиным в [36], см. также [156].

Классификация особенностей

квазилинейных параболических уравнений проведена в работах D.G. Aranson [167]–[169], Л.Д.Покровского, С.Н.Тараненко [153]. Однако в этих работах не рассматриваются так называемые "резонансы". В диссертации (см.[54] с участием автора) доказано, что асимптотические ряды по гладкости содержат не только степенные функции, но и логарифмические функции и рассмотрены "резонансы"в решениях квазилинейных параболических уравнениях. В [87], [184] приведена полная классификация особенностей квазилинейных *параболических* уравнений и вычислены асимптотические решения в окрестности фронта слабого разрыва.

В диссертации описанные выше идеи применяются к квазилинейным гиперболическим уравнениям.

В диссертации автором впервые проведена полная классификация особенностей квазилинейных *гиперболических* уравнений с вторыми производными по пространству и вычислены асимптотические решения в окрестности фронта слабого разрыва (см.[118]).

Используя подход [54] можно показать, что в моделях с квазилинейными гиперболическими уравнениями не существует "резонансов".

Среди работ оптимального управления можно выделить задачи, в которых решение стохастического уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, с точки зрения нелинейных уравнений в частных производных, локализовано.

См. работы: Ф.Л. Черноусько, В.Б.Комановского [159]–[161], А.С. Братусь, Ф.Л.Черноусько [24], М.Б.Бородовского, А.С. Братусь, Ф.Л.Черноусько [25]-[30], [177], J.Bather, H. Chernjff [171], A.Bensoussan [172-174], а также Д.Е. Охоцимского, В.А.Ресина, Н.Н. Ченцова [132], В.Н. Афанасьева, В.Б. Колмановского, В.Р.Носова [5], и Д.М.Азимов [9].

Построенное в них уравнение Гамильтона-Якоби- Беллмана для функции математического ожидания функционала $S(\tau, x_1, x_2, q)$ является квазилинейным уравнением и его следует рассматривать с некоторыми краевы-

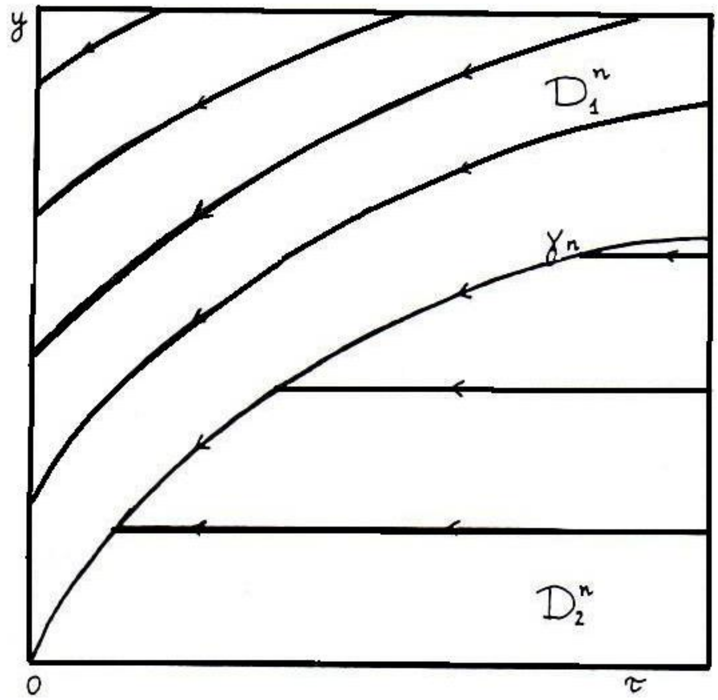

Рис. 2: Область локализации функции $S(\tau, x_1, x_2, q) \geq 0$ обозначена через $-$ $D^n{}_1$ с границей γ_n и область, которая обозначена через $D^n{}_2$, в ней функция $S(\tau, x_1, x_2, q) = 0$

ми и начальными условиями. В детерминированном случае возникает большой круг проблем связанный с негладкими (обобщенными) решениями уравнения Гамильтона -Якоби, который обсуждался в работах Н.Н. Красовского и его сотрудников в свердловской школе по теории оптимального управления [103], А.И.Субботина [152] (где приведена подробная библиография по этому вопросу), A.Bensousan, J.L.Lions [172-174], Ф.Л.Черноусько, А.А.Меликяна [161].

Значительные разработки в этой области проведены В.П.Масловым, М.В.Федорюком, [121], [106], В.М.Хаметовым [158].

Функция $S(\tau, x_1, x_2, q)$ является непрерывной и отличной от нуля в области ${D^n}_1$ в , и равна тождественно нулю в области ${D^n}_2$. Эти области разделяет граница γ_n. Рис.2.

На этой линии, по нормали к ней и по касательной, функция непрерывна, при этом существуют и ограничены первые и вторые производные.

Это относится, например, к уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое возникает в задаче оптимального управления колебаниями

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} - x_2\frac{\partial S}{\partial x_1} + \omega^2 x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2} - (n-1)\left(\frac{|{S'}_{x_2}|}{-n{S'}_q}\right)^{n/(n-1)} {S'}_q - \frac{1}{2}{\sigma_1}^2(\tau)\frac{\partial^2 S}{\partial {x_2}^2} = 0, \tag{0.10}$$

где ${S'}_q$, ${S'}_{x_2}$ также обозначения производных.

Это стохастическое, квазилинейное параболическое уравнение с переменными коэффициентами.

Функция $S = S(\tau, x_1, x_2, q)$ четырех переменных.

В данной работе в Главе 2 рассматривается вариант задачи для этого уравнения, и построено его точное решение в явной и параметрической форме методикой предложенной в главе 1.

Групповые свойства уравнений, обсуждаемых в работе, исследовались Н.Х.Ибрагимовым с сотрудниками в [10], [11], [193], В.А.Дороднициным в [89]–[91], Е.М.Воробьевым [65]–[71], [203], [204].

В диссертации групповые свойства исследованы в главе 2 для уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в задаче управления колебаниями математического маятника и движением тела переменной массы.

В работе С.М. Авдошина, В.В.Белова , В.П.Маслова, А.М.Чеботарева [170], которую автор редактировал совместно с В.П.Масловым, рассматривалось уравнение Беллмана. Введение специальных операций в алгебре на кольцах дают возможность перейти здесь к линейному уравнению. Эта работа являлась для автора отправной точкой и привела к результатам Главы 2.

Полученное в данной работе решение стохастической задачи оптимального управления колебаниями маятника, находящегося под действием гауссовских возмущений. Эта задача является очень важной для приложений по следующим причинам:

Во первых, надо иметь в виду широкое распространение и применение маятников в различных областях науки и техники;

Во вторых, в диссертации построено точное новое решение в стохастическом случае связано с решениями задачи Коши для линейного параболического уравнения с произвольными начальными данными;

В третьих, каждый случай, когда удается построить точное решение, связанное с решениями линейного параболического уравнения важен для теории. В теории уравнения Бюргерса известно, например, преобразование Коула-Хопфа;

В четвертых, в задаче построен синтез оптимального управления не только в детерминированном, но и в стохастическом случае.

К данной задаче применена методика главы 1. Таким образом показано, что методика, разработанная в диссертации может быть полезна при анализе и решении многомерных задач.

Таким образом Главы 1-4 объединены единым подходом к ряду задач.

Асимптотические методы и различные подходы к построению решения обсуждаются в работах Н.Н.Боголюбова, Ю.А.Митропольского [20], М.В. Карасева , В.П.Маслова [100], Н.Н.Моисеева [129], В.М.Хаметова [158], В.Г.Данилова

[81]–[82], В.Г.Данилова, В.П. Маслова [83]–[87], В.И.Арнольда, В.В. Козлова А.И. Нейштадта [6]–[8].

В диссертации асимптотические решения используются в Главе 6.

В конце 20 века появилась программа символьных преобразований "Математика".

Интегрированные системы символьной математики (компьютерной алгебры) - новое направление в развитии программного обеспечения, существенно расширяющее области применения компьютера. Число публикаций по этой тематике значительно возрастает. Обширная библиография и история вопроса приведена в [70], [91]. Сегодня без этих систем не могут обходиться ни математики- аналитики, ни ученые- теоретики, которые занимаются высоко интеллектуальной деятельностью связанной с решением особо сложных математических и научно-технических задач. Их роль в образовании описана, например, в указанных выше работах. Дело в том, что система "Математика ", является еще и языком программирования высокого уровня. В целом, все положительные свойства этой системы позволяют исследователю делать предположения, в символьном виде, об анзаце (заготовке) решений уравнений с частными производными, анализировать уравнения объемом информации 5-100 Мегабайт, проводить различные (не только классические) преобразования и т. д. Именно такой подход позволил найти новые скрытые свойства уравнений с частными производными в данной работе. Этот подход имеет огромные перспективы для аналитического исследования различных задач. При решении задач, представленных в диссертации мы сталкиваемся с одной из серьезных проблем символьной математики, а именно разбуханием результатов аналитических преобразований.

Это никаким образом не является недостатком компьютерной математики. Просто так нарастает сложность решения данной математической задачи в соответствии с канонами абстрактной математики. В [91] (см. стр.29) более подробно обсуждаются причины, которые могут приводить к таким эффектам. Научные сотрудники и математики- рецензенты настолько привыкли к упрощенным результатам, что громоздкие решения, получаемые с помощью символьной математики, способные их раздражать. Однако, полученные новые результаты в данной диссертации, возможно помогут преодолеть психологические проблемы, и будут содействовать применению символьной математики на практике. Основная роль при этом все равно остается за человеком-математиком, с его фантазией, интуицией и сложными ассоциациями.

В данной работе использовалась версия "Математика 4.0.1"лицензия номер L2967-7796.

Цель работы.

Целью диссертации является формирование комплексного, систематического подхода к изучению нелинейных эволюционных систем с распределенными параметрами, возникающих в различных областях науки и техники. Предложено обоснование нового эффективного метода построения точных решений в параметрической форме нелинейных и квазилинейных уравнений с частными производными второго порядка. С помощью этого метода можно изучать эволюционные системы путем построения новых точных решений в параметрической форме в многомерном случае. Одна из целей диссертации – распространение нового метода на эволюционные системы связанные с самоорганизацией, распространением пространственных волн, а также описанием диссипативных структур. В комбинации с известными асимптотическими и численными методами построенные точные решения уравнений с частными производными оказываются полезными в многомерном случае.

Конкретно ставились следующие цели:

1)Построить точные решения для нелинейных эволюционных систем, описываемых квазилинейными параболическими уравнениями с помощью конструктивной замены независимых переменных в двухмерном и многомерном случаях. Распространить предложенный метод на квазилинейные параболические уравнение с коэффициентами, зависящими от независимых переменных. Указать область применимости данного метода.

2)Построить точное решение задачи синтеза оптимального управления движением тела постоянной массы с ограничениями. В частности, решить задачу синтеза оптимального управления колебаниями маятника, находящегося под воздействием гауссовских и пуассоновских возмущений, с трением и без него. Ставилась цель с помощью разработанного метода исследовать и решить задачу построения точных решений квазилинейных параболических уравнений с переменными коэффициентами–уравнения Гамильтона -Якоби -Беллмана и установить их связи с решениями линейных параболических уравнений.

3) Построить точное решение задачи синтеза оптимального управления движением тела переменной массы с ограничением на ресурс управления в детерминированом случае.

4) Ставилась цель построить точное решение и исследовать свойства для стационарного режима систем, описываемых эллиптическими уравнениями, и показать возможность исследования широкого класса таких задач с помощью предложенного метода.

5) Ставилась цель распространить метод главы 1 на случай исследования нелинейных волн в нелинейных средах, которые описываются квазилинейными невырождающимися гиперболическими уравнениями.

6) Изучить системы двух полулинейных уравнений и построить точные решения в распространенных в приложениях случаях таких систем.

7) Изучить асимптотические решения по гладкости и указать все типы особенностей на фронте слабого разрыва квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнений. Найти необходимое условие существования решения квазилинейного гиперболического уравнения, описывающего распространение нелинейных волн в среде с медленно меняющимися свойствами. Построить точные и асимптотические решения.

Методы исследований. В диссертации использованы элементы функционального анализа, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теория ОДУ уравнений, численные методы, асимптотические методы, групповые методы построения точных решений, теория оптимального управления и теория случайных процессов.

Научная новизна полученных результатов.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Разработан новый метод построения точных решений дифференциальных уравнений с частными производными в параметрической форме, основанная на предложенной автором конструктивной замене независимых переменных. Задача построения решения исходного уравнения с частными производными второго порядка сводится к системе четырех уравнений первого порядка с частными производными и установлены условия ее разрешимости.

2. В тех случаях, когда решение в параметрической форме не может быть выражено через элементарные функции, предложен комбинирован-

ный метод, объединяющий алгоритм п.1 с численными методами. Построены примеры решений уравнений Фитц–Хью–Нагумо–Семенова, Зельдовича, уравнения близкого к уравнению Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера.

3. Построено семейство точных решений класса задач синтеза оптимального управления колебаниями маятника, находящегося под воздействием случайных возмущений.

4. С помощью предложенного метода установлена связь решений для квазилинейного параболического уравнения с переменными коэффициентами -Гамильтона-Якоби-Беллмана с решениями линейного параболического уравнения.

5. Найдены точные решения для задачи синтеза оптимального управления движением тела переменной массы с ограничением на ресурс управления в детерминированом случае.

6. Построены новые классы точных решений систем двух полулинейных параболических уравнений.

7. Проведена полная классификация особенностей, возможных в квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнениях. Найдены необходимые условия существования решения и построены асимптотические решения, в среде с медленно меняющимися свойствами для квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнений.

Обоснованность выводов диссертации.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими доказательствами, приведенными в диссертации, а также публикациями в ведущих рецензируемых журналах в России и за границей: в США, Великобритании, Германии.

Научная и практическая ценность работы.

Предложен новый метод исследования эволюционных систем с распределенными параметрами. Полученные в работах автора и приведенные в диссертации результаты использованы в справочниках [136] стр.233, стр.236, 263, в [137] , использованы в работах авторов [125], [127], [140] (и других, не только приведенных в списке литературы). Более того, полученные в диссертации результаты использованы в работах моих соавторов и в работах их учеников, например, в работе аспирантки [162]. Точные решения, построенные с помощью конструктивной замены переменных в рамках данного метода, могут быть использованы для получения новых свойств и помогут исследовать важные аспекты качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались **на научных семинарах.**

1)Семинар кафедры Прикладная математика 1, Московского государственного университета путей сообщений,

(руководитель д.ф-м.н, проф. А.С. Братусь). (Было сделано три доклада.)

2) Семинар кафедры Прикладная математика, Московского государственного института электроники и математики (технический университет.)

(руководитель лауреат госуд. премии России, д.ф-м.н, проф. М.В. Карасев.) (Было сделано два доклада.)

3) Семинар Института Проблем механики РАН.

(руководитель академик Ф.Л. Черноусько). (Было сделано два доклада.)

4) Семинар по математической физике Института Прикладной математики им.Келдыша.

(руководители д.ф-м.н, проф.В.В. Веденяпин, д.ф-м.н, проф.В.А. Дородницин, д.ф-м.н, проф. Г.Г. Малинецкий, секр. д.ф-м.н, проф. Ю.Н.Орлов.) (Было сделано два доклада.)

5) Семинар кафедры "Кибернетики"Московского государственного института электроники и математики (технический университет).

(руководитель акад., д.ф-м.н., проф. В.Н. Афанасьев.)(Было сделано два доклада.)

6) Семинар кафедры "Дифференциальные уравнения и математическая физика"Московского университета "Дружбы народов"

(руководитель д.ф-м.н., проф. А.Л. Скубачевский.)

7) Семинар кафедры кафедры "Дифференциальные уравнения "в

МГУ им. Ломоносова

(руководитель д.ф-м.н., проф. В.В. Жиков.)

8) Семинар кафедры "Математическая физика"Самарского государственного университета

9) Семинар кафедры "Высшая математика "Московского технического

университета связи и информатики

(руководитель д.ф-м.н., проф. В.Г. Данилов.)

10) Семинар кафедры "Математического анализа "Российского государственного педагогического университета им. А.И.Герцена.

Материалы диссертации докладывались на

международных конференциях:

1) Третья международная конференция . Средства математического моделирования . Санкт-Петербург., июнь 2001.

2) XX Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society, Международная конференция посвященная 100-летию со дня рождения И.Г.Петровского, 22 мая 2001.

3) Международная конференция посвященная 70-летию академика А.М.Ильина. Асимптотики в дифференциальных уравнениях. Урал. Отделение РАН Башкирский научный центр. Институт математики. Уфа. 2002.

4) Четвертая международная конференция. Средства математического моделирования. Санкт-Петербург., июнь 2003.

5) Sovremennaya Matematika I Ee Prilozheniya, Contemporary Mathematics and Its Applications, Suzdal, Conference -3,2003.

6) VIII Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"Москва. ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, июнь 2004.,с.28.

7) 1V международная конференция "Идентификация систем и задачи управления"Москва, ИПУ им. В. А. Трапезникова, 25 янв.2005.

8) Научная конференция "Герценовские чтения -2006 "14-19 апреля, РГПУ Санкт-Петербург. 2006,труды конференции.,РГПУ, с.35-40. Сделано два доклада по методике разработанной в главе 1 и по задаче оптимального управления телом переменной массы- п.2.5 глава 2.

9) IX Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"Москва. ИПУ им В. А. Трапезникова РАН, 31-2 июня 2006.

10) Международная конференция посвященная 100 летию со дня рождения А.Н.Тихонова, "Тихонов и современная математика"МГУ, 19-24 июня 2006,изд.МГУ, с.133-134. Сделано два доклада по методике разработанной в главе 1 и по задаче оптимального управления телом переменной массы- п.2.5 глава 2.

11) International conference of differential equations and dynamical systems. 10-15.07.2006, Суздаль, Институт математики Стеклова, Владимирский гос. Университет,

МГУ им. Ломоносова, Владимирский государственный университе.Труды конференции., изд ВГУ, С. 56-60.

12) IUTAM Symposium. 25-30. 08.2006 Институт математики Стеклова, Труды симпозиума., с.147-149.

13) Конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения"г. Самара,

Самарский государственный университет 29 января- 2 февраля 2007 г.

14) Научная конференция "Герценовские чтения -2007 "16-21 апреля, РГПУ, Санкт-Петербург. 2007, с.39-41.

15) XXII Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society, Международная конференция И.Г.Петровского, 21-26 мая 2007. Организаторы предоставили возможность сделать доклад сверх программы 26 мая 2007 в ауд.1624, в 11 часов.

16) Международный конгресс 2007. "Нелинейный динамический анализ 2007". Посвященный 150-летию со дня рождения академика А.М.Ляпунова, 4-8 июня 2007.

Публикации.

По теме диссертации опубликованы 17 научных работ, включая 13 научных работ в центральных, рецензируемых научных журналах по списку ВАК, а также результаты диссертации частично опубликованы в сборниках и в двух монографиях на русском и английском языках. Всего. с учетом публикаций тезисов докладов на конференциях 35 научных работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, четыре главы, приложение, заключение и список используемой литературы и приложение. Работа состоит из 263 страницы, включая 20 рисунков, и список литературы состоящий из 204 наименований, таблица 1. Приложение составляет 13 страниц и содержит программы и тексты файлов "Математика 4.0".

В **Главе 1** проведена разработка и обоснование нового метода исследования и построения решений квазилинейных уравнений с частными производными с коэффициентом переноса, зависящим от функции и переменными коэффициентами в параметрическом виде. Приведены примеры.

В **§1.1** рассматривается вырожденный одномерный случай, и описываются предпосылки, которые привели к результату описанному в главе.

В **§1.2** от скалярного уравнения переходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Анализ этой системы открывает новые, не исследованные ранее, возможности для построения решений в параметрическом виде или в явной форме. Необходимые и достаточные условия разрешимости системы ОДУ- два равенства смешанных производных- приводят к обнаружению нового тождества для уравнений с частными производными. Оказываются, что вместо двух соотношений разрешимости имеет место одно соотношение на три функции. Доказано, что условие разрешимости всегда недоопределено. Это ранее скрытое, новое свойство уравнений с частными производными. Это свойство позволяет строить решения уравнений с частными производными в параметрической форме и предложить новый метод исследования эволюционных систем с распределенными параметрами.

Вычислено, условие разрешимости– уравнение, которое является аналогом условия "нулевой кривизны". Конкретный пример условия разрешимости для квазилинейного параболического уравнения приведен в Приложении.

В **§1.3** приведен пример решения Зельдовича, Компанейца, Баренблатта для квазилинейного параболического уравнения. Показано, что формулы работают и предположения сделанные в данной работе верны.

В **§1.4** Построены новые семейства решений классических полулинейных уравнений: Фитц-Хью-Нагумо-Семенова, Зельдовича.

В **§1.5** построено точное решение в параметрической форме и проведены численные расчеты обратного преобразования для уравнения которое, отличается от уравнения Колмогорова -Петровского Писунова-Фишера одним слагаемым. Таким образом продемонстрирован гибридный метод исследования таких задач.

В **§1.6** приведен вывод и доказательство нового свойства для уравнений с частными производными, с переменными коэффициентами, зависящими от неизвестной функции и независимых переменных, на примере квазилинейных параболических уравнений. Построены примеры.

В **§1.7** построено новое семейство решений классических полулинейных уравнений: Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера, Фитц-Хью-Нагумо, Зельдовича в трехмерном случае. Предложено гибридно, эффективно применять численные методы, в комбинации с точными решениями в параметрической форме в трехмерном случае. Приведено приложение к теории автоволн.

В **Главе 2** изучается самый сложный случай, из рассмотренных в диссертации,– стохастические уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, связанный с уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана в задачах оптимального управления. В модели четыре независимых переменные.

В **п.2.1** приведена постановка задачи оптимальной коррекции движения материальной точки, находящейся под воздействием гауссовского белого шума. Пусть управляемое движение материальной точки описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\alpha x_2 + u(t, x_1, x_2) + \sigma(t)\xi(t), \\ &x_1(0) = x^\circ{}_1, \quad x_2(0) = x^\circ{}_2. \end{aligned} \tag{0.11}$$

Здесь введены обозначения t –время, $0 \le t \le T$, x_1, x_2 , - фазовые координаты, u –управляющая сила, $\xi(t)$ – гауссовский белый шум единичной интенсивности, $\sigma(t)$–ограниченная функция, представляющая интенсивность возмущения, ω – собственная частота, α–коэффициент трения.

На величину управления u наложено следующее ограничение. Допустимым управлением u будем называть такое управление, что функция u со значениями в R^1 интегрируемая на отрезке $[0,T]$ для любых x_1, x_2 и введена переменная

$$q = \int_t^T |u(t, x_1, x_2)|^n dt < \infty \text{ при } x_1,\ x_2,\ t. \tag{0.12}$$

Здесь n - вещественное положительное число.

Цель управления - минимизация одного из следующих функционалов

$$E\{\varphi(x_1(T))\},\ E\{\varphi(x_2(T))\} \tag{0.13}$$

Здесь E - знак математического ожидания, $\varphi(x)$ –дифференцируемая, четная неотрицательная функция своих аргументов, таких что

$\varphi^{'}(x) > 0,\ x > 0,\ \varphi(0) = 0.$

Предполагается, что $\frac{\varphi^{'}(x_i)}{\varphi(x_i)}, i = 1, 2$ убывает по переменной x_i при ее возрастании.

Далее осуществляется понижение порядка системы (44),(45) методом введения вспомогательной функции(с трением и без него). [2]

В **§2.1** приведен перечень функций (новой переменной) с помощью которых можно понизить порядок системы, и следовательно, в этих перечисленных случаях решения, построенные в диссертации, справедливы. Приведем здесь только два случая.

В задаче минимизации функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной x_1:$E\{\varphi(x_1(T))\}$, при наличии трения $\alpha \neq 0$

[2]Этот метод применялся в работах Ф.Л.Черноусько, М.Б.Бородовского, А.С.Братуся [24],[26] Формулы (44),(45) с трением впервые доложены автором на конференции sicpro'05 25.01.2005.

следует ввести следующую переменную

$$y(t) = (x_2(t) + \alpha x_1)\exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t)) +$$
$$\sqrt{k}x_1(t)\exp(-\alpha(T-t))\cos(\sqrt{k}(T-t)),$$
$$y(T) = \sqrt{k}\ x_1(T), k = \omega^2 - \alpha^2,\ \dot{y}(t) = f_1(t)(u + \sigma(t)\xi(t))$$
$$f_1(t) = \exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t)). \tag{0.14}$$

В задаче минимизации функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной x_2:$E\{\varphi(x_2(T))\}$, при наличии трения $\alpha \neq 0$ следует ввести следующую новую переменную

$$y(t) = x_2(t)\sqrt{k}\exp(-\alpha(T-t))\cos(\sqrt{k}(T-t)) -$$
$$(\omega^2 x_1 + \alpha x_2)\exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t)),$$
$$y(T) = \sqrt{k}x_2(T), \qquad k = \omega^2 - \alpha^2,\ \dot{y}(t) = f_2(t)(u + \sigma(t)\xi(t))$$
$$f_2(t) = (\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}(T-t)) - \alpha\sin(\sqrt{k}(T-t)))\exp(-\alpha(T-t)) \tag{0.15}$$

Обобщая представленные в §2.1 случаи, далее рассматриваются следующие уравнение движения

$$\dot{y} = f_i(t)(u + \sigma(t)\xi(t)),\ \dot{q} = -|u|^n \text{ где } i = 1, 2. \tag{0.16}$$

где $f_i(t)$ – непрерыво дифференцируемая функция из (47),(48), на отрезке $0 \le t \le T$. Далее их обозначаем через $f(t)$.

В **§2.2** в детерминированной постановке построено решение уравнения Гамильтона-Якоби в задаче описанной в предыдущих параграфах. В параграфе введена функция Беллмана и приведено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.

В **§2.3** рассмотрено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Это квазилинейное параболическое уравнение с коэффициентом, зависящим от одной независимой переменной (времени) возникающее в стохастическом случае.

К этой задаче применен предложенный в диссертации (в Главе 1) метод анализа и построения решения в параметрической форме, и такое решение построено. Таким образом показано, что предлагаемый в работе метод анализа эволюционных систем является пригодной для анализа многомерных задач.

В **§2.4** рассмотрена задача об управляемом движении тела постоянной массы находящегося под воздействием гауссовских и пуассоновских случайных возмущений.

В **§2.5** изучена задача оптимальной коррекции тела переменной массы с интегральным ограничением на ресурс управления в детерминированном случае, показана возможность предельного перехода на случай постоянной массы, рассмотренный в **§2.1 - §2.4** .

В **Главе 3** рассматриваются квазилинейные эллиптические уравнения, которые описывают предельные стационарные распределения, которые могут возникать при эволюции задач для параболических уравнений.

В **§3.1** применен разработанный метод построения решений для квазилинейных эллиптических уравнений с коэффициентом переноса, зависящим от функции. Выведены формулы условия разрешимости.

В **§3.2** построены примеры решений в параметрическом виде для квазилинейных эллиптических уравнений. Построено точное решение уравнения с кубической нелинейностью.

В **Главе 4** в **§4.1** применен разработанный метод построения решений для эволюционных систем, связанных с квазилинейными гиперболическими в параметрическом виде.

В **§4.2** построены примеры решений для квазилинейных гиперболических уравнений. Выведены формулы условия разрешимости.

В **Главе 5**изучаются системы полулинейных уравнений, такие как: система Белоусова -Жаботинского, Куросава-Танаки.

В частности, исследуются полулинейные параболические уравнение и системы, которые имеют, как непрерывно дважды дифференцируемые решения, так и решения имеющие особенность.(В отличии от решений построенных в главе 1.)

В рассмотренных моделях две независимых переменных.

В **§5.1** описывается структура решений полулинейных параболических уравнений и тест Пенлеве.

В **§5.2** изучается система двух полулинейных уравнений, известная как система Белоусова-Жаботинского, найдено дисперсионное соотношение, построены точные решения.

В **§5.3** изучается система двух полулинейных уравнений, известная как система Куросава-Танака. Поиск решений осуществляется с помощью теста

Пенлеве. Построены точные решения систем полулинейных параболических уравнений, изучена эволюция решений и выход их на стационарное решение. Обнаружены эффекты взаимодействия непрерывно дифференцируемого решения с особенностью, анигиляции решений.

В **§5.4** изучена возможность размножения решений для некоторых полулинейных параболических уравнениях, например, таких, как Фитц-Хью-Нагумо-Семенова, при выполнении некоторого условия согласования.

В **§5.5** изучается система двух полулинейных уравнений Куросава-Танака. Доказано, что возможно размножение решений в некоторых системах полулинейных параболических уравнений, при выполнении некоторого условия согласования. Приведены примеры.

В **Главе 6** изучаются решения квазилинейных вырождающимися гиперболических уравнений. Последние могут вырождаться при определенных условиях. В рассмотренных математических моделях две независимых переменных.

В **§6.1** проведена классификация особенностей квазилинейных гиперболических уравнений и построение асимптотического решения по гладкости в окрестности слабого разрыва. Для доказательства используется метод прямых Ньютона.

В **§6.2** построены асимптотические решения квазилинейного гиперболического уравнения с переменными, медленно меняющимися коэффициентами, зависящими от независимых переменных.

Рассмотрена модель распространения волн в среде с медленно меняющимися свойствами по ненулевому фону.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В Приложение вынесены громоздкие формулы конкретного условия разрешимости и формулы к главе 5.

1 Глава 1. Эволюционные системы описываемые квазилинейными параболическими уравнениями. Параметрическая форма решения.

1.1 Введение. Анализ одномерного случая

Рассмотрим задачу построения точных решений со условиями связанными с корнями алгебраического уравнения $F(Z) = 0$ для квазилинейного параболического уравнения

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + F(Z) = 0. \tag{1.1}$$

В работах [117, 118, 53-55, 184] изучались асимптотические решения квазилинейных параболических уравнений с малым параметром и медленно меняющимися переменными коэффициентами. Известно, что изучение таких асимптотических решений опирается на точные решения эталонных уравнений. Эталонное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ). Последние описывают поведение главного члена асимптотического представления решения.

Предположим, что $K(Z) \geq 0$ неотрицательная функция.

Отметим, что частные случаи уравнения (1.1) широко известны (см. библиографию приведенную в Введении.) Справедлива теорема (приводим ее по [184] с.19) о связи решений квазилинейных и полулинейных параболических уравнений. Рассмотрим решение уравнения (1.1) в виде простой волны $Z(x,t) = \chi(\tau)|_{\tau=\alpha x+bt}$. При такой замене задача становится одномерной. Функция $\chi(\tau)$ удовлетворяет ОДУ с постоянными коэффициентами

$$b\frac{d\chi}{d\tau} - \alpha^2\frac{d}{d\tau}(K(\chi)\frac{d\chi}{d\tau}) + F(\chi) = 0, \tag{1.2}$$

Рассмотрим полулинейное параболическое уравнение для дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(\delta, \xi)$

$$u'_{\delta} - u''_{\xi\xi} + K(u)F(u) = 0. \tag{1.3}$$

Рассмотрим решение этого уравнения в виде простой волны

$u(\delta, \xi) = \Theta(\zeta)|_{\zeta=\alpha\xi+b\delta}$.

Функция является решением ОДУ

$$b\frac{d\Theta}{d\zeta} - \alpha^2\frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} + K(\Theta)F(\Theta) = 0. \tag{1.4}$$

По решениям более простого уравнения (1.4) строятся решения уравнения (1.2) с помощью предложенного преобразования.

Предположим, что вещественные функции $\Theta(\zeta)$, $\chi(\zeta)$ определены на R .

Теорема 1.1.1

Пусть существует - $\Theta(\zeta) \in C^2(R)$ решение уравнения (1.4). Пусть существует, хотя бы локально, обратная функция Θ^{-1} к функции $\Theta(\zeta)$. Решение $\chi(\tau)$ уравнения (1.2) связаны с решением уравнения (1.4)

преобразованием

$$K(Z)\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{d\Theta}{d\zeta}(\Theta^{-1}(\chi)), \tag{1.5}$$

Доказательство приведено в цитируемых работах.

Напомним, что *решениями типа простых волн являются функции аргумента*

$x + ct, c = \text{const}$, *в ряде работ их называют однофазными решениями.*

После вычисления правой части (1.5) на конкретном решении оно превращается в ОДУ первого порядка. Ниже это продемонстрировано на конкретном примере см.(1.10). Исследовать

уравнение первого порядка проще, чем (1.2). В приведенном ниже примере, оно интегрируется в квадратурах.

Указанное преобразование использовалось в [117, 118, 53-55] в процессе доказательства различных утверждений, связанных с установлением асимптотических формул для решения уравнений и установления структуры слабого разрыва. В том случае, когда обратная функция существует, но не выражается явно через элементарные функции выписывается асимптотика.

Пример 1.1.1

В этом примере по решению (1.9) $\Theta(\zeta)$ уравнения (1.4), строится решение (1.7)$\chi(\tau)$ уравнения (1.2). По решению (1.10) уравнения (1.4), строится решение (1.8) уравнения (1.2). При сравнении этих решений видно, что в одном из случаев область определения функции $\chi(\tau)$ уменьшается. В данном примере обратная функция существует и вычисляется. Положим в уравнении (1.1)

$$K(Z) = kZ^{k-1},\ F(Z) = -(1 - Z^2)/2,\ k > 1. \tag{1.6}$$

Здесь ограничимся случаем $k = 2$, другие значения k рассмотрены в цитируемых выше работах.

Соответствующее уравнению (1.1) ОДУ (1.2) имеет

(в частности) два решения

$$\chi(\tau) = \begin{cases} H(-\tau)\sqrt{1 - \exp(\tau/2)}, & \tau < 0, \\ H(\tau)\sqrt{1 - \exp(-\tau/2)}, & \tau > 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\tau = \alpha x,\ \alpha = \pm 1, b = 0, \tau \neq 0$, а $H(\tau)$ - функция Хевисайда.

$$\chi(\tau) = 1 - \exp(\tau/2),\ \tau = \alpha\ x + b\ t,\ \alpha = 1/\sqrt{2},\ b = -3/2. \qquad (1.8)$$

Отметим, что в диссертации везде изучаются вещественные решения. В точке $\tau = 0$ функция доопределяется $\chi(0) = 0$.

Согласно приведенной теореме эти два решения оказываются связанными с двумя решениями ОДУ

$$\Theta(\zeta) = \frac{1 - \exp(\sqrt{2}\ \zeta)}{1 + \exp(\sqrt{2}\ \zeta)},\ \zeta = \alpha\ \xi,\ b = 0,\ \alpha = \pm 1. \qquad (1.9)$$

$$\Theta(\zeta) = \frac{1}{1 + \exp(\zeta)},\ \zeta = \alpha\ \xi + b\ \delta,\ \alpha = 1/\sqrt{2},\ b = -3/2. \qquad (1.10)$$

Покажем более подробно как применяется преобразование (1.5) на примере решения (1.10). Производная и обратная функция имеют вид

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = \frac{-\exp(\zeta)}{1 + \exp(\zeta)},\ \zeta = ln(\frac{1-\Theta}{\Theta}). \qquad (1.11)$$

Тогда (1.5) имеет вид $2\frac{d\chi}{d\tau} = \chi - 1$.

Проинтегрировать последнее ОДУ значительно проще, чем (1.2).

Проведем анализ этого преобразования. Введем обозначения

$$K(Z)\frac{d\chi}{d\tau} = Y(\tau). \qquad (1.12)$$

Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$bY(\tau) - \alpha^2 K(\chi)\frac{d}{d\tau}(Y(\tau)) + K(\chi)F(\chi) = 0, \qquad (1.13)$$

Попытки связать решения квазилинейных параболических уравнений с решениями линейных и полулинейных уравнений предпринимались неоднократно, например, H.P. Englar [189], В.В.Пухначеа [139], Н.М.Беляев [13] и для уравнения Бюргерса. В [117, 118, 53-55] было предложено преобразование (1.5), которое связывает решения типа простых волн квазилинейных и полулинейных параболических уравнений. Это преобразование обобщается в [62] на многомерный случай и приведено в следующем параграфе.

В работе автора [60] проведена первая попытка проанализировать формулы, которые возникают при замене переменных и дополнение уравнения двумя соотношениями на производные (потоки, дифференциальные связи), аналогично (1.12).

1.2 Построения решений в параметрической форме квазилинейных параболических уравнений с коэффициентом переноса, зависящим от неизвестной функции.

В этом параграфе описывается новое, свойство уравнений с частными производными, которое опубликовано в [62], [64], см. также [60].

Здесь развивается общая идея (см. например [122], [149], [150]) построения решений одного нелинейного уравнения, основываясь на решениях другого уравнения. Связь уравнений с частными производными с групповым подходом и дифференциальной геометрией можно найти в [6], [7], [203], [204].

Приведенный ниже алгоритм работает в предположении, что все используемые функции имеют необходимую гладкость.

В общей ситуации решения получаются в неявной форме, аналогичной в некотором смысле квадратурной формуле для ОДУ первого порядка.

С другой стороны, существует аналогия с методом характеристик в теории линейных дифференциальных уравнений.

В различных частных случаях, когда система ОДУ интегрируется, (см. примеры) возможно получить известные старые решения и классы новых решений.

Мы излагаем предлагаемый метод на примере квазилинейного параболического уравнения

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + F(Z) = 0. \tag{1.14}$$

Это уравнение входит в общий класс квазилинейных параболических уравнений описанный в [112].

Делаем произвольную замену переменных

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\ \delta),t=t(\xi,\ \delta)} = U(\xi,\delta). \tag{1.15}$$

Предположим, что якобиан замены переменных

$detJ = x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta \neq 0$ не равен нулю, где

$$J = \begin{pmatrix} x'_\xi & t'_\xi \\ & \\ x'_\delta & t'_\delta \end{pmatrix}.$$

Тогда существует обратное преобразование, хотя бы локально,

$\xi = \xi(x,t), \delta = \delta(x,t)$. При этом

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = detJ\dfrac{\partial \delta}{\partial t},\ \dfrac{\partial t}{\partial \xi} = -detJ\dfrac{\partial \delta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \delta} = -detJ\dfrac{\partial \xi}{\partial t},\ \dfrac{\partial t}{\partial \delta} = detJ\dfrac{\partial \xi}{\partial x}. \end{array} \tag{1.16}$$

Введем обозначения [3]

$$K(Z)\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta),$$
$$K(Z)\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta). \qquad (1.17)$$

Введем также функции

$$\Psi_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} (K[-FKU'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) - (-TU'_\delta {Y'_\xi}^2 - TT'_\delta {U'_\xi}^2 + TU'_\delta T'_\xi U'_\xi - YY'_\delta T'_\xi U'_\xi + TY'_\delta Y'_\xi U'_\xi + YT'_\delta U'_\xi Y'_\xi)])/P_1(\xi,\delta), \qquad (1.17a)$$

$$\Psi_2(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-FKU'_\delta[U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi] - TT'_\xi {U'_\delta}^2 + YY'_\delta T'_\xi U'_\delta + TT'_\delta U'_\xi U'_\delta - YT'_\delta Y'_\xi U'_\delta + TY'_\delta Y'_\xi U'_\delta - T{Y'_\delta}^2 U'_\xi]/P_1(\xi,\delta) \qquad (1.17b),$$

$$\Psi_3(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-YY'_\xi + FKU'_\xi + TU'_\xi][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]]]/P_1(\xi,\delta), \qquad (1.17c)$$

$$\Psi_4(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-YY'_\delta + FKU'_\delta + TU'_\delta][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]/P_1(\xi,\delta). \qquad (1.17d)$$

Здесь обозначено

$$P_1(\xi,\delta)) = FK[(TY'_\xi - T'_\xi Y)U'_\delta + (YT'_\delta - TY'_\delta)U'_\xi] + TY[-U'_\delta T'_\xi + U'_\xi T'_\delta] + Y^2[Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi] + T^2[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]. \qquad (1.17m)$$

Замечание 1.2.1 Здесь и ниже во всей диссертации мы не пишем аргументы функций ξ, δ в формулах, только по соображениям их уменьшения и возможности лучшего их прочтения.

Теорема 1.2.1

1)Пусть функция $Z(x,t)$решение уравнения (1.14). Пусть замена $(x,\ t) \to (\xi,\ \delta)$ невырождена, хотя бы локально. Пусть функции $U(\xi,\delta),\ Y(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)$ заданы формулами (1.15),(1.17).

[3]Это в [137] называется дифференциальной связью. В конце главы 2 диссертации, в параграфе 1.7, рассмотрен пример 8 из этой книги с.151 с использованием данного метода. Этот пример является интересным частным случаем, в нем $x = \xi,\ t = \delta$.

Тогда определитель замены связан с этой тройкой функций соотношением

$detJ = \Psi_1\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3$ и выполнено равенство

$\frac{\partial}{\partial\delta}\Psi_3 - \frac{\partial}{\partial\xi}\Psi_4 = 0,$ $(1.17e)$

где функции $\Psi_i,\ i = 3, 4$ определены равенствами $(1.17c), (1.17d)$.

2)Верно и обратное. Предположим, что комбинация функций

$(\Psi_1\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3)$ не обращается в нуль и бесконечность.

Пусть тройка функций $U(\xi,\delta),\ Y(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)$ удовлетворяет соотношению (1.17e).

Тогда замена переменных $\xi = \xi(x,t), \delta = \delta(x,t)$ определяется системой

$\frac{\partial(\ x,\ t)}{\partial(\ \xi,\ \delta)} = \begin{pmatrix} \Psi_1, & \Psi_2 \\ & \\ \Psi_3, & \Psi_4 \end{pmatrix}$ и задает решение уравнения (1.14) по формуле

$Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)}.$ $(1.18a)$

□

Доказательство.

Доказательство этой теоремы проводится в несколько этапов. Сначала доказывается прямое утверждение, пункт 1).

Используя (1.16) из (1.17), получим выражения

$$K(U(\xi,\delta))\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial t}{\partial\delta} - \frac{\partial U}{\partial\delta}\frac{\partial t}{\partial\xi}\right) = Y(\xi,\delta)[x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta],$$
$$K(U(\xi,\delta))\left(-\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\delta} + \frac{\partial U}{\partial\delta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right) =$$
$$T(\xi,\delta)[x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta]. \tag{1.18}$$

Уравнение (1.14) принимает вид

$$T(\xi,\delta) - K(U)\left(\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial t}{\partial\delta} - \frac{\partial Y}{\partial\delta}\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)/[x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta] +$$
$$K(U)F(U) = 0. \tag{1.19}$$

Соотношения (1.17) можно переписать в виде

$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x} = Y(\xi,\delta)/K(U)|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)}$,

$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t} = T(\xi,\delta)/K(U)|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)}$.

С необходимостью должно быть выполнено соотношение,

$\frac{\partial}{\partial t}Z'{}_x = \frac{\partial}{\partial x}Z'{}_t$,

которое примет вид

$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{Y(\xi(x,t),\ \delta(x,t))}{K(U(\xi(x,t),\ \delta(x,t))}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T(\xi(x,t),\ \delta(x,t))}{K(U(\xi(x,t),\ \delta(x,t))}\right]$.

Это соотношение, с учетом (1.16),(1.17) можно записать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{Y}{K(U)}\right] + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}\left[\frac{Y}{K(U)}\right] - \frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{T}{K(U)}\right] + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}\left[\frac{T}{K(U)}\right] = 0. \tag{1.20}$$

Исследование условий разрешимости системы (1.18)-(1.20) проводится в два этапа.

На первом этапе система (1.18)-(1.20) рассматривается, как нелинейная алгебраическая система относительно производных $x'_\xi,\ x'_\delta,\ t'_\xi,\ t'_\delta$.

Теорема 1.2.2

Нелинейная алгебраическая система (1.18)-(1.20) относительно производных $x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta$ разрешима и ее решение имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \Psi_1(\xi,\delta), \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = \Psi_2(\xi,\delta), \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \Psi_3(\xi,\delta), \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = \Psi_4(\xi,\delta), \tag{1.24}$$

и кроме того

$$detJ = \frac{K(U)^2({Y'}_\delta {U'}_\xi - {U'}_\delta {Y'}_\xi)^2}{P_1(\xi,\delta)}, \qquad (1.25)$$

где P_1 описывается формулой (1.17 m).

Доказательство теоремы 1.2.2. Нелинейная алгебраическая система (1.18)-(1.20)относительно производных ${x'}_\xi, {x'}_\delta, {t'}_\xi, {t'}_\delta$ содержит одно линейное уравнение (1.20). Элементарными преобразованиями приводятся к линейным ещё два уравнения. Любую, одну из этого набора производную можно выразить через три остальных и подставить в оставшееся уравнение. Уравнение для неё оказывается линейным из которого она вычисляется.

□

Замечание 1.2.2 Система трех уравнений (1.18), (1.19) впервые исследована автором в [60]. Целью этого исследования была попытка обобщения преобразования приведенного в параграфе 1.1.1. Система четырех уравнений (1.18), (1.19),(1.20) впервые исследована автором в [62] и докладывалась на семинарах и конференциях(См. список апробации работы во Введении [8]-[16]).

Замечание 1.2.3

В работе [62] и в трудах конференций (нумерация по списку конференций в Введении [8,10-12])использованы несколько иные обозначения. Для сведения, приведем основные формулы функций $\Psi_i,\ i = 1,4$ в этих обозначениях.

$$\Psi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial \xi} = K[-Q_1Q_2TU'_{\xi} + Q_1FKTU'_{\xi}{}^2 + Q_1T^2U'_{\xi}{}^2 + Q_2{}^2TU'_{\delta} -$$
$$Q_2FKTU'_{\delta}U'_{\xi} - Q_2T^2U'_{\delta}U'_{\xi} - Q_1T'_{\xi}U'_{\xi}Y^2 +$$
$$Q_2T'_{\delta}U'_{\xi}Y^2]/(YP(\xi,\delta)), \tag{1.26}$$

$$\Psi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial \delta} = K[-Q_1^2TU'_{\xi} + Q_1Q_2TU'_{\delta} + Q_1FKTU'_{\delta}U'_{\xi} + Q_1T^2U'_{\delta}U'_{\xi} -$$
$$Q_2FKTU'_{\delta}{}^2 - Q_2T^2U'_{\delta}{}^2 - Q_1T'_{\xi}Y^2U'_{\delta} +$$
$$Q_2T'_{\delta}Y^2U'_{\delta}]/(YP(\xi,\delta)), \tag{1.27}$$

$$\Psi_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial t}{\partial \xi} = Q_2K(U)[Q_1U'_{\xi} - Q_2U'_{\delta}]/P(\xi,\delta), \tag{1.28}$$

$$\Psi_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial t}{\partial \delta} = Q_1K(U)[Q_1U'_{\xi} - Q_2U'_{\delta}]/P(\xi,\delta). \tag{1.29}$$

Здесь обозначено:

$$P(\xi,\delta) = Q_1FKTU'_{\xi} + Q_1T^2U'_{\xi} - Q_2FKTU'_{\delta} -$$
$$Q_2T^2U'_{\delta} - Q_1T'_{\xi}Y^2 + Q_2T'_{\delta}Y^2, \tag{1.30}$$

$$Q_1 = FKU'_{\delta} + TU'_{\delta} - YY'_{\delta}, \quad Q_2 = FKU'_{\xi} + TU'_{\xi} - YY'_{\xi}. \tag{1.31}$$

□

Продолжим построение замены переменных. Будем строить функции $x(\xi,\delta), t(\xi,\delta)$ с помощью системы (1.21)-(1.24). Хорошо известно, [35,157] что условие разрешимости системы такого типа получается вычислением вторых смешанных производных функций $x(\xi,\delta)$ и $t(\xi,\delta)$ по аргументам ξ и δ, а затем приравниваем эти выражения друг другу согласно равенствам

$$x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi}, \quad t''_{\xi\delta} = t''_{\delta\xi}. \tag{1.32}$$

Явные выражения для смешанных производных вычисленные для произвольных функций $U,\ Y,\ T$ полностью приведены в приложении к Главе 1 диссертации. Соотношения (1.32) являются двумя условиями разрешимости системы (1.21)–(1.24).

Имеет место следующее интересное и важное свойство:

Теорема 1.2.3

1) Имеет место тождество

$(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \delta} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi})/T \ \equiv \ (\frac{\partial \Psi_3}{\partial \delta} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial \xi})/Y,$

где функции $\Psi_i, i = 1, 4$ определены равенствами (1.17a)-(1.17d).

2) Два условия разрешимости (1.32)системы (1.21)-(1.24) сводятся к одному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\Psi_3 - \frac{\partial}{\partial \xi}\Psi_4 = 0, \tag{1.33}$$

где Ψ_3, Ψ_4 правые части в (1.23),(1.24)заданы формулами (1.17c), (1.17d).

$\square$

Замечание 1.2.4

В обозначениях (1.31) соотношение (1.33) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{Q_2 K(Q_1 U'_{\xi} - Q_2 U'_{\delta})}{P}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{Q_1 K(Q_1 U'_{\xi} - Q_2 U'_{\delta})}{P}\right) = 0. \tag{1.34}$$

Следствие 1.2.3

Если какая-то тройка функций $U,\ Y,\ T$ удовлетворяет соотношению (1.33), то соответствующая линейная система (1.21)-(1.24) разрешима. $\square$

Доказательство теоремы 1.2.3 производится прямыми вычислениями производных выражений системы (1.21)-(1.24). Если продифференцировать правые части выражений (1.21)-(1.24), то следует тождество, приведенное в теореме 1.2.3. Выкладки подробно приведены в Приложении к параграфу 1.2 Главы 1.

Замечание 1.2.5

Теоремы 1.2.2, 1.2.3 демонстрируют некоторое, ранее неизвестное, свойство квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которое позволяет конструировать решения уравнения (1.14) в параметрической форме. Параметром служит произвол в выборе тройки функций $U,\ Y,\ T$, удовлетворяющих соотношению (1.33). $\square$

Проведём доказательство обратного утверждения, а именно пункта 2) в теореме 1.2.1. Условие (1.17e),(или(1.33)) гарантирует разрешимость системы (1.21)-(1.24). Таким образом, существуют функции $x(\xi,\delta), t(\xi,\delta)$.

По предположению определитель

$detJ = \Psi_1\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3$

не равен нулю и бесконечности.

Следовательно существует обратное отображение (замена), $\xi(x,t), \delta(x,t)$, хотя бы локально. Определим функцию $Z(x,t)$ по формуле (1.18a).

Сначала подставим (1.18a) в левую часть первого соотношения (1.17) и получим

$$K(U(\xi,\delta))\tfrac{\partial U(\xi(x,t),\delta(x,t))}{\partial x} = K(U)\left[\tfrac{\partial U}{\partial \delta}{\delta'}_x + \tfrac{\partial U}{\partial \xi}{\xi'}_x\right] =$$
$$K(U(\xi,\delta))\left(\tfrac{\partial U}{\partial \xi}\tfrac{\partial t}{\partial \delta} - \tfrac{\partial U}{\partial \delta}\tfrac{\partial t}{\partial \xi}\right)/detJ.$$

Здесь использованы соотношения между производными (1.16). Подставляем в это выражение значения производных (1.21)-(1.24)и определитель (1.25) получим, что это выражение равно $Y(\xi,\delta)$. Таким образом мы доказали первую формулу (1.17).

Аналогично подставим (1.18а) в левую часть второго соотношения (1.17) и получим

$K(U(\xi,\delta))\frac{\partial U(\xi(x,t),\delta(x,t))}{\partial t} = K(U)\left[\frac{\partial U}{\partial \delta}{\delta'}_t + \frac{\partial U}{\partial \xi}{\xi'}_t\right] =$

$K(U(\xi,\delta))\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)/detJ.$

Здесь использованы соотношения между производными (1.16). Подставляем в это выражение значения производных (1.21)-(1.24)и определитель (1.25) получим, что это выражение равно $T(\xi,\delta)$. Таким образом мы доказали вторую формулу (1.17).

Вычислим выражение

$$K(Z)[{Z'}_t - {(K(Z){Z'}_x)'}_x + F(Z)] \qquad (1.34a)$$

Это левая часть исходного уравнения (1.14) умноженная на функцию $K(Z)$. Подставим в выражение (1.34а) уже доказанные соотношения (1.17)и функцию $Z(x,t)$ по формуле (1.18а).

Выражение (1.34а) примет вид

$$T(\xi,\delta) + K(U)F(U) - K(U(\xi,\delta)[{Y'}_\delta{\delta'}_x + {Y'}_\xi{\xi'}_x] \quad (1.34b)$$

Используя соотношение между производными (1.16)и выражения для производных из теоремы 1.2.2 из (1.34b) получим соотношение

$$T(\xi,\delta)+K(U)F(U)-K(U)^2(T+K(U)F(U))[{Y'}_\delta{U'}_\xi-{Y'}_\xi{U'}_\delta]^2/(detJP_1).$$

Подставим в последнее соотношение выражение для $detJ$ (1.25) и получим тождественный нуль, т.е. доказано, что выражение (1.34а) равно нулю. Таким образом теорема 1.2.1 полностью доказана.

1.3 Пример построения решения квазилинейного параболического уравнения. Решение Зельдовича-Компанейца-Баренблатта

Применим метод предыдущего параграфа для построения решения квазилинейного параболического уравнения :

$$Z_t - (kZ^{k-1}{Z'}_x)'_x = 0, \quad F = 0, \tag{1.35}$$

при $t = t_0 > 0$.

В работе [92] было найдено его решение

$$Z = (Cx^2/t)^{1/(k-1)}, \; C = \frac{1-k}{2k(k+1)}. \tag{1.36}$$

Получим это решение предложенным выше способом.

Рассмотрим соотношение (1.33). Используя имеющийся в нашем распоряжении произвол в выборе связи функций U, Y, T, положим $Y(\xi,\delta) = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \;\; T(\xi,\delta) = \frac{\partial U}{\partial \delta}$.

То есть предполагается, что функции Y, T являются компонентами вектора градиента $\operatorname{grad} U$.

Тогда соотношение (1.33) превращается в уравнение на одну функцию U:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{(U^{k-1}){U'}_\xi[{U''}_{\xi\xi} - {U'}_\delta][{U'}_\xi {U''}_{\xi\delta} - {U'}_\delta {U''}_{\xi\xi}]}{P}\right) - \\ &\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{(U^{k-1})[{U'}_\delta^{\,2} - {U'}_\xi {U''}_{\xi\delta}][{U'}_\delta {U''}_{\xi\xi} - {U'}_\xi {U''}_{\xi\delta}]}{P}\right) = 0, \end{aligned} \tag{1.37}$$

где

$$\begin{aligned} P(\xi,\delta) = ({U'}_\delta)^3 {U''}_{\xi\xi} + {U'}_\xi {U''}_{\xi\delta}[{U''}_{\xi\delta}{U'}_\xi - 2({U'}_\delta)^2] + \\ {U''}_{\delta\delta}[{U'}_\delta({U'}_\xi)^2 - ({U'}_\xi)^2 {U''}_{\xi\xi}]. \end{aligned}$$

Одно из решений уравнения (1.37) имеет вид

$$U(\xi,\delta)=\exp(-\frac{(\xi)^2}{2(k+1)\delta}). \tag{1.38}$$

Отсюда следует, что система (1.21)-(1.24)примет вид:

$$\begin{aligned} x'_{\xi} &= \frac{2kE_1[(k+1)\delta+(k-1)\xi^2]}{(k-1)\xi^2}, \\ x'_{\delta} &= -\frac{kE_1[2(k+1)\delta+(k-1)\xi^2]}{(k-1)\delta\xi}, \\ t'_{\xi} &= \frac{2k\delta E_1[2(k+1)\delta+(k-1)\xi^2]}{(k-1)\xi^3}, \\ t'_{\delta} &= \frac{-kE_1[4(k+1)\delta+(k-1)\xi^2]}{(k-1)\xi^2}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

где обозначено $E_1=\exp[-\frac{(k-1)\xi^2}{2(k+1)\delta}]$.

После интегрирования (1.39) имеем

$$\begin{aligned} x &= x(\xi,\delta)=x_o-\frac{2kE_1(k+1)\delta}{(k-1)\xi}, \\ t &= t(\xi,\delta)=t_o-\frac{2kE_1(k+1)\delta^2}{(k-1)\xi^2}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где x_o, t_o произвольные константы, которые без ограничения общности можно выбрать равными нулю.

Выразив ξ и δ через x и t из (1.40) и подставив в (1.38), придем к формуле (1.36). Наиболее просто это сделать, если вычислить x^2/t.

$x^2/t=-\frac{2k(k+1)E_1}{(k-1)}=-\frac{2k(k+1)\exp(-(k-1)\xi^2/[2(k+1)\delta])}{(k-1)}$.

После возведения в степень получим

$[-\frac{(k-1)x^2}{2k(k+1)t}]^{1/(k-1)}=U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)}=\exp(-\frac{\xi^2}{2(k+1)\delta})|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)}$.

Откуда следует (1.36). Якобиан преобразования имеет вид

$$J=\frac{2k^2{E_1}^2(k+1)\delta}{(k-1)\xi^2}. \tag{1.41}$$

Замечание 1.3.1.

В [62]и в трудах конференций, по списку приведенному во Введении [8], это решение приведено с некоторыми константами, которые здесь, для простоты, положены равными нулю.

Замечание 1.3.2.

Выбирая другие решения (1.37), можно построить значительно более сложные решения(1.35).

1.4 Примеры построения семейств решений полулинейных уравнений Фитц-Хью-Нагумо-Семенова, Зельдовича

Условие разрешимости (1.33) означает, что существует связь между функциями U, Y, T. В данном параграфе мы рассмотрим некоторые примеры такой связи.

Пусть функции $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$ в (1.33) имеют вид

$Y(\xi,\delta) = r(U) + h(U)G(\xi,\delta,U)$, $T(\xi,\delta) = w(U) + v(U)G(\xi,\delta,U)$,

где $U = U(\xi,\delta)$, $G(\xi,\delta,U)$ -дважды непрерывно дифференцируемая функция неизвестная трех переменных, $r(U)$, $w(U)$, $h(U)$, $v(U)$ дважды непрерывно дифференцируемые неизвестные функции одной переменной.

После подстановки этих функций в (1.33) получим громоздкое соотношение.

После преобразований оно допускает представление в виде произведения двух сомножителей.

В один сомножитель входит функция $G(\xi,\delta,U)$ и ее производные. Этот сомножитель не равен нулю, так как якобиан не равен нулю.
Второй большой сомножитель содержит только степени функции $G(\xi,\delta,U)$, и в силу (1.33) приравниваем его к нулю. Поскольку он неудобен для ана-

лиза из-за большого размера, разделим его на два более простых случая А и В.Смотри с.10 Приложения.

Способ А.

Рассмотрим следующий частный случай

$$Y(\xi,\delta) = G(\xi,U), \quad T(\xi,\delta) = w(U) + v(U)G(\xi,U), \tag{1.42}$$

где $U = U(\xi,\delta)$.

Утверждение 1.4.1.

Пусть $G(\xi,U)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, $w(U)$ и $v(U)$дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной.

Тогда соотношение (1.33) принимает вид

$$[K(U)v^{''}(U) - K^{'}(U)v^{'}(U)]G^3 + [2K(U)vv^{'}(U) - K^{'}(U)w^{'}(U) +$$
$$K(U)w^{''}(U)]G^2 + [3F(U)v^{'}(U)K^2 + 2wv^{'}K + vwK^{'}(U)]G -$$
$$K^2wF^{'}(U) + w^2K^{'}(U) + FK^2w^{'}(U) = 0. \tag{1.43}$$

□

Этому равенству можно попытаться удовлетворить, приравняв нулю коэффициенты при степенях G . Получим систему из четырех уравнений на две функции w, v.

$[K(U)v^{''}(U) - K^{'}(U)v^{'}(U)] = 0,$

$[2K(U)vv^{'}(U) - K^{'}(U)w^{'}(U) + K(U)w^{''}(U)] = 0,$

$[3F(U)v^{'}(U)K^2 + 2wv^{'}K + vwK^{'}(U)] = 0,$

$K^2wF^{'}(U) + w^2K^{'}(U) + FK^2w^{'}(U) = 0$

Оказывается, в ряде интересных случаев, всем четырем уравнениям можно удовлетворить. При этом функция $G(\xi,U)$, а также функция U (!), остаются произвольными. Этот произвол является свободным "параметром".

□

Разберем примеры, в которых (1.43) разрешимо. Положим в (1.14) $K(Z) = 1$.

Рассмотрим полулинейное параболическое уравнение вида

$$Z'_t - Z''_{xx} + F(Z) = 0. \tag{1.44}$$

Замечание 1.4.1 В [53], [59], [69]-[71], [150], [199], [118], [184] изучались его решения имеющие вид отношения полиномов из экспонент. (см. также Главу 5).

Пример 1.4.2.

Пусть в (1.44)функция $F(Z)$ имеет вид

$$F(Z) = \frac{2\lambda^2 Z^3}{9} \pm (a_1 - Z)(a_o - Z). \tag{1.45}$$

Тогда уравнение (1.44) будет отличается от уравнения Колмогорова-Петровского -Пискунова-Фишера лишь на слагаемое $\frac{2\lambda^2 Z^3}{9}$.

Если выбрать $v(U) = \frac{\pm 3}{2\lambda} + \lambda U$, $w(U) = -3F(U)/2$, где $\lambda-$константа, то (1.43) удовлетворяется.

Пример 1.4.3.

Пусть в (1.44)

$$F(Z) = Z(a_1 - Z)(a_o - Z). \tag{1.46}$$

Уравнение (1.44) в этом случае превращается в уравнение Фитц-Хью-Нагумо-Семенова (ФХНС). Если $a_o = 0$, то (1.44)превращается в уравнение Зельдовича.

Если выбрать $v(U) = \frac{3U}{\sqrt{2}} - \frac{a_o+a_1}{\sqrt{2}}, \quad w(U) = -3F(U)/2$, то (1.42) удовлетворяется.

В обоих примерах 1.4.2,1.4.3 система (1.2.21)-(1.2.24) имеет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = ((w(U) + v(U)G)G'_{\xi} - (F(U)v + vw + v^2G + G^2v' + Gw' - (w + vG)G'_{\xi})U'_{\xi})/P_1, \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = ((Gv + w)G'_{\delta} - [Fv + v^2G + vw + G^2v' + Gw' - (w + vG)G'_U]U'_{\delta})/P_1, \tag{1.48}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = (-GG'_{\xi} + (F + Gv + w - GG'_U)U'_{\xi})/P_1, \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = \frac{(F + w + Gv - GG'_U)U'_{\delta})}{P_1}. \tag{1.50}$$

где $P_1 = Fw + w^2 + vwG - G^2(Gv' + w')$.

Якобиан $J = \frac{G'_{\xi}U'_{\delta}}{P_1}$ не обращается в нуль, $Q_1 \neq 0, Q_2 \neq 0$ одновременно (1.31),и не существует константы c такой, что $U'_{\delta} + cU'_{\xi} = 0$.

Выбирая функции v, w как указано в примерах 1.4.2, 1.4.3, при этом функции G и U остаются пока произвольными, мы получим разрешимую в квадратурах систему (1.47)-(1.50). Решая ее и делая обратную замену переменных, (в большенстве интересных случаев численными методами), получим по формуле (1.15) семейство решений квазилинейного уравнения (1.44) для случаев (1.45), (1.46).

Детализируем случай примера 1.4.3 и выпишем явные формулы.

Пусть в (1.45) $a_1 = 1,\ a_o = -1$. Тогда исследуемое уравнение ФХНС выглядит так:

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z(1 - Z^2) = 0. \tag{1.51}$$

Из (1.42), следует, что функции $Y,\ T$ связываются с функциями G и T по формулам

$Y(\xi,\delta) = G(\xi,U),\ T(\xi,\delta) = \frac{3U(1-U^2)}{2} + 3UG(\xi,U)/\sqrt{2}.$

Пусть функция G имеет вид

$G(\xi,U)) = \frac{U(1-U+\exp(\sqrt{2}\xi)(1+U))}{\sqrt{2}(\exp(\sqrt{2}\xi)-1)}$

Тогда два первых уравнения (1.47),(1.48) системы принимают вид

$x'_\xi = 1,\quad x'_\delta = 0.$

Остается проанализировать вторую пару уравнений (1.49), (1.50) для функции $t(\xi,\delta)$.

Пусть функция U, например, имеет вид

$$U(\xi,\delta) = p + \frac{1 - \exp(\sqrt{2}\xi)}{1 + \exp(\sqrt{2}\xi) + \exp(\xi/\sqrt{2} - 3\delta/2)}, \tag{1.52}$$

где $p = const$. Если взять $p = 0$, то интегрируя (1.49), (1.50) получим

$t(\xi,\delta) = \delta$. Учитывая, что

$\delta = t,\ \xi = x$ и подставляя в формулу (1.15), (1.52), получим известное решение уравнения ФХНС

$$Z(x,t) = \frac{1 - C_1\exp(\sqrt{2}x)}{1 + C_1\exp(\sqrt{2}x) + C_2\exp(x/\sqrt{2} - 3t/2)}. \tag{1.53}$$

Здесь константы $C_i = 1, i = 1, 2$.

Замечание 1.4.2.

Если сравнить выражения (1.52),(1.53) при $p = 0,\ \delta = t,\ \xi = x$ то они совпадают.

Покажем как строятся другие решения уравнения (1.51).

Пусть теперь $p = 1$. Тогда система (1.49),(1.50) имеет вид:

$$t'_{\xi} = 2\sqrt{2}[\sqrt{r} + \exp(3\delta/2)(1+r)][\exp(3\delta/2)(1-3r) - r^{3/2}]/(3P_3),$$
$$t'_{\delta} = \exp(\xi/\sqrt{2} + 3\delta/2)[1 - \exp(\sqrt{2}\xi)]^2/P_3, \qquad (1.54)$$

где $r = \exp(\xi\sqrt{2})$,

$P_3 = 2r^2 + \exp(3\delta/2)[\sqrt{r} + 6r^{3/2} + r^{5/2}] + \exp(3\delta)[2 + 4r + 2r^2]$.

Решение (1.54) задается формулой

$t(\xi, \delta) = \frac{4}{3}ArcTanh[(1 + 6r + r^2 + 4\exp(3\delta/2 - \xi/\sqrt{2})(1+r)^2/[r-1]^2] + \sqrt{2}\xi/3 - \frac{4}{3}\ln[1+r]$,

где через $ArcTanh$ обозначена обратная функция к функции гиперболический тангенс.

Переходя к старым переменным имеем

$\xi = x$,

$\delta = \frac{2}{3}\ln[(-\exp(x/\sqrt{2})[1 + 6y + y^2] + L_1)/(4[1+y]^2)]$,

где обозначено

$L_1 = \exp(x/\sqrt{2})[y-1]^2 Tanh[3t/4 - x/2 + \ln[1+y]]$,

$y = \exp(\sqrt{2}x)$, и через $Tanh$ обозначена функция –– гиперболический тангенс.

Сделаем эту замену в (1.52), мы получим

Предложение 1.4.1

Решение задачи Коши для уравнения ФХНС (1.51) со специальными начальными данными

$Z(x, 0) = \frac{1-\exp(\sqrt{2}x)}{1+\exp(\sqrt{2}x)+(1/2)\exp(x/\sqrt{2})}$

имеет вид

$Z(x, t) = 1 + \frac{1-\exp(\sqrt{2}x)}{1+\exp(\sqrt{2}x)-l(x,t)}$, *где*

$l(x,t) = \frac{4[y+1]^2}{1+6y+y^2-[y-1]^2 Tanh[3t/4-\sqrt{2}x/4+\ln[1+y]]}.$

$y = \exp(x\sqrt{2}),$

где через $Tanh$ обозначена функция – гиперболический тангенс.

□

Замечание 1.4.3

После преобразований выражений приведенных в предложении 1.4.1 имеем

$Z(x,t) = \frac{1-\exp(\sqrt{2}x)}{1+\exp(\sqrt{2}x)+(1/2)\exp(x/\sqrt{2}-3t/2)}.$

Если сравнить решение (1.53)при значениях констант $C_1 = 1,\ C_2 = 1$ с полученным решением, то видно, что они отличаются значением константы в третьем слагаемом в знаменателе.

Замечание 1.4.4

Существует предел при больших временах. Функкция $Z(x,t)$ эволюциирует к функции $\tilde{Z}(x)$– решению стационарного уравнения

$$\tilde{Z}''_{xx} + \tilde{Z}(1-\tilde{Z}^2) = 0. \tag{1.55}$$

На Рис.3– Рис.5 показан график классического решения (1.52) со значениями констант $C_1 = 1,\ C_2 = 1$ и проведено его сравнение с решением, приведенным в *Предложении 1.4.1.* Таким образом, построено решение с другими начальными данными.

Пусть теперь в (1.52) $p = 2$.

Тогда система (1.49)-(1.50) имеют вид

$t'_\xi = 2\sqrt{2}[\sqrt{r} + \exp(3\delta/2)(1+r)][\sqrt{r} - 3\,r^{3/2} + \exp(3\,\delta/2)(3 - 6\,r - r^2)]/(3P_4),$

$$t'_\delta = -\exp(-\xi/\sqrt{2} + 3\delta/2)[-1+\sqrt{r}]^2[1+\sqrt{r}]^2/P_4, \tag{1.56}$$

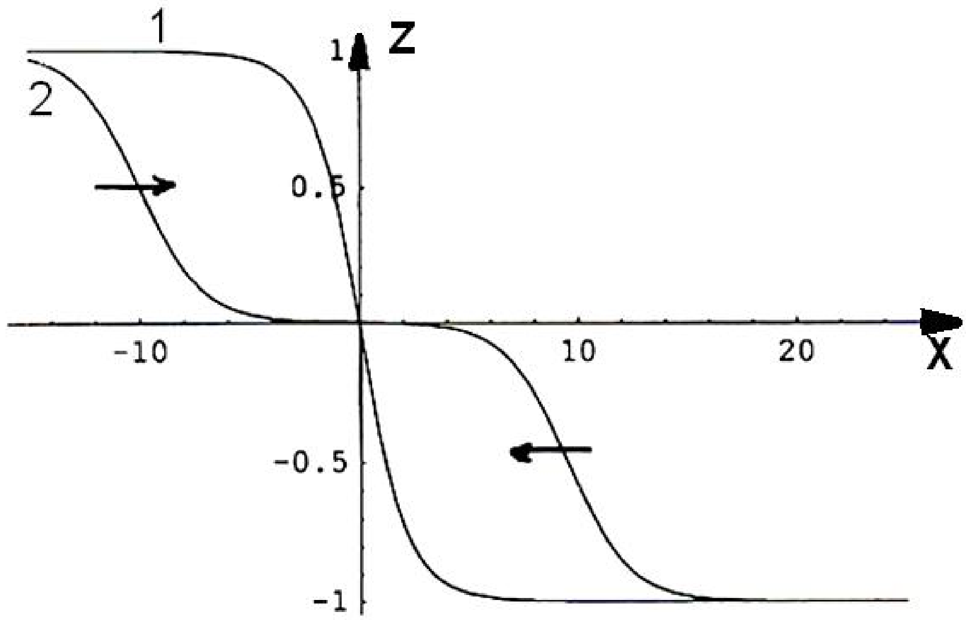

Рис. 3: Кривая 1 –стационарное решение, кривая 2–эволюционирующее решение уравнения ФХНС.

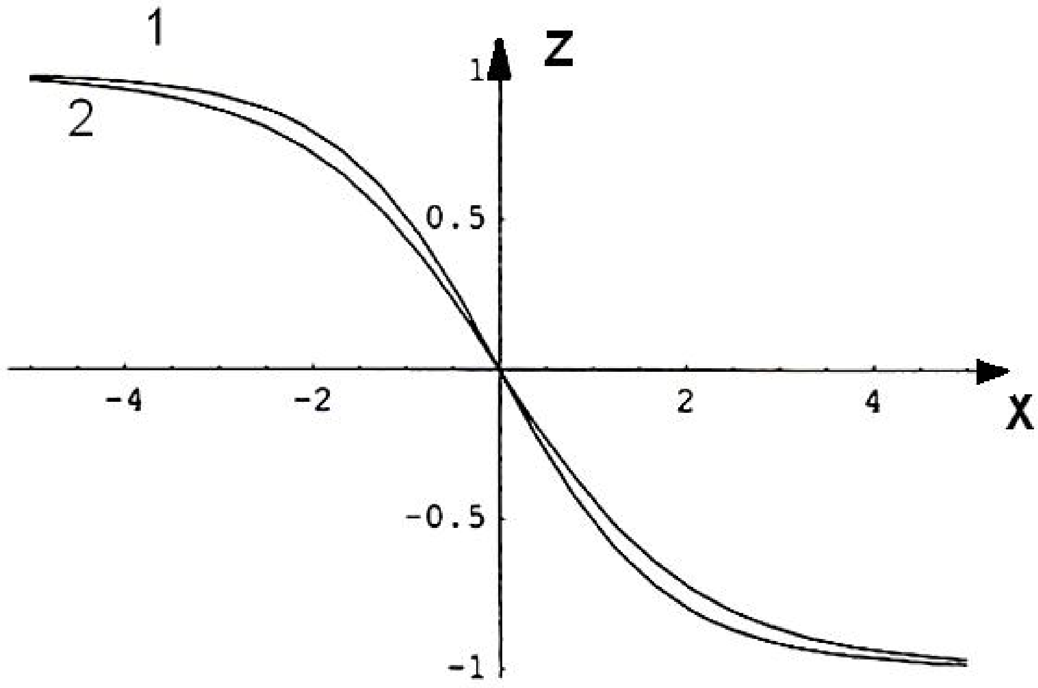

Рис. 4: Сравнение начальных данных построенного решения уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова приведенного в Предложении 1.4.1.-кривая1 и решения (1.53) при $C_i = 1, i = 1, 2$- кривая 2 .

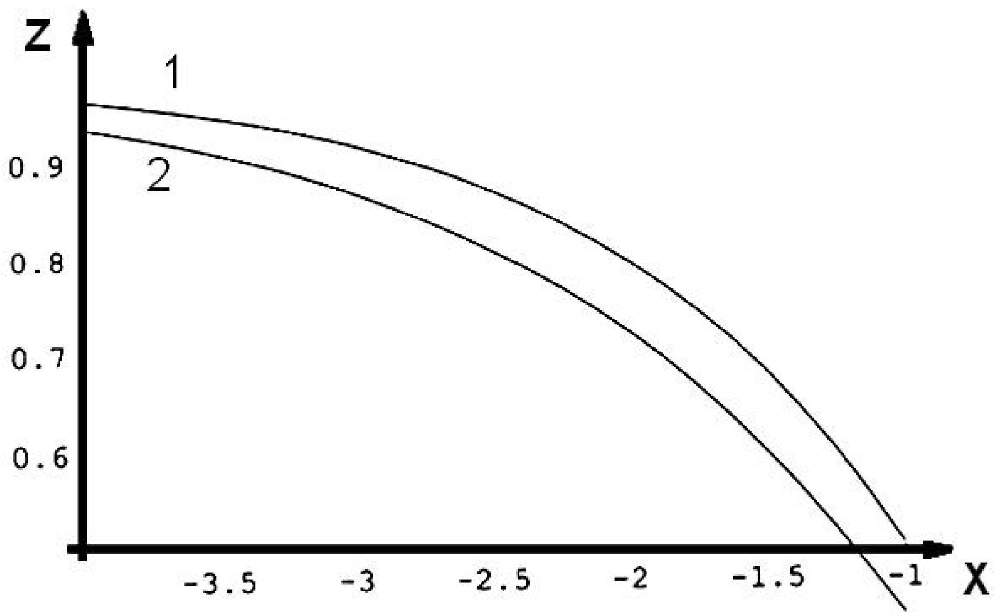

Рис. 5: Сравнение начальных данных построенного решения уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова приведенного в Предложении 1.4.1. и решения (1.53) в большом масштабе.

Здесь обозначено

$P_4 = [2\sqrt{r} + \exp(3\delta/2)[3 + r]][\sqrt{r} + 3r^{3/2} + \exp(3\delta/2)[2 + 4r + 2r^2]$,

$r = \exp(\sqrt{2}\xi)$

Решение системы задается формулой

$t = \frac{4}{3}ArcTanh[(7 + 18r + 7r^2 + 4\exp(3\delta/2 - \xi/\sqrt{2})(1 + r)^2(3 + r))/(r - 1)^2] + \sqrt{2}\xi/3 + 2ArcTanh[2 + r] - \frac{1}{3}\ln[3 + 4r + r^2]$,

где через $ArcTanh$ обозначена обратная функция к функции гиперболический тангенс.

Обратное преобразование переменных x, t имеет вид

$$\begin{aligned}
&\xi = x,\\
&\delta = \frac{2}{3}\ln[(-\sqrt{y}[7 + 18y + 7y^2] + \sqrt{y}[y - 1]^2 Tanh[3t/4 - x\sqrt{2}/4 -\\
&3ArcTanh[2 + y]/2 + \ln[3 + 4y + y^2]/4])/(4[1 + y]^2(3 + y))],
\end{aligned} \qquad (1.57)$$

где $y = \exp(\sqrt{2}x)$. Подставим его в (1.512), получаем

Предложение 1.4.2

Решение задачи Коши уравнение ФХНС (1.51) со специальными начальными условиями

$Z(x,0) = \frac{1-\exp(\sqrt{2}x)}{1+\exp(\sqrt{2}x)+2i\exp(x/\sqrt{2})}$

имеет вид

$Z(x,t) = 2 + \frac{1-\exp(\sqrt{2}x)}{1+\exp(\sqrt{2}x)-k(x,t)}$,

где

$k(x,t) = \frac{4[\exp(\sqrt{2}x)+1]^2(3+\exp(\sqrt{2}x))}{-7-18\exp(x\sqrt{2})-7\exp(2\sqrt{2}x)+n(x,t)}$,

$n(x,t) = [y-1]^2 Tanh[3t/4 - \sqrt{2}x/4 - 3ArcTanh[2+y]/2 + \frac{1}{4}\ln[3+4y+y^2]]$.

□

Замечание 1.4.5

После преобразований решения, получим

$Z(x,t) = \frac{1-\exp(\sqrt{2}x)}{1+\exp(\sqrt{2}x)+2i\exp(x/\sqrt{2}-3t/2)}$.

Это решение, семейства (1.52). Замена в данном случае комплексозначная, поэтому и функция комплексозначная. Решения подобные им в перечисленной выше литературе называются монстрами.

Решения, не являющиеся простыми волнами, имеют место и в других полулинейных уравнениях.

Рассмотрим уравнение Зельдовича

Пусть в (1.14),(1.43) $K(Z) = 1,\ a_1 = 1,\ a_o = 0$.

Замечание 1.4.6

Отметим,что анализ решений типа простых волн для уравнения Зельдовича, которое получается в этом случае, рассматривался в [118],[184].

Из утверждения 1.4.1 и примера 1.4.3 следует, что вторые два уравнения системы (1.49),(1.50) удовлетворяются

$t'_{\xi} = 6\sqrt{2},\quad t'_{\delta} = 0$.

Тогда, получим систему двух уравнений на функцию $G(\xi, U))$

$G'_U = [(1-U)U^2 + \sqrt{2}(3U-1)G]/(2G),\ G'_{\xi} = -[9\sqrt{2}(U+\rho)\rho^2]/(2G)$.

Интегрируя данную систему получим соотношение

$$\frac{\sqrt{2}(1-U) - 18\xi\rho}{\sqrt{2}\ \rho} - \ln(|\sqrt{2}\rho|) + \ln(|\sqrt{2}(U+\rho)|) = 0, \qquad (1.58)$$

где $\rho = U(U-1) - \sqrt{2}G(\xi, U)$.

Остается проанализировать первую пару уравнений (1.47),(1.48) для функции $x(\xi, \delta)$, которая имеет вид

$$x'_{\xi} = \frac{6(U - U^2 + \rho - 3U\rho)}{U - U^2 + \rho} + \frac{U'_{\xi}}{G(\xi, U)},\ x'_{\delta} = \frac{U'_{\delta}}{G(\xi, U)}. \qquad (1.59)$$

Справедливо

Предложение 1.4.3

Пусть произвольная, дважды дифференцируемая функция $U(\xi,\delta)$ *отображает область определения* R^2 *в интервал* $(0,1)$, *а функция* $G(\xi,U)$

определена трансцендентным уравнением(1.58).

Пусть $U'_\delta \neq 0$[4]. *Задача Коши для уравнения (1.14) при* $K(Z)=1,\ F(Z)=-Z^2(1-Z)$ *со специальными начальными данными имеет решение типа кинка*

$Z(x,t)\in[0,1]$ *в параметрической форме*

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\ \delta),t=t(\xi,\ \delta)}=U(\xi,\delta), \tag{1.60}$$

где функция $t(\xi,\delta)=6\sqrt{2}\xi$, *а функция* $x(\xi,\delta)$ *определяется системой*(1.59).

□

Это новое вещественное монотонное решение уравнений (1.14),(1.44).

Способ B.

Иногда удается разрешить соотношение (1.33) другим способом. Будем искать функции $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$ в виде

$Y(\xi,\delta)=M(\delta,U),\ \ T(\xi,\delta)=v(U)M(\delta,U)+w(U),$

где M некоторая дважды непрерывно дифференцируемая неизвестная функция двух переменных, а v,w дважды непрерывно дифференцируемые неизвестные функции одной переменной.

Тогда (1.33) сводится к уравнению совпадающему по виду с (1.43), если заменить в нем $G(\xi,U)$ на $M(\delta,U)$.

Пример 1.4.4.

[4]Это обеспечивает отличие от нуля якобиана.

Пусть функция $F(Z)$ имеет вид как в примере 1.4.2. Тогда в качестве v, w можно взять

$v(U) = \frac{\pm 3}{2\lambda} + \lambda U, \quad w(U) = -3F(U)/2.$

Пример 1.4.5.

Пусть функция $F(Z)$ имеет вид как в примере 1.4.3. Тогда в качестве v, w можно взять

$v(U) = \frac{3U}{\sqrt{2}} - \frac{a_o + a_1}{\sqrt{2}}, \quad w(U) = -3F(U)/2.$

Система (1.21)-(1.24) в примерах 1.4.4, и 1.4.5 имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = ((F(U)v(U) + Mv^2 + vw + M^2 v' + Mw' - (Mv + w)M'_U)U'_\xi)/P_2, \tag{1.61}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = ((Mv + w)M'_\delta - (Fv + Mv^2 + vw + M^2 v' + Mw' - (Mv + w)M'_U)U'_\delta)/P_2, \tag{1.62}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = ((F + Mv + w - MM'_U)U'_\xi)/P_2, \tag{1.63}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = (-MM'_\delta + (F + Mv + w - MM'_U)U'_\delta)/P_2. \tag{1.64}$$

Здесь $P_2 = Fw + Mvw + w^2 - M^3 v' - M^2 w'$. Якобиан имеет вид $J = \frac{M'_\delta U'_\xi}{P_2}$. Эта система разрешима в квадратурах. В семействе решений имеется функциональный произвол. Он дает другое богатое семейство решений уравнения (1.51).

1.5 Пример построения семейств решений уравнения, близкого к уравнению Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера.

Пример 1.5.1.

Рассмотрим задачу Коши для классического полулинейного уравнения

Колмогорова-Петровского -Пискунова-Фишера (КППФ)

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + F(Z) = 0. \tag{1.65}$$

Сначала рассмотрим функцию $F(Z) = -Z(1 - Z)$.

Начальные условия имеют вид

$$Z(x, 0) = \psi(x). \tag{1.66}$$

Здесь $\psi(x)$ непрерывная функция.

Известно, что решение задачи Коши (1.64),(1.65) и начальные данные обладают свойствами $Z(-\infty, t) = 1,\ Z(\infty, t) = 0$

Замечание 1.5.1

Известно, что решение задачи Коши (1.65),(1.66)-в виде кинков существует и единственное [105], [112], [163]. В приложениях важна функция Z, которая имеет область изменения $Z(x,t) \in [0, 1]$ для любого $t > 0$. ОДУ, которое следует из (1.65), исследовано в [118]. Некоторые точные решения этой задачи, со специальными начальными условиями, в виде простых волн построены автором в [118], они включены в справочники [135]- [137].

В примере 1.4.2 построено точное решение в параметрическом виде. При этом, остается произвол в выборе функции U.

Рассмотрим частный случай, когда выберем в формуле (1.45) знак плюс и значения констант $a_1 = 0$.

Тогда уравнение (1.44) примет вид

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - Z(a_o - Z) + \frac{2\lambda^2 Z^3}{9} = 0. \tag{1.67}$$

Заметим, что корни уравнения

$-Z(a_o - Z) + \frac{2\lambda^2 Z^3}{9} = 0$ имеет вид

$Z_1 = 0$, $Z_2 = 0,9999997 = a_o$ например, при значении параметра $\lambda = 10^{-3}$. Третий корень принимает большие отрицательные значения. Поскольку область изменения функции $Z \in [0, a_0]$, то третий корень не принадлежит этому отрезку и не представляет интереса.

Точное решение в параметрической форме определяется системой четырех уравнений на две функции $x(\xi,\delta), t(\xi,\delta)$ и произвольной функции U, где $F(U) = -Z(a_o - Z) + \frac{2\lambda^2 Z^3}{9}$ Функции v, w приведены в примере 1.4.2 в параграфе 1.4.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = ((w(U) + v(U)G)G'_{\xi} - (F(U)v + vw + v^2 G + G^2 v' + Gw' - (w + vG)G'_{\xi})U'_{\xi})/P_1, \tag{1.68}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = ((Gv + w)G'_{\delta} - [Fv + v^2 G + vw + G^2 v' + Gw' - (w + vG)G'_{U}]U'_{\delta})/P_1, \tag{1.69}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = (-GG'_{\xi} + (F + Gv + w - GG'_{U})U'_{\xi})/P_1, \tag{1.70}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = \frac{(F + w + Gv - GG'_{U})U'_{\delta})}{P_1}. \tag{1.71}$$

где обозначено $P_1 = Fw + w^2 + vwG - G^2(Gv' + w')$.

Точное решение в параметрической форме построено. Далее надо востанавливать решение $Z(x,t)$, то есть перейти к переменным $x = x(\xi,\delta)$, $t = t(\xi,\delta)$. Для того, чтобы решить приведенную выше систему (1.68)-(1.71) надо конкретизировать функцию U, G, то есть неявно задать начальные условия (1.66). Функцию G выбираем в простом виде $G(\xi,U) = \xi + U$.

Выберем функцию U

$U(\xi,\delta) = (1+\exp(\frac{(\xi-1)^2}{\varepsilon})+\exp(\frac{(\delta-1)^2}{\varepsilon}))^{-1}+(1+\exp(\frac{(\xi-3)^2}{\varepsilon})+\exp(\frac{(\delta-3)^2}{\varepsilon}))^{-1}$

и вычислим производные.

Замечание 1.5.2

В данном случае выбраны начальные данные моделируют задачу о возникновение волны и выход на автомодельное решение, то есть решение типа кинка. Начальные данные имеют вид суммы двух малых возмущений. Рис.6 .

Обратное преобразование находим с помощью численных методов.

Решаем (1.46)-(1.49) систему численно. Для расчета этой задачи можно применить любой одношаговый метод.

Решение задачи (1.61),(1.62) восстанавливается по формуле

$Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)}$.

На Рис.7- приведены графики восстановленной функции. Два возмущения довольно быстро объединяются и выходят на автомодельное решение (классическая автомодельная волна описанная у классиков [105]).

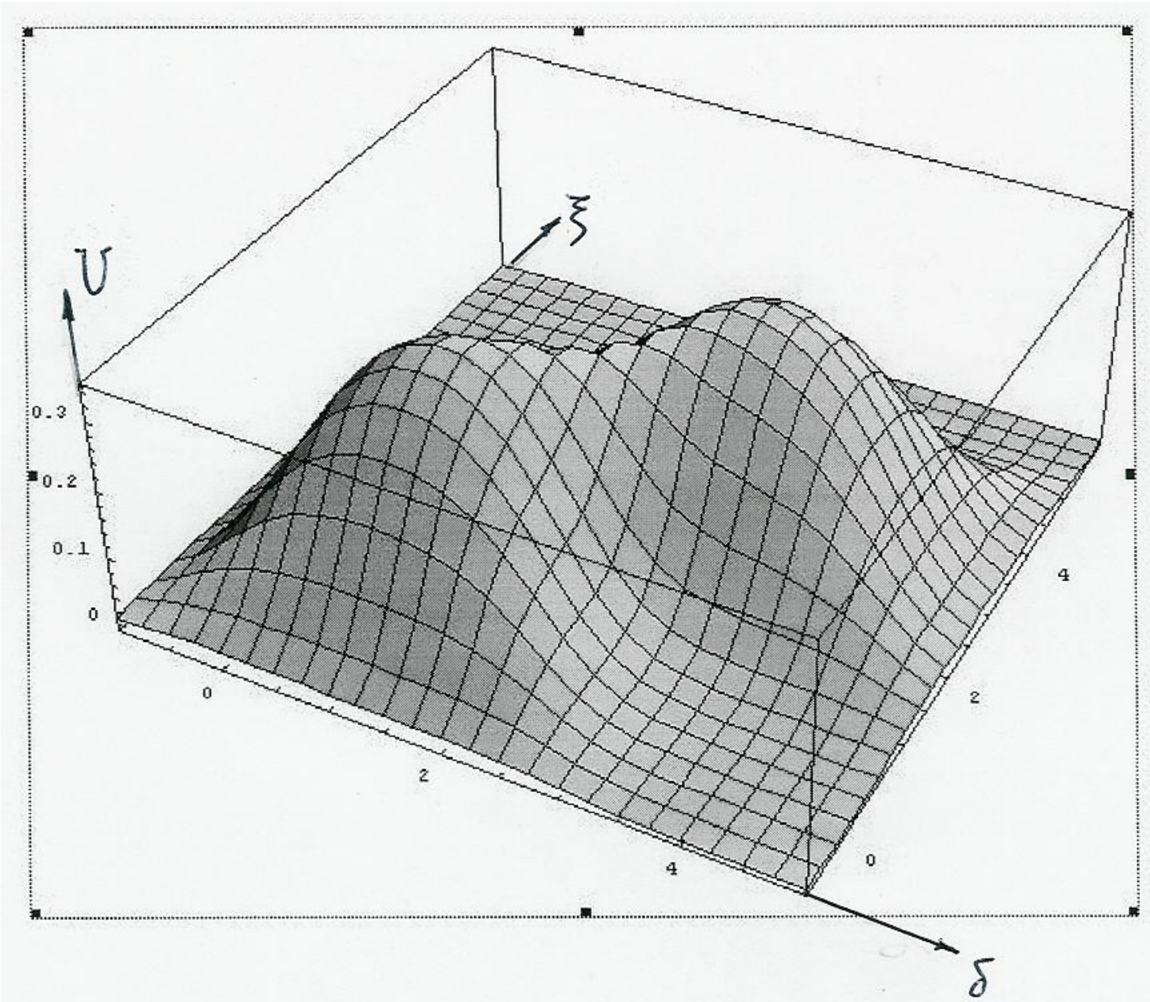

Рис. 6: Начальные данные для задачи (1.66), (1.67) для уравнения, отличающегося от уравнения Колмогорова -Петровского-Писунова-Фишера одним слагаемым.

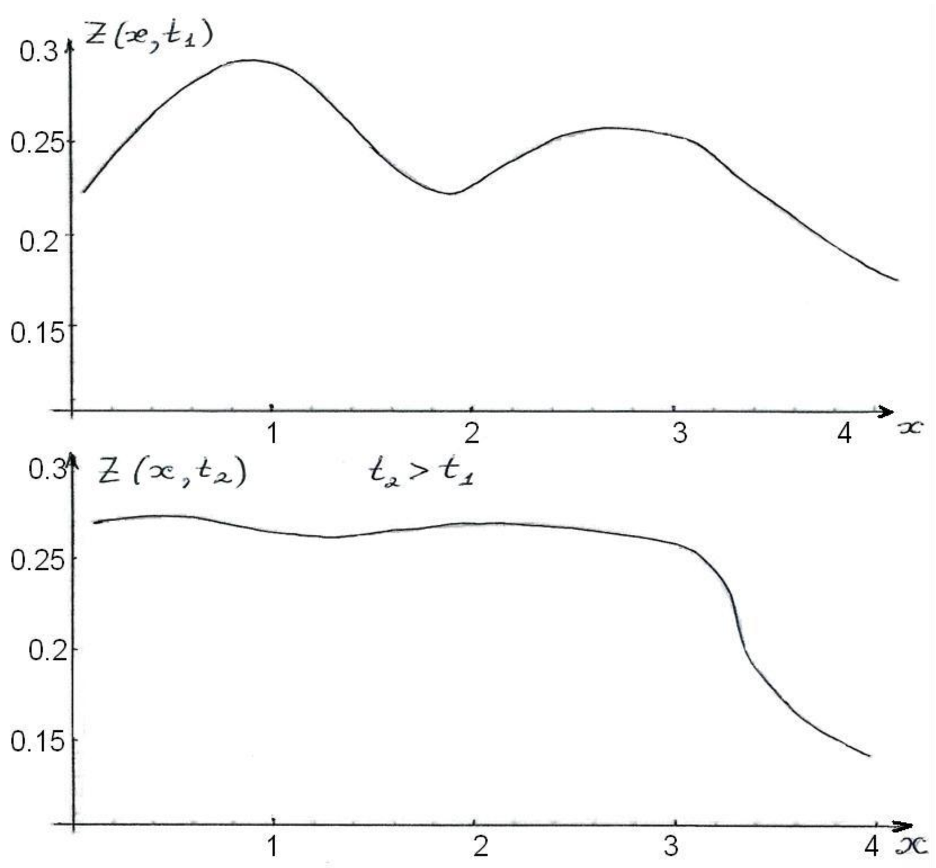

Рис. 7: Результаты численного расчета обратного преобразования по точному решению в параметрической форме для уравнения (1.67). Происходит выход на автомодельное решение типа кинка.

1.6 Метод построения решений в параметрической форме для квазилинейных параболических уравнений с коэффициентом переноса, зависящим от независимой переменной и от функции.

В данном параграфе выяснено, что свойство, описанное в предыдущем параграфе, обобщается на более широкий класс уравнений, с коэффициентами, зависящими от независимой переменной и функции. Алгоритм построения решения формулируется, как и ранее, в условной форме в предположении, что все используемые функции существуют и имеют ту гладкость, которая требуется для того, чтобы алгоритм мог быть применен.

Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение с коэффициентами, зависящими от независимой переменной

$$Z'_t - (P(t,Z)Z'_x)'_x + f(t,Z) = 0. \tag{1.72}$$

Сделаем произвольную замену переменных

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = U(\xi,\delta), \tag{1.73}$$

где функция $Z(x,t)$ решение уравнения (1.72).

Предположим, что якобиан замены переменных $detJ$ не равен нулю (см. параграф 2 Главы 1)

$detJ = x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta \neq 0.$

Предположим, что существует обратное преобразование, хотя бы локально, $\xi = \xi(x,t), \delta = \delta(x,t)$.

Введем обозначения

$$P(t,Z)\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta),$$
$$P(t,Z)\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta). \qquad (1.74)$$

Здесь справедлива теорема, полностью аналогичная Теореме 1.2.1, и поэтому мы ее не приводим.

Вычислим левые части выражений (1.72) используя (1.73),(1.16). Получим выражения

$$P(t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}) = Y(\xi,\delta)detJ,$$
$$P(t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}) = T(\xi,\delta)detJ. \qquad (1.75)$$

Уравнение (1.72) после подстановок (1.74),(1.16) имеет вид

$$T(\xi,\delta) - P(t(\xi,\delta),U)(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi})/detJ +$$
$$P(t(\xi,\delta),U)f(t(\xi,\delta),U) = 0. \qquad (1.76)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные приведенным в параграфе 1.2 перед Теоремой 1.2.1, дополним выписанные соотношения равенством, подобным (1.20) в переменных ξ,δ. Это соотношение, с учетом (1.74),(1.16) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{Y}{P(t(\xi,\delta),U)}] + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}[\frac{Y}{P(t(\xi,\delta),U)}] -$$
$$-\frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{T}{P(t(\xi,\delta),U)}] + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}[\frac{T}{P(t(\xi,\delta),U)}] = 0. \qquad (1.77)$$

Исследование условий разрешимости системы (1.75)-(1.77) проводится в два этапа.

Система (1.75)-(1.77)является нелинейной алгебраической системой относительно производных

$x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta.$

Теорема 1.6.1.

Нелинейная алгебраическая система (1.75)-(1.77) относительно производных

$x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta$ разрешима и имеет решение

$$x'_\xi = P[(fPU'_\delta + TU'_\delta - YY'_\delta)T'_\xi U'_\xi - (fPT'_\delta + TT'_\delta + YY'_\delta P'_t)(U'_\xi)^2 + (YT'_\delta + TY'_\delta + YU'_\delta P'_t)U'_\xi Y'_\xi - TU'_\delta (Y'_\xi)^2]/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(\xi,\delta,t(\xi,\delta)), \tag{1.78}$$

$$x'_\delta = P[fPU'_\delta + TU'_\delta - YY'_\delta)T'_\xi - (fPT'_\delta U'_\delta + TT'_\delta U'_\delta - T(Y'_\delta)^2 + YU'_\delta Y'_\delta P'_t)U'_\xi + U'_\delta(YT'_\delta - TY'_\delta + YU'_\delta P'_t)Y'_\xi]/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} g_2(\xi,\delta,t(\xi,\delta)), \tag{1.79}$$

$$t'_\xi = P[fPU'_\xi + TU'_\xi - YY'_\xi](Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta)/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} g_3(\xi,\delta,t(\xi,\delta)), \tag{1.80}$$

$$t'_\delta = P[fPU'_\delta + TU'_\delta - YY'_\delta](Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} g_4(\xi,\delta,t(\xi,\delta)), \tag{1.81}$$

где

$$P_1(\xi,\delta)) = Y[fPU'_\delta + TU'_\delta - YY'_\delta]T'_\xi - [fPYT'_\delta + TYT'_\delta - fPTY'_\delta - T^2Y'_\delta + Y^2Y'_\delta P'_t]U'_\xi + [Y^2T'_\delta - fPTU'_\delta - T^2U'_\delta + U'_\delta Y^2 P'_t]Y'_\xi. \tag{1.82}$$

$\square$

На втором этапе, как и ранее будем строить функции $x = x(\xi, \delta)$, $t = t(\xi, \delta)$. Рассмотрим условия разрешимости системы (1.78)-(1.82) относительно функций $x = x(\xi, \delta)$, $t = t(\xi, \delta)$.

Необходимое условие разрешимости системы (1.78)-(1.81) имеет вид двух равенств смешанных производных

$$x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi},$$
$$t''_{\xi\delta} = t''_{\delta\xi}. \tag{1.83}$$

(Это следствие гладкости функций $x(\xi, \delta)$, $t(\xi, \delta)$.)

Свойство, обнаруженное в уравнениях с частными производными с переменными коэффициентами, сформулировано в утверждении :

Теорема 1.6.2

1) Имеет место тождество

$(g_1{}'_\delta - g_2{}'_\xi)/T|_{t'_\xi = g_3(\xi,\ \delta,\ t(\xi,\ \delta)),\ t'_\delta = g_4(\xi,\ \delta,\ t(\xi,\ \delta))} \equiv$,

$(g_3{}'_\delta - g_4{}'_\xi)/Y|_{t' = g_3(\xi,\ \delta,\ t(\xi,\ \delta)),\ t'_\delta = g_4(\xi,\ \delta,\ t(\xi,\ \delta))}$,

для любых дважды дифференцируемых функций

$Y(\xi, \delta)$, $T(\xi, \delta)$, $P(t, Z)$, $F(t, Z)$.

2) Два условия разрешимости (1.83) имеет вид одного соотношения на три неизвестные функции $U(\xi, \delta)$, $Y(\xi, \delta)$, $T(\xi, \delta)$, а именно

$$[[g_3(\xi, \delta, t(\xi, \delta))]'_\delta -$$
$$[g_4(\xi, \delta, t(\xi, \delta))]'_\xi]|_{t'_\xi = g_3(\xi,\ \delta,\ t(\xi,\ \delta)),\ t'_\delta = g_4(\xi,\ \delta,\ t(\xi,\ \delta))} = 0. \tag{1.84}$$

□

Замечание 1.6.1

Таким образом, возникающие при дифференцировании производные

$t'_\xi,\ t'_\delta$ исключаются с помощью подстановки правых частей $g_3,\ g_4$. Тогда получим тождество, описанное в первом пункте теоремы 1.6.2.

Описанное в теоремах 1.6.1, 1.6.2 свойство, как и в случае описанном в параграфе 1.2, позволяют конструировать новые решения.

Пример 1.6.1

Этот пример построен, еще одним способом, "способом C "разрешения системы (1.75)-(1.77), по терминологии принятой в данной работе.

Можно выразить из уравнений (1.75) производные $x'_\xi,\ \ x'_\delta$

$$x'_\xi = (-Tt'_\xi + PU'_\xi)/Y,\ \ x'_\delta = (-Tt'_\delta + PU'_\delta)/Y. \qquad (1.85)$$

Пусть функции Y, T имеет вид

$Y(\xi,\delta) = r(t,U),\ T(\xi,\delta) = w(t,U).$

Тогда функции

$w(t,U) = C_o(t)r(t,U) + r(t,U)\int_{Uo}^{U(\xi,\delta)}[P(t,s)/r(t,s)]'_t ds,$ (1.85a)

$x(\xi,\delta) = -\int_0^t C_o(\phi)d\phi + \int_{Uo}^{U}(P(t,s)/r(t,s))ds,$

удовлетворяют системе (1.75)-(1.77),(1.84),

при этом функция $r(t,U)$ определяется из уравнения

(это нелинейное обобщение уравнения Абеля второго рода, переменная t входит как параметр)

$f(t,U)P(t,U) + w(t,U) - rr'_U = 0,$

где $w-$ задано функцией (1.85a).

Функция $t(\xi,\delta)$ остается произвольной.

Вычислим якобиан преобразования $DetJ$

$DetJ = -P^2(t,U)[Y'_\delta(\xi,\delta)U'_\xi - Y'_\xi(\xi,\delta)U'_\delta]^2/P_1(\xi,\delta)).$

В заключении вычислим выражение в квадратных скобках в якобиане

$[{Y'}_\delta(\xi,\delta){U'}_\xi - {Y'}_\xi(\xi,\delta){U'}_\delta] =$

$-{r'}_t[{U'}_\delta(\xi,\delta){t'}_\xi - {U'}_\xi(\xi,\delta){t'}_\delta]$. Очевидно, что якобиан равен нулю при обращении в нуль ${r'}_t$.

Заметим, что выражение для якобиана остается тем же (инвариантно), если при его вычислении воспользоваться формулами примера 1.6.1 (1.85), а затем (1.80),(1.81).

Замечание 1.6.2

Существует предельный переход в этих формулах на случай постоянных коэффициентов. В них надо положить равными нулю производные по переменной t.

При заданных функциях $f(U)$ и $P(U)$, не зависящих от переменной t, получим ОДУ первого порядка (уравнения Абеля второго рода)

$$f(U)P(U) + Cr(U) - r{r'}_U = 0, \tag{1.86}$$

где C — — константа. Большой список решений таких ОДУ приведен в [98] стр. 70.

Материалы данного параграфа обобщаются на более сложное уравнение. Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение с переменными

коэффициентами

$$Z'_t - {(P(x,t,Z){Z'}_x)'}_x + f(x,t,Z) = 0. \tag{1.87}$$

Получим систему аналогичную (1.75)-(1.77).

Теорема 1.6.3

Система нелинейных алгебраических уравнений

$$P(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}) = Y(\xi,\delta) detJ,$$
$$P(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}) = T(\xi,\delta) detJ. \tag{1.88}$$

$$T(\xi,\delta)-P(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))(\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial t}{\partial\delta}-\frac{\partial Y}{\partial\delta}\frac{\partial t}{\partial\xi})/detJ+$$
$$P(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))f(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))=0, \tag{1.89}$$

$$[\frac{\partial T}{\partial\delta}\frac{\partial t}{\partial\xi}-\frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial t}{\partial\delta}][\frac{1}{DetJP(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))}]+$$
$$[\frac{\partial Y}{\partial\delta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\delta}][\frac{1}{DetJP(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))}]-$$
$$Y(\xi,\delta)[[\frac{\partial U}{\partial\delta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\delta}][\frac{\partial P}{\partial U}\frac{1}{DetJ}+$$
$$\frac{\partial P}{\partial t}]\frac{1}{P^2(\xi,\delta),t(\xi,\delta),U(\xi,\delta))}+T(\xi,\delta)[[\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial t}{\partial\delta}-$$
$$\frac{\partial u}{\partial\delta}\frac{\partial t}{\partial\xi}][\frac{\partial P}{\partial U}\frac{1}{DetJ}+\frac{\partial P}{\partial x}]\frac{1}{P^2(t(\xi,\delta),U)}]=0. \tag{1.90}$$

имеет решение .

□

Выражения, довольно большие и поэтому их не приводим. Они вычисляются точно также как и в параграфе 1.2. Обозначим, их через

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=g_1(\xi,\ \delta,\ x(\xi,\ \delta),\ t(\xi,\delta)),\quad \frac{\partial x}{\partial\delta}=g_2(\xi,\ \delta,x(\xi,\ \delta),\ t(\xi,\ \delta)), \tag{1.91}$$

$$\frac{\partial t}{\partial\xi}=g_3(\xi,\ \delta,\ x(\xi,\ \delta),\ t(\xi,\ \delta)),\quad \frac{\partial t}{\partial\delta}=g_4(\xi,\ \delta,\ x(\xi,\ \delta),\ t(\xi,\ \delta)). \tag{1.92}$$

Необходимое условие разрешимости системы (1.91)-(1.92) имеет вид двух равенств смешанных производных после подстановки (исключения производных) первых производных

$x'_\xi,\ x'_\delta$, $t'_\xi,\ t'_\delta$ с помощью выражений (1.91)-(1.92). Два необходимых условия разрешимости имеют вид двух равенств

$$x''_{\xi\delta}-x''_{\delta\xi}|_{x'_\xi=g_1,\ x'_\delta=g_2,\ t'_\xi=g_3,\ t'_\delta=g_4}=0,$$
$$t''_{\xi\delta}-t''_{\delta\xi}|_{x'_\xi=g_1,\ x'_\delta=g_2,\ t'=g_3,\ t'_\delta=g_4}=0. \tag{1.93}$$

Свойство аналогичное, описанное в теореме 1.6.2 в данном случае имеет вид:

Теорема 1.6.4

Пусть (1.91)-(1.92)является решением системы (1.88)-(1.90).

1)Тогда, имеет место тождество

$$[[g_1(\xi,\delta,t(\xi,\delta),x(\xi,\delta))]'_{\delta} -$$
$$[g_2(\xi,\delta,t(\xi,\delta),x)]'_{\xi}]|_{x'_{\xi}=g_1(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ x'_{\delta}=g_2(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ t'_{\xi}=g_3(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ t'_{\delta}=g_4(\xi,\ \delta,\ t,\ x)} \equiv$$
$$\equiv [[g_3(\xi,\delta,t(\xi,\delta),x(\xi,\delta))]'_{\delta} -$$
$$[g_4(\xi,\delta,t(\xi,\delta),x)]'_{\xi}]|_{x'_{\xi}=g_1(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ x'_{\delta}=g_2(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ t'_{\xi}=g_3(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ t'_{\delta}=g_4(\xi,\ \delta,\ t,\ x)}. \quad (1.94)$$

2) Из двух условий разрешимости (1.93)следует одно условие разрешимости

$$[[g_3(\xi,\delta,t(\xi,\delta),x(\xi,\delta))]'_{\delta} -$$
$$[g_4(\xi,\delta,t(\xi,\delta),x)]'_{\xi}]|_{x'_{\xi}=g_1(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ x'_{\delta}=g_2(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ t'_{\xi}=g_3(\xi,\ \delta,\ t,\ x),\ t'_{\delta}=g_4(\xi,\ \delta,\ t,\ x)} =$$
$$= 0. \quad (1.95)$$

□

Имеют место примеры, обобщающие примеры приведенные в предыдущих параграфах.

Пример 1.6.2.

Приведем пример решения уравнения (1.72), построенный "способом А".

Пусть функции $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$ и имеют вид

$Y(\xi,\delta) = G(\xi,U(\xi,\delta))$,

$T(\xi,\delta) = -w(U) + v(U)G(\xi,U) = -\frac{(U-1)^3}{3} + (U-1)G(\xi,U).$

Ниже приведены максимально простые формулы.

Пусть в уравнении (1.72)

$P(t,Z) = t^{-1},\ f(t,Z) = \frac{(Z-1)(3+2(Z-1)^2t^2)}{9t},$

тогда система (1.88)-(1.90)и точное решение в параметрической форме имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 3[-3t^2(U-1)G'_{\xi}(\xi,U) + [-3+t^2-2t^2U+t^2U^2+ \\ 3t^2G(\xi,U) - 3t^2(U-1)G'_{U}]U'_{\xi}]/(tP_2)|_{t=t(\xi,\ \delta),\ U=U(\xi,\ \delta)}, \tag{1.96}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = 3[-3+t^2-2t^2U+t^2U^2+3t^2G(\xi,U) - \\ 3t^2(U-1)G'_{U}]U'_{\delta}/(tP_2)|_{t=t(\xi,\ \delta),\ U=U(\xi,\ \delta)}, \tag{1.97}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = -3[9t^2GG'_{\xi}(\xi,U) + \\ (3-t^2-3U+3t^2U-3t^2U^2+t^2U^3+9t^2G-9t^2UG+ \\ 9t^2GG'_{U})U'_{\xi}]/(t(1-2U+U^2-3G)P_2)|_{t=t(\xi,\ \delta),\ U=U(\xi,\ \delta)}, \tag{1.98}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = -3[3-t^2-3U+3t^2U-3t^2U^2+t^2U^3+9t^2G(\xi,U)-9t^2UG+ \\ 9t^2GG'_{U}]U'_{\delta}/(t(1-2U+U^2-3G)P_2)|_{t=t(\xi,\ \delta),\ U=U(\xi,\ \delta)}, \tag{1.99}$$

$$P_2 = -3+t^2+6U-4t^2U-3U^2+6t^2U^2-4t^2U^3+t^2U^4-9G(\xi,U) - \\ 6t^2G+12t^2UG-6t^2U^2G+9t^2G^2, \tag{1.100}$$

Интегрируем эту систему и если построить функции $x = x(\xi,\delta),\ t = t(\xi,\delta)$, то по формуле (1.73) можно построить семейство точных решений уравнения (1.72).

□

Анализ этой системы уравнений дает возможность построения большого количества точных решений, так как имеет место функциональный произвол.

Функции $U(\xi,\delta),\ G(\xi,U)$—произвольные, но такие, что якобиан не равен нулю.

Якобиан имеет вид $J=\frac{27U'_{\delta}G'_{\xi}}{(1-2U+U^2-3G)P_2}$.

1.7 Построение решений в параметрической форме для полулинейных параболических уравнений с частными производными в трехмерном случае, когда функция $f(Z)$не зависит от времени и когда такая зависимость есть. Приложение к теории автоволн.

В этом параграфе изложен метод построения решения опирающийся на методику развитую в параграфе 1.2 в двухмерном случае. Это способ построения решений широкого класса уравнений в частных производных в трехмерном случае. В [81,82] рассмотрено уравнение (Ходжкина-Хаксли) нелинейного ревербератора и изучаются его асимптотические решения. Его частным случаем является уравнение Фитц-Хью-Нагумо-Семенова, которое описывает эволюцию автоволн в активных средах. Именно спиральные волны исследовал И.Пригожин [151]. Другим примером самоорганизации являются автоволны [109].

Построенные в данном параграфе точные решения могут быть использованы для моделирования этих задач.

Изложим предлагаемый метод на примере полулинейного параболического уравнения

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z''_{yy} + f(Z) = 0. \tag{1.101}$$

Сделаем замену переменных

$$Z(x,y,t)|_{x=x(\xi,\delta,\tau),y=y(\xi,\delta,\tau),t=t(\xi,\delta,\tau)} = U(\xi,\delta,\tau), \tag{1.102}$$

Обратная замена восстанавливает решение $Z(x,y,t)$ уравнения (1.101) по функции $U(\xi,\delta,\tau)$

$Z(x,y,t) = U(\xi,\delta,\tau)|_{\xi=\xi(x,y,t),\delta=\delta(x,y,t),\tau=\tau(x,y,t)}$.

Возможно построение решений, свойства которых связаны с корнями уравнения $f(Z) = 0$. Область изменения построенного решения ограничена корнями уравнения $f(Z) = 0$.

Предположим, что якобиан замены переменных $detJ$ не равен нулю, где

$$J = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & t_\xi \\ \\ x_\delta & y_\delta & t_\delta \\ \\ x_\tau & y_\tau & t_\tau \end{pmatrix}$$

Предположим, что существует обратное преобразование, хотя бы локально,

$\xi = \xi(x, y, t), \delta = \delta(x, y, t), \tau = \tau(x, y, t)$, то есть

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = (y'_{\delta} x'_{\xi} - x'_{\delta} y'_{\xi})/detJ, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = (x'_{\delta} t'_{\xi} - t'_{\delta} x'_{\xi})/detJ,$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = (y'_{\delta} t'_{\xi} - t'_{\delta} y'_{\xi})/detJ, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = (y'_{\delta} t'_{\tau} - t'_{\delta} y'_{\tau})/detJ,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = (x'_{\delta} t'_{\tau} - x'_{\tau} t'_{\delta})/detJ, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = (y'_{\tau} x'_{\delta} - y'_{\delta} x'_{\tau})/detJ,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = (y'_{\tau} t'_{\xi} - t'_{\tau} y'_{\xi})/detJ, \quad \frac{\partial \delta}{\partial y} = (t'_{\tau} x'_{\xi} - x'_{\tau} t'_{\xi})/detJ,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = (x'_{\tau} y'_{\xi} - y'_{\tau} x'_{\xi})/detJ,$$
$$detJ = y'_{\tau} x'_{\delta} t'_{\xi} - x'_{\tau} y'_{\delta} t'_{\xi} -$$
$$y'_{\tau} t'_{\delta} x'_{\xi} + t'_{\tau} y'_{\delta} x'_{\xi} + x'_{\tau} t'_{\delta} y'_{\xi} - t'_{\tau} x'_{\delta} y'_{\xi} \neq 0. \tag{1.103}$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\delta,\tau), y=y(\xi,\delta,\tau), t=t(\xi,\delta,\tau)} = Y(\xi, \delta, \tau),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y}|_{x=x(\xi,\delta,\tau), y=y(\xi,\delta,\tau), t=t(\xi,\delta,\tau)} = M(\xi, \delta, \tau),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\delta,\tau), y=y(\xi,\delta,\tau), t=t(\xi,\delta,\tau)} = T(\xi, \delta, \tau). \tag{1.104}$$

Используя (1.102),(1.103), получим выражения

$$y'_{\tau}(-\frac{\partial U}{\partial \delta} t'_{\xi} + \frac{\partial U}{\partial \xi} t'_{\delta}) + \frac{\partial U}{\partial \tau}[y'_{\delta} t'_{\xi} - t'_{\delta} y'_{\xi}] +$$
$$t'_{\tau}[-y'_{\delta} \frac{\partial U}{\partial \xi} + y'_{\xi} \frac{\partial U}{\partial \delta}] = -Y(\xi, \delta, \tau) detJ,$$
$$x'_{\tau}[-\frac{\partial U}{\partial \delta} t'_{\xi} + t'_{\delta} \frac{\partial U}{\partial \xi}] + \frac{\partial U}{\partial \tau}[x'_{\delta} t'_{\xi} - t'_{\delta} x'_{\xi}] +$$
$$t'_{\tau}[-x'_{\delta} \frac{\partial U}{\partial \xi} + x'_{\xi} \frac{\partial U}{\partial \delta}] = M(\xi, \delta, \tau) detJ,$$
$$y'_{\tau}[\frac{\partial U}{\partial \xi} x'_{\delta} - x'_{\xi} \frac{\partial U}{\partial \delta}] + \frac{\partial U}{\partial \tau}[y'_{\delta} x'_{\xi} - x'_{\delta} y'_{\xi}] +$$
$$x'_{\tau}[-y'_{\delta} \frac{\partial U}{\partial \xi} + y'_{\xi} \frac{\partial U}{\partial \delta}] = T(\xi, \delta, \tau) detJ. \tag{1.105}$$

Уравнение (1.101) тогда принимает вид

$$[T(\xi,\delta,\tau)+f(U(\xi,\delta,\tau))]detJ+[\frac{\partial M}{\partial\tau}[-x'_{\delta}t'_{\xi}+t'_{\delta}x'_{\xi}]+$$
$$\frac{\partial Y}{\partial\tau}[y'_{\delta}t'_{\xi}-t'_{\delta}y'_{\xi}]-\frac{\partial Y}{\partial\delta}y'_{\tau}t'_{\xi}+\frac{\partial Y}{\partial\xi}y'_{\tau}t'_{\delta}+t'_{\tau}[\frac{\partial M}{\partial\xi}x'_{\delta}-\frac{\partial M}{\partial\delta}x'_{\xi}+$$
$$\frac{\partial Y}{\partial\delta}y'_{\xi}-\frac{\partial Y}{\partial\xi}y'_{\delta}]]=0. \tag{1.106}$$

Далее проводим рассуждения аналогичные приведенным в параграфе 1.2 перед Теоремой 1.2.1. Из (1.104) следуют необходимые условия разрешимости. Повторяя рассуждения приведенные в параграфе 1.2 дополним выписанные соотношения равенствами смешанных производных в переменных ξ,δ. Эти соотношения, с учетом (1.104) можно переписать в виде

$$\frac{\partial M(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial x}-\frac{\partial Y(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial T(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial x}-\frac{\partial Y(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial M(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial t}-$$
$$\frac{\partial T(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial y}=0, \tag{1.107}$$

или дополнительно получим три уравнения, дополняющие систему соответственно

$$t'_{\tau}[-\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}y'_{\delta}+\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}y'_{\xi}]+\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\tau}[y'_{\delta}t'_{\xi}-t'_{\delta}y'_{\xi}]+$$
$$y'_{\tau}[\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}t'_{\delta}-\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}t'_{\xi}]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}[t'_{\tau}x'_{\xi}-x'_{\tau}t'_{\xi}]+$$
$$\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial\tau}[x'_{\delta}t'_{\xi}-t'_{\delta}x'_{\xi}]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}[x'_{\tau}t'_{\delta}-t'_{\tau}x'_{\delta}]=0 \tag{1.108}$$

$$y'_{\tau}[-\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}t'_{\xi}+\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}t'_{\delta}]+\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\tau}[y'_{\delta}t'_{\xi}-t'_{\delta}y'_{\xi}]+$$
$$t'_{\tau}[-\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}y'_{\delta}+\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}y'_{\xi}]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}[x'_{\tau}y'_{\xi}-y'_{\tau}x'_{\xi}]+$$
$$\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial\tau}[y'_{\delta}x'_{\xi}-x'_{\delta}y'_{\xi}]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}[y'_{\tau}x'_{\delta}-x'_{\tau}y'_{\delta}]=0, \tag{1.109}$$

$$x'_\tau[\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}t'_\xi-\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}t'_\delta]+\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\tau}[-x'_\delta t'_\xi+t'_\delta x'_\xi]+$$
$$t'_\tau[\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}x'_\delta-\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}x'_\xi]+\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\delta}[x'_\tau y'_\xi-y'_\tau x'_\xi]+$$
$$\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\tau}[y'_\delta x'_\xi-x'_\delta y'_\xi]+\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial\xi}[y'_\tau x'_\delta-x'_\tau y'_\delta]=0, \quad (1.110)$$

Предположим, что функции $K(U)$, $F(U)$, $U(\xi,\delta)$, $Y(\xi,\delta)$, $M(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$ дважды непрерывно дифференцируемые .

В трехмерном случае нелинейная алгебраическая система семи уравнений

(1.105),(1.106),(1.108)-(1.110) относительно девяти переменных– производных

x'_ξ, x'_δ, x'_τ, y'_ξ, y'_δ, y'_τ, t'_ξ, t'_δ, t'_τ является недопределенной. Поэтому имеется большой функциональный произвол в новых переменных.

Приведем пример решения этой системы. Предположим, что функции

$Y(\xi,\delta,\tau)$, $M(\xi,\delta,\tau)$, $T(\xi,\delta,\tau)$, $x(\xi,\delta,\tau)$,

имеют вид

$T(\xi,\delta,\tau) = c_1 w(U)$, $Y(\xi,\delta,\tau) = c_2 w(U)$, $M(\xi,\delta,\tau) = w(U)$, где $U = U(\xi,\delta,\tau)$ и $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

Теорема 1.7.1.

Пусть функция $G(\xi,\delta,\tau,U)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция четырех переменных, а $w(U)$, $r(U)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной.

Тогда функция

$$x(\xi,\delta,\tau) = r(U) + G(\xi,\delta,\tau,U(\xi,\delta,\tau)). \quad (1.111)$$

Функция $w(U)$ определяется из ОДУ

$$f(U) = w(U)[(c_2^2+1)w'(U)-c_1]. \quad (1.112)$$

Функция $y(\xi,\delta,\tau)$имеет вид

$$y(\xi,\delta,\tau)=-c_1t(\xi,\delta,\tau)-c_2r(U)-c_2G(\xi,\delta,\tau,U)h(U)+ \\ +\int_0^U\frac{dp}{w(p)}+c_3,\quad c_3=const. \qquad (1.113)$$

Якобиан имеет вид

$$DetJ=-\frac{1}{w(U)}[(t'_\tau U'_\xi-U'_\tau t'_\xi)G'_\delta+ \\ (t'_\xi G'_\tau-t'_\tau G'_\xi)U'_\delta+(U'_\tau G'_\xi-U'_\xi G'_\tau)t'_\delta]\neq 0. \qquad (1.114)$$

Точное решение уравнения (1.101) определяется формулой (1.102).

□

Дважды дифференцируемые функции $G(\xi,\delta,\tau,U)$, $r(U)$, $t(\xi,\delta,\tau)$, а также функция U (!), остаются произвольными. Этот произвол и является свободным "параметром".

Заметим, что из трех уравнений (1.105) можно выразить производные y'_ξ,y'_δ,y'_τ,

$$y'_\xi=\frac{-[T(\xi,\delta,\tau)t'_\xi-U'_\xi+Y(\xi,\delta,\tau)x'_\xi]}{M}, \\ y'_\delta=\frac{-[T(\xi,\delta,\tau)t'_\delta-U'_\delta+Y(\xi,\delta,\tau)x'_\delta]}{M}, \\ y'_\tau=\frac{-[T(\xi,\delta,\tau)t'_\tau-U'_\tau+Y(\xi,\delta,\tau)x'_\tau]}{M}. \qquad (1.115)$$

Далее, в силу большого возможного числа вариантов решения, обсуждается лишь один пример. Будем искать функции

$x(\xi,\delta,\tau),Y(\xi,\delta,\tau),T(\xi,\delta,\tau),M(\xi,\delta,\tau)$

$$x(\xi,\delta,\tau)=r(U)+G(\xi,\delta,\tau,U),\ Y(\xi,\delta,\tau)=q(U)+q_o(U)G(\xi,\delta,\tau,U), \\ T(\xi,\delta,\tau)=w_o(U)+v(U)G(\xi,\delta,\tau,U), \\ M(\xi,\delta,\tau)=w(U)+v_o(U)G(\xi,\delta,\tau,U), \qquad (1.116)$$

где $U = u(\xi,\delta,\tau)$. Анализ уравнений (1.106), (1.108)-(1.110) позволяет найти такие соотношения между функциями в (1.109), и окончательно получим соотношения приведенное в теореме 1.7.1. Таким образом, окончательно положили $q_o(U)=0,\ v(U)=0,\ v_o(U)=0,\ w_o(U)=c_1w(U),\ q_o(U)=c_2w(U)$.

Далее, как и в двухмерной ситуации, необходимо выполнение равенств смешанных производных функций $x(\xi,\delta,\tau),\ y(\xi,\delta,\tau)$, например:

$$y''_{\xi\delta}=y''_{\delta\xi},\ y''_{\xi\tau}=y''_{\tau\xi},\ y''_{\delta\tau}=y''_{\tau\delta}. \tag{1.117}$$

Это необходимые условия разрешимости системы (1.115).

Из системы (1.115), после преобразований, следует система ОДУ для функции $y(\xi,\delta,\tau)$

$$\begin{aligned}
&y'_{\xi}(\xi,\delta,\tau)=-c_1t'_{\xi}-c_2r'(U)U'_{\xi}+\frac{U'_{\xi}}{w(U)}-c_2[U'_{\xi}G'(U)+G'_{\xi}],\\
&y'_{\delta}(\xi,\delta,\tau)=-c_1t'_{\delta}-c_2r'(U)U'_{\delta}+\frac{U'_{\delta}}{w(U)}-c_2[U'_{\delta}G'(U)+G'_{\delta}],\\
&y'_{\tau}(\xi,\delta,\tau)=-c_1t'_{\tau}-c_2r'(U)U'_{\tau}+\frac{U'_{\tau}}{w(U)}-\\
&c_2[U'_{\tau}G'(U)+G'_{\tau}].
\end{aligned} \tag{1.118}$$

где $U=U(\xi,\delta,\tau), c_1\neq 0, c_2\neq 0$. Эта система точно интегрируется (1.113). Можно проверить, что условия (1.117) выполнены.

Дважды дифференцируемые функции

$G(\xi,\delta,\tau,U),\ r(U),\ h(U),\ t(\xi,\delta,\tau)$,и а также функция U (!),остаются произвольными. Этот произвол и является свободным "параметром". Таким образом, если удается каким-то способом подобрать (из физического смысла задачи [109],[202]) гладкие перечисленные функции так, чтобы $DetJ\neq 0$, то функции $x(\xi,\delta,\tau),\ y(\xi,\delta,\tau),\ t(\xi,\delta,\tau)$ определены. Можно сравнить алгоритм построения численного решения смешанной задачи для уравнения (1.101) и алгоритм численного восстановления решения уравнения (1.101) по точному решению в параметрической форме построенному в теореме 1.7.1. Имеется значительное уменьшение числа операций при организации вычислений опираясь на построенное точное решение. Известно [142], что при численном решении такой задачи необходимо построить неявную разностную схему и реализовать, например, метод переменных направлений в довольно большой двухмерной области на сетке. В данном же случае, имеем одно ОДУ первого порядка (1.110) и процедуру вычисления обратной функции при пересчете решения (1.102) на неравномерной сетке.

Для конкретности рассмотрим простой пример. Положим в (1.112)

$f(U) = -U(1-U^2), c_1 = 1, c_2 = 1$. Уравнение (1.110) численно интегрируется с начальным условием $w(0) = 0$. Полученное решение обращается в нуль

$w(1,83063) = 0.$

Аппроксимацию полученного численного решения можно провести различными способами. Поскольку есть желание продолжить аналитическое исследование положим

$w(U) \simeq U(1,83063^5 - U^5)/23$. Предположим также, что произвольные функции имеют вид

$r(U) = 0,\ t(\xi,\delta,\tau) = \xi+\delta+\tau,\ G(\xi,\delta,\tau) = \xi+\delta+\tau+U.$

Тогда вычислим интеграл входящий в функцию y.

$$\int_0^U \frac{dU}{w(U)} \simeq 23[0.04864\ln U - 0,009728\ln(U^2 - 1,13139U + 3,3512) +$$
$$+ 0,009728\ln(U^2 + 2,9620U + 3,3512) -$$
$$- 0,009728\ln(1,83063 - U)]. \qquad (1.119)$$

Функцию U можно выбрать любой, моделирующей одну или несколько

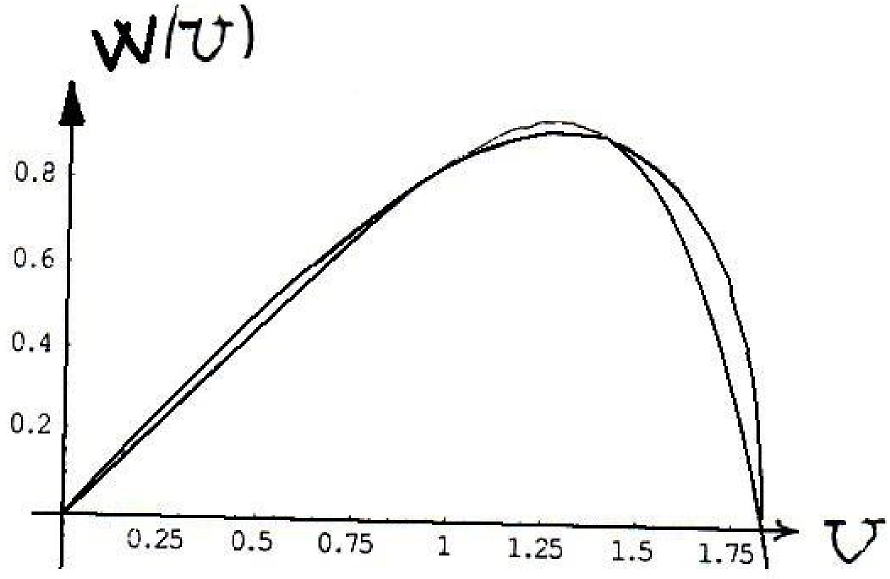

Рис. 8: Численное решение уравнения Абеля и его аппроксимация.

ведущих центров автоволны. Их число остается постоянным.

Например, можно взять любое число слагаемых из суммы

$U(\xi,\delta,\tau) = \sum_{i=0}^{n}(1 - C_i \exp(-(\xi - l_i)^2 - (\delta - k_i)^2 + (\tau - m_i)^2))(1 + \exp(-(\xi - l_i)^2 - (\delta - k_i)^2 + (\tau - m_i)^2))^{-1}$,

где l_i, k_i, m_i– произвольные константы. Таким образом все функции $t(\xi,\delta,\tau), x(\xi,\delta,\tau), y(\xi,\delta,\tau)$ определены .

Следовательно, находим численно функции $\xi(x,y,t), \delta(x,y,t), \tau(x,y,t)$, осуществляя восстановление обратной функции на неравномерной сетке.

В данных расчетах выбрано $C_i = 0$, $i = 1, 2$. Дальнейшая эволюция такой структуры такова: дальние от перетяжки области восьмерки уходят на бесконечность, при этом перетяжка остается довольно большое время. Если выбрать $C_i = 1$, то характер эволюции структуры существенно меняется.

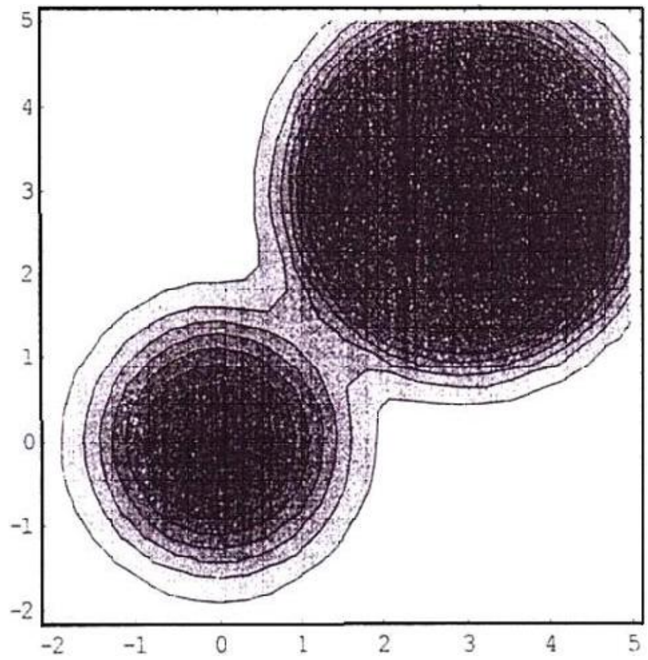

Рис. 9: Линии уровня начальных данных в задаче расчета автоволн.

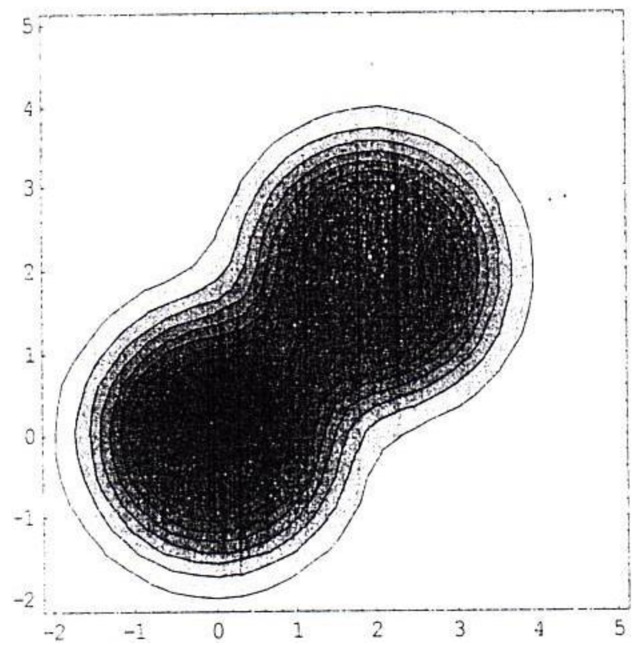

Рис. 10: Результаты расчета обратного преобразования точного решения эволюции автоволн при малых временах. Линии уровня.

Подробное исследование таких задач выходит за рамки данной работы.

Рассмотрим уравнение (1.101), в том случае когда корни уравнения $f(t,Z)=0$ зависят от времени. Изложим предлагаемый метод на примере полулинейного параболического уравнения

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z''_{yy} + f(t,Z) = 0. \tag{1.120}$$

Выведенные выше уравнения (1.105), (1.108)-(1.110) те же самые и отличаются только уравнением (1.106), где следует заменить функцию f на $f(t,U)$.

Предположим, что функции $T(\xi,\delta,\tau)$, $Y(\xi,\delta,\tau)$, $M(\xi,\delta,\tau)$ имеют вид

$T(\xi,\delta,\tau) = c_1 w(t,U) + w(t,U)\int_{U_o}^{U} \frac{w'_t dp}{w^2(t,p)}$,

$Y(\xi,\delta,\tau) = c_2 w(t,U)$,

$M(\xi,\delta,\tau) = w(t,U)$.

Имеет место следующее утверждение :

Теорема 1.7.2

Пусть функция $G(\xi,\delta,\tau,U)$ дважды дифференцируемая функция четырех переменных, а $h(t,U)$, $w(t,U)$, $r(t,U)$ дважды дифференцируемые функции двух переменных, где $U=U(\xi,\delta,\tau)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

Тогда точное решение уравнения (1.120) и системы уравнений в частных производных первого порядка (1.105),(1.106),(1.108)-(1.110) имеет вид:

$$x(\xi,\delta,\tau) = r(t,U) + h(t,U)G(\xi,\delta,\tau,U), \tag{1.121}$$

а функция $y(\xi,\delta,\tau)$ имеет вид

$$y(\xi,\delta,\tau) = -c_1 t(\xi,\delta,\tau) - c_2 r(t,U) - c_2 G(\xi,\delta,\tau,U)h(t,U) + \\ + \int_{U_o}^{U} \frac{dp}{w(t,p)} + c_3, \quad U_o,\ c_3 = const. \tag{1.122}$$

Якобиан имеет вид (1.114). Функция $w(t,U)$определяется из уравнения с частными производными

$$w'_t - 2(w(t,U))^2 w''_{UU} + w(t,U)f'_U(t,U) - w'_U f(t,U) = 0. \tag{1.123}$$

□

Доказательство проводится аналогично теореме 1.5.1. Из уравнения (1.106), в котором следует заменить функцию $f = f(t,U)$следует уравнение

$$\frac{f(t,U)}{w(t,U)} + c_1 + \int_{U_o}^{U} \frac{w'_t dp}{w^2(t,p)} - 2w'_U(t,U) = 0. \tag{1.124}$$

После дифференцирования (1.124)получим уравнение (1.123).

Дважды дифференцируемые функции

$G(\xi,\delta,\tau,U),\ r(t,U),\ h(t,U),\ t(\xi,\delta,\tau)$, а также функция U (!),остаются произвольными.

Пример 1.7.2

В данном случае можно привести пример решения уравнения (1.123).

Зададим функцию

$f(t,U) = U(1 - a(t)U)$, $a(t) = -3\exp(t)$. Точное решение уравнения (1.123), например, имеют вид

$w(t,U) = U^{3/2}\exp(t/2)$.

Пример 1.7.3

Построим обобщение примера 8 на стр.151 в [137] "способом А".

Построим решение уравнения (1.72)предложенным в главе методом.

Сделаем замену переменных (1.73).[5]

Выбор дифференциальных связей является важным в данном методе. Предположим

$$\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta). \qquad (1.125)$$

Такое изменение дифференциальных связей меняет дальнейшие формулы, но не меняет существа дела. Аналогичные теоремы остаются справедливыми.

В новых переменных вместо выражений (1.75) имеем

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta}+\frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}+Y(\xi,\delta)detJ,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta}-\frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}+T(\xi,\delta)detJ. \qquad (1.126)$$

Уравнение (1.72) после подстановок (1.73),(1.16),(1.125) имеет вид

$$(T(\xi,\delta)+f(t(\xi,\delta),U(\xi,\delta)))detJ-P(t(\xi,\delta),U)(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta}-\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi})+$$
$$Y(\xi,\delta)P'_U(t(\xi,\delta),U)(\frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial U}{\partial \delta}-\frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial U}{\partial \xi})=0. \qquad (1.127)$$

Аргументы в функциях ниже не пишем из соображении компактности формул. Это формула аналогична (89)с.151 в [137].

Далее проводим рассуждения, смысл которых, условие совместимости дифференциальных связей. Это подробно объясняется в параграфе 1.2 перед Теоремой 1.2.1.

$$\frac{\partial Y(\xi,\delta)}{\partial t}=\frac{\partial T(\xi,\delta)}{\partial x}. \qquad (1.128)$$

[5]Уравнение (1.72) совпадает с (86)с.151 если $Z=w,\ P=f,\ f=g$. Отличие только в знаке функции f.

Это соотношение, с учетом (1.73),(1.16),(1.125) можно переписать в виде

$$\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial Y}{\partial \delta} + \frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial T}{\partial \delta} = 0. \qquad (1.129)$$

Система (1.125),(1.126),(1.128)[6] является нелинейной алгебраической системой относительно производных

$x'_{\xi}, x'_{\delta}, t'_{\xi}, t'_{\delta}.$

Имеет место теоремы аналогичные теоремам 1.6.1.-1.6.3.

Теорема 1.7.3

Нелинейная алгебраическая система (1.125),(1.126),(1.129) относительно производных $x'_{\xi}, x'_{\delta}, t'_{\xi}, t'_{\delta}$ разрешима и ее решение имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -([F + T - Y^2 P'_U](U'_{\xi}[T'_{\delta}U'_{\xi} - T'_{\xi}U'_{\delta}] + P(Y[Y'_{\delta}T'_{\xi} - T'_{\delta}Y'_{\xi}]U'_{\xi} + TY'_{\xi}[U'_{\delta}Y'_{\xi} - U'_{\xi}Y'_{\delta}]))/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_1(\xi,\delta), \qquad (1.130)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = -([Y^2 P'_U - F - T]U'_{\delta}[U'_{\delta}T'_{\xi} - T'_{\delta}U'_{\xi}] + P(YU'_{\delta}[T'_{\xi}Y'_{\delta} - T'_{\delta}Y'_{\xi}] + TY'_{\xi}[Y'_{\xi}U'_{\delta} - Y'_{\delta}U'_{\xi}]))/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_2(\xi,\delta), \qquad (1.131)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = ([PYY'_{\xi} - FU'_{\xi} - TU'_{\xi} + Y^2 P'_U U'_{\xi}][U'_{\delta}Y'_{\xi} - Y'_{\delta}U'_{\xi}])/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_3(\xi,\delta), \qquad (1.132)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = [-PYY'_{\delta} + (F + T - Y^2 P'_U)U'_{\delta}][Y'_{\delta}U'_{\xi} - U'_{\delta}Y'_{\xi}]/P_1(\xi,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g_4(\xi,\delta), \qquad (1.133)$$

[6] В [137] это аналог формулы (88)с.151. все четыре уравнения при переходе к уравнению (1.14)при $x = \xi, t = \delta$ совпадают !

где

$$P_1(\xi,\delta)) = (PY^2[T^{'}{}_{\delta}Y^{'}{}_{\xi} - T^{'}{}_{\xi}Y^{'}{}_{\delta}] - (F + T - Y^2P^{'}{}_{U})(T[U^{'}{}_{\delta}Y^{'}{}_{\xi} - Y^{'}{}_{\delta}U^{'}{}_{\xi}] + Y[T^{'}{}_{\delta}U^{'}{}_{\xi} - T^{'}{}_{\xi}U^{'}{}_{\delta}])). \qquad (1.134)$$

Условие разрешимости имеет вид (1.84).

Предположим, что $t = \delta$. Тогда из (1.32) найдем выражение

$$T(\xi,\delta) = [P(t,U)YY^{'}{}_{\xi} - f(t,U)U^{'}{}_{\xi} + Y^2P^{'}{}_{U}(t,U)U^{'}{}_{\xi}]/U^{'}{}_{\xi}. (1.135)$$

Подставим это выражение с производными в систему (1.130)-(1.133) и (1.84), из (1.130) следует

$$Y(\xi,\delta) = U^{'}{}_{\xi}/x^{'}{}_{\xi}. \qquad (1.136)$$

Подставим это выражение с производными в следствия системы (1.130)-(1.133) и (1.84). Далее, обобщаем интересную находку в [137] предположим, что решение записано в неявной форме

$$\int_{uo}^{Z(x,t)} \frac{ds}{h(s,t)} = \alpha(t)x + \beta(t). \qquad (1.137)$$

После замены переменных имеем

$$\int_{uo}^{U(\xi,\delta)} \frac{ds}{h(s,\delta)} = \alpha(\delta)x(\xi,\delta) + \beta(\delta). \qquad (1.138)$$

Отсюда находим производные $U^{'}{}_{\xi}$, $U^{'}{}_{\delta}$ и более высокие до четвертого порядка включительно.(Указание: При вычислении производным $x(\xi,\delta)$ лучше представить эту функцию в виде $x(\xi,\delta) = m(\xi)\varphi(\delta) + \omega(\delta)$.) Все производные подставим в следствие условия разрешимости (1.84). Группируя в полученном после очевидных упрощений выражении слагаемые содержащие все производные функций $P(t,U)$, $f(t,U)$ получим

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[\alpha^{'}(\delta) - A(\delta)\alpha(\delta)^3 - B(\delta)\alpha(\delta)] = 0. \qquad (1.139)$$

Здесь производим разделение переменных

$$h(U,\delta)\frac{\partial^2}{\partial U^2}[P(\delta,U)h(U,\delta)] = A(\delta),$$
$$h'_\delta/h(U,\delta) + h(U,\delta)\frac{\partial}{\partial U}[f(\delta,U)/h(U,\delta)] = -B(\delta). \qquad (1.140)$$

Различие в знаках в формулах данного примера и примера 8 в [137] объясняется небольшим различием исходных уравнений.[7] Окончательно из (1.139)следует обобщение уравнения Бернулли

$$\alpha'(\delta) - A(\delta)\alpha(\delta)^3 - B(\delta)\alpha(\delta) = 0. \qquad (1.141)$$

Из (1.140) имеем следующие выражения для коэффициентов

$$f(\delta,U) = C_1(\delta)h(U,\delta) + h(U,\delta)\int_{uo}^{U(\xi,\delta)}\frac{[-B(\delta)h(s,\delta)+h'_\delta(s,\delta)]ds}{h(s,\delta)^2},$$
$$P(\delta,U) = \frac{UC_2(\delta)+C_3(\delta)}{h(U,\delta)} + A(\delta)[U\int_{uo}^{U(\xi,\delta)}\frac{ds}{h(s,\delta)} -$$
$$-\int_{uo}^{U(\xi,\delta)}\frac{sds}{h(s,\delta)}]/h(U,\delta). \qquad (1.142)$$

В выражение для $f(\delta,U)$ появляется дополнительное слагаемое относительно структуры формул [137] h'_δ.

Выражение для $P(\delta,U)$ по своей структуре такое же как в [137].[8] Если зависимость от t в коэффициентах уравнения (1.72) отсутствует, то формулы (1.142) в точности переходят в формулы [137].

Далее подставляем найденные соотношения в полученные выше следствия уравнений (1.30)-(1.33). Имеем, что уравнения (1.30),(1.32),(1.33)удовлетворяются точно. Следствие (1.31) после обратной подстановки

$x(\xi,\delta) = (-\beta(\delta) + \int_{uo}^{U(\xi,\delta)}\frac{ds}{h(s,\delta)})/\alpha(\delta)$

дает уравнение для функции $\beta(\delta)$:

---

[7]Уравнение (1.72)отличаются от уравнения в [137] одним знаком.

[8]Здесь произведено интегрирование по частям.

$$\beta'(\delta) = \beta(\delta)[B(\delta) + A(\delta)\alpha^2(\delta)] + C_2(\delta)\alpha^2(\delta) - C_1(\delta).$$

Обратная замена в полученных формулах (1.142) очевидна и мы не будем на ней останавливаться. Функциональный произвол в функции $x(\xi, \delta)$ в новых переменных ξ, δ исчезает. Произвол связанный с функцией $h(Z, t)$ имеет другое объяснение. Построено семейство решений множества уравнений (1.72), коэффициенты которого вычислены по функции $h(Z, t)$.

В заключение главы обсудим область применения метода. Она не до конца изучена. Пока можно лишь только утверждать, что метод хорошо работает для классов примеров рассмотренных в главах 1-4.

2 ГЛАВА 2. Точные решения некоторых задач теории оптимального управления.

2.1 Введение. Постановка задачи о управлении колебаниями маятника

Рассматривается задача управления колебаниями математического маятника. На суммарный ресурс управления наложено интегральное ограничение : абсолютная величина управляемой функции в произвольной неотрицательной степени (большей или равной единице) является суммируемой функций на заданном временном интервале. Цель управления -минимизация заданной функции фазовых переменных к фиксированному моменту времени (задача Майера). Наряду с детерминированным случаем изучается стохастический случай, когда на систему воздействуют случайные возмущения в виде гауссовского белого шума. В этом случае требуется минимизировать математическое ожидание заданных функционалов. Известно, [159],[173], что задача построения синтеза оптимального управления может быть сведена к решению задачи Коши в неограниченной области для соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби- Беллмана.[9]

На момент начала исследований автором в этой задаче были известны примеры численных расчетов уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана из перечисленных работ и [26]. Было известно выражение для точного решения уравнения Гамильтона-Якоби- Беллмана при значении параметра $n = 2$ в детерминированном случае задачи без трения $S(y, q, \tau) = y - \sqrt{q\tau^3/3}, \quad y = x_1 + x_2\tau$. В указанных работах доказан ряд теорем о свойствах решения и теорема существования решения.

[9]Постановка задач оптимального управления рассмотренных в главе 2 сделана А.С.Братусем.

В параграфе 2.3 доказано, что решение данной задачи в стохастическом случае выражается через решения задачи для линейного параболического уравнения . Найдены точные решения этой задачи для рассматриваемого класса задач оптимального управления. Отдельно в [33] рассмотрен случай импульсной коррекции $n = 1$.

Пусть управляемое движение материальной точки описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\alpha x_2 + u(t, x_1, x_2) + \sigma(t)\xi(t),$$
$$x_1(0) = x^\circ{}_1, \quad x_2(0) = x^\circ{}_2. \tag{2.1}$$

Здесь введены обозначения t –время, $0 \leq t \leq T$, x_1, x_2 , - фазовые координаты, $\xi(t)$ – гауссовский белый шум единичной интенсивности, $\sigma(t)$–ограниченная функция, представляющая интенсивность возмущения, ω – собственная частота, α–коэффициент
трения. Здесь $u = u(t, x_1, x_2)$ –управляющая сила (функция управления).

Если $\sigma(t) = 0$, то будем называть задачу (2.1) детерминированной задачей оптимального управления.

Допустимым управлением будем
называть такое управление u, что функция со значениями в R^1 является интегрируемой на отрезке $[0, T]$ для любых x_1, x_2

$$\int_0^T |u(t, x_1, x_2)|^n dt. \tag{2.2}$$

Ниже будем рассматривать только допустимые управления u.

Здесь n - вещественное положительное число,

$n > 1$, $n = \frac{2k}{2s-1}, k \geq s$, где $k, s = 1, 2 \dots.$

Число n является параметром задачи: разным значениям n соответствуют разные способы задания ограничения (2.2) сум-

марного ресурса управления. Отметим, что случай $n = 2$ называют
управлением при помощи малой тяги, а случай $n = 1$ - импульсным управлением. Введем переменную $q = \int_t^T |u(t, x_1, x_2)|^n dt$.

Переменная q имеет смысл неизрасходованного ресурса управления, причем $q(T) = 0$.

Тогда к уравнениям (1.1) можно добавить уравнение

$$\dot{q} = -|u|^n. \tag{2.3}$$

Цель управления - минимизация одного из следующих функционалов

$$E\{\varphi(x_1(T))\},\ E\{\varphi(x_2(T))\} \tag{2.4}$$

Здесь E – знак математического ожидания, $\varphi(x)$ –непрерывно дифференцируемая, четная, неотрицательная функция своих аргументов, причем

$\varphi'(x) > 0,\ x > 0,\ \varphi(0) = 0.$

В случае детерминированной задачи, знак математического ожидания в функционалах (2.4) необходимо отбросить.

Типичный пример функционалов (2.4)-потенциальная и кинетическая энергия в момент времени $t = T$, т.е.

$\varphi(x_1) = \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2, \quad \varphi(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2.$

Отметим, что отношение $\frac{\varphi'(x_i)}{\varphi(x_i)}, i = 1, 2$ убывает по переменной x_i.

Понижение порядка системы методом введения вспомогательной функции (с трением и без него).

В [24],[26], [159],[172]–[174] произведено понижение порядка системы с помощью введения вспомогательной функции.

Приведем перечень функций (новой переменной) с
помощью которых можно понизить порядок системы и следовательно в этих перечисленных случаях решения построенные в данной работе справедливы.

Заметим, что при наличии трения эта функция вычислена впервые в данной работе, часть которой доложена 25 января 2005 и опубликована в электронном виде на 1V международной конференции "Идентификация систем и задачи управления"$Sicpro'05$(см. п.7 по списку апробации работ во Введении с.36.) В общий список литературы эта работа не включена согласно требованиям ВАК. Позднее эти результаты были с успехом использованы в работе аспирантки про проведении численных расчетов [162].

В задаче минимизации функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной x_1:$E\{\varphi(x_1(T))\}$

при $\alpha = 0, \omega = 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое является первым в системе (2.1) [24],[26], [159],[172]–[174]

$$\begin{aligned} &y(t) = (T-t)x_2(t) + x_1(t), \\ &y(T) = x_1(T), \\ &\dot{y}(t) = (T-t)(u + \sigma(t)\xi(t)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

При $\alpha = 0, \omega \neq 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое является первым в системе (2.1)

$$
\begin{aligned}
&y(t) = x_2(t)\sin(\omega(T-t)) + \omega x_1(t)\cos(\omega(T-t)),\\
&y(T) = x_1(T),\\
&\dot{y}(t) = \sin(\omega(T-t))(u+\sigma(t)\xi(t)).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

В данной работе вычислено, что при наличии трения $\alpha \neq 0$ следует ввести следующую переменную и уравнение, которое является первым в системе (2.1)

$$
\begin{aligned}
&y(t) = (x_2(t) + \alpha x_1)\exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t)) +\\
&\sqrt{k}x_1(t)\exp(-\alpha(T-t))\cos(\sqrt{k}(T-t)),\\
&y(T) = \sqrt{k}\ x_1(T), k = \omega^2 - \alpha^2,\\
&\dot{y}(t) = \exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t))(u+\sigma(t)\xi(t)).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

В задаче минимизации функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной x_2**:**$E\{\varphi(x_2(T))\}$

при $\alpha = 0, \omega \neq 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое является первым в системе(2.1) .

$$
\begin{aligned}
&y(t) = x_2(t)\cos(\omega(T-t)) - \omega x_1(t)\sin(\omega(T-t)),\\
&y(T) = x_2(T),\\
&\dot{y}(t) = \cos(\omega(T-t))(u+\sigma(t)\xi(t)).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

В данной работе вычислено, что при наличии трения $\alpha \neq 0$ следует ввести следующую новую переменную и уравнение, которое является первым в системе (2.1)

$$y(t) = x_2(t)\sqrt{k}\exp(-\alpha(T-t))\cos(\sqrt{k}(T-t)) -$$
$$(\omega^2 x_1) + \alpha x_2)\exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t)),$$
$$y(T) = \sqrt{k}x_2(T), \qquad k = \omega^2 - \alpha^2,$$
$$\dot{y}(t) = (\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}(T-t)) - \alpha\sin(\sqrt{k}(T-t))) *$$
$$\exp(-\alpha(T-t))(u + \sigma(t)\xi(t)). \tag{2.9}$$

Обобщая представленные случаи, будем рассматривать далее следующие уравнение движения

$$\dot{y} = f(t)(u + \sigma(t)\xi(t)),$$
$$\dot{q} = -|u|^n. \tag{2.10}$$

где $f(t)$ -гладкая непрерывная функция , $0 \le t \le T$.

Отметим, что правая часть (2.10) не зависит от y.

Предполагается, что наблюдению доступна пара y, q.[108]

Здесь $u = u(t, x_1, x_2, q)$ –функция управления, далее просто u.

Полная постановка этой задачи сделана в работе [33]. (См. Введение.)

2.2 Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана ($n > 1$)

Проведем вывод уравнения сразу в стохастическом варианте исходной задачи.

Пусть функция Беллмана $S(y, q, t)$–минимальное значение математического ожидания одного из функционалов (2.4), которое может быть достигнуто при начальных условиях

$t = t_0, \ q = q_0, \ y = y_0$ в задаче оптимального управления, описываемой уравнениями состояния (2.10) .

Предполагая существование и достаточную гладкость функции $S(y, q, t)$, можно написать уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ)

$$S_t + \min_u \{f(t)uS_y - |u|^n S_q\} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S_{yy} = 0, \qquad (2.11)$$

Здесь минимум берется по значениям u, которые принадлежат R^1.

Функция S удовлетворяет условию $S(y, q, T) = \varphi(y)$.

Минимальное значение выражения, стоящего в фигурных скобках в уравнении(2.1) достигается на следующей управляющей функции:

$$u = \left(\frac{|S_y f(t)|}{-nS_q}\right)^{\mu} \operatorname{sign}(S_y f(t)), \quad \mu = (n-1)^{-1}. \qquad (2.12)$$

После замены переменой

$$\tau = \int_t^T f^2(s)ds. \qquad (2.13)$$

уравнение (2.1) трансформируется в уравнение

$$S_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2{}_1(\tau)S_{yy} + (n-1)g_n(\tau)\left(\frac{|S'{}_y|}{-nS'{}_q}\right)^{\mu+1} S_q, \qquad (2.14)$$

с начальным условием

$$S(y, q, 0) = \varphi(y). \qquad (2.15)$$

Здесь

$$g_n(\tau)|_{\tau=\tau(t)} = |f(t)|^{\mu-1}, \quad \sigma_1(\tau)|_{\tau=\tau(t)} = \sigma(t) \qquad (2.16)$$

причем переменные t и τ связаны соотношением (2.13).

Так как по предположению $\varphi(y)$ – четная, непрерывно дифференцируемая функция, задача (2.14),(2.15) инвариантна относительно замены переменной y на $-y$. Следовательно, эту задачу можно рассматривать только при $y > 0$ с дополнительным краевым условием

$$S_y(0, q, \tau) = 0. \tag{2.17}$$

Функция $S(y, q, \tau)|_{\gamma_n} = 0$ обращается в нуль на кривой γ_n. Уравнение этой кривой неизвестно и должно быть определено в процессе построения решения задачи. См.Рис 2.

2.3 Точные решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана с невырожденной диффузией (2.14).

Задача об управляемом движении материальной точки исследовалась в работах, перечисленных во Введении и работах автора [31], [33], [179], [180]. Возникает вопрос: почему эта задача рассматривается отдельно и выделена из всех прочих? Дело в том, что все случаи, когда решение нелинейной задачи выражается через решения линейного параболического уравнения, хорошо известны и приведены в учебной литературе и справочниках. Например, в теории уравнения Бюргерса известна нелинейная замена Коула-Хопфа искомой функции, которая приводит к линейному параболическому уравнению [149],[150]. Пример построенный в данном параграфе дополняет их и был также включен в справочники [136],[137],[201].[10]

Рассмотрим уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (2.14) с начальным условием

$$S(y,q,0)=\varphi(y), \quad \mu=1/(n-1). \tag{2.18}$$

Здесь функции

$$\sigma_1(\tau)|_{\tau=\tau(t)}=\sigma(t), \tag{2.19}$$

а $g_n(\tau)$ определены в (2.13).

Функция $S(y,q,\tau)$ обращается в нуль на неизвестной кривой γ_n.

$$S(y,q,\tau)|_{\gamma_n}=0. \tag{2.20}$$

С точки зрения теории квазилинейных параболических уравнений (2.14), уравнение, имеет локализованное решение. См.Введение и главу 6.

Метод разработанный в главе 1 применен в данном параграфе для построения точных решений широкого класса уравнений с частными производными в параметрическом, а иногда и явном виде.

Метод распространяется на многомерный случай и уравнения с переменными коэффициентами. С этой точки зрения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана являются квазилинейными параболическими уравнениями с переменными коэффициентами, то есть это сложный, многомерный частный случай классов уравнений близких к рассмотренным в главе 1.

[10] см.также А.Д.Полянин,В.Ф.Зайцев Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.:Физматлит,2002,432с.,и A.D.Polyanin, V.F.Zaitsev, A.Moussiaux Handbook of First order Partial Differential Equations, 2002,London,Taylor and Francis.

В двухмерном случае теория и алгоритм сформулирован в Главе 1. Там, в параграфе 1.6 предложен "способ С" решения таких задач.

Положим значение параметра $n = 2$ для упрощения приведенных в тексте выкладок, а затем сформулируем результат при других разрешенных значениях парамера n. См.(2.2).

В уравнении (2.14) функция $S = S(y, q, \tau)$ имеет три переменных. В области непрерывности функции S сделаем не фиксированную замену переменных

$$S(y, q, \tau)|_{y=y(\xi,\delta,\eta),q=q(\xi,\delta,\eta),\tau=\tau(\xi,\delta,\eta)} = U(\xi, \delta, \eta), \qquad (2.21)$$

матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} y_\xi & q_\xi & \tau_\xi \\ \\ y_\delta & q_\delta & \tau_\delta \\ \\ y_\eta & q_\eta & \tau_\eta. \end{pmatrix}$$

Связь производных функций

$\xi = \xi(y, q, \tau), \delta = \delta(y, q, \tau), \eta = \eta(y, q, \tau)$, имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = (q'_\delta y'_\xi - y'_\delta q'_\xi)/detJ, \quad \frac{\partial \eta}{\partial q} = (y'_\delta \tau'_\xi - \tau'_\delta y'_\xi)/detJ,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = (q'_\delta \tau'_\xi - \tau'_\delta q'_\xi)/detJ, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = (q'_\delta \tau'_\eta - \tau'_\delta q'_\eta)/detJ,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = (y'_\delta \tau'_\eta - y'_\eta \tau'_\delta)/detJ, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (q'_\eta y'_\delta - q'_\delta y'_\eta)/detJ,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial y} = (q'_\eta \tau'_\xi - \tau'_\eta q'_\xi)/detJ, \quad \frac{\partial \delta}{\partial q} = (\tau'_\eta y'_\xi - y'_\eta \tau'_\xi)/detJ,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} = (x'_\tau y'_\xi - y'_\tau x'_\xi)/detJ,$$
$$detJ = y'_\tau x'_\delta t'_\xi - x'_\tau y'_\delta t'_\xi -$$
$$q'_\eta \tau'_\delta y'_\xi + \tau'_\eta q'_\delta y'_\xi + y'_\eta \tau'_\delta q'_\xi - \tau'_\eta y'_\delta q'_\xi. \tag{2.22}$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial S}{\partial y}|_{y=y(\xi,\delta,\eta), q=q(\xi,\delta,\eta), \tau=\tau(\xi,\delta,\eta)} = Y(\xi, \delta, \eta),$$
$$\frac{\partial S}{\partial q}|_{y=y(\xi,\delta,\eta), q=q(\xi,\delta,\eta), \tau=\tau(\xi,\delta,\eta)} = M(\xi, \delta, \eta),$$
$$\frac{\partial S}{\partial \tau}|_{y=y(\xi,\delta,\eta), q=q(\xi,\delta,\eta), \tau=\tau(\xi,\delta,\eta)} = T(\xi, \delta, \eta). \tag{2.23}$$

Будем считать, что функции Y, M, T пока неизвестны и определяются ниже. Используя (2.21),(2.22), получим выражение

$$q'_\eta(\frac{\partial U}{\partial \delta}\tau'_\xi - \frac{\partial U}{\partial \xi}\tau'_\delta) + \frac{\partial U}{\partial \eta}[q'_\delta \tau'_\xi - \tau'_\delta q'_\xi] +$$
$$\tau'_\eta[q'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi} - q'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] = Y(\xi, \delta, \eta) detJ,$$
$$y'_\eta[-\frac{\partial U}{\partial \delta}\tau'_\xi + \tau'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi}] + \frac{\partial U}{\partial \eta}[y'_\delta \tau'_\xi - \tau'_\delta y'_\xi] +$$
$$\tau'_\eta[-y'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi} + y'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] = M(\xi, \delta, \eta) detJ,$$
$$q'_\eta[\frac{\partial U}{\partial \xi} y'_\delta - y'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] + \frac{\partial U}{\partial \eta}[q'_\delta y'_\xi - y'_\delta q'_\xi] +$$
$$y'_\eta[-q'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi} + q'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] = T(\xi, \delta, \eta) detJ. \tag{2.24}$$

Тогда уравнение (2.14) принимает вид

$$T(\xi,\delta,\eta) - g(\tau(\xi,\delta,\eta))\frac{Y^2}{4M} - \frac{1}{2}[\sigma_1(\tau(\xi,\delta,\eta)]^2\frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \tag{2.25}$$

или после подстановки (2.21)-(2.22)

$$\begin{aligned}
&[T(\xi,\delta,\eta) - g(\tau(\xi,\delta,\eta))\frac{Y^2}{4M}]detJ - \\
&\frac{1}{2}[\sigma_1(\tau(\xi,\delta,\eta))]^2[q'_{\eta}(\frac{\partial Y}{\partial \delta}\tau'_{\xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi}\tau'_{\delta}) + \\
&\frac{\partial Y}{\partial \eta}[q'_{\delta}\tau'_{\xi} - \tau'_{\delta}q'_{\xi}] + \tau'_{\eta}[q'_{\delta}\frac{\partial Y}{\partial \xi} - q'_{\xi}\frac{\partial Y}{\partial \delta}]] = 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Дополним выписанные соотношения равенствами, которые следуют, с необходимостью, из (2.23) (см. Главе 1, параграф 1.2.)

$$S_{y,q} = S_{q,y},\ S_{y,\tau} = S_{\tau,y},\ S_{q,\tau} = S_{\tau,q}$$

в переменных ξ,δ,η. (Это поля направлений связанные с решаемым уравнением). Эти соотношения, с учетом (2.21)-(2.22), можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M(\xi(y,q,\tau),\delta(y,q,\tau),\eta(y,q,\tau))}{\partial y} - \\
&\frac{\partial Y(\xi(y,q,\tau),\delta(y,q,\tau),\eta(y,q,\tau))}{\partial q} = 0, \\
&\frac{\partial T(\xi(y,q,\tau),\delta(y,q,\tau),\eta(y,q,\tau))}{\partial y} - \\
&\frac{\partial Y(\xi(y,q,\tau),\delta(y,q,\tau),\eta(y,q,\tau))}{\partial \tau} = 0, \\
&\frac{\partial M(\xi(y,q,\tau),\delta(y,q,\tau),\eta(y,q,\tau))}{\partial \tau} - \\
&\frac{\partial T(\xi(y,q,\tau),\delta(y,q,\tau),\eta(y,q,\tau))}{\partial q} = 0,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

и дополнительно получим три уравнения, дополняющие систему соответственно

$$\tau'_\eta[-\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}q'_\delta+\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}q'_\xi]+\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\eta}[q'_\delta\tau'_\xi-\tau'_\delta q'_\xi]+$$
$$q'_\eta[\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}\tau'_\delta-\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}\tau'_\xi]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}[\tau'_\eta y'_\xi-y'_\eta\tau'_\xi]+$$
$$\frac{\partial Y(\xi,\delta,\eta)}{\partial\eta}[y'_\delta\tau'_\xi-\tau'_\delta y'_\xi]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}[y'_\eta\tau'_\delta-\tau'_\eta y'_\delta]=0, \quad (2.28)$$

$$q'_\eta[-\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}\tau'_\xi+\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}\tau'_\delta]+\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\eta}[q'_\delta\tau'_\xi-\tau'_\delta q'_\xi]+$$
$$\tau'_\eta[-\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}q'_\delta+\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}q'_\xi]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}[y'_\eta q'_\xi-q'_\eta y'_\xi]+$$
$$\frac{\partial Y(\xi,\delta,\eta)}{\partial\eta}[q'_\delta y'_\xi-y'_\delta q'_\xi]+\frac{\partial Y(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}[q'_\eta y'_\delta-y'_\eta q'_\delta]=0, \quad (2.29)$$

$$y'_\eta[\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}\tau'_\xi-\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}\tau'_\delta]+\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\eta}[-y'_\delta\tau'_\xi+\tau'_\delta y'_\xi]+$$
$$\tau'_\eta[\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}y'_\delta-\frac{\partial T(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}y'_\xi]+\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\delta}[y'_\eta q'_\xi-q'_\eta y'_\xi]+$$
$$\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\eta}[q'_\delta x'_\xi-y'_\delta q'_\xi]+\frac{\partial M(\xi,\delta,\eta)}{\partial\xi}[q'_\eta y'_\delta-y'_\eta q'_\delta]=0, \quad (2.30)$$

Везде предполагается, что функции

$U(\xi,\delta,\eta),\ Y(\xi,\delta,\eta),\ M(\xi,\delta,\eta),\ T(\xi,\delta,\eta)$ дважды непрерывно дифференцируемые в некоторой области.

В двухмерной ситуации, описанной в параграфе 1.2, число переменных, производных $x'_\xi,\ x'_\delta,\ t'_\xi,\ t'_\delta$ совпадает с числом уравнений. В трехмерной ситуации нелинейная алгебраическая система семи уравнений (2.24),(2.26),(2.28)-(2.30) относительно девяти переменных-производных

$y'_\xi,\ y'_\delta,\ y'_\eta,\ q'_\xi,\ q'_\delta,\ q'_\eta,\ \tau'_\xi,\ \tau'_\delta,\ \tau'_\eta$ является недопределенной.

Поэтому имеется большой функциональный произвол.

Основное утверждение работ автора [31], [33], [179], [180],и данного параграфа, главы 2 и один из центральных моментов этой работы имеет вид

Теорема 2.3.1.

1) Решение задачи Коши (2.14), с начальными данными (2.15) из $C^1[R]$ и условием (2.20) допускает представление

$S(y,q,\tau)|_{y=y(\xi,\delta,\eta),q=q(\xi,\delta,\eta),\tau=\tau(\xi,\delta,\eta)} = U(\xi,\delta,\eta),$

где функция

$U(\xi,\delta,\eta) = \Phi(\tau, y - Q(q)\ \phi(\tau))|_{\tau=\tau(\xi,\delta,\eta),y=y(\xi,\delta,\eta),q=q(\xi,\delta,\eta)}$

дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных.

В этом пункте $n = 2$ и

$Q(q) = \sqrt{q},\ \phi(\tau) = \sqrt{\psi(\tau)},\ \psi(\tau) = \int_0^\tau g(s)ds,$

$w(\xi,\delta,\eta) = (y - Q(q)\phi(\tau))|_{\tau=\tau(\xi,\delta,\eta),y=y(\xi,\delta,\eta),q=q(\xi,\delta,\eta)}.$

2) Дважды непрерывно дифференцируемые функции

$Y(\xi,\delta,\eta),\ \ M(\xi,\delta,\eta),\ \ T(\xi,\delta,\eta)$ определяют значения производных точного решения задачи (2.14),(2.15),(2.20) по формулам (2.23)и имеют вид

$$
\begin{aligned}
&Y(\xi,\delta,\tau) = \\
&\Phi'_w(\tau,w)|_{w=y-Q(q)\phi(\tau),\tau=\tau(\xi,\delta,\eta),y=y(\xi,\delta,\eta),q=q(\xi,\delta,\eta)}, \\
&M(\xi,\delta,\tau) = \\
&-\Phi'_w(\tau,w)Q'(q)\phi(\tau)|_{w=y-Q(q)\phi(\tau),\ \tau=\tau(\xi,\delta,\eta),y=y(\xi,\delta,\eta),q=q(\xi,\delta,\eta)}, \\
&T(\xi,\delta,\tau) = \\
&[\Phi'_\tau - \Phi'_w Q(q)\phi'(\tau)]|_{w=y-Q(q)\phi(\tau),\ \tau=\tau(\xi,\delta,\eta),y=y(\xi,\delta,\eta),q=q(\xi,\delta,\eta)}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Уравнения системы (2.24),(2.28)-(2.30)перечисленными функциями удовлетворяются тождественно.

3) Функция $\Phi(w,\tau)$ удовлетворяет задаче Коши для линейного параболического уравнения

$$
\begin{aligned}
&\Phi_\tau = \frac{1}{2}{\sigma_1}^2(\tau)\Phi_{ww}, \quad \Phi(w,0) = \phi(w), \\
&\Phi(0,\tau) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

которое следует из (2.26). Решение уравнения (2.14) восстанавливается по формуле (2.21)и в данном случае имеет явный вид, при разрешенных значениях параметра $n > 1$, $n = \frac{2k}{2s-1}, k \geq s$, где $k, s = 1, 2\ldots$, попускает представление

$$
S = \Phi(w,\tau)|_{w=y-R_n(q,\tau)}, \tag{2.33}
$$

где

$$
\begin{aligned}
R_n(q,\tau) &= q^{1/n}(\Psi_n(\tau))^{(n-1)/n}, \\
\Psi_n(\tau) &= \int_0^\tau g_n(s)ds.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

4)Синтез оптимального управления в стохастической задаче

(2.14),(2.15),(2.20) имеет вид

$$u \ = \ \begin{cases} -|f(t)|^{1/(n-1)}(\frac{q}{\psi_n(\tau)})^{1/n}\mathrm{sign}f(t), & y \geq R_n(q,\tau) \\ 0, & 0 \leq y < R_n(q,\tau). \end{cases} \tag{2.35}$$

□

Доказательство.

Сделаем краткие замечания к доказательству. Можно выразить производные q'_ξ, q'_δ, q'_η из трех первых уравнений (2.24).("способ С"в главе 1. §1.6)

$$q^{'}{}_j(\xi,\delta,\eta) = \frac{U^{'}{}_j(\xi,\delta,\eta) - Yy^{'}{}_j(\xi,\delta,\eta) - T\tau^{'}{}_j(\xi,\delta,\eta)}{M}, \tag{2.36}$$

где j принимает последовательно значения из множества $j = \{\xi,\delta,\eta\}$.

Подставим эти производные в уравнения (2.26), (2.28)-(2.30).

Предполагая, что функция U принимает значение нуль на некоторой кривой, введем переменную $w = y - r(q,\tau)$ в функции $\Phi(\tau,w)$. Анализируя полученные уравнения получим результаты теоремы 2.3.1. В данном случае имеется возможность получить решение в явном виде.

Таким образом, и в других многомерных задачах с переменными коэффициентами данная методика исследования задач и построения решения может быть полезна.

Замечание 2.3.1

Решение задачи (2.32) при $\sigma_1 = const$ приведено в [34] с.50.

Анализируя полученные выше формулы и упрощая их можно построить:

Точные решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в детерминированном случае ($n>1$).

В детерминированном случае вид формулы (2.3) сохраняется, причем $\sigma_1(\tau) = 0$. Уравнение (2.14) примет вид

$$S_\tau = (n-1)p_n(\tau)\left(\frac{|S'_y|}{-nS'_q}\right)^{\mu+1} S_q, \qquad (2.37)$$

Здесь $g_n(\tau)$ заменяется на $p_n(\tau)$, так как, вообще говоря, это другая функция.

Теорема 2.3.2.

Пусть $\varphi(y)$ – четная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, $S(y,q,\tau)$ –единственное решение задачи Коши (2.37),(2.15),(2.20).

1) Тогда, точное решение уравнения (2.37) допускает представление

$S(y,q,\tau) = \varphi(z)|_{z=y-P_n(q,\tau)}$,

где $P_n(q,\tau) = q^{1/n}(\Theta_n(\tau))^{1-1/n}$, $\Theta_n(\tau) = \int_0^\tau p_n(s)ds$.

Функция $p_n(s)$ определена равенством (2.16).[11]

2) Оптимальное управление в задаче (2.37),(2.15),(2.20) имеет вид

$$u = \begin{cases} -|f(t)|^\mu(\frac{q}{\Theta_n(\tau)})^{1/n} sign f(t), & y \geq P_n(q,\tau) \\ 0 \qquad\qquad , & 0 \leq y < P_n(q,\tau). \end{cases}$$

[11]Здесь заменена буква g на букву p

$$(2.38)$$

Доказательство.

Первая часть утверждения непосредственно проверяется подстановкой функции $\varphi(z)$ в уравнение (2.37).

Рассмотрим области

$$D^n{}_1 = \{y, q, \tau : y > P_n(q, \tau)\},$$
$$D^n{}_2 = \{y, q, \tau : 0 \le y < P_n(q, \tau)\}. \qquad (2.39)$$

Граница γ_n этих областей, задается поверхностью $y = P_n(q, \tau)$, содержащей координатную ось $q = 0$, а ее сечения при $q = const > 0$, представляют собой в плоскости y, τ монотонно возрастающую (функцию) кривую, выходящую из начала координат. Поверхность разделяет области $D^n{}_1$ и $D^n{}_2$ таким образом, что поверхность $\tau = 0$ является границей области $D^n{}_2$, а поверхность $y = 0$ является границей области $D^n{}_1$. Уравнение (2.37) дополняются краевым условием

$$S_q(y, q, \tau) < 0, \quad u \neq 0.$$

Следовательно, первая часть формулы (2.38) справедлива лишь в области $D^n{}_1$, $u = -|f(t)|^{\mu}(\frac{q}{\Theta_n(\tau)})^{1/n} sign f(t)$. На границе γ_n областей $D^n{}_1$ и $D^n{}_2$ функция $S = \varphi(z)$ обращается в ноль вместе со своими производными по y и q. Продолжим функцию $S = \varphi(z)$ нулем в область $D^n{}_2$. Выбор управления $u = 0$ в области $D^n{}_2$ обеспечивает попадание фазовой траектории системы на множество $y = 0$ при $\tau = 0$. Действительно, при $u = 0$, из уравнений (2.10) следует, что $y = const > 0$, $q = const > 0$. Поэтому с уменьшением обратного времени, $\tau = T - t$ фазовая траектория системы обязательно попадет на границу γ_n (см. Рис.2.)

Траектории детерминированной системы (2.10) в области ${D^n}_1$ лежат на поверхности

$$G(y, q, \tau) = y - P_n(q, \tau) = const.$$

Для доказательства этого факта необходимо рассмотреть нормаль к этой поверхности, и проверить ее ортогональность вектору, составленному из правых частей уравнений (2.10). С учетом формулы (2.38), запишем детерминированную систему (2.10) в виде

$$\dot{y} = -F,\ \dot{q} = -F^n,\ \dot{\tau} = -1,\ F = (f(\tau))^{\mu}(q/\Theta_n(\tau))^{1/n}.$$

С помощью явного вида выражения для функции $\Theta_n(\tau)$ проверяется, что скалярное произведение векторов ∇G и $(-F, -F^n, -1)$ равно нулю.

Формула (2.38) сохраняет смысл и на самой поверхности γ_n, несмотря на то, что $S_q = S_y = 0$ на γ_n, так как возникающая при этом неопределенность в выражении (2.38) может быть раскрыта. Таким образом, на множестве γ_n реализуется ранее упомянутая в начале этого параграфа возможность, при которой $S_y = S_q = 0$, а управление $u \neq 0$.

В итоге, в области ${D^n}_1$ вместе с границей γ_n происходит движение по поверхностям $y - P_n(q, \tau) = const$, а в области ${D^n}_2$ фазовая траектория имеет вид $y = q = const$, что обеспечивает ее попадание на множество $y = 0$ к моменту $\tau = 0$ (см. Рис.2).

В заключение параграфа приведем

Примеры 2.1.a-d.

a. Рассмотрим стохастическую задачу с $f(t) = T - t$. Из выражения (2.13) следует, что $\tau = (T-t)^3/3$.Решение уравнения (2.14) в соответствии с утверждением 2.3.1 есть функция переменных

$$w = y - R_n(q,\tau),$$
$$R_n(q,\tau) = ((n-1)/(2n-1))^{1-1/n}(3\tau)^{2/3-1/(3n)}q^{1/n}. \quad (2.40)$$

Синтез оптимального управления в данном случае определяется по формуле

$$u = \begin{cases} -(q(3\tau)^{-1/3})(2n-1)/(n-1))^{1/n}, & y \geq R_n(q,\tau) \\ 0, & 0 \leq y < R_n(q,\tau). \end{cases} \quad (2.41)$$

b. Рассмотрим другой распространенный случай. Положим $n = 2$ и $f = \sin(\omega(T-t))$, из равенства (2.13) следует, что переменные t и τ связаны соотношением

$\tau = \frac{1}{2}(T - t - (\sin(2\omega(T-t)))/(2\omega))$.

В этом случае оптимальное управление определяется по закону

$$u = \begin{cases} -\sin(\omega(T-t))(q/\tau)^{1/2}, & y \geq \sqrt{q\tau} \\ 0, & 0 \leq y < \sqrt{q\tau}. \end{cases}$$

c. Приведем пример детерминированной ситуации. Для функции $f = T - t = \tau$ из соотношений параграфа 2.2 в соответствии с *Теоремой 2.3.1* получим

$p_n(\tau) = \tau^{\mu+1},\ \Theta_n(\tau) = (2+\mu)^{-1}\tau^{2+\mu}.$

Формула (2.38) (синтез оптимального управления)принимает конкретный вид

$$u \ = \ \begin{cases} -\tau^{-1/n}(2+\mu), & y \geq q^{1/n}(\Theta_n(\tau))^{1-1/n} \\ \qquad 0 \qquad , & 0 \leq y < q^{1/n}(\Theta_n(\tau))^{1-1/n}. \end{cases}$$

d. Положим $n = 2$, то для функции $f = \sin\omega(T-t) = \sin(\omega\tau)$ соответствующий закон управления имеет вид (2.38), где

$\Theta_n(\tau) = (\tau + \sin(2\omega\tau)/(2\omega))/2,$

$p_n(\tau) = ((\tau + \sin(2\omega\tau)/(2\omega))/(2q))^{1/2}$. На Рис.2.3. представлены графики изменения оптимального управления u и оптимальная фазовая траектория детерминированной системы и график функции $q(t)$

$n = 2, T = 10, f = T - t$ для системы (2.10)в параграфе 2.1 с начальными данными $x_1^0 = 4,\ x_2^0 = 2,\ q_0 = 1.$

На Рис.12. представлен график изменения оптимального управления u и оптимальная фазовая траектория детерминированной системы

$n = 2, T = 10, f = \cos(\pi(T-t)/3)$ для системы (2.10)в параграфе 2.1 с начальными данными $x_1^0 = 2,\ x_2^0 = 8,\ q_0 = 1.$

На Рис.13 те же закономерности представлены в случае

$n = 40/39, T = 8, f = \sin(\pi(T-t)/3)$, т.е. в ситуации когда величина n близка к единице для системы (2.10) в параграфе 2.1 с начальными данными $x_1^0 = 8, x_2^0 = 4, q_0 = 0.8$. Оптимальное управление представляет собой последовательность

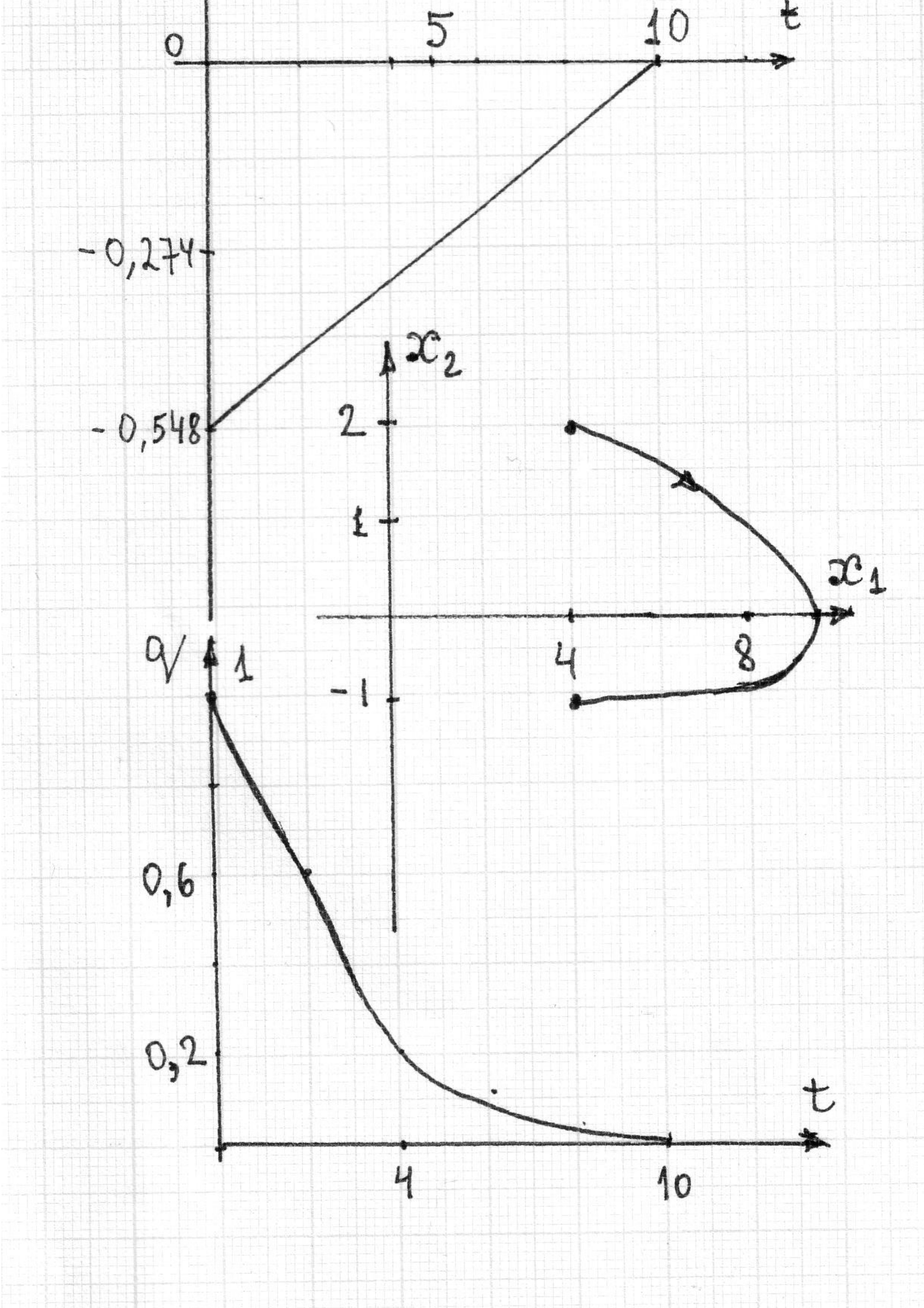

Рис. 11: Изменение оптимального управления u и фазовая траектория детерминированной системы и ресурс $q(t)$. Здесь $n = 2, T = 10, f = T - t$ для системы (2.10) в параграфе 2.1 с начальными данными $x_1^0 = 4,\ x_2^0 = 2,\ q_0 = 1$

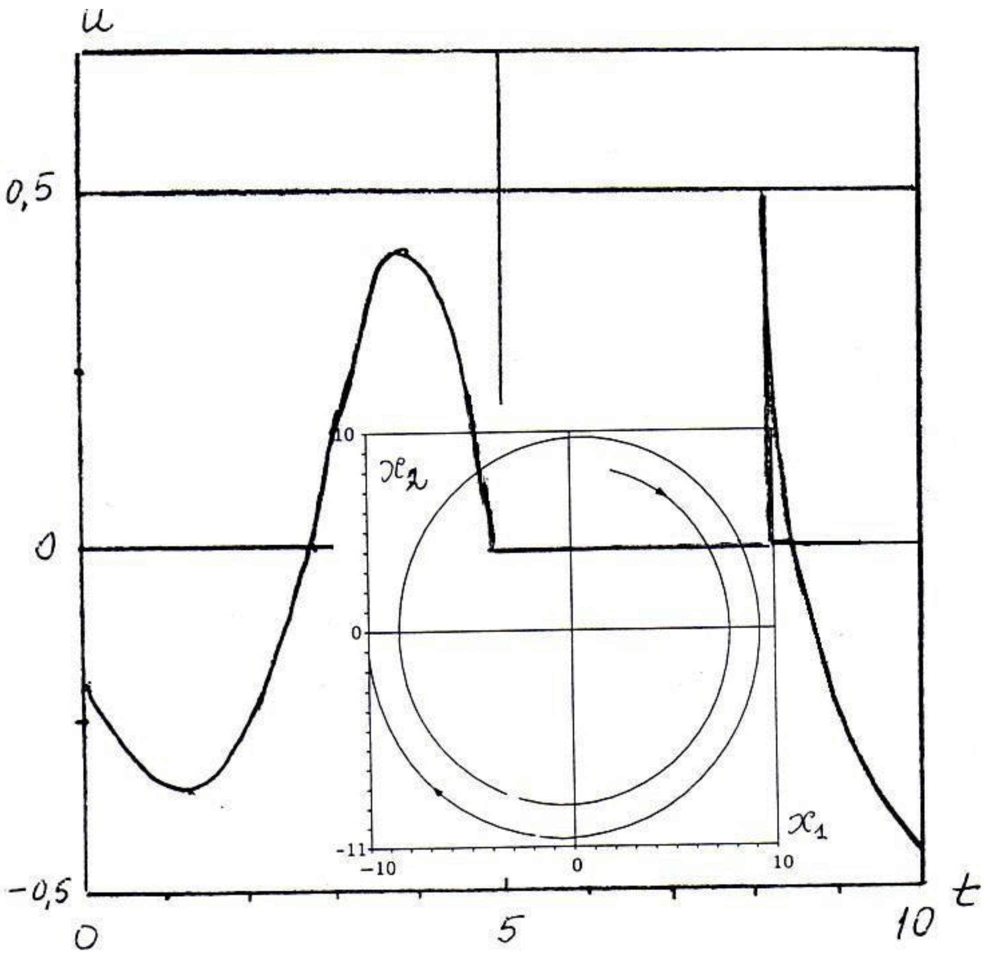

Рис. 12: Изменение оптимального управления u и фазовая траектория детерминированной системы.

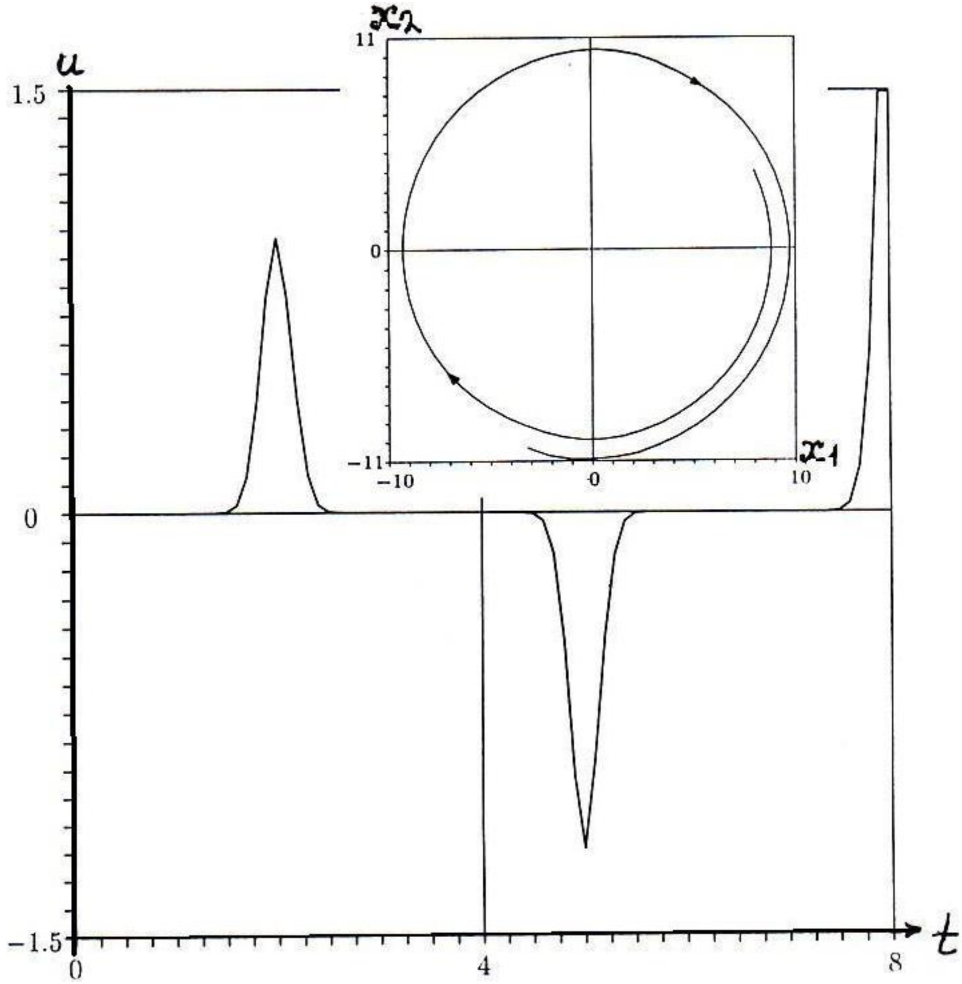

Рис. 13: Изменение оптимального управления u и фазовая траектория в случае когда параметр n близок к единице.

импульсов. См. подробнее [33], где случай импульсного управления рассматривается отдельно. Этот пример показывает, что предельный переход при $n \to 1$ существует и является проверкой проведенных рассуждений в некотором смысле.

Расчеты показывают, что оптимальные фазовые траектории системы с ненулевым значением ω имеют вид раскручивающихся спиралей. Таким образом, в задаче о минимизации потенциальной энергии системы к заданному моменту времени происходит увеличение кинетической энергии, а в аналогичной задаче о минимизации кинетической энергии к финальному моменту времени увеличивается потенциальная энергия.

Укажем вклад автора в работах [31], [33], [179], [180]. Автором были исследованы и решены поставленные А.С.Братусем задачи, приведенные в §2.2, 2.3. Приведены численные расчеты ряда примеров два из которых представлены здесь.

2.4 Управляемое движение материальной точки постоянной массы находящейся под воздействием пуассоновских и гауссовских возмущений. $\gamma < 1,\ n > 1$

Пусть управляемое движение материальной точки переменной массы, находящейся под воздействием пуассоновских и гауссовских возмущений описывается уравнениями

$$d(m_o\dot{x}_1) = (-\omega^2 x_1 - 2\alpha x_2 + u + \xi(t)\sigma(t) + h(t)\varsigma(t))dt,$$
$$x_1(0) = x^\circ{}_1, \quad x_2(0) = x^\circ{}_2. \tag{2.42}$$

Здесь t -время, $0 \le t \le T$, x_1, x_2, - фазовые координаты, u -управляющая сила,$\xi(t), \varsigma(t)$-гауссовский белый шум единичной интенсивности и пуассоновский процесс с парамером $\lambda(t), \sigma(t), h(t)$-ограниченные функции описывающая интенсивность соответствующих возмущений. ω- собственная частота, $\alpha-$ коэффициент трения, $\omega > \alpha$. В данной задаче рассматриваются только допустимые управления u, такие что существует интеграл (2.2) и введена переменная (2.3)и верны предположения сделанные в параграфах §2.1, §2.2.

В данном параграфе минимизируется функционалы (2.4).

$\varphi(x_1) \in C^{\infty}(R)$-гладкая, четная, неотрицательная функция $\varphi^{'}(x_1) > 0$, $x_1 > 0$, $\varphi(0) = 0$. Начальное условие для уравнения Гамильтоно-Якоби-Беллмана имеют вид

$S(0, x_1, x_2, q) = \varphi(x_1)$, и удовлетворяет следующему условию

$$\lim \frac{\varphi^{'}(x_1)}{\varphi(x_1)} = 0, \quad x_1 \to \infty. \tag{2.43}$$

Если масса постоянная $m_o = 1$, имеем следующее уравнение движения

$$\begin{aligned} &\dot{y} = f(t)(u + \sigma(t)\xi(t) + h(t)\varsigma(t)), \\ &\dot{q} = -|u|^n. \end{aligned} \tag{2.44}$$

где $f(t)$ –гладкая непрерывная функция, определенная в параграфе 2.1, $0 \leq t \leq T$.

Пусть функция Беллмана $S(y, q, t) = \inf E(\varphi(x_i(T)))$, $i = 1, 2$- минимальное значение математического ожидания функционала (2.4), которое может быть достигнуто при начальных условиях $t = t_0$, $q = q_0$, $y = y_0$ в задаче оптимального управления. Предполагая существование и достаточную гладкость функции $S(y, q, t)$ в области непрерывности, можно написать уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\begin{aligned} &S_t + \min_u \{f(t)\ u\ S_y - |u|^n S_q\} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) S_{yy} + \\ &\lambda(t)(S(y + h(t), q, t) - S(y, q, t)) = 0, \end{aligned} \tag{2.45}$$

Как и ранее здесь минимум берется по значениям допустимого управления u в R^1.

Из постановки задачи следует, что величина функции $S(y,q,T)$ может лишь уменьшиться при увеличении значения q, поскольку, чем больше ресурс управления, тем меньшего значения функционала можно достичь при прочих равных условиях , т.е.

$S(y,q_2,t) \le S(y,q_1,t),\ q_1 <\ q_2.$

Учитывая гладкость функции $S(y,q,T)$, получим, что должно выполняться условие

$$S_q(y,q,T) < 0. \tag{2.46}$$

Таким образом, при $m_o = 1$ минимальное значение выражения, стоящего в фигурных скобках в уравнении (2.45), достигается на следующей управляющей функции:

$$u = \left(\frac{|S'_y f(t)|}{-nS'_q}\right)^{\mu} \operatorname{sign}(S'_y f(t)), \quad \mu = (n-1)^{-1}. \tag{2.47}$$

После замены переменой

$$\tau = \int_t^T f^2(s)ds. \tag{2.48}$$

уравнение (2.45) трансформируется в уравнение

$$S'_\tau = (n-1)g_n(\tau)\left(\frac{|S'_y|}{-nS'_q}\right)^{\mu+1} S'_q +$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2{}_1(\tau)S''_{yy} + \lambda_1(\tau)(S(y+h_1(\tau),q,\tau) - S(y,q,\tau)) = 0, \tag{2.49}$$

с начальным условием

$$S(y,q,0) = \varphi(y). \tag{2.50}$$

Здесь

$$g_n(\tau) = |f(t)|^{(2-n)/(n-1)}|_{t=t(\tau)}, \quad \sigma_1(\tau) = \sigma(t)|_{t=t(\tau)},$$
$$\lambda_1(\tau) = \lambda(t)|_{t=t(\tau)}, \quad h_1(\tau) = h(t)|_{t=t(\tau)}, \tag{2.51}$$

причем переменные t и τ связаны соотношением (2.48).

Как и ранее, эту задачу можно рассматривать только при $y > 0$ с дополнительным краевым условием

$$S_y(0, q, \tau) = 0. \tag{2.52}$$

Функция $S(y, q, \tau)$ обращается в нуль на неизвестной кривой γ_n.

$$S(y, q, \tau)|_{\gamma_n} = 0. \tag{2.53}$$

Уравнение этой кривой должно быть определено в процессе построения решения задачи.

Фактически решение $S(y, q, \tau, \gamma)$ уравнения (2.49)зависит от трех переменных $y, \ q, \ \tau$.

Ниже построено решение задачи в области непрерывности $D_1 = \{y - (\frac{q}{m_o})^{1/n}(\int_0^\tau g(s)ds)^{(1-1/n)}\}$ функции S.

Пусть функция $\Phi(w, \tau)$ является решением линейного параболического уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\sigma_1(\tau)^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} + \lambda_1(\tau)(\Phi(w + h_1, \tau) - \Phi(w, \tau)), \tag{2.54}$$

с начальным условием $\Phi(w, 0) = \varphi(w)$ и условием $\Phi(0, \tau) = 0$. См.также [76].

Теорема 2.4.1.

Пусть существует единственное решение задачи Коши (2.49) со специальными начальными данными (2.50)и условиями (2.52),(2.53).

Тогда

1)решение уравнения (2.49)допускает представление решения

$$S(y,q,\tau) = \Phi(w,\tau) + \gamma\Omega(w,q,\tau) + O(\gamma^2),$$
$$w = y - (\frac{q}{m_o})^{1/n}(\int_0^\tau g(s)ds)^{(1-1/n)}, \qquad (2.55)$$

где функция $\Phi(w,\tau)$ решение уравнения Колмогорова (2.54).

2)Синтез оптимального управления в стохастической задаче (2.49),(2.50),(2.5 имеет вид

$$u = \begin{cases} -|f(t)|^{1/(n-1)}(\frac{q}{\psi_n(\tau)})^{1/n}\mathrm{sign} f(t), & y \geq R_n(q,\tau) \\ 0, & 0 \leq y < R_n(q,\tau). \end{cases} \qquad (2.56)$$

□ **Доказательство.**

Первая часть утверждения проверяется непосредственной подстановкой. Решение задачи Коши (2.49) со специальными начальными данными (2.50) и условиями, (2.53) при $\lambda_1 = 0$ (отсутствие пуассоновских возмущений) имеет вид приведенный в параграфе 2.3 в Теореме 2.3.1.

Если $\lambda_1 > 0$, то уравнение Колмогорова решено и подробно исследовано в цикле работ А.С.Братусь, Б.Н.Колмановский [28]. См. также численные расчеты в [162], где использованы результаты диссертации. Если начальные данные задачи не растут по переменной w быстрее экспоненциальной функции, то решение определяется сверткой с фундаментальным решение, найденным в указанной работе [28].

Замечание 2.4.1

С задачей, решение которой построено в параграфе 2.3, связаны несколько задач, содержащих естественный малый параметр. Например, это задача оптимальной коррекции движением тела, когда на управление дополнительно действуют малые случайные возмущения и оно осуществляется не точно. См. [25],[27],[30]. Можно построить, при условиях (2.43) на начальные данные, асимптотическое решение, главный член которого дается решением рассмотренной задачи. Поправка удовлетворяет задаче Коши для линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами, решение которой при условиях (2.43) на начальные данные существует и ограничено при малых значениях τ [108].

2.5 Синтез оптимального управления в задаче коррекции движения тела переменной массы с ограничением на суммарный ресурс управления

В этом параграфе решена задача синтеза оптимального управления движением тела переменной массы. Целью управления является минимизация квадратичной функции фазовой переменной к фиксированному моменту времени.

В детерминированном случае, для построения решения используются групповые свойства системы уравнений. В задаче существует предельный переход решения к решению задачи с постоянной массой при значении параметра $\gamma = 0$, рассмотренной в этой главе. В стохастическом случае, при воздействии случайных возмущений распределенных по гауссовскому и пуассоновскому законам, имеется возможность построить асимптотическое решение по параметру $\gamma < 1$ при его малых значениях.

Пусть управляемое движение материальной точки переменной массы описывается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(t)\dot{x}_1) = u, \quad x_1(0) = x^{\circ}{}_1, \quad x_2(0) = x^{\circ}{}_2. \tag{2.57}$$

Здесь t -время, $0 \le t \le T$, x_1, x_2, - фазовые координаты, u -управляющая сила. Здесь также, как и в параграфе 2.1 рассматриваются допустимые управления со значениями $u \in R^1$, u интегрируемая на отрезке $[0, T]$ функция для любых x_1, x_2 и введена переменная:

$$q(t) = \int_t^T |u|^n dt. \tag{2.58}$$

Здесь $n-$ положительное число, как и ранее. Самое распространенное значение $n = 2$, однако построенные ниже решения справедливы и для других, в частности, для рациональных значений этого парамера. Переменная q имеет смысл неизрасходованного ресурса управления, причем $q(T) = 0$.

Тогда к уравнениям (2.57) можно добавить уравнение

$$\dot{q} = -|u|^n. \tag{2.59}$$

Предположим, что полная масса тела состоит из собственной постоянной массы $m_o > 0$ и величины пропорциональной неизрасходованному ресурсу управления

$$m(t) = m_o + \gamma \int_t^T |u|^n dt. \tag{2.60}$$

Цель управления в детерминированном случае - минимизация функционала

$$(x_1(T))^2. \tag{2.61}$$

В [9] проведен обзор большого количества работ с переменной массой, однако задачи синтеза оптимального управления в такой постановке там нет. См.также [5], где обсуждается другая постановка задачи с переменной массой.

Задача синтеза оптимального управления позволяет определить управление, то есть это задача –нахождение закона оптимального управления для любых возможных значений фазовых переменных x_1, x_2, q и времени t.

Тогда система (2.57),(2.59) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = (m_o + \gamma q(t))^{-1} u,\\
&\dot{q} = -|u|^n,\\
&x_1(0) = x^\circ{}_1, \quad x_2(0) = x^\circ{}_2.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Учитывая специфику функционала (2.61), порядок системы в предыдущих параграфах в случае постоянной массы можно было понизить. Процедура введения вспомогательной функции была подробно описана выше в §2.1.

В задаче с переменной массой этот способ не годится, такой вспомогательной функции не существует.

Уравнения динамического програмирования в детерминированном случае. $n > 1$.

Пусть $S(y, q, t)$–минимальное значение функционала (2.61), которое может быть достигнуто при начальных условиях

$t = t_0$, $q = 0$, $y = y_0$ в задаче оптимального управления описываемые уравнениями состояния (2.62).

Постановка задачи принадлежит А.С.Братусю. Для функции $S(y, q, t)$, можно написать уравнение динамического програмирования первого порядка

$$S_t + x_2 S_{x_1} + \min_u \{m^{-1} u S_{x_2} - |u|^n (x_2 m^{-1} S_{x_2} + S_q)\} = 0 \tag{2.63}$$

Здесь миниум берется по значениям u которые принадлежат R^1 и введено обозначение $m = m_o + \gamma q$.

Функция S удовлетворяет условию $S(T, x_1, x_2, q) = {x_1}^2$.

Оптимальное управление имеет вид

$$u = \left(\frac{|S'_{x_2}|}{-n(mS'_q + x_2 \gamma S'_{x_2})} \right)^{1/(n-1)} \operatorname{sign}(S_{x_2}). \tag{2.64}$$

После замены переменой (обратное время) $\tau = t - T$, уравнение (2.63) трансформируется в уравнение

$$S_\tau = x_2 S_{x1} + (n-1) \left(\frac{|S'_{x_2}|}{-nmW} \right)^{n/(n-1)} W,$$

$$\text{где,} \quad W = S'_q + \gamma x_2 m^{-1} S'_{x2}, \tag{2.65}$$

с начальным условием

$$S(0, x_1, x_2, q) = {x_1}^2. \tag{2.66}$$

Построение точных решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана в детерминированном случае, $(n > 1)$.

Замечание 2.5.1.

Автором был проведен групповой анализ уравнения (2.14) с постоянной $\gamma = 0$ и
переменной $\gamma \neq 0$ массой. Этот анализ приведен в докладах на конференциях [8],[9]по списку конференций в Введении. Анализ показывает, что группа преобразований допускаемая задачей с постоянной массой, распространяется на задачу с переменной массой. Классическая техника группового анализа и большой список основополагающих работ приведен в [65]- [69]. Анализ большого числа задач (см. предыдущие параграфы) позволяет сделать предположение о том, что и в этом случае имеет место локализация решения. То есть существует непрерывная линия γ_n которая разделяет всю область на две области Ω_1 и Ω_2 приведенные на Рис.2. (Здесь мы поменяли обозначения: ${D_i}^n$ на $\Omega_i, \quad i = 1, 2.$)

В области Ω_1 функция S, убывает навстречу вектора внешней нормали к линии переключения. Линия γ_n которая разделяет облать непрерывности и функции S и область, в которой эта функция тождественно равна нулю. При построении точного решения необходимо построить такую непрерывную функцию S которая гладко склеивается на линии γ_n вместе с первыми и вторыми производными. Обозначим через α, β переменные из множества $\{\tau, x_1, x_2, q\}$. Тогда, в области непрерывности должны выполняться равенства смешанных производных функции $S(\tau, x_1, x_2, q)$, а именно $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$.

В связи со сложностью замены переменных будем проводить ее в два этапа.

Задачу Коши (2.65) со специальными начальными данными можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&S'_{\tau} = x_2 S'_{x1} + (n-1)\frac{S'_{x_2} u}{nm},\\
&\text{где,}\quad u = \left(\frac{|S'_{x_2}|}{-n(mS'_q + x_2\gamma S'_{x_2})}\right)^{1/(n-1)} \operatorname{sign}(S_{x_2}),\\
&m = m_o + \gamma q.
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Основной результат данного параграфа заключен в теореме

Теорема.2.5.1

Пусть функция $S(\tau, x_1, x_2, q)$ решение задачи Коши со специальными начальными данными (2.65),(2.66) в области

$D_1 = \{x_1 + x_2\tau \geq x_2^{\frac{2n-1}{n-1}} \Lambda(\frac{\tau}{x_2^{\frac{n}{n-1}}}, q)\}$.

Тогда функция $S(\tau, x_1, x_2, q)$ и $u(\tau, x_1, x_2, q)$ в области D_1 имеют вид

$$
\begin{aligned}
&S(\tau, x_1, x_2, q) = \left(x_1 + x_2\tau - x_2^{\frac{2n-1}{n-1}} \Lambda\left(\frac{\tau}{x_2^{\frac{n}{n-1}}}, q\right)\right)^2,\\
&u(\tau, x_1, x_2, q) = U\left(\frac{\tau}{x_2^{\frac{n}{n-1}}}, q\right) x_2^{\frac{1}{1-n}}, \quad \varsigma = \frac{\tau}{x_2^{\frac{n}{n-1}}}
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

где функции $\Lambda(\varsigma, q), U(\varsigma, q)$ удовлетворяют системе уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\varsigma} = \frac{U((n-1)\varsigma + (1-2n)\Lambda)}{n(m+\varsigma U)}, \qquad (2.69)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q} = \frac{(n\gamma + U^{1-n})((n-1)\varsigma + (1-2n)\Lambda)}{n(n-1)(m+\varsigma U)}, \qquad (2.70)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\varsigma} + \frac{(n-1)U^n}{(1+n\gamma U^{n-1})}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial q} = 0, \qquad (2.71)$$

причем выполнено условие $\Lambda(0,0) = 0$[12]. Функции $\Lambda(\varsigma, q)$ выражается через функцию $U(\varsigma, q)$ и ее производные

$$\Lambda(\varsigma, q) = \frac{-\gamma\varsigma U^3 + m\varsigma {U'}_\varsigma - U(m + 2\varsigma^2 {U'}_\varsigma) + U^2(m\varsigma {U'}_q - 2\gamma(m + \varsigma^2 {U'}_\varsigma))}{3(-3\gamma U^3 + m{U'}_\varsigma - 2\varsigma U{U'}_\varsigma + U^2(-1 + m{U'}_q - 2\gamma\varsigma {U'}_\varsigma))}. \qquad (2.72)$$

Теорема 2.5.2.

Существует замена переменных в системе (2.69)–(2.71), такая что

$U(\varsigma, q) = U_1(\frac{\varsigma}{m_o+\gamma q})$.

Тогда функция $U_1(\theta)$, $\theta = \frac{\varsigma}{m_o+\gamma q}$ удовлетворяет ОДУ первого порядка

$$U_1\{1 - 2n + \{2(1-2n)\gamma + 3(n-1)\theta\}U_1 + (7n-8)\gamma\theta {U_1}^2 + (2-3n)n\gamma {U_1}^{n-1} + \gamma\{n^2(2\theta - 6\gamma) - \theta + n(4\gamma - \theta)\}{U_1}^n + \gamma\theta\{(4n^2 - 2 - 3n)\gamma + 3(n-1)^2\theta\}{U_1}^{n+1} + 8(n-1)^2\gamma^2{U_1}^{n+2}\} + \frac{\partial U_1}{\partial\theta}(-1 + 2\theta U_1 + 3\gamma\theta {U_1}^2)(n - 2 - n\gamma {U_1}^{n-1} + 2(n-1)^2\gamma\theta {U_1}^n) = 0, \qquad (2.73)$$

[12]Здесь предполагается, что $SignS_{x_2} = -1$.

с начальным условием $U_1(0) = 0$.

Функция $P(\theta)$ имеет вид

$P(\theta) = \frac{(n-1)(\gamma(n-1){U_1}^n\theta + n\gamma {U_1}^{n-1}+1)}{(n-1)^2\gamma {U_1}^n\theta + n(3n-2)\gamma {U_1}^{n-1} + 2n - 1}$,

где функция $\Lambda(\varsigma, q) = \varsigma P(\frac{\varsigma}{m_o + \gamma q})$.

□

Доказательство.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой. Дадим короткие коментарии к доказательству. Система уравнений (2.69)–(2.71) после замены приведенной в Теореме 2.5.2 имеет вид

$$mn\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma} + U((1-2n)\Lambda) + \varsigma(n - 1 + n\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma}) = 0, \qquad (2.74)$$

$$nU^{n-1}\{\gamma(1-2n)\Lambda + m(1-n)\frac{\partial \Lambda}{\partial q} + \gamma\varsigma(-1 + n + n\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma})\} +$$
$$(1-2n)\Lambda + \varsigma(n - 1 + n\gamma\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma}) = 0, \qquad (2.75)$$

$m = m_o + \gamma q$.

Эта система рассматривается в области непрерывности D_1, как алгебраическая нелинейная система относительно производных $\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma}$, $\frac{\partial \Lambda}{\partial q}$.

Ее решения дают два первых соотношения (2.69), (2.70). Оказывается, что эти равенства совпадают с равенством смешанных производных

$S_{x_2\tau} = S_{\tau,x_2}$, $S_{x_1q} = S_{qx_1}$, соответственно. Это проверяется непосредственными вычислениями. В итоге имеем одно ОДУ первого

порядка (2.73) с начальным условием.

Таким образом, все функции полностью определены (2.69) и вычисляется синтез оптимального управления (2.64). Уравнение (2.73) численно интегрируется при различных значения γ.

Замечание 2.5.2

Существует предельный переход при $\gamma = 0$ в данных формулах к задаче с постоянной массой рассмотренной в параграфе 2.3. Наиболее просто это показать при $n = 2$.

Если положить в (2.68) $\gamma = 0$, то в самом простом случае $\alpha = 0, \omega = 0(2.5)$ из Теоремы 2.3.1 следуют выражения, которое уже упоминалось во введении к данной главе, параграф 2.1.

$$S(\tau, x_1, x_2, q) = \begin{cases} [x_1 + x_2\tau - \frac{1}{m_o}\sqrt{\frac{q\tau^3}{3}}]^2, \text{если} \quad x_1 + x_2\tau \geq \frac{1}{m_o}\sqrt{\frac{q\tau^3}{3}}, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если} \quad x_1 + x_2\tau < \frac{1}{m_o}\sqrt{\frac{q\tau^3}{3}}. \end{cases} \tag{2.76}$$

Функция управления имеет вид

$$u(\tau, x_1, x_2, q) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{3q}{\tau}}, \text{если} \quad x_1 + x_2\tau \geq \frac{1}{m_o}\sqrt{\frac{q\tau^3}{3}}, \\ 0, \qquad\qquad \text{если} \quad x_1 + x_2\tau < \frac{1}{m_o}\sqrt{\frac{q\tau^3}{3}}. \end{cases} \tag{2.77}$$

Таким образом, функции (2.76),(2.77)можно рассматривать отдельно в области D_1, где они непрерывны, (первая строка в данных выражениях) то есть функции локализованы в пространстве.

Кроме того, при $\gamma = 0$ существует предельный переход в уравнении (2.74),(2.75)

$$m_o n \frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma} + U((1-2n)\Lambda) + \varsigma(n - 1 + n\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma}) = 0, \qquad (2.78)$$

$$nU^{n-1} m_o (1-n)\frac{\partial \Lambda}{\partial q} + (1-2n)\Lambda + \varsigma(n - 1 + n\gamma\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma}) = 0, (2.79)$$

решение которых имеет вид

$L(\varsigma, q) = \frac{1}{m_o}\sqrt{\frac{\varsigma^3 q}{3}}$, $U(\varsigma, q) = \sqrt{\frac{3q}{\varsigma}}$, $\varsigma = \frac{\tau}{{x_2}^2}$. Легко проверить, что в области непрерывности D_1 это выражение совпадает со значением функции (2.68) при $n = 2, \gamma = 0$.

3 ГЛАВА 3. Построение точных решений квазилинейных эллиптических уравнений в параметрической форме.

3.1 Метод построения решений в параметрической форме квазилинейных эллиптических уравнений с коэффициентом переноса, зависящим от нелинейной функции.

Метод построения решений разработанный в главе 1 применен для важных в приложениях квазилинейных эллиптических уравнений

$$(G(Z)Z'_x)_x + (K(Z)Z'_y)_y - f(Z) = 0, \tag{3.1}$$

и верны теоремы аналогичные теоремам главы 1.

Таким образом, имеется положительный ответ на вопрос В.В.Жикова заданный на конференции в Суздале ([11]по списку конференций, приведенному во Введении).

Здесь $K(Z), G(Z), f(Z)$-дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Сделаем произвольную замену переменных

$$Z(x,y)|_{x=x(\xi,\delta),\ y=y(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta), \tag{3.2}$$

Введем обозначения (дифференциальные связи [137])

$$G(Z)Z'_x = Y(\xi, \delta),$$
$$K(Z)Z'_y = T(\xi, \delta), \qquad (3.3)$$

Предположим, что якобиан замены переменных

$detJ = x'_\xi y'_\delta - y'_\xi x'_\delta \neq 0$ не равен нулю, где

$$J = \begin{pmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ \\ x'_\delta & y'_\delta \end{pmatrix}$$

Тогда существует обратное преобразование, хотя бы локально,

$\xi = \xi(x, y), \delta = \delta(x, y)$. При этом

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = detJ\frac{\partial \delta}{\partial y},\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = -detJ\frac{\partial \delta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = -detJ\frac{\partial \xi}{\partial y},\ \frac{\partial y}{\partial \delta} = detJ\frac{\partial \xi}{\partial x}. \qquad (3.4)$$

Введем обозначения

$$G(Z)\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ y=y(\xi,\ \delta)} = Y(\xi, \delta),$$
$$K(Z)\frac{\partial Z}{\partial y}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ y=y(\xi,\ \delta)} = T(\xi, \delta). \qquad (3.5)$$

Введем также функции

$$\Psi_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} (K[G^3\ T\ T'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) -$$
$$-G^2\ T\ YK'_U U'_\xi(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)] +$$
$$+K^2[-fG^3U'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) + G\ T\ YG'_U U'_\xi(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi) +$$
$$+G^2[YU'_\xi(Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi) + +T\ Y'_\xi(-Y'_\delta U'_\xi + U'_\delta Y'_\xi)]]/P_o(\xi,\delta),$$
$$\Psi_2(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} (K(-G^3\ T\ T'_\delta(-U'_\delta T'_\xi + T'_\delta U'_\xi) +$$
$$+G^2\ T\ YK'_U U'_\delta(-Y'_\delta U'_\xi + U'_\delta Y'_\xi) +$$
$$+K^2[-fG^3U'_\delta(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) - G\ T\ YG'_U U'_\delta(-Y'_\delta U'_\xi + U'_\delta Y'_\xi) +$$
$$+G^2[YU'_\delta(Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi) + +T\ Y'_\delta(-Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)]])/P_o(\xi,\delta),$$
$$\Psi_3(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} (-KG^2\ T\ YK'_U U'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) +$$
$$+\ K^2[G\ T\ YG'_U U'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) +$$
$$+\ G^2[YT'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) + TU'_\xi(-Y'_\delta T'_\xi + T'_\delta Y'_\xi)]] +$$
$$+\ K^3[f(U)G^2U'_\xi(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi) - G\ YY'_\xi(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)])/P_o(\xi,\delta),$$
$$\Psi_4(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} (KG^2\ T\ YK'_U U'_\delta(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) +$$
$$+\ K^2[-G\ T\ YG'_U U'_\delta(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) +$$
$$+\ G^2[Y\ T'_\delta(-U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) + T\ U'_\delta(Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi)]] +$$
$$+\ K^3[f(U)G^2U'_\delta(-Y'_\delta U'_\xi + U'_\delta Y'_\xi) +$$
$$G\ Y\ Y'_\delta(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)])/P_o(\xi,\delta), \tag{3.6}$$

Здесь обозначено

$$P_o(\xi,\delta)) = G^2\ T^2\ YK'_U(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) + K^2[T\ Y^2G'_U(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi) + G\ Y^2(Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi) + fG^2[Y(-U'_\delta T'_\xi + T'_\delta U'_\xi) + T(-Y'_\delta U'_\xi + U'_\delta Y'_\xi)]] + K[G^2\ T^2(Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi) + G[TY(T\ G'_U(-U'_\delta T'_\xi + T'_\delta U'_\xi) + YK'_U(-Y'_\delta U'_\xi + U'_\delta Y'_\xi))]]. \tag{3.6a}$$

Замечание 3.1.1 Для краткости записи формул пишем вместо $U(\xi, \delta)$ пишем U, аналогично и для других функций.

Теорема 3.1.1

1) Пусть функция $Z(\xi, \delta)$ решение уравнения (3.1). Пусть замена $(x, y) \to (\xi, \delta)$ невырождена, хотя бы локально. Пусть функции $U(\xi, \delta),\ Y(\xi, \delta),\ T(\xi, \delta)$ заданы формулами (3.2),(3.3). Тогда определитель замены связан с этой тройкой функций соотношением

$det J = \Psi_1\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3$ и выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\Psi_3 - \frac{\partial}{\partial\xi}\Psi_4 = 0, \qquad (3.7a)$$

где функции $\Psi_i, i = 3, 4$ определены равенствами (3.6).

2) Верно и обратное. Предположим, что комбинация функций $\Psi_1\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3$ не обращается в нуль и бесконечность.

Пусть тройка функций $U(\xi, \delta),\ Y(\xi, \delta),\ T(\xi, \delta)$ удовлетворяет соотношению (3.7a).

Тогда замена переменных $\xi = \xi(x, y),\ \delta = \delta(x, y)$ определяется системой

$\frac{\partial(\ x,\ y)}{\partial(\ \xi,\ \delta)} = \begin{pmatrix} \Psi_1, & \Psi_2 \\ & \\ \Psi_3, & \Psi_4 \end{pmatrix}$ и задает решение уравнения (3.1) по формуле

$$Z(x, y) = U(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(x,y),\delta=\delta(x,y)}. \qquad (3.7)$$

□

Доказательство.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.2.1 и проводится в несколько этапов. Теорема приводится с целью предъявления конкретных формул для функций Ψ_i. Сначала доказывается прямое утверждение, пункт 1).

Используя (3.2) из (3.4), получим выражения

$$G(U(\xi,\delta))(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \delta}-\frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial y}{\partial \xi})=Y(\xi,\delta)detJ,$$
$$K(U(\xi,\delta))(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta}+\frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi})=T(\xi,\delta)detJ. \qquad (3.8)$$

Уравнение (3.1) принимает вид

$$(\frac{\partial T}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y})+(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x})-F(U)=0. \qquad (3.9)$$

После подстановки (3.4),(3.5) получим

$$-\frac{\partial T}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \delta}+\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta}-\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \delta}+\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial y}{\partial \xi}+detJF(U)=0. \quad (3.10)$$

Соотношения (3.5) можно переписать в виде

$\frac{\partial Z}{\partial x}=Y(\xi,\delta)/G(U)|_{\xi=\xi(x,\ y),\ \delta=\delta(x,\ y)}$,

$\frac{\partial Z}{\partial y}=T(\xi,\delta)/K(U)|_{\xi=\xi(x,\ y),\ \delta=\delta(x,\ y)}$.

С необходимостью должно быть выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y}Z'_x=\frac{\partial}{\partial x}Z'_y,$$

которое примет вид

$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{Y(\xi(x,y),\ \delta(x,y))}{G(U(\xi(x,y),\ \delta(x,y))}]=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{T(\xi(x,y),\ \delta(x,y))}{K(U(\xi(x,y),\ \delta(x,y))}]$.

Это соотношение, с учетом (3.2),(3.4) можно записать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{Y}{G(U)}]+\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}[\frac{Y}{G(U)}]-\frac{\partial y}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{T}{K(U)}]+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}[\frac{T}{K(U)}]=0. \qquad (3.11)$$

Исследование условий разрешимости системы (3.8), (3.10),(3.11) проводится в два этапа.

На первом этапе система (3.8),(3.10),(3.11) рассматривается, как нелинейная алгебраическая система относительно производных $x'_{\xi},\ x'_{\delta},\ y'_{\xi},\ y'_{\delta}$.

Теорема 3.1.2

Нелинейная алгебраическая система (3.8),(3.10),(3.11) относительно производных $x'_{\xi}, x'_{\delta}, y'_{\xi}, y'_{\delta}$ разрешима и решение имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1(\xi,\delta), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_2(\xi,\delta), \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_3(\xi,\delta), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_4(\xi,\delta), \tag{3.15}$$

и кроме того

$$\begin{aligned} detJ = -G^2(U)K^2(U)[G(U)(U'_{\delta}T'_{\xi} - U'_{\xi}T'_{\delta})^2 + \\ K(U)(Y'_{\delta}U'_{\xi} - Y'_{\xi}U'_{\delta})^2]/P_o, \end{aligned} \tag{3.16}$$

где P_o описывается формулой (3.6a).

□

Укажем место этого результата среди других.

Система четырех уравнений (3.8), (3.10),(3.11), которая возникает в случае эллиптических уравнений впервые исследована автором в диссертации.

Нелинейная алгебраическая система (3.8),(3.10),(3.11)относительно производных $x^{'}{}_{\xi}, x^{'}{}_{\delta}, y^{'}{}_{\xi}, y^{'}{}_{\delta}$ исследуется по схеме аналогичной приведенной в параграфе 1.2 глава 1.

□

На втором этапе будем строить функции $x(\xi, \delta), t(\xi, \delta)$.

Рассмотрим систему (3.12)-(3.15) относительно функций $x = x(\xi, \delta), \quad y = y(\xi, \delta)$. Также как в параграфе 1.2 глава 1 условие разрешимости системы такого типа получается вычислением вторых смешанных производных функций x и y по аргументам ξ и δ и приравниванием этих выражений друг другу согласно равенствам

$$x^{''}{}_{\xi\delta} = x^{''}{}_{\delta\xi}, \quad y^{''}{}_{\xi\delta} = y^{''}{}_{\delta\xi}. \tag{3.17}$$

Ниже приведено свойство аналогичное обнаруженному в параграфе 1.2 глава 1 теорема 1.2.3.:

Теорема 3.2.3

1) Имеет место тождество

$(\frac{\partial\Psi_1}{\partial\delta} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi})/T \equiv (\frac{\partial\Psi_3}{\partial\delta} - \frac{\partial\Psi_4}{\partial\xi})/Y,$

где функции $\Psi_i, i = 1, 4$ определены (3.12)-(3.15).

2) Два условия разрешимости (3.17) системы (3.12)-(3.15) сво-

дится к одному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\Psi_3 - \frac{\partial}{\partial \xi}\Psi_4 = 0. \tag{3.18}$$

где $\Psi_i, i = 3, 4$ заданы формулами (3.6). □

Следствие 3.1.1.

Если какая-то тройка функций U, Y, T, удовлетворяет соотношению (3.18), то соответствующая линейная система разрешима.

Доказательство пункта 2) теоремы 3.1.1 доказывается полностью аналогично теореме 1.2.1.

3.2 Примеры построения решений в параметрической форме квазилинейных эллиптических уравнений.

Основные формулы получены в предыдущем параграфе. Используем для построения некоторого решения уравнения (3.1) способ **A** предложенный а параграфе 1.4 главы 1.

Пример 3.3.1.

Существует семейство решений уравнения (3.1) при следующих функциях:

$$\begin{aligned} Y(\xi, \delta) &= r(U) + h(U)G_1(\xi, U), \\ T(\xi, \delta) &= w(U) + v(U)G_1(\xi, U). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь $G_1(\xi, U), r(U), h(U), w(U), v(U)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции.

При таких функциях уравнение аналогичное (3.1) факторизуется. Один большой сомножитель содержит функции G_1 и не содержит производных, которые содержатся в другом сомножителе. Группируем слагаемые при степенях функции G_1. Приравниваем к нулю коэффициенты при степенях функции G_1, получим систему четырех уравнений. В ряде случаев можно эту систему удовлетворить и найти функции $r(U), h(U), w(U), v(U)$. Эти уравнения удовлетворяется при любых дважды непрерывно дифференцируемых функциях $G_1(\xi, U),\ f(U),\ U$. Они остаются произвольными. Систему здесь не приводим, так как она громоздкая. Рассмотрим частные случаи.

Примеры такого типа могут быть полезными при расчетах тепловых полей в композитных материалах и подходах, связанных с теорией осреднения.

Пример 3.3.2.

Этот пример является упрощением предыдущего. Например, пусть в (3.1)

$G(Z) = K(Z) = 1/(\varepsilon + Z^2), \quad F(Z) = c_2 + \frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan(\frac{Z}{\sqrt{\varepsilon}})$.

Соотношение (3.18) можно удовлетворить выбрав функции $r(U) = 0,\ h(U) = 1,\ w(U) = f(U),\ v(U) = 0$:

$$Y(\xi, \delta) = G_1(\xi, U(\xi, \delta)), \quad T(\xi, \delta) = f(U). \tag{3.20}$$

Тем самым будет обеспечена разрешимость системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= [-G_1 F' U'_\xi + F({G_1}'_\xi + {G_1}'_U U'_\xi)]/P, \\ \frac{\partial x}{\partial \delta} &= [-G_1 F' + F {G_1}'_U] U'_\delta / P, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = [-AG_1{G_1}'_{\xi} + (F(U) - A(FF' + G_1{G_1}'_U))U'_{\xi}]/(AP), \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta} = (F(U) - A(FF' + G_1{G_1}'_U))U'_{\delta}/(AP). \tag{3.23}$$

Здесь обозначено $P = [F^2 - A(F^2 + {G_1}^2)F']$, $A = U^2 + \varepsilon$. Якобиан имеет вид $J = \frac{-{G_1}'_{\xi}U'_{\delta}}{AP}$. Дважды непрерывно дифференцируемые функции U, $G_1(\xi, U)$ могут быть выбраны произвольными.

Уравнение (3.1) с кубической нелинейностью. Рассмотрим этот важный в приложении случай.

В этом пункте применим *способ C* для решения нелинейной системы (3.8),(3.10),(3.11).

Предположим, что в (3.1) $G(U) = 1, K(U) = 1$, $f(U) = \alpha U^3 - \beta U$, и $Y(\xi, \delta) = C_1 w(U)$, $T(\xi, \delta) = w(U)$, где C_1- константа.

Получим

Предложение 3.3.1

Пусть функция $G_1(\xi, \delta, U)$*произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция трех переменных,* $v(U)$, $\psi(U)-$ *произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной, а функция* $w(U)$ *определяется из ОДУ первого порядка*

$$f(U) - (1 + C^2{}_1)w(U)w'(U) = 0. \tag{3.24}$$

Тогда, точное решение уравнения (3.1) имеет вид (3.2) и опре-

деляется функциями

$$
\begin{aligned}
&w(U) = \pm\sqrt{2}(p/(4(1+C^2{}_1)))^{1/2},\ p = 4(1+C^2{}_1) + \alpha U^4 - 2\beta U^2,\\
&y(\xi,\delta) = v(U) + G(\xi,\delta,U)\psi(U),\\
&x(\xi,\delta) = -v(U)/C_1 + \int_0^U \frac{ds}{C_1 w(s)} - G(\xi,\delta,U)\psi(U)/C_1,\\
&\int_0^U \frac{ds}{w(s)} = -i\sqrt{-\beta+\sqrt{\nu}}EllipticF[\phi,n]/(C_1\sqrt{2C_2\alpha}),\\
&\phi = iArcsinh[\frac{\sqrt{\alpha}U}{\sqrt{-\beta+\sqrt{\nu}}}],\ n = \frac{\beta-\sqrt{\nu}}{\beta+\sqrt{\nu}},\\
&\nu = -4(1+C^2{}_1)C_2\alpha + \beta^2. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

□

В формулах (3.25) через $Arcsinh$ –обозначена обратная функция к функции гиперболического синуса, а через $EllipticF$– обозначен эллиптический интеграл первого рода.

При подборе констант $C_1,\ C_2,\ \alpha,\ \beta$, например, $n = 1$ эллиптический интеграл первого рода вычисляется.

Вместо сложного уравнения с частными производными имеем одно ОДУ первого порядка. В данном случае оно интегрируется. Далее, численно производится востановление исходной функции (3.2).

4 ГЛАВА 4. Построение точных решений квазилинейных гиперболических уравнений в параметрической форме.

4.1 Метод построения решений в параметрической форме для квазилинейных гиперболических уравнений с коэффициентом переноса зависящим от неизвестной функции.

В данном параграфе строятся формулы для решений квазилинейных гиперболических уравнений используя метод изложенный в главе 1. Это нелинейное телеграфное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$Z'_t + \mu Z''_{tt} - (K(Z)Z'_x)'_x + f(Z) = 0. \tag{4.1}$$

При параметре $\mu > 0$, $\mu \sim O(1)$ уравнение является гиперболическим.

Сделаем произвольную замену переменных

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\delta),\ t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta), \tag{4.2}$$

где функция $Z(x,t)$ решение уравнения (4.1).

Обоснование алгоритма приводится аналогично параграфу 1.2.

Предположим, что существует обратное преобразование, хотя бы локально,

$\xi = \xi(x,t), \delta = \delta(x,t).$

Связь производных имеет вид (1.16).

Введем обозначения

$$K(Z)\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta),$$
$$K(Z)\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta). \quad (4.3)$$

Введем также функции

$$g_1(\xi,\delta) \overset{\text{def}}{=} (K(-FK^3U'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) - K^2(-TU'_\delta {Y'_\xi}^2 - TT'_\delta {U'_\xi}^2 + TU'_\delta T'_\xi U'_\xi - YY'_\delta T'_\xi U'_\xi + TY'_\delta Y'_\xi U'_\xi - TU'_\delta {Y'_\xi}^2) + \mu(T^2K'U'_\xi(U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta) - KTT'_\xi(T'_\xi U'_\delta - U'_\xi T'_\delta))))/P_1(\xi,\delta),$$
$$g_2(\xi,\delta) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x}{\partial \delta} = -[K[FU'_\delta[U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi]K^3 + K^2[TT'_\xi {U'_\delta}^2 - YY'_\delta T'_\xi U'_\delta - TT'_\delta U'_\xi U'_\delta + YT'_\delta Y'_\xi U'_\delta - TY'_\delta Y'_\xi U'_\delta + T{Y'_\delta}^2 U'_\xi] + \mu[-K'U'_\delta[U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta]T^2 - KT'_\delta[T'_\delta U'_\xi - U'_\delta T'_\xi]T]]]/P_1(\xi,\delta), \quad (4.4)$$

$$g_3(\xi,\delta) \overset{\text{def}}{=} [K[FU'_\xi[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]K^3 - K^2[YY'_\xi - TU'_\xi][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi] + \mu[K[YU'_\delta {T'_\xi}^2 - YU'_\xi T'_\delta T'_\xi - TU'_\xi T'_\xi Y'_\delta + TU'_\xi T'_\delta Y'_\xi] - T^2K'U'_\xi[U'_\delta Y'_\xi - U'_\xi Y'_\delta]]]]/P_1(\xi,\delta),$$
$$g_4(\xi,\delta) \overset{\text{def}}{=} [K[FU'_\delta[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]K^3 + K^2[YY'_\delta - TU'_\delta][Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi]K^2 + \mu[K[YT'_\delta[U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta] + TU'_\delta[Y'_\xi T'_\delta - T'_\xi Y'_\delta]] - T^2K'U'_\delta[Y'_\xi U'_\delta - U'_\xi Y'_\delta]]]]/P_1(\xi,\delta). \quad (4.5)$$

Здесь обозначено

$$P_1(\xi,\delta)) = [F[-YU'_{\delta}T'_{\xi} + YT'_{\delta}U'_{\xi} - TY'_{\delta}U'_{\xi} + TU'_{\delta}Y'_{\xi}]K^3 -$$
$$[Y'_{\delta}U'_{\xi}T^2 - U'_{\delta}Y'_{\xi}T^2 + YTU'_{\delta}T'_{\xi} - YTT'_{\delta}U'_{\xi} - Y^2Y'_{\delta}T'_{\xi} +$$
$$Y^2T'_{\delta}Y'_{\xi}]K^2 + \mu[T^2[YK'[U'_{\delta}T'_{\xi} - U'_{\xi}T'_{\delta}] + K[T'_{\delta}Y'_{\xi} - Y'_{\delta}T'_{\xi}]] -$$
$$T^3K'[U'_{\delta}Y'_{\xi} - Y'_{\delta}U'_{\xi}]]]. \tag{4.6}$$

Здесь справедливо замечание1.2.1.

Теорема 4.1.1

1) Пусть функция $Z(x,t)$ решение уравнения (4.1). Пусть замена $(x,t) \to (\xi,\ \delta)$, хотя бы локально.

Пусть функции

$U(\xi,\delta),\ Y(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)$,заданы формулами(4.2),(4.3). Тогда определитель замены связан с этой тройкой функций соотношением

$detJ = g_1g_4 - g_2g_3$ и выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial\delta}g_3 - \frac{\partial}{\partial\xi}g_4 = 0, \tag{4.7}$$

где функции $g_i,\ i = 1,4$ определены равенствами (4.4),(4.5).

2) Верно и обратное. Предположим, что комбинация функций $(g_1g_4 - g_2g_3)$ не обращается в нуль и бесконечность.

Пусть тройка функций $U(\xi,\delta),\ Y(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)$ удовлетворяет соотношению (4.7).

Тогда замена переменных $\xi = \xi(x,t),\ \delta = \delta(x,t)$ определяется системой

$\frac{\partial(\ x,\ t)}{\partial(\ \xi,\ \delta)} = \begin{pmatrix} g_1, & g_2 \\ & \\ g_3, & g_4 \end{pmatrix}$ и задает решение уравнения (4.1) по формуле

$$Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)}. \qquad (4.7a)$$

□

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично теореме 1.2.1. Коротко приведем основные уравнения.

Используя (1.16)и (4.3) получим выражения

$$K(U(\xi,\delta))(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}) = Y(\xi,\delta)detJ,$$
$$K(U(\xi,\delta))(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}) = T(\xi,\delta)detJ. \qquad (4.8)$$

Уравнение (4.1), после всех подстановок (1.16)и (4.3) имеет вид

$$\mu K(U)(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}[\frac{T(\xi,\delta)}{K(U)}] - \frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{T(\xi,\delta)}{K(U)}])/detJ + T(\xi,\delta) -$$
$$- K(U)(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi})/detJ + K(U)F(U) = 0, \qquad (4.9)$$

где $Y = Y(\xi,\delta), \quad T = T(\xi,\delta), \quad K = K(U(\xi,\delta))$.

Далее проводим рассуждения аналогичные приведенным в параграфе 1.2 перед Теоремой 1.2.1, дополним систему равенством подобным (1.1.20) в переменных в переменных ξ, δ.

Это соотношение, с учетом (4.3),(1.1.16) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{Y}{K(U)}] + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}[\frac{Y}{K(U)}] - \frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{T}{K(U)}] + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}[\frac{T}{K(U)}] = 0. \qquad (4.10)$$

Анализ системы (4.8)-(4.10) проводится в два этапа.

На первом этапе, как и ранее, рассматриваем эту систему как нелинейную алгебраическую относительно производных

$x'_{\xi}, x'_{\delta}, t'_{\xi}, t'_{\delta}$.

Теорема 4.1.2

Нелинейная алгебраическая система (4.8)-(4.10)разрешима относительно производных

$x'_{\xi}, x'_{\delta}, t'_{\xi}, t'_{\delta}$ и имеет решение

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = g_1(\xi, \delta) \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = g_2(\xi, \delta) \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = g_3(\xi, \delta), \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = g_4(\xi, \delta). \tag{4.14}$$

Кроме того

$$\begin{aligned} detJ = K(U)^3[K(U)(U'_{\delta}Y'_{\xi} - Y'_{\delta}U'_{\xi})^2 - \\ -\mu(U'_{\delta}T'_{\xi} - T'_{\delta}U'_{\xi})^2]/P_1, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где P_1 описываются формулой (4.6).

На втором этапе строим функции $\quad x = x(\xi, \delta), \quad t = t(\xi, \delta)$.

Рассмотрим систему (4.11)-(4.14) относительно функций

$x = x(\xi, \delta), \quad t = t(\xi, \delta)$.

Также как в параграфе 1.2 условие разрешимости системы такого типа получается вычислением с помощью правых частей (4.11)-(4.14) вторых смешанных производных функций $x(\xi,\delta)$, $t(\xi,\delta)$ по аргументам ξ, δ и приравниванием этих выражений друг другу согласно равенствам

$$x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi},\ t''_{\xi\delta} = t''_{\delta\xi}. \tag{4.16}$$

Таким образом возникают два условия разрешимости системы (4.11)-(4.14). Здесь также имеет место важное свойство:

Теорема 4.1.3

1) Имеет место тождество

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial \delta} - \frac{\partial g_2}{\partial \xi}\right)/T \equiv \left(\frac{\partial g_3}{\partial \delta} - \frac{\partial g_4}{\partial \xi}\right)/Y, \tag{4.17}$$

где функции $g_i, i = 1, 4$ определены равенствами (4.4),(4.5).

2)Два условия разрешимости (4.16)системы (4.11)-(4.14) сводится к одному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \delta} g_3 - \frac{\partial}{\partial \xi} g_4 = 0, \tag{4.18}$$

где g_3, g_4 правые части (4.13),(4.14).

□

Следствие 4.1.1

Если какая-то тройка функций

$U(\xi,\delta)$, $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$ удовлетворяет соотношению (4.18), то линейная система (4.11)-(4.14) разрешима в квадратурах.

Доказательство теорем аналогично приведенным в приложении к Главе 1.

Пример 4.1.1.

Рассмотрим одну возможность удовлетворить соотношение (4.18). Положим

$$P(Z) = \mu(c_1 + c_2 Z)^2 - \frac{\mu({c_1}^3 - 2c_2c_3)}{c_1}, \quad f(Z) = 2v(Z)(9c_2\mu),$$
$$v(U) = c_1 + c_2U, \;\; w(U) = \frac{v(U)(3c_3 + c_1U(c_1 + v(U)))}{3c_1}. \quad (4.19)$$

Возможно выписать более полные формулы, но они громоздкие. Здесь положим

$$c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1/2.$$

Вычислим правые части системы (4.11)-(4.14).

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \mu[-(U+1)(3+4U+2U^2){G'}_{\xi} + ((7+12U+6U^2)G -$$
$$(1+U)(3+4U+2U^2){G^2}_U){U'}_{\xi}]/(2G), \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = \mu[(7+12U+6U^2)G - (1+U)(3+4U+2U^2){G'}_U]{U'}_{\delta}/(2G), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = -3\mu[(3+4U+2U^2){G'}_{\xi} - (4(1+U)G -$$
$$(3+4U+2U^2){G'}_U){U'}_{\xi}]/(G(3+4U+2U^2-6G)), \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = -3\mu[-4(1+U)G +$$
$$(3+4U+2U^2){G'}_U]{U'}_{\delta}/(G(3+4U+2U^2-6G)). \quad (4.23)$$

Якобиан имеет вид $detJ = \frac{3(3+4U+2U^2)^2\mu^2 G'_\xi U'_\delta}{2G^2(3+4U+2U^2-6G)}$. Дважды непрерывно дифференцируемые функции

$U(\xi,\delta)$, $G(\xi,U(\xi,\delta))$ остаются произвольными, при этом якобиан не равен нулю.

Возможно построить и другие семейства решений.

4.2 Точные решения в параметрической форме квазилинейных гиперболических уравнений в трехмерном случае.

Рассмотрим полулинейное гиперболическое уравнение в трехмерном случае

$$Z''_{tt} - Z''_{xx} - Z''_{yy} + f(Z) = 0. \tag{4.24}$$

Сделаем замену переменных

$$Z(x,y,t)|_{x=x(\xi,\delta,\tau),y=y(\xi,\delta,\tau),t=t(\xi,\delta,\tau)} = U(\xi,\delta,\tau), \tag{4.25}$$

Обратная замена восстанавливает решение $Z(x,y,t)$ уравнения (4.24) по функции $U(\xi,\delta,\tau)$, а именно

$Z(x,y,t) = U(\xi,\delta,\tau)|_{\xi=\xi(x,y,t),\delta=\delta(x,y,t),\tau=\tau(x,y,t)}$.

При этом возможно построить решение и некоторых краевых задач с постоянными на бесконечности краевыми условиями связанными с корнями уравнения $f(Z)=0$.

Предположим, что якобиан замены переменных $detJ$ не равен нулю, где

$$J = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & t_\xi \\ \\ x_\delta & y_\delta & t_\delta \\ \\ x_\tau & y_\tau & t_\tau \end{pmatrix}$$

Предположим, что существует обратное преобразование, хотя бы локально,

$\xi = \xi(x, y, t), \delta = \delta(x, y, t), \tau = \tau(x, y, t)$, то есть

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = (y'_\delta x'_\xi - x'_\delta y'_\xi)/detJ, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = (x'_\delta t'_\xi - t'_\delta x'_\xi)/detJ,$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = (y'_\delta t'_\xi - t'_\delta y'_\xi)/detJ, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = (y'_\delta t'_\tau - t'_\delta y'_\tau)/detJ,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = (x'_\delta t'_\tau - x'_\tau t'_\delta)/detJ, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = (y'_\tau x'_\delta - y'_\delta x'_\tau)/detJ,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = (y'_\tau t'_\xi - t'_\tau y'_\xi)/detJ, \quad \frac{\partial \delta}{\partial y} = (t'_\tau x'_\xi - x'_\tau t'_\xi)/detJ,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = (x'_\tau y'_\xi - y'_\tau x'_\xi)/detJ,$$
$$detJ = y'_\tau x'_\delta t'_\xi - x'_\tau y'_\delta t'_\xi -$$
$$y'_\tau t'_\delta x'_\xi + t'_\tau y'_\delta x'_\xi + x'_\tau t'_\delta y'_\xi - t'_\tau x'_\delta y'_\xi \neq 0. \tag{4.26}$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\delta,\tau),y=y(\xi,\delta,\tau),t=t(\xi,\delta,\tau)} = Y(\xi, \delta, \tau),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial y}|_{x=x(\xi,\delta,\tau),y=y(\xi,\delta,\tau),t=t(\xi,\delta,\tau)} = M(\xi, \delta, \tau),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\delta,\tau),y=y(\xi,\delta,\tau),t=t(\xi,\delta,\tau)} = T(\xi, \delta, \tau). \tag{4.27}$$

Будем считать, что функции Y, M, T пока неизвестны и определяются ниже. Используя (4.25),(4.26), получим выражение

$$
\begin{gathered}
y'_\tau(-\frac{\partial U}{\partial \delta}t'_\xi + \frac{\partial U}{\partial \xi}t'_\delta) + \frac{\partial U}{\partial \tau}[y'_\delta t'_\xi - t'_\delta y'_\xi] + \\
t'_\tau[-y'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi} + y'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] = -Y(\xi,\delta,\tau)detJ, \\
x'_\tau[-\frac{\partial U}{\partial \delta}t'_\xi + t'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi}] + \frac{\partial U}{\partial \tau}[x'_\delta t'_\xi - t'_\delta x'_\xi] + \\
t'_\tau[-x'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi} + x'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] = M(\xi,\delta,\tau)detJ, \\
y'_\tau[\frac{\partial U}{\partial \xi}x'_\delta - x'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] + \frac{\partial U}{\partial \tau}[y'_\delta x'_\xi - x'_\delta y'_\xi] + \\
x'_\tau[-y'_\delta \frac{\partial U}{\partial \xi} + y'_\xi \frac{\partial U}{\partial \delta}] = T(\xi,\delta,\tau)detJ. \qquad (4.28)
\end{gathered}
$$

Исходное гиперболическое уравнение (4.24) принимает вид

$$
\begin{gathered}
f(U(\xi,\delta,\tau))detJ + [\frac{\partial M}{\partial \tau}[-x'_\delta t'_\xi + t'_\delta x'_\xi] + \\
+ \frac{\partial Y}{\partial \tau}[y'_\delta t'_\xi - t'_\delta y'_\xi] - \frac{\partial Y}{\partial \delta}[y'_\tau t'_\xi - y'_\xi t'_\tau] + \frac{\partial Y}{\partial \xi}[y'_\tau t'_\delta - t'_\tau y'_\delta] + \\
+ \frac{\partial M}{\partial \xi}[x'_\delta t'_\tau - x'_\tau t'_\delta] + \frac{\partial T}{\partial \xi}[y'_\tau x'_\delta - x'_\tau y'_\delta] + \\
+ \frac{\partial M}{\partial \delta}[x'_\tau t'_\xi - t'_\tau x'_\xi] + \frac{\partial T}{\partial \delta}[-y'_\tau x'_\xi + x'_\tau y'_\xi] + \\
+ \frac{\partial T}{\partial \tau}[y'_\tau t'_\delta - t'_\tau y'_\delta] = 0. \qquad (4.29)
\end{gathered}
$$

Далее проводим рассуждения аналогичные приведенным в параграфе 1.2 перед Теоремой 1.2.1. Из (4.31), следуя алгоритму изложенному в параграфе 1.2, дополним выписанные соотношения равенствами смешанных производных, которые должны быть выполнены в переменных ξ, δ, τ. Эти соотношения, с учетом (4.27) можно переписать в виде

$$\frac{\partial M(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial x} -$$
$$\frac{\partial Y(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial T(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial x} -$$
$$\frac{\partial Y(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial M(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial t} -$$
$$\frac{\partial T(\xi(x,y,t),\delta(x,y,t),\tau(x,y,t))}{\partial y} = 0, \qquad (4.30)$$

или дополнительно получим три уравнения дополняющие систему соответственно

$$t'_\tau[-\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}y'_\delta + \frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}y'_\xi] + \frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \tau}[y'_\delta t'_\xi - t'_\delta y'_\xi] +$$
$$y'_\tau[\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}t'_\delta - \frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}t'_\xi] + \frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}[t'_\tau x'_\xi - x'_\tau t'_\xi] +$$
$$\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial \tau}[x'_\delta t'_\xi - t'_\delta x'_\xi] + \frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}[x'_\tau t'_\delta - t'_\tau x'_\delta] = 0 \qquad (4.31)$$

$$y'_\tau[-\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}t'_\xi + \frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}t'_\delta] + \frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \tau}[y'_\delta t'_\xi - t'_\delta y'_\xi] +$$
$$t'_\tau[-\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}y'_\delta + \frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}y'_\xi] + \frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}[x'_\tau y'_\xi - y'_\tau x'_\xi] +$$
$$\frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial \tau}[y'_\delta x'_\xi - x'_\delta y'_\xi] + \frac{\partial Y(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}[y'_\tau x'_\delta - x'_\tau y'_\delta] = 0, \quad (4.32)$$

$$x'_\tau[\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}t'_\xi - \frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}t'_\delta] + \frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \tau}[-x'_\delta t'_\xi + t'_\delta x'_\xi] +$$
$$t'_\tau[\frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}x'_\delta - \frac{\partial T(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}x'_\xi] + \frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \delta}[x'_\tau y'_\xi - y'_\tau x'_\xi] +$$
$$\frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \tau}[y'_\delta x'_\xi - x'_\delta y'_\xi] + \frac{\partial M(\xi,\delta,\tau)}{\partial \xi}[y'_\tau x'_\delta - x'_\tau y'_\delta] = 0,$$
$$(4.33)$$

Предположим, что функции

$K(U)$, $F(U)$, $U(\xi,\delta)$, $Y(\xi,\delta)$, $M(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$ дважды дифференцируемые .

В трехмерном случае имеем нелинейную алгебраическую систему семи уравнений

(4.28),(4.29),(4.31)-(4.33) относительно девяти переменных- производных

x'_ξ, x'_δ, x'_τ, y'_ξ, y'_δ, y'_τ, t'_ξ, t'_δ, t'_τ является недоопределенной. Поэтому имеется большой функциональный произвол.

В данном утверждении приведен один пример. Предположим, что функции

$Y(\xi,\delta,\tau)$, $M(\xi,\delta,\tau)$, $T(\xi,\delta,\tau)$, $x(\xi,\delta,\tau)$, и имеют вид

$T(\xi,\delta,\tau) = c_1 w(U)$, $Y(\xi,\delta,\tau) = c_2 w(U)$, $M(\xi,\delta,\tau) = w(U)$, где $U = U(\xi,\delta,\tau)$ и $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

Теорема 4.2.1

Пусть функция $G(\xi,\delta,\tau,U)$ дважды непрерывно дифференцируемая неизвестная функция четырех переменных, а $w(U)$, $r(U)$ непрерывно дифференцируемые функции одной переменной.

Тогда, функция x имеет вид

$$x(\xi,\delta,\tau) = r(U) + G(\xi,\delta,\tau,U). \qquad (4.34)$$

Функция $y(\xi, \delta, \tau)$имеет вид

$$y(\xi,\delta,\tau) = -c_1 t(\xi,\delta,\tau) - c_2 r(U) - c_2 G(\xi,\delta,\tau,U) + \\ + \int_0^U \frac{dp}{w(p)} + c_3, \quad c_3 = const. \tag{4.35}$$

Функция $w(U)$ имеет вид

$$w(U) = \pm\sqrt{2[c_4 + \frac{1}{(c_2^2+1-c_1^2)}\int_{Uo}^{U} f(s)ds]} \tag{4.36}$$

□

Кратко наметим путь доказательства этой теоремы.

Дважды дифференцируемые функции $G(\xi,\delta,\tau,U)$, $r(U)$, $t(\xi,\delta,\tau)$,и а также функция U (!),остаются произвольными. Этот произвол и является свободным "параметром".

Заметим, что из трех уравнений (4.28) можно выразить производные $y'_\xi, y'_\delta, y'_\tau$,

$$y'_\xi = \frac{-[T(\xi,\delta,\tau)t'_\xi - u'_\xi + Y(\xi,\delta,\tau)x'_\xi]}{M},$$
$$y'_\delta = \frac{-[T(\xi,\delta,\tau)t'_\delta - u'_\delta + Y(\xi,\delta,\tau)x'_\delta]}{M},$$
$$y'_\tau = \frac{-[T(\xi,\delta,\tau)t'_\tau - u'_\tau + Y(\xi,\delta,\tau)x'_\tau]}{M}. \tag{4.37}$$

Подставим эти выражения в оставшиеся уравнения (4.29),(4.31)-(4.33). Далее необходимо сделать какое- нибудь предположение о виде функций Y, T, M. Далее в силу большого возможного числа вариантов решения обсуждается лишь один пример. Будем искать функции

$x(\xi,\delta,\tau), Y(\xi,\delta,\tau), T(\xi,\delta,\tau), M(\xi,\delta,\tau)$

$$\begin{aligned} x(\xi,\delta,\tau) &= r(U) + G(\xi,\delta,\tau,U), \\ Y(\xi,\delta,\tau) &= q(U) + q_o(U)G(\xi,\delta,\tau,U), \\ T(\xi,\delta,\tau) &= w(U) + v(U)G(\xi,\delta,\tau,U), \\ M(\xi,\delta,\tau) &= w_o(U) + v_o(U)G(\xi,\delta,\tau,U), \end{aligned} \tag{4.38}$$

где $U = u(\xi,\delta,\tau)$. Анализ уравнений (4.29),(4.31)-(4.33) позволяет найти такие соотношения между функциями в (4.38), что окончательно получим соотношения, приведенное в теореме 4.2.1. (Возможны и другие варианты соотношений.)

Отметим, что в данном случае функция $w(U)$определяется из ОДУ

$$f(U) = w(U)(c_2^2 + 1 - c_1^2)w^{'}(U), \tag{4.39}$$

которое интегрируется (4.36).

Заметим далее, что как и в двухмерной ситуации необходимо выполнение равенств смешанных производных функций

$x(\xi,\delta,\tau),\ y(\xi,\delta,\tau),\ t(\xi,\delta,\tau)$в переменных ξ,δ,τ.

А именно :

$$y^{''}{}_{\xi\delta} = y^{''}{}_{\delta\xi},\ y^{''}{}_{\xi\tau} = y^{''}{}_{\tau\xi},\ y^{''}{}_{\delta\tau} = y^{''}{}_{\tau\delta}. \tag{4.40}$$

После подстановки функций $Y,\ T,\ M$ в виде приведенном в теореме, оказывается, что функция $y(\xi,\delta,\tau)$ определяется системой ОДУ

$$y'_{\xi}(\xi,\delta,\tau) = -c_1 t'_{\xi} - c_2 r'(U)U'_{\xi} + \frac{U'_{\xi}}{w(U)} - c_2[U'_{\xi}G'(U) + G'_{\xi}],$$
$$y'_{\delta}(\xi,\delta,\tau) = -c_1 t'_{\delta} - c_2 r'(U)U'_{\delta} + \frac{U'_{\delta}}{w(U)} - c_2[U'_{\delta}G'(U) + G'_{\delta}],$$
$$y'_{\tau}(\xi,\delta,\tau) = -c_1 t'_{\tau} - c_2 r'(U)U'_{\tau} + \frac{U'_{\tau}}{w(U)} -$$
$$c_2[U'_{\tau}G'(U) + G'_{\tau}]. \tag{4.41}$$

где $U = U(\xi,\delta,\tau), c_1 \neq 0, c_2 \neq 0.$

В заключение, отметим, что можно построить некоторые точные решения в параметрическом виде и в случае когда в исходном уравнении функция $f(t, Z)$ зависит от переменной t. См.параграф 1.7.

5 ГЛАВА 5. Изучение эволюционных систем связанных с самоогранизацией. Инвариантные свойства анзаца в методе Сатсума-Хироты.

5.1 Введение. Структура решений построенных методом Сатсума-Хироты. Тест Пенлеве.

В [88,199] были развиты методы построения явных формул, описывающих нелинейные волны (кинки), являющиеся решениями полулинейных параболических уравнений

$$U_t - U_{xx} - F(U) = 0, \tag{5.1}$$

где $F(U)$ квадратичные и кубические полиномы. В упомянутых работах рассматривались решения уравнения (5.1), удовлетворяющее граничным условиям, которые определялись корнями нелинейного алгебраического уравнения $F(U) = 0$, т.е. строились решения имеющие область изменения –отрезок. Помимо ограниченных решений, рассматривались решения, имеющие разрыв второго рода (так называемые "монстры"). Кроме того, были получены формулы для решений, описывающих взаимодействие кинков, а также кинков и разрывных решений. Во время выхода статьи [59],были известны только два типа решений уравнения (5.1) представляемых явными формулами: так называемые автомодельные (однофазные, одноволновые)решения и решения, описывающие взаимодействия автомодельных волн (двухфазные решения) [199,86]. Автомодельные решения имеют вид (обозначения см. ниже)

$$\chi(\tau) = U(\frac{\varphi \exp{(\lambda\tau)}}{\psi \exp{(\lambda\tau)}}),$$
$$\chi(\tau) = U(\frac{\varphi(\lambda\tau)}{\psi(\lambda\tau)}), \tag{5.2}$$

Для неавтомодельных решений, описывающих взаимодействие однофазных волн, справедливо представление

$$\chi(\tau_1,\tau_2) = U(\frac{\varphi(\exp{(\lambda_1\tau_1)}, \exp{(\lambda_2\tau_2)}, \tau_1, \tau_2)}{\psi(\exp{(\lambda_1\tau_1)}, \exp{(\lambda_2\tau_2)}, \tau_1, \tau_2)}), \tag{5.3}$$

Здесь, $U(z)$ -целая в некоторой области $\Omega \in C^1$; функции φ и ψ - полиномы; $\tau = x + pt + c - -$автомодельная переменная; λ и p фазовые связанные константы; и $c-$ произвольная константа. Аналогично, $\tau_i = x + p_i + c_i, i = l, 2$, где λ_i и p_i -фазовые константы, c_i произвольные константы, причем фазы, τ_i независимы, т.е., их линейная комбинация с целочисленными коэффициентами не обращается в нуль тождественно. Заметим, что автомодельные решения ураувнения (5.1) определяются решением ОДУ

$$\lambda p\chi^{'} - \lambda^2\chi^{''} - F(\chi) = 0. \tag{5.4}$$

В [86] показано, что для уравнений вида (5.1) запас решений вида (5.2), а значит, и набор констант λ и p весьма ограничен. Аналогичные результаты получены и с помощью теста Пенлеве [166,198], идея которого заключается в представлении решения уравнения вида (5.1) рядом Лорана в окрестности подвижного полюса, т.е., в разложении искомой функции по степеням τ, автомодельной переменной. Тест Пенлеве, примененный к различным уравнениям вида (5.1), показал, что набор возможных скоростей для автомодельных решений, представимых рядом Лорана, как правило, невелик и может быть однозначно определен. Кроме того, для каждого конкретного значения скорости p, полученного с помощью теста Пенлеве, ряд Лорана может однозначно, с точностью до константы сдвига, определить функцию вида (5.2) . Поэтому, в случае положительного результата теста Пенлеве в зависимости от его результатов естественно предполагать наличие у уравнения вида (5.1) решений из класса функций, определенных формулами (5.2)-(5.3). В этом случае в исходное уравнение подставляется общий вид предполагаемого решения (анзац), где φ и ψ полиномы с неопределенными коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях экспонент или (и) одинаковых степенях автомодельных переменных, получаем переопределенную, вообще говоря, систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов полиномов φ и ψ и фазовых констант. Решение этой системы, (если оно существует) необходимо и достаточно для построения явной формулы решения исходного уравнения. Отметим, что именно предположение о виде решения уравнений вида (5.1)позволило в данной главе успешно использовать конструктивные способы нахождения решения, например, модификация метода Хироты, предложенная в ([118], p. 184,[184],p.68). Эта модификация связана с введением малого параметра в числитель и знаменатель рациональной функции, для подсчета однородных слагаемых.

В момент исследования [59] в литературе была описанна модификация теста Пенлеве для систем полулинейных параболических уравнений. Оказалось, что набор возможных скоростей автомодельных решений систем , как в случае отдельных уравнений, ограничен и может быть однозначно определен. Аналогия со скалярным случаем позволила предполагать наличие у систем решений определенного вида, для нахождения которых использовался описанный выше метод неопределенных коэффициентов. Характерно, что в случае рассматриваемых в работе [59], систем, как и в одномерном случае, как правило, удается найти все автомодельные решения, скорость которых определяется из теста Пенлеве, ограничиваясь функциями вида (5.2).

С помощью того же метода удалось построить двухфазные решения вида (5.3) некоторых из рассмотренных систем.

Заметим, однако, что механизм взаимодействия волн, являющихся решениями систем полулинейных параболических уравнений, оказался весьма специфичным. Так, в [184] (стр. 70) проведено асимптотическое описание процесса рождения волн из финитного возмущения для уравнения Колмогорова-Петровсого -Пискунова-Фишера. Из этого исследования следует возможность построения формулы, описывающей взаимодейсивие волн в виде, диктуемом методом Хироты. Совершенно другая ситуация, как оказалось, имеет место для систем полулинейных параболических уравнений типа Куросава и Танака. В данной главе [59] приводим явные формулы для решения описывающего появление особенностей и анигиляцию кинков.

Предметом исследования является система вида

$$U_t - U_{xx} = U^l(1 - U^m - \theta^n),$$
$$\theta_t - \theta_{xx} = -BU^k\theta^q, \tag{5.5}$$

где U, θ искомые функции, B отличная от нуля константа, и m, n, k, q, l натуральные числа.

5.2 Автомодельные решения в модели реакции Белоусова-Жаботинского. Применение теста Пенлеве.

Модель реакции Белоусова-Жаботинского имеет биофизический смысл [116,198] и связана с образованием самоорганизующихся структур. Тест Пенлеве к этой системе ранее не применялся.

Пусть в (5.5)

$m = n = k - q = l = l, B \neq 0, B \neq 1/2$, т.е., система имеет вид

$$U_t - U_{xx} = U(1 - U - \theta),$$
$$\theta_t - \theta_{xx} = -BU\theta, \tag{5.6}$$

Верна следующая теорема.

Теорема 5.2.1

Все автомодельные решения системы (5.6) представимы рядом Лорана в проколотой окрестности подвижного полюса

$x = -pt + c$, где p скорость, $c-$ произвольная константа, имеют вид

$$U = \frac{1}{(1+\exp\tau)^2}, \quad \theta = \frac{(1-B)(2\exp\tau + \exp 2\tau}{(1+\exp\tau)^2},$$
$$\tau = ax + bt, \quad a^2 = B/6, \quad b = -5B/6; \qquad (5.7)$$

$$U = \frac{1 - 2\exp\tau)}{(1+\exp\tau)^2}, \quad \theta = \frac{(1-B)\exp 2\tau}{(1+\exp\tau)^2},$$
$$\tau = ax + bt, \quad a^2 = -B/6, \quad b = -5B/6, \quad p = b/a; (5.8)$$

□

Доказательство.

Тот факт, что приведенные функции являются решением системы, проверяется подстановкой. Вопрос единственности предъявленных автомодельных решений, связанных с модификацией теста Пенлеве для систем, рассмотрим подробнее. Будем искать решение в виде рядов Лорана по степеням τ.

$$U = \sum_{k=-q_1}^{\infty} a_{k+q_1}(x + pt + c_1)^k,$$
$$\theta = \sum_{k=-q_2}^{\infty} B_{k+q_2}(x + pt + c_1)^k, \qquad (5.9)$$

где q_1 и q_2 некоторые нетуральные числа, определяющие порядок полюсов функций U и θ, соответственно, константы c_1 и c_2 далее , без ограничения общности, будем полагать равными нулю. Возможные значения q_l и q_2 в общем случае определяются с помощью метода многоугольников Ньютона.(см. главу 6.1) Однако, в данном случае это можно сделать, пользуясь элементарными соображениями и приравнивая показатели заведомо старших степеней при вторых производных и квадратичных слагаемых многочленов. Легко видеть, что в данном случае $q_1 = q_2 = 2$, т.е., обе функции U и θ имеют полюс второго порядка. Подставим полученные ряды в систему и приравнивая коэффиценты при одинаковых степенях τ, получим систему нелинейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов:

$$a_0(a_0 + b_0 - 6) = 0, \quad b_0(a_0 B - 6) = 0,$$
$$2a_1a_0 + a_1b_0 - 2a_1 + a_0b_1 - 2a_0p = 0,$$
$$a_1b_0B + a_0b_1B - 2b_1 - 2b_0p = 0,$$
$$2a_2a_0 + a_2b_0 + {a_1}^2 + a_1b_1 - a_1p + a_0b_2 - a_0 = 0,$$
$$a_2b_0B + a_1b_1B + a_0b_2B - b_1p = 0,$$
$$2a_3a_0 + a_3b_0 + 2a_2a_1 + a_2b_1 + a_1b_2 - a_1 + a_0b_3 = 0,$$
$$B(a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3) = 0,$$

$$2a_4a_0 + a_4b_0 - 2a_4 + 2a_3a_1 + a_3b_1 + a_3p + a_2^2$$
$$+a_2b_2 - a2 + a_1b_3 + a_0b_4 = 0,$$
$$a_4b_0B + a_3b_1B + a_2b_2B + a_1b_3B + a_0b_4B - 2b_4 + b_3p = 0,$$
$$2a_2a_0 + a_5b_0 - 6a_5 + 2a_4a_1 + a_4b_1 + 2a_4p + 2a_3b_2$$
$$+a_3b_2 - a_3 + a_2b_3 + a_1b_4 + a_0b_5 = 0,$$
$$a_5b_0B + a_4b_1B + a_3b_2B + a_2b_3B + a_1b_4B + a_0b_5B - 6b_5 + 2b_4p = 0,$$
$$2a_6a_0 + a_6b_0 - 12a_6 + 2a_5a_1 + a_5b_1 + 3a_5p + 2a_4a_2$$
$$+a_4b_2 - a4 + {a_3}^2 + a_3b_3 + a_2b_4 + a_1b_5 + a_0b_6 = 0,$$
$$a_6b_0B + a_5b_1B + a_4b_2B + a_3b_3B + a_2b_4B + a_1b_5B$$
$$+a_0b_6B - 12b_6 + 3b_5p = 0. \tag{5.10}$$

Решая последовательно приведенную систему относительно неизвестных коэффициентов a_k и b_k, получим

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{6}{B}, \quad b_0 = \frac{6(B-1)}{B}, \quad a_1 = \frac{6p}{5B}, \quad b_1 = \frac{6(B-1)p}{5B},\\
&a_2 = \frac{25B - p^2}{50B}, \quad b_2 = -\frac{(1-B)(p^2+25B)}{50B},\\
&a_3 = \frac{p^3}{250B}, \quad b_3 = \frac{(B-1)p^3}{250B},\\
&a_4 = \frac{125B^2 - 7p^4}{5000B}, \quad b_4 = \frac{(B-1)(125B^2-7p^4)}{5000B},\\
&a_5 = -\frac{1375B^2 - 79p^4}{75000B}, \quad b_5 = \frac{p(1-B)(1375B^2-79p^4)}{75000B},\\
&a_6 = \frac{37500b_6 - 625B^2p^2 + 36p^4}{37500(B-1)}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Анализ показывает, что в последнем уравнении приведенной выше системы коэффициент при неизвестном b_6 равен нулю и полученное уравнение представляет собой выражение, из которого определяются возможные значения скорости. Это выражение обычно называют дисперсионным соотношением. Оно имеет вид

$$(2B - l)(36p^4 - 625B^2) = 0. \tag{5.12}$$

В силу условий теоремы, решение уравнения (5.12) относительно p дает два (с точностью до знака) возможных значения скорости

$$p_{1,2} = \frac{\pm 5\sqrt{B}}{\sqrt{6}}, \quad p_{3,4} = \frac{\pm 5i\sqrt{B}}{\sqrt{6}}. \tag{5.13}$$

При каждом конкретном значении скорости p , коэффициенты a_k и b_k рядов для U и θ определены однозначно. Следовательно, существуют только два различных автомодельных решения системы, представимые рядом Лорана с полюсом второго порядка. Очевидно, что каждому из приведенных решений соответствует одно из двух возможных значений скорости, и при конкретном знакоопределенном параметре B эти значения различны. В силу инвариантности замены $x \to -x$ в системе (5.5), замена знака фазовой константы a на противоположный означает отображение бегущей волны относительно оси ординат с изменением направления ее движения, т.е., знака скорости. Таким образом, приведенными решениями полностью исчерпывается запас скоростей, полученный с помощью теста Пенлеве.

□

Замечание 5.2.1

При любом $B \neq 0$ вещественным является только одно из двух решений (5.7) и (5.8). Граничные условия, которым удовлетворяют вещественные решения системы (5.1.1), имеют вид

$$\begin{aligned} &U_{x\to\infty} \to 0, \quad \theta_{x\to\infty} \to 1 - B, \\ &U_{x\to-\infty} \to 1, \quad \theta_{x\to-\infty} \to 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Замечание 5.2.2

Из уравнения (5.12) следует, что при $B = l/2$, возможно, существуют и другие решения, кроме (5.7) и(5.8), задаваемые явными формулами.

Отметим, что $B \to 1$ в каждом из решений (5.7)и (5.8)

$\theta \to 0$, и решение системы при этом непрерывно трансформируется в решение скалярного уравнения Колмогорова-Петровского-

Пискунова-Фишера

$$U_t - U_{xx} - U(1-U) = 0. \qquad (5.15)$$

Тест Пенлеве уравнения (5.15) дает два, с точностью до знака, возможных значения скорости для решений, представимых рядом Лорана, именно

$$p_{1,2} = \frac{\pm 5}{\sqrt{6}}, \quad p_{3,4} = \frac{\pm 5i}{\sqrt{6}}. \qquad (5.16)$$

Найденные решения включены с справочники [136] с.233, с.236, с.263, а также в [137,201] .

5.3 Автомодельные и двухфазные решения в моделях нелинейной кинетики

Системы уравнений нелинейной кинетики исследовались, например, в [80,94,95,116,150,154,163,164,181,196,197,200] другими методами. Пусть в (5.5) $m = n = k = 2, q = l = 1$. Получим систему

$$\begin{aligned} U_t - U_{xx} &= U(1 - U^2 - \theta^2), \\ \theta_t - \theta_{xx} &= -BU^2\theta, \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Аналогично случаю системы (5.6),определяется порядок полюсов функций U и θ в системе (5.17). В данном случае, $q_1 = q_2 = 1$. Единственное, с точностью до знака, возможное выражение для скорости, полученное с помощью теста Пенлеве, имеет вид

$$p_{1,2} = \frac{\pm 3\sqrt{B}}{\sqrt{2(2B-1)}}. \qquad (5.18)$$

Удалось построить решения системы (5.17)для $B = 2$.

Теорема 5.3.1

Все автомодельные решения системы (5.17), $B = 2$, представленные рядом Лорана в проколотой окрестности подвижного полюса $x = -pt + c$, где p скорость, c произвольная константа, имеют вид

$$\begin{aligned}&U = \frac{\pm 1}{1 + \exp\tau}, \quad \theta = \frac{\pm\exp\tau}{1 + \exp\tau},\\ &\tau = ax + bt, \quad a = \pm 1, \quad b = -1, \quad p = b/a = \pm 1;\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}&U = \frac{-a}{a - \tau}, \quad \theta = \frac{\pm\exp\tau}{1 + \exp\tau},\\ &\tau = ax + bt, \quad b = 2a, \quad p = b/a = 2;\end{aligned} \tag{5.20}$$

где a произвольная константа . □

Доказательство.

Тот факт, что функции (5.19) и (5.20) удовлетворяют системе,

проверяется подстановкой. Тест Пенлеве рассматриваемой системы дает два возможных значения скорости для решений, представленных рядом Лорана : $p_1 = 2, p_2 = \pm 1$. Именно с такими скоростями движутся волны описываемые построенными решениями. Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

□

Замечание 5.3.1

Значение выражения (5.18) при $B = 2$, $(p = \sqrt{3})$ отлично от значений скорости, приведенных в Теореме 5.2.1. Таким образом, выражение (5.18) не является непрерывной функцией параметра B системы (5.17).

Предложение 5.3.1.

Система (5.17),при $B = 2$, имеет двухфазное (неавтомодельное) решение вида

$$U = \frac{a_1 + \exp \tau_2}{a_1 + \tau_1 + \exp \tau_2}, \quad \theta = \frac{\pm \tau_1}{a_1 + \tau_1 + \exp \tau_2},$$
$$\tau_1 = a_1 x + b_1 t, \quad \tau_2 = a_2 x + b_2 t,$$
$$b_1 = -2a_1, \quad b_2 = 1, \quad a_2 = 1; \tag{5.21}$$

где a_1 произвольная константа. Справедливость предложения проверяется подстановкой. Взаимодействие автомодельных волн описывается формулами (5.21) аналогично взаимодействию кинка с разрывными решениями, которое описывается явными формулами для отдельных уравнений с кубической нелинейностью [184] (с. 60). На Рис.14 приведен график функции Uдля

$a_1 = 1$. Видно, что при столкновении особенности с фронтом кинка порядок последней возрастает. При $a_l = -1$, взаимодействие разрывного решения с кинком, описываемое функцией U приводит к уничтожению особенности и образованию одного кинка. Аналогичная ситуация имеет вид место и для функции θ.

Перейдем к следующему примеру .

Пусть в (5.5) $m = n = q = 1, l = k = 2$. Полученная система

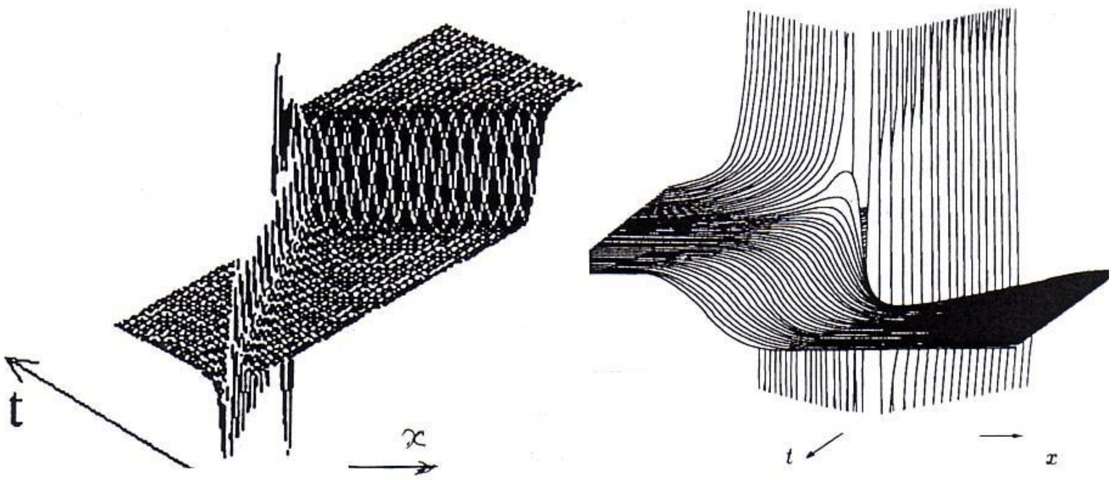

Рис. 14: Столкновение особенности с кинком. Уничтожение особенности и образование кинка.

имеет вид

$$U_t - U_{xx} = U^2(1 - U - \theta),$$
$$\theta_t - \theta_{xx} = -BU^2\theta, \tag{5.22}$$

В данном случае удалось построить как автомодельное, так и двухфазное решение содержащее в качестве свободного параметра - B. Тест Пенлеве системы (5.22)дает два возможных значения скорости для автомодельных решений, представимых рядом Лорана, именно:

$$p_1 = \frac{\pm\sqrt{B}}{\sqrt{2}} \quad p_2 = \pm\sqrt{2B}. \tag{5.23}$$

В этом случае в дисперсионном соотношении имеет место множитель $3B - 1$. Отметим, что это верно при любом $B \neq 1/3$, т.к. при $B = 1/3$ дисперсионное соотношение обращается в нуль тождественно. Следствием этого результата является следующая теорема, доказательство которой полностью аналогично предыдущей.

Теорема 5.3.2

Все автомодельные решения системы (5.22), $B \neq 1/3$, представимые рядом Лорана в проколотой окрестности подвижного полюса $x = -pt + c$, где p скорость, $c-$ произвольная константа, имеет вид

$$U = \frac{c_1}{c_1 + c_2 \exp\tau}, \ \theta = \frac{(1-B)c_2 \exp\tau}{c_1 + c_2 \exp\tau},$$
$$\tau = ax + bt, \quad a^2 = B/2,$$
$$b = -B/2, \quad p = b/a = \pm\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2}}, \tag{5.24}$$

c_1, c_2 произвольные константы;

$$U = \frac{a\sqrt{2}}{\tau\sqrt{B} + a\sqrt{2}}, \theta = \frac{\sqrt{B}(1-B)\tau}{\tau\sqrt{B} + a\sqrt{2}},$$
$$\tau = ax + bt, \quad b = -a\sqrt{2B}, \quad p = -\sqrt{2B}, \tag{5.25}$$

a— произвольная константа.

□

Замечание 5.3.2

Аналогично случаю (5.12), при $B = 1/3$ возможно существование других решений, кроме (5.24)и (5.25), представимых явными формулами.

Предложение 5.3.2.

Система (5.22) имеет двухфазное решение вида

$$U = \frac{a_1 + a_2 \exp\tau_2}{a_1 + a_2(\tau_1 + \exp\tau_2)}, \quad \theta = \frac{a_2(1-B)\tau_1}{a_1 + a_2(\tau_1 + \exp\tau_2)},$$
$$\tau_1 = a_1 x + b_1 t, \quad \tau_2 = a_2 x + b_2 t,$$
$$b_1 = -2a_1 a_2, \quad a_2^2 = B/2, \quad b_2 = B/2, \tag{5.26}$$

где a_1 произвольная константа. Справедливость предложения доказывается подстановкой формул (5.26) в систему (5.22). Аналогично случаю (5.6), автомодельные решения системы (5.22), а также описывающее их взаимодействие двухфазное решение

(5.26) $B \to 1$, непрерывно редуцируются соответственно к автомодельным и двухфазному решениям одномерной задачи, известной как один из вариантов уравнения Зельдовича. ([118], с. 73, с. 198): $U_t - U_{xx} - U^2(1-U) = 0$.

Заметим, что все приведенные решения системы (5.22)являются вещественными $B > 0$. Функции (5.26) описывают взаимодействие автомодельных решений системы (5.22). Характер этого взаимодействия аналогичен случаю, рассмотренному выше (см.Рис.14). Теперь, приведем пример варианта системы (5.5) , когда удалось найти, кроме автомодельных, ограниченное двухфазное решение, являющееся результатом взаимодействия волн, имеющих область изменения отрезок.

Пусть в (5.5) $m = k = 2, q = n = l = l$. Будем иметь систему

$$U_t - U_{xx} = U(1 - U^2 - \theta),$$
$$\theta_t - \theta_{xx} = -BU^2\theta, \qquad (5.27)$$

Теорема 5.3.3

Система (5.27) имеет нетривиальные автомодельныые решения, представленные рядом Лорана, при единственном значении парамера B, именно, $B = 1$.

□

Доказательство.

Кратко наметим путь доказательство. Функции U и θ, представимые рядом Лорана по степеням τ и удовлетворяющие системе (5.27), имеют полюс первого порядка, т.е., коэффициенты a и b_0

должны быть отличны от нуля. Из системы уравнений на эти коэффициены следует, что это возможно только при $B = 1$:

$$a_0(a_0^2 - 2) = 0, \quad b_0(a_0^2 B - 2) = 0. \tag{5.28}$$

Теорема доказана.

□

Предложение 5.3.3.

Существуют автомодельные решения системы (5.27), $B = 1$, имеещие вид

$$U = \frac{\pm 1}{1 + \exp \tau}, \quad \theta = \frac{\exp \tau}{1 + \exp \tau},$$
$$\tau = ax + bt, \quad b = -1/2, \quad a^2 = 1/2, \tag{5.29}$$

Предложение 5.3.4.

Существует двухфазное решение системы (5.27), $B = 1$, имеющие вид

$$U = \frac{1 - \exp \tau_1}{1 + \exp \tau_1 + \exp \tau_2}, \quad \theta = \frac{\exp \tau_2}{1 + \exp \tau_1 + \exp \tau_2},$$
$$\tau_1 = a_1 x + b_1 t, \quad \tau_2 = a_2 x + b_2 t,$$
$$b_1 = 0, \quad a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = 1/\sqrt{2}, \quad b_2 = -1/2, \tag{5.30}$$

□

Справедливость обоих предложений доказывается подстановкой приведенных решений в систему (5.27). Двухфазные функ-

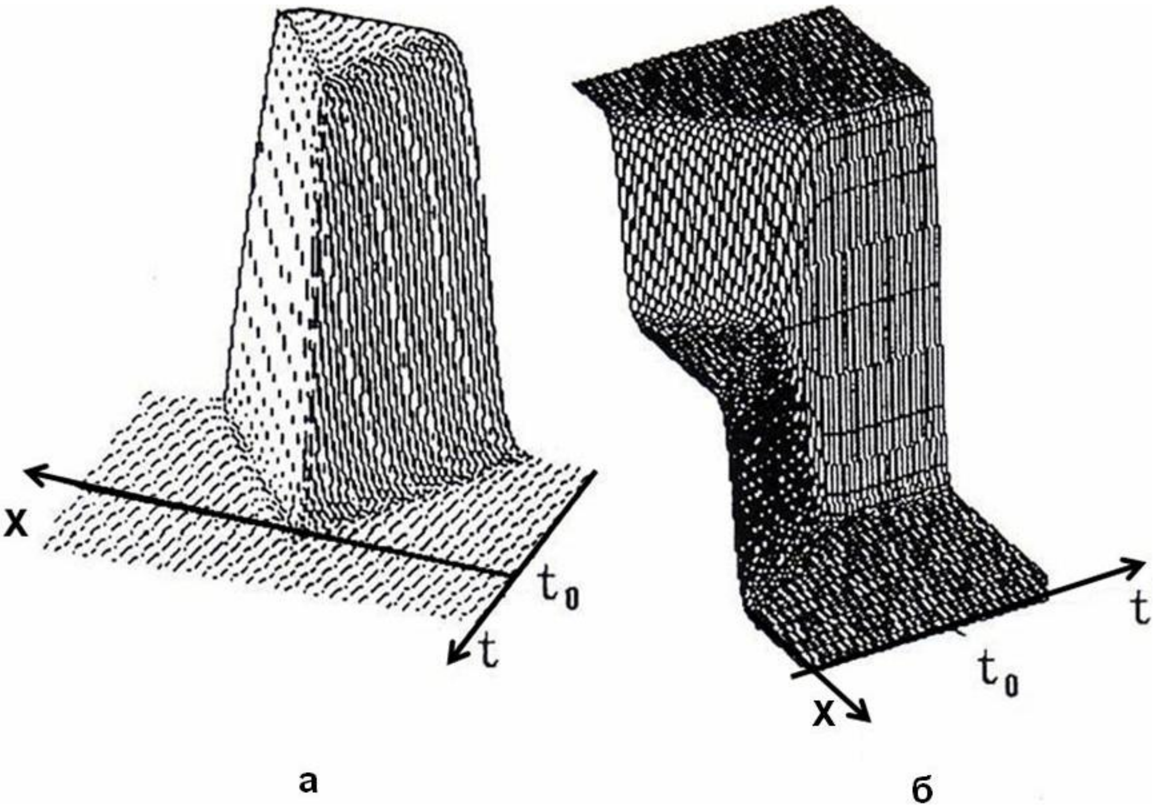

Рис. 15: Аннигиляция (взаимное уничтожение) двух кинков, область изменения которых два различных отрезка пересекающихся в одной точке.

ции U и θ являются результатом взаимодействия автомодельных волн, описанных в *Предложении 5.3.3.* Графики двухфазного решения приведены на Рис.15.

Хорошо видно, что взаимодействие , описанное функцией θ (Рис.15 а) представляет собой аннигиляцию кинков, область изменения которых два различных отрезка $[-1, 0], [0, 1]$. (при $t > t_0$, решение близко к нулю).

Анализ функции U (см.Рис.15б, Рис.16) показывае, что происходит взаимодействие типа слияния волн. Это решения имеющие область изменения два различных отрезка, пересекающихся в одной точке. В данном случае имеет место выход на ста-

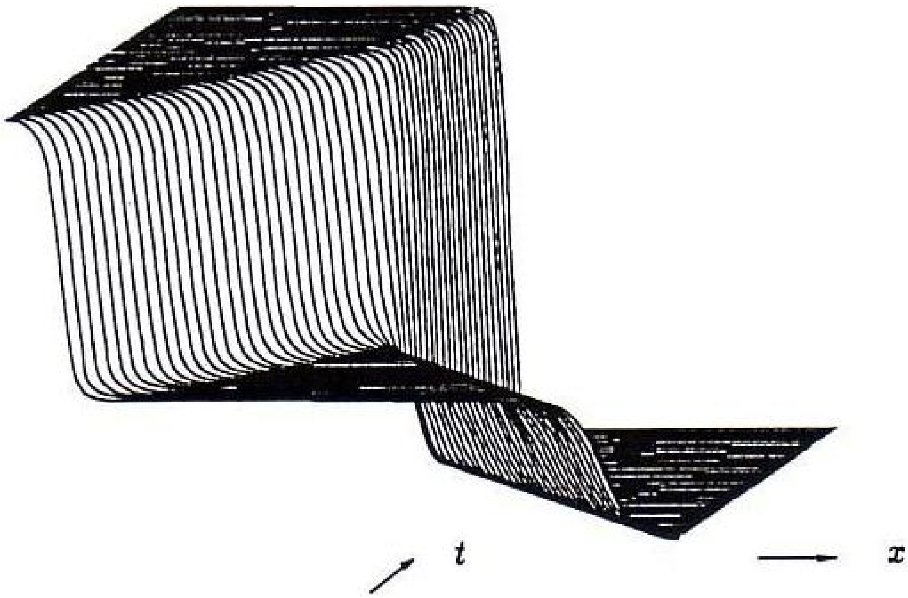

Рис. 16: Выход на стационарное решение системы Куросава-Танаки. Аннигиляция кинков.

ционарное решение (при $t > t_0$), образуется одна волна близкая к стационарному решению уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова ([118], С. 193,[184],С.60).

5.4 Одевание решений для некоторых задач, связанных с полулинейными уравнениями .

Размножение решений уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова

Казалось, что свойства квазилинейных параболических уравнений хорошо изучены. Однако, оказалось что, существует еще одно новое инвариантное свойство анзаца метода Р. Хирота. Это позволяет строить новые решения для некоторого выделенного класса диссипативных уравнений и систем уравнений. Этот алгоритм похож на метод "одевания"решений для интегрируемых уравнений. В теории интегрируемых уравнений описанной в [150] существует ряд подходов, которые позволяют размножать решения. То есть по двум решениям строится следующее и так далее. Один из таких подходов (связанный с LA парами Лакса) называется в литературе [150] методом одевания. Для неинтегрируемых уравнений способ размножения решений скорее является исключением. Целью данного параграфа является изложение некоторого аналога метода одевания для неинтегрируемых уравнений. В качестве примера рассматривается нелинейное уравнение

$$u_t - (h_1 + h_2 u)u_x - k_0 u_{xx} + \sum_{i=1}^{3} \varphi_i u^i = 0. \tag{5.31}$$

Система, позволяющая одевать решения описанным в данном параграфе, имеет вид

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - u + uv^n + u^3 = 0, \\ v_t - v_{xx} + Bvu^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

где $n = 1, 2,\ \ B = 1, 2$. См.[59,118,184] и обширную библиографию в этой статье. Предложенный метод построения решений уравнения (5.31) и системы (5.32) в идейном смысле восходит к методу Хироты [150]. Существенным отличием этого материала данной работы от материала предыдущего параграфа явлется обнаружение нового свойства инвариантности решений для приведенных уравнений. Однако, в случае уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова получаем решения из того же семейства, которое рассмотрено в п.1.4.

Теорема 5.4.1

Пусть функции Mи Q являются решением уравнения (5.31) и эти же функции M и Q дополнительно связаны между собой соотношением согласования

$$((\int (M_t - Q_t)dx)4(h_2 - m) - 2(M^2 - Q^2)({h_2}^2 + 12k_0\varphi_3 - h_2 m) -$$
$$4(M - Q)(h_1 h_2 + 4k_0\varphi_2 - h_1 m) + 16k_0 {C_0}'(t) +$$
$$4k_0(h_2 + 3m)(M_x - Q_x) = 0, \tag{5.33}$$

где $m = (\pm\sqrt{(h_2^2 + 8k_0\varphi_3)})$, а функция $H(x,t)$ имеет вид

$$H(x,t) = C_o t - \int \frac{(M(x,t) - Q(x,t))\big(-h_2 \pm \sqrt{h_2^2 + 8k_0\varphi_3}\big)}{4k_0}\, dx, \tag{5.34}$$

где C_0 константа.

Тогда функция $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \frac{Q(x,t) + M(x,t)\exp(H(x,t))}{1 + \exp(H(x,t))}, \tag{5.35}$$

является решением уравнения (5.31) .

□

Доказательство.

Приведем краткое доказательство теоремы. Подставим (5.35) в (5.31), приведем к общему знаменателю и рассмотрим числитель полученного большого уравнения.

Приравняем к нулю сумму слагаемых при экспоненте в нулевой степени (не содержащие своим множителем экспоненту

$\exp(H(x,t))$). Оказывается, что полученное уравнение снова является в точности уравнением (5.31) для функции $Q(x,t)$.

Уравнение, которое возникает после приравнивая к нулю коэффициента при экспоненте $\exp(3H(x,t))$ снова является в точности уравнением (5.31) для функции $M(x,t)$.

Однако полученная система является переопределенной, так как есть еще два уравнения. Это уравнения, которые возникают после приравнивая к нулю коэффициентов при экспоненте

$\exp(H(x,t))$,и $\exp(2H(x,t))$.

В силу их громоздкости они приводится в приложении к главе 3.

Так как функции M и Q удовлетворяют уравнению (3.31), исключим из последних упомянутых выше двух уравнений вторые производные функций $M_{xx}(x,t)$ и $Q_{xx}(x,t)$.

Из одного из полученных уравнений можно выразить $H_{xx}(x,t)$ и подставить в другое уравнение. Получим уравнение, которое легко интегрируется. $H_x(x,t) \pm \frac{(M(x,t)-Q(x,t))\left(-h_2 \pm \sqrt{h_2^2+8k_0\varphi_3}\right)}{4k_0}$. Отсюда следует равенство (5.34). Оставшееся соотношение есть условие согласования(5.33).см. Приложение к Главе 3.

□

Из доказанной теоремы фактически следует процедура построения новых решений уравнений (аналог суперпозиции решений), которая связана со свойствами уравнения (5.31) и рассматриваемого анзаца (5.35).

В следующей теореме описана ситуация, в которой условие согласования (5.38) выполнено всегда: если есть две пары решений, которые удовлетворяют условиям согласования, то по ним строится последовательность пар решений, которые попарно удовлетворяют тем же условиям согласования что и пары решений с которых начинался процесс.

Теорема 5.4.2 Пусть две пары функций M_0, Q_0 и M_1, Q_1 являются решениями уравнения (5.31)

$$M_{j_t} - (h_1 + h_2 M_j) M_{j_x} - k_0 M_{j_{xx}} + \sum_{i=1}^{3} \phi_i M_j^i \; = \; 0, \qquad (5.36)$$

$$Q_{j_t} - (h_1 + h_2 Q_j) Q_{j_x} - k_0 Q_{j_{xx}} + \sum_{i=1}^{3} \phi_i Q_j^i \; = \; 0, \qquad (5.37)$$

где $j = 0, 1$ и для каждой пары M_j, Q_j выполнены условия согласования

$$\left(\int (M_{j_t} - Q_{j_t})\, dx \right) 4(h_2 - m) - 2(M_j^2 - Q_j^2)(h_2^2 + 12k_0\phi_3 - h_2 m)$$
$$-4(M_j - Q_j)(h_1 h_2 + 4k_0\phi_2 - h_1 m) +$$
$$4k_0(h_2 + 3m)(M_{j_x} - Q_{j_x}) = 0, \qquad (5.38)$$

$H_j(x,t) = C_0 t - \frac{-h_2 \pm \sqrt{h_2^2 + 8k_0\phi_3}}{4k_0} \int \big(M_j(x,t) - Q_j(x,t) \big)\, dx$, где $m = (\pm)\sqrt{h_2^2 + 8k_0\phi_3}$. Тогда две функции

$$Q(x,t) = \frac{Q_1(x,t) + M_1(x,t)\exp(H_1(x,t))}{1 + \exp(H_1(x,t))},$$
$$M(x,t) = \frac{Q_0(x,t) + M_0(x,t)\exp(H_0(x,t))}{1 + \exp(H_0(x,t))} \qquad (5.39)$$

являются решениями уравнения (3.31) и для этих же функций M и Q выполнены условия согласования

$$\left(\int (M_t - Q_t)\, dx \right) 4(h_2 - m) - 2(M^2 - Q^2)(h_2^2 + 12k_0\phi_3 - h_2 m)$$
$$-4(M - Q)(h_1 h_2 + 4k_0\phi_2 - h_1 m) +$$
$$4k_0(h_2 + 3m)(M_x - Q_x) = 0, \qquad (5.40)$$

где $m = (\pm)\sqrt{h_2^2 + 8k_0\phi_3}$ а функция $H(x,t)$ имеет вид $H(x,t) = C_0 t - \frac{-h_2 \pm \sqrt{h_2^2+8k_0\phi_3}}{4k_0} \int \big(M(x,t) - Q(x,t)\big)\, dx$. Тогда функция $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \frac{Q(x,t) + M(x,t)\exp(H(x,t))}{1 + \exp(H(x,t))} \tag{5.41}$$

является решением уравнения (5.31) и для пар функций (u, M_0), (u, Q_1), (M, Q_0), (Q, Q_1), и т.д. условие согласования выполняется.

□

Доказательство.

Доказательство теоремы проводится прямой подстановкой и основные формулы приведены в Приложении.

□

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4.1. На примере уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова можно показать, что решения которые обладают инвариантными свойствами относятся к тому же классу (5.3)как и решения изученные в главе 1 с помощью новой методики п.1.4.

В различных частных случаях точные и приближенные решения уравнения (5.31) приведены в [74,117,118,184], однако описанные здесь факты в этих работах отсутствуют.

ПРИМЕР 5.4.1.

Применим метод к известному в теории нелинейных волн уравнению Фитц –Хью–Нагумо –Семенова (FHNS)

$$u_t - k_0 u_{xx} - \varphi u(1 - u^2) = 0, \tag{5.42}$$

где $k_0 = \varphi/(2a^2)$,$\varphi > 0, a - -$ константы . Ранее это уравнение рассматривалось в [118] стр.190.

Выбирам его решения [184]стр.51, для которых выполнены условия Теоремы 5.4.2. Рассматриваются функции $u(x,t) = M(x,t)$ или $u(x,t) = Q(x,t)$ –решения уравнеия (5.42).

$$\begin{aligned} M(x,t) &= -(1+\exp(m_0+ax+bt))^{-1}, \\ Q(x,t) &= (-1+\exp(2ax+q_0))/(1+\exp(2ax+q_0)), \\ b = -3\varphi/2, & \end{aligned} \tag{5.43}$$

Вычисляя функцию $H(x,t)$ (5.34), получим:

$$H(x,t) = \ln((1+\exp(m_0+ax-3t\varphi/2)/(1+\exp(q_0+2ax))),\ C_0 = 0, \tag{5.44}$$

получим по формуле (5.35) следующее решение уравнения (5.42)

$$u_1 = \frac{1-\exp(-q_0-2ax+\ln(2))}{1+\exp(-q_0-2ax+\ln(2))+\exp(m_0-q_0-ax-3t\varphi/2)}. \tag{5.45}$$

Исходные константы сдвига q_0, m_0 перешли в новое решение и к ним добавилась константа $\ln(2)$.

Существует следующий вариант функций, для которых также выполнены условия Теоремы 5.4.2

$$M(x,t) = (1+\exp(m_1-ax+bt))^{-1},$$

$$Q(x,t) = (1-\exp(q_1-2ax))/(1+\exp(q_1-2ax)),\ b = -3\varphi/2,$$

функция $H(x,t)$ имеет вид

$$H(x,t) = \ln((1+\exp(m_1-ax-3t\varphi/2)/(1+\exp(q_1-2ax))), \tag{5.46}$$

и соответствующее решение уравнения (5.42) следующее

$$u_2 = \frac{1 - \exp(-q_1 + 2ax + \ln(2))}{1 + \exp(-q_1 + 2ax + \ln(2)) + \exp(m_1 - q_1 + ax - 3t\varphi/2)}. \tag{5.47}$$

Выберем в качестве новых функций $Q(x,t) = u_1$, $M(x,t) = u_2$ — решения уравнения (5.42), вычислим новую функцию $H(x,t)$

$$H(x,t) = \ln((2\exp(-q_1) + \exp(-2ax) + \exp(m_1 - q_1 - ax - 3t\varphi/2)/$$
$$(1 + 2\exp(q_0 - 2ax)) + \exp(m_0 - q_0 - ax - 3t\varphi/2)), \tag{5.48}$$

и решение

$$u_3(\tau_1, \tau_2) = (-p_1 \exp(\tau_1) + p_2 \exp(\tau_2)/$$
$$(1 + p_1 \exp(\tau_1) + p_2 \exp(\tau_2)), \tag{5.49}$$

$p_1 = \exp(q_1)(2 + \exp(q_0))/(\exp(q_0 + m_1) + \exp(q_1 + m_0))$,

$p_2 = \exp(q_0)(2 + \exp(q_1))/(\exp(q_0 + m_1) + \exp(q_1 + m_0))$.

Здесь введены переменные $\tau_1 = -ax + 3t\varphi/2$, $\tau_2 = ax + 3t\varphi/2$.

Из этой формулы можно понять, как сконструирована новая константа сдвига.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4.2.

Если константа $\varphi < 0$, то возможны комплексозначные решения уравнения (5.42).

5.5 Теорема о представлении решений системы Курасава-Танаки.

В работе [59]изложенной в начале этой главы в п.5.1-5.3 построены точные решения системы (5.32) методом Р.Хироты.

Рассмотрим в качестве примера случай $n = 1, B = 1$ в (5.32) и две задачи Коши со специальными начальными данными $(M_0(x), Q_0(x))$, $(M_1(x), Q_1(x))$

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= M_0(x) = \frac{1}{1+\exp(\pm x/\sqrt{2})},\\
u_1(x) &= M_1(x) = \frac{1+\exp C_1 - \exp(C_1 \pm \sqrt{2}x)}{1+\exp C_1 + \exp(\pm x/\sqrt{2}) + \exp(C_1 \pm \sqrt{2}x)},\\
v_0(x) &= Q_0(x) = \frac{\exp(\pm x/\sqrt{2})}{1+\exp(\pm x/\sqrt{2})},\\
v_1(x) &= Q_1(x) = \frac{1}{1+(1+\exp C_1)\exp(\mp x/\sqrt{2}) + \exp(C_1)\exp(\pm x/\sqrt{2})},
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} - u + uv + u^3 &= 0,\\
v_t - v_{xx} + vu^2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемые функции, которые являются двумя решениями задачи Коши (5.50), (5.51) $(M_0(x,t), Q_0(x,t))$, $(M_1(x,t), Q_1(x,t))$

и вычислим вектор $u(x,t), v(x,t)$ по формуле

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1+e^H} \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ Q_0 & Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^H \end{pmatrix},
\tag{5.52}
$$

где функция $H(x,t)$ имет вид

$$
H(x,t) = C_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int (M_0(x,t) - M_1(x,t))\,dx \tag{5.53}
$$

где C_1 константа.

Эти два решения системы (5.51)с начальными данными (5.50) $(M_0, Q_0), (M_1, Q_1)$ и функция $H(x,t)$ имеют вид

$$M_0 = \frac{1}{1+\exp(-t/2 \pm x/\sqrt{2})},$$
$$M_1 = \frac{1+\exp C_1 - \exp(C_1 \pm \sqrt{2}x)}{1+\exp C_1 + \exp(-t/2 \pm x/\sqrt{2}) + \exp(C_1 \pm \sqrt{2}x)},$$
$$Q_0 = \frac{\exp(-t/2 \pm x/\sqrt{2})}{1+\exp(-t/2 \pm x/\sqrt{2})},$$
$$Q_1 = \frac{1}{1+(1+\exp C_1)\exp(-t/2 \mp x/\sqrt{2}) + \exp(C_1)\exp(t/2 \pm x/\sqrt{2})},$$
$$H[x,t] = C_2 - \ln\left(1+\exp\left(-\frac{t}{2} \pm \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$+\ln\left(1+\exp(C_1) + \exp\left(-\frac{t}{2} \pm \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \exp(C_1 \pm \sqrt{2}x)\right), \qquad (5.54)$$

Предложение 5.5.1.

Пусть существует решение задачи Коши (5.51)с дважды непрерывно дифференцируемыми начальными данными (5.50), а именно (5.54).

Тогда решение задачи Коши системы (5.51), построенное по паре функций $(M_0, Q_0), (M_1, Q_1)$, (5.54) по формуле (5.52) со специальными начальными данными

$$u =$$
$$[1 + \exp C_2 + \exp(C_1 + C_2)(1 - \exp(\pm\sqrt{2}x))]/$$
$$[1 + \exp C_2 + (1 + \exp C_2)(\exp(\pm x/\sqrt{2})) +$$
$$+ \exp(C_1 + C_2)(1 + \exp(\pm x\sqrt{2}))],$$
$$v =$$
$$[(1 + \exp C_2)\exp(\pm x/\sqrt{2})]/$$
$$[1 + \exp C_2 + (1 + \exp C_2)\exp(\pm x/\sqrt{2}) +$$
$$+ \exp(C_1 + C_2)(1 + \exp(\pm\sqrt{2}x))]. \qquad (5.55)$$

имеет вид

$$u =$$
$$[1 + \exp C_2 + \exp(C_1 + C_2)(1 - \exp(\pm\sqrt{2}x))]/$$
$$[1 + \exp C_2 + (1 + \exp C_2)(\exp(-t/2 \pm x/\sqrt{2})) +$$
$$+ \exp(C_1 + C_2)(1 + \exp(\pm x\sqrt{2}))],$$
$$v =$$
$$[(1 + \exp C_2)\exp(-t/2 \pm x/\sqrt{2})]/$$
$$[1 + \exp C_2 + (1 + \exp C_2)\exp(-t/2 \pm x/\sqrt{2}) +$$
$$+ \exp(C_1 + C_2)(1 + \exp(\pm\sqrt{2}x))]. \qquad (5.56)$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5.1.

Заметим, что случае $n = 2, B = 2$ в системе (5.32)

$$u_t - u_{xx} - u + uv^2 + u^3 = 0,$$

$$v_t - v_{xx} + 2vu^2 = 0. \qquad (5.57)$$

также можно строить решения по формуле (5.52), где $(M_0, Q_0), (M_1, Q_1)$ решения системы (5.57). Функция $H(x,t)$ должна быть выбрана в виде

$$H(x,t) = C_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{(M_0 - M_1)^2 + (Q_0 - Q_1)^2}\, dx$$

□

Доказательство проводится аналогично Теореме 5.4.1.,см.[61],[63]. На первом шаге решения считаются. К сожелению, расчет последующих решений затруднителен.

6 ГЛАВА 6. Диссипативные структуры. Некоторые свойства асимптотических решений квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнений .

6.1 Структура особенностей квазилинейного вырождающегося гиперболического уравнения.

В начале этого параграфа обсудим некоторые свойства решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений, с целью сравнения их со свойствами других уравнений. Эти уравнения описывают эволюционные системы в которых возникают самоорганизующиеся структуры. см.Введение с.34. Далее рассматриваются квазилинейные вырождающиеся гиперболические уравнения и показано, что существует класс решений свойства которых похожи на свойства решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений.

Замечание 6.1.1

Отметим, что этот результат связан с известными результатами Д.Аронсона,Л.Д.Покровского,С.Н.Тараненко, В.Г.Данилова, В.П.Маслова, К.А.Волосова [167]- [169], [153], [54], [118], [184] о структуре решения в окрестности вырождения. Как и в работах [153], [54], [118], [184]автора с В.Г.Даниловым, В.П.Масловым, в отличии от работ Д.Аронсона, предполагаем непрерывность потока и гладкость поверхности вырождения, получаем асимптотику решения по гладкости. Кроме того, несмотря на отсутствие априорной оценки, теорема дает информацию о влиянии возмущений на гладкость решения, а именно, любые возмущения правой части уравнения, удовлетворяющие условиям п. 2) Определения 2 [87] не меняют показателя степени главного члена асимптотики решения по гладкости.

Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение с малым параметром с переменными медленно меняющимися коэффициентами, но менее общее, чем в работах В.П.Маслова, В.Г.Данилова [83]–[87]

$$Lu = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}(\rho(x,t,u)\frac{\partial u^k}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi(x,t,u)) + F(x,t,u) = 0 \tag{6.1}$$

где $x \in R$, $k > 1$, а функции $\rho(x,t,u) \geq 0$, $\varphi(x,t,u) \geq 0$, дважды непрерывно дифференцируемые функции при $u > 0$ и при $u \to 0$ могут быть разложены в асимптотические ряды по степеням u с дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, $0 < \varepsilon < 1$ малый параметр.

При малых значениях u предполагается, что вещественные функции $K(u), F(u)$ представимы в виде асимптотических рядов по степеням u при $u \to 0$, и главный член которых имеет вид

$$\begin{aligned} F(x,t,u) &= u^q G(x,t,u),\\ \varphi(x,t,u) &= u^m \Phi(x,t,u),\\ \rho(x,t,u) &= k u^{k-1}\Gamma(x,t,u), \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $k > 1$, $q > 0$, $m > 0$.

Функции $G(x,t,u), \Phi(x,t,u), \Gamma(x,t,u)$ являются дважды непрерывно дифференцируемые.

В работах В.П.Маслова, В.Г.Данилова дана классификация решений относительно малого параметра ε. А именно, указывается, что решения можно разделить на два больших класса: ограниченные и неограниченные при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Эти свойства позволили развить эффективный асимптотический метод построения решений для уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от x, t, окончательно сформулированный в [118, 83- 87, 182-185] (совместно с В.Г. Даниловым, В.П. Масловым).[13]

Алгоритм построения асимптотического решения различен для ограниченных и неограниченных при $\varepsilon \longrightarrow 0$ решений. С точки зрения приложений, такие решения описывают образование дисспативных структур и распространение волн в средах с медленно меняющимися свойствами.

Пример 6.1.3.

Ограниченные при $\varepsilon \longrightarrow 0$ (стремящиеся к нулю) точные решения вырождающегося квазилинейного параболического уравнения.

В [118] стр.23 и [184] стр.75 рассмотрено квазилинейное парабо-

[13]Неораниченные при $\varepsilon \longrightarrow 0$ решения численными методами изучлись автором в [51]. См. также ссылки на работы во Введении с.

лическое уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}(K(u)\frac{\partial u}{\partial x})-$$
$$-m\frac{u^q}{(1-q)^2}(1-u^{2(1-q)})[\frac{(1-q)b-2+q}{m}+u^{2(1-q)}]=0,$$
$$K(u)=ku^{k-1} \qquad (6.3)$$

где $k=2-q,\ 0<q<1,\ m=(3-2q)(2-q)$.

Это частный случай уравнения (6.1). Функция

$$u(x,t)=\begin{cases}[th(\frac{x+bt-x_0}{\varepsilon})]^{1/(1-q)}, & x-x_0+bt\geq 0,\\ 0, & x-x_0+bt<0.\end{cases} \qquad (6.4)$$

является его точным решением. Эта функция имеет слабую особенность. Здесь можно сказать, что коэффициент при сгруппированных оосбенностях возникающий после подстановки (6.4) в (6.3) равен нулю. График решения (6.4) при различных значениях малого параметра ε приведен на Рис.17 (кривые 1 и 2 соответственно).Здесь следует положить $a_0=0,\ a_1=1$. Областью изменения функции является отрезок [0,1]. Из рисунка видно, что решение (6.4) локализовано, то есть обращается в нуль при $x=x_0-bt$. Введение малого параметра ε в точное решение позволяет выявить следующие свойства. Существует переходная область шириной порядка ε, где решение изменяется от нуля до значений, экспоненциально близких к единице. Кроме того, в точке слабого разрыва (на фронте волны) выполнено условие непрерывности потока

$\frac{\partial u^{(2-q)}}{\partial x}|_{x=-bt+x_0}=0$ для любого значения $\varepsilon\in[0,1]$.

В окрестности точки слабого разрыва $x+bt-x_0=0$ верно

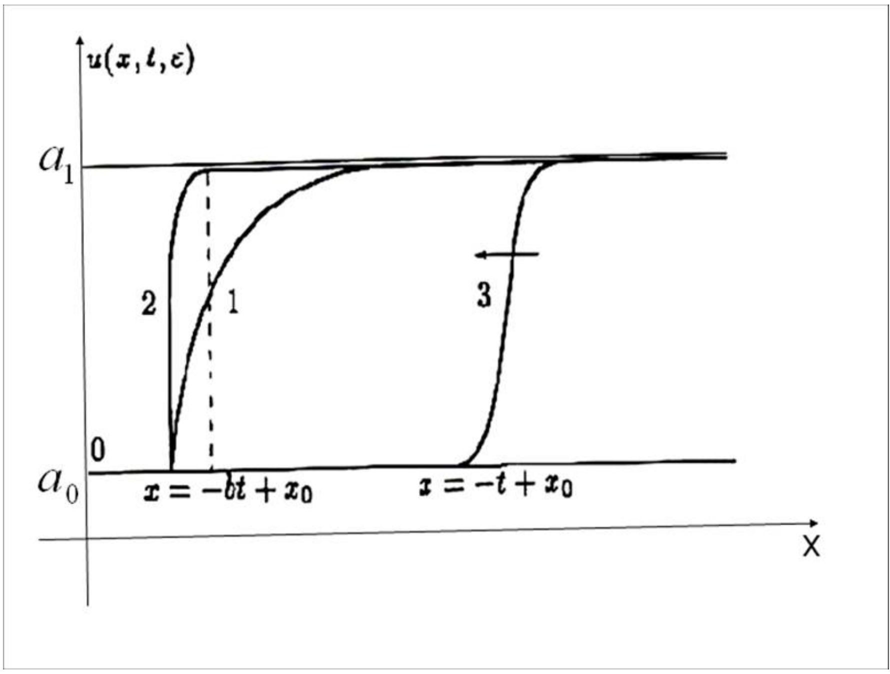

Рис. 17: Ограниченное при $\varepsilon \to 0$ решение квазилинейного параболического уравнения. Кривые 1,2 соответствуют различным значениям параметра ε.

представление решения (6.4)

$$u(x,t,\varepsilon) = (\frac{x+bt-x_0}{2\varepsilon})^{1/(1-q)} + r_o(x,t,\varepsilon),$$
$$x_0 > 0. \qquad (6.5)$$

Выполнено неравенство $r_o(x,t,\varepsilon)/[(\frac{x+bt-x_0}{2\varepsilon})^{1/(1-q)+1}] \leq C_0$ для всех x, t.

Таким образом, в окрестности границы носителя решение имеет особенность типа ветвления с показателем степени $\alpha = \frac{1}{1-q}$.(см. Введение, где перечислены работы начинная от D.G.Aranson, Г.И.Баренблатта и т.д.)

Очевидно, что значения функции $u = 0,\ u = 1$ являются решениями уравнения (6.3), так как $F(0) = 0,\ F(1) = 0$. Наличие корня у алгебраического уравнения тесно связано с фактом существования ограниченных при $\varepsilon \longrightarrow 0$ решений уравнения (6.4).

Строгие определения квазилинейных вырождающихся параболических уравнений даны в работах В.Г.Данилова, В.П.Маслова [83]–[87].

Далее в данном параграфе рассмотрена структура особенностей квазилинейного вырождающегося гиперболического уравнения.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1} \frac{\partial u^k}{\partial x}\right) + \varphi \frac{\partial u^m}{\partial x} + F(u) = 0, \quad (6.6)$$

где показатели степеней $kn > 1,\ m > 0,\ q > 0$. Рассматриваются решения определенного, специального вида, имеющие область изменения $u \geq 0$. Предположим, что функция $F(0) = 0$. Будем предполагать, что в некоторой окрестности границы носителя решения выполнено неравенство $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ для любых значений переменных x, t.

При $\mu > 0$ и при малых значениях u предполагается, что вещественная функция $F(u)$ представима в виде ряда по степеням u при $u \to 0$, и главный член которых имеет вид

$F(u) = \gamma u^q + ...,\ q > 0.$

Эти ряды аналогичны приведенным в (6.2).

Известно, что в линейном гиперболическом уравнении распространяется любая заданная особенность. То есть, если в начальный момент времени в решении имеется особенность, то она сохраняется при любом значении переменной $t > 0$ и распространяется по характеристикам. В случае квазилинейного гиперболического уравнения с вторыми производными, как вычислено в [118] стр.50 автором, возможно существование решения только с некоторыми особенностями, в отличии от линейного случая, на уровне нулевого фона (то есть при малых значениях $u \to 0$.)

Сформулируем основное утверждение параграфа :

Теорема 6.2.1.

Пусть локальное самоподобное асимптотическое решение квазилинейных гиперболических уравнений (6.6) в области Ω существует, и выполнено условие непрерывности потока $\left(\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1}\frac{\partial u^k}{\partial x}\right)|_{S=0} = 0$ и гладкость поверхности вырождения $S(x,t)=0$. Тогда в окрестности линии

$(x,t)\in\Omega$, где $S(x,t)=0$ функция u представима в виде

$$u(x,t) = W_0(x,t)S(x,t)^\alpha + o(S(x,t)^\alpha),\ S(x,t)^\alpha \geq 0, \qquad (6.7)$$

где $W_0(x,t)\in C^\infty(\Omega),\ W_0>0$. Тогда в окрестности точки $\tau = S(x,t) = 0$ локальное самоподобное асимптотическое решение по гладкости уравнения (6.6)может иметь только те главные особенности, которые приведены в

Таблица 1.

α	Условия существования	Прямая проходит через точки
$\frac{1}{1-m}$	$m<1,\, q>2m-1,\, kn>1$	(M_1, M_3)
$\frac{2}{1-q}$	$q<1,\, 2m\geqslant q+1,\, kn>\frac{(n-1)(1-q)}{2}+1$	(M_1, M_4)
$\frac{1}{m-q}$	$m>q,\, 2m-q\leqslant 1,\, kn\geqslant m+n(m-q)$	(M_3, M_4)
$\frac{1}{kn-m}$	$kn>m,\, m(n-1)+kn(2-n)<1$	(M_2, M_3)

□

Несмотря на отсутствие априорной оценки, теорема дает информацию о влиянии возмущений на гладкость решения. Локальное асимптотическое по гладкости решение может быть разложено в асимптотический ряд по системе функций из $V(\Omega)$, описанное ниже[14].

Для того, чтобы сформулировать соответствующие результаты, требуется ввести следующие обозначения.

Как и в цитируемых работах, обозначим, через $\Im(\{\omega_i\}), i \in N$ множество функций, полученных из набора $\{\omega_i\}$ с помощью следующих преобразований:

A) линейной комбинации с гладкими коэффициентами,

B) перемножения,

C) возведения в вещественную степень.

В общем случае последовательность функций $\{\omega_i\}$ не является конечной и может быть выбрана неоднозначно. (См. подробнее [87], [184].)

Для полноты картины приведем Определение 2 из [87]модифицированное для данного случая

Определение 6.1.1

Функция $u(x,t)$ называется локальным, самоподобным асимптотическим по гладкости решением квазилинейного вырождающегося гиперболического уравнения (6.6) в области Ω, если при

[14]В квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях в [54],[184]в этих рядах обнаружены функции содержащие логарифмы, в а квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнениях, как показывают исследования приведенные автором, в этом ряде других функций не обнаружено. "Резонансы"отсутствуют.

$(x,t) \in \Omega$ выполняются следующие условия:

1) Функция $u(x,t)$ представима в виде

$$u(x,t) = \chi(x,t,S(x,t)) + g(x,t), \qquad (6.8)$$

где $S(x,t)$– некоторая бесконечно дифференцируемая функция, такая, что

$S(x_0,t_0) = 0,\ \frac{\partial S(x,t)}{\partial x})|_{S=0} \neq 0,\ \frac{\partial S(x,t)}{\partial t})|_{S=0} \neq 0, (x_0,t_0) \in \Omega.$

Функция $\chi(x,t,\tau),\ \tau = S(x,t)$ при $\tau \to +0$ разлагается в асимптотический ряд по системе функций $\{\psi_i(x,t,\tau)\}$, принадлежащих множеству $V(\Omega)$, таких, что справедливо предположение $\chi(x,t,\tau) = \Sigma\psi_i(x,t,\tau)$, причем $\lim \frac{\psi_{i+1}(x,t,\tau)}{\psi_i(x,t,\tau)} \to 0$, при $\tau \to 0$.

Функция $g(x,t)$принадлежит

C^∞при $(x,t) \notin \{(x,t) : S(x,t) = 0\}$ и равномерно по $(x,t) \in \Omega$ для любого $N > 0$ справедлива оценка

$\frac{g(x,t)}{\chi(x,t,S(x,t))} = h_1(x,t,S(x,t))$, и выполнено неравенство

$h_1(x,t,S(x,t))/S^N \leq C_{h1}$ для любых $x,t \in \Omega$, где C_{h1}–константа.

2)$Lu = g_1(x,t,S)$, где $g_1 \in C^\infty$ при $(x,t) \notin \{(x,t) : S(x,t) = 0\}$

и $\frac{g_1(x,t)}{\chi(x,t,S(x,t))} = h_2(x,t,S(x,t)), S- > +0,$

и выполнено неравенство

$h_2(x,t,S(x,t))/S^N \leq C_{h2}$ для любых $x,t \in \Omega$, где C_{h2}–константа.

3) Выполнено условие непрерывности потока
$\lim \left(\left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial u^k}{\partial x}|_{\tau=S} \right) = 0$, при $S \to 0$. Ограничения на параметры k,n,m приведены в таблице. Более подробно см.в [184].

Доказательство Теоремы 6.2.1 приведено в [118] стр. 51.

Приведем классификацию главных особенностей в окрестности слабого разрыва. Допускаемых уравнением (6.6), с помощью метода многоугольников Ньютона [21],[156] . Подставим (6.7) в уравнение (6.6) и выпишем слагаемые, которые содержат (главные особенности) самые маленькие показатели степени

$$\alpha(\alpha-1)W_0S(x,t)^{\alpha-2}(\frac{\partial S}{\partial t})^2+...-\alpha knW_0{}^{kn}S(x,t)^{(\alpha k-1)n-1}(\frac{\partial S}{\partial x})^2+...$$
$$+\varphi\alpha mW_0{}^{m}\frac{\partial S}{\partial x}S(x,t)^{\alpha m-1}+...+\gamma W_0{}^{q}S(x,t)^{\alpha q}+...=0, \qquad (6.9)$$

соответствующие главным особенностям. Необходимым условием существования решения вида (6.7) является **равенство нулю коэффициентов при членах, содержащих главные особенности**. Очевидно, что по крайней мере два показателя в (6.9) совпадают, а остальные строго больше указанных[15].

Последовательно рассмотрим все возможные случаи. Следуя алгоритму диаграмм Ньютона, [36, 153, 156] рассмотрим показатели степени функции S:

$$\alpha-2, \quad (\alpha k-1)n-1, \quad \alpha m-1, \quad \alpha q. \qquad (6.10)$$

Рассмотрим случай, когда равны первый и третий показатели в (6.10):

$\alpha-2=\alpha m-1$, попутно объясним идею применения многоугольников Ньютона.

На вспомогательной плоскости X,Y показателям степеней (6.10) сопоставим точки $M_i(X_i,Y_i)$. Показателю степени $a\alpha+b$ отвечает точка $M(a,b)$ с координатами $X=a, Y=b$. Таким образом,

[15] "Резонансные"случаи, когда совпадают степени большего числа слагаемых разобраны в [54].

степеням (6.10) соответствуют точки

$$M_1(1,-2), \quad M_2(kn,\ -n-1), \quad M_3(m,-1), \quad M_4(q,0). \tag{6.11}$$

Точки M_1 являются вершинами многоугольника Ньютона, приведенного на Рис. 18. Уравнение прямой, проходящей через точки M_1, M_3 с угловым коэффициентом $-\alpha$, имеет вид

$$Y = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}(X - X_1) + Y_1, \tag{6.12}$$

или $Y = \frac{1}{m-1}(X-1) - 2$. Для того чтобы значение α реализовалось, необходимо, чтобы точки M_2, M_4 на вспомогательной плоскости X, Y лежали выше прямой с отрицательным наклоном, определяемой уравнением (6.12).

Соединяя отрезками прямых вершины получим выпуклый многоугольник Ньютона. При этом непрерывным решениям будет соответствовать значения α, т.е. стороны многоугольника Ньютона с отрицательным наклоном. Рассмотрим точки пересечения прямой (6.12) с осями X и Y , которые равны

$$X^* = X_1 - Y_1\frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1}, \quad Y^* = \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}(-X_1) + Y_1. \tag{6.13}$$

В рассматриваемом случае $X^* = 2m - 1$, $Y^* = \frac{2m-1}{1-m}$. См. Рис. 18 левый рисунок.

Сравнивая значения X^*, Y^* с координатами точек M_2, M_4 можно получить условия существования разложения (6.7), которые приведены в таблице.

Перечислим все имеющиеся особенности решения в точке ветвления $S = 0$.

Для случая приведенного во второй строке таблицы 1 имеем прямую, проходящую через точки M_1, M_4 :

$Y = \frac{2(X-1)}{q-1} - 2$. см. Рис. 18 правый рисунок.

Для случая приведенного в третьей строке таблицы имеем прямую, проходящую через точки M_3, M_4 :

$Y = \frac{X-m}{q-m} - 1$. См. Рис. 19 левый рисунок.

Для случая приведенного в нижней строке таблицы имеем прямую, проходящую через точки M_2, M_3 :

$Y = \frac{X-kn}{m-kn} - 1 - n$. См. Рис. 19, правый рисунок.

Заметим, что здесь $0 < kn < 1$, а условие равенства нулю потока на фронте слабого разрыва выполнено.

Замечание 6.1.2

Как уже говорилось, в [54] разобраны резонансные случаи для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения (6.1). Показано, что в представлении решения в окрестности фронта слабого разрыва могут присутствовать слагаемые содержащие логарифмические функции. Этот факт устанавливается с помощью преобразования описанного в параграфе 1.1 главы 1.

Казалось, что следует ожидать этого и в квазилинейных гиперболических уравнениях.

Рассмотрим ситуацию которая возникает в квазилинейном гиперболическом уравнении. Следует рассматривать четыре серии слагаемых. См. таблицу 1. Все случаи анализируются одинаково.

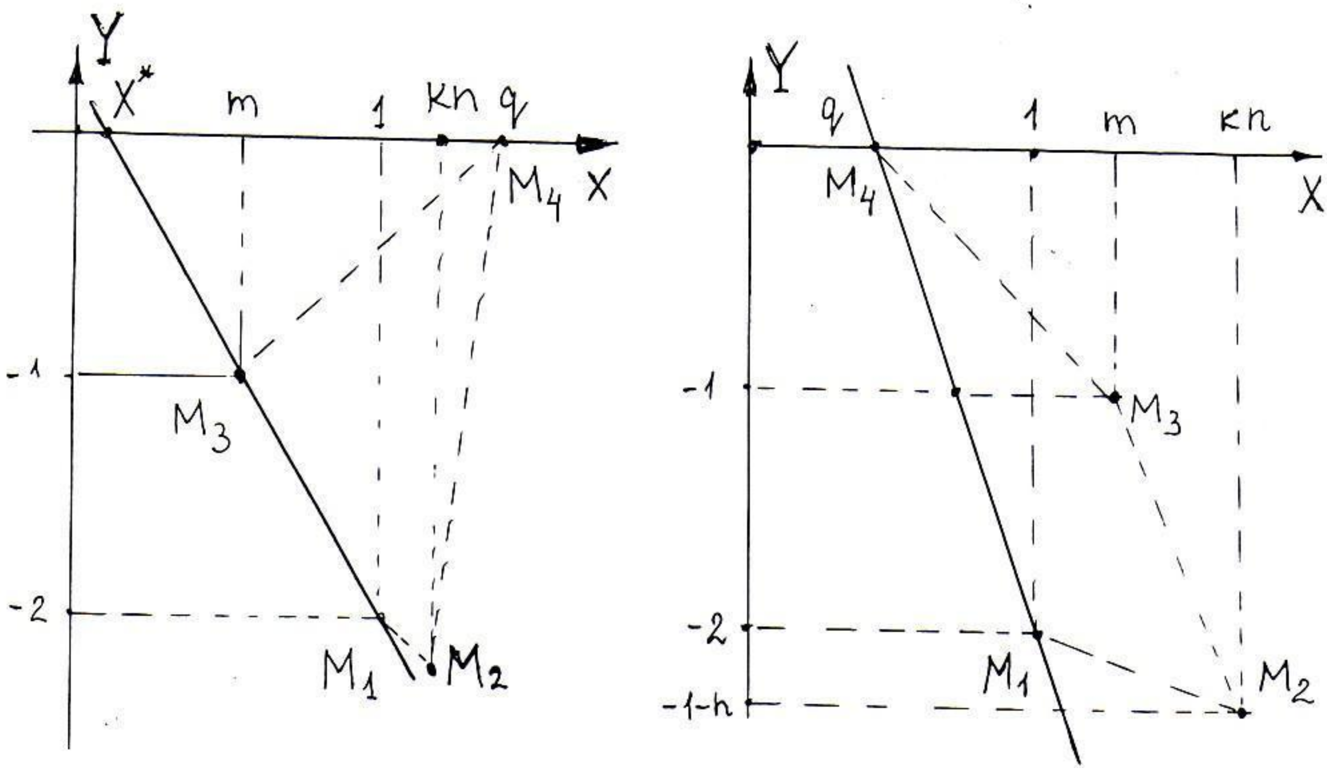

Рис. 18: Первые два варианта расчета для значений параметров приведенных в первой и второй строке таблицы 1 методом Ньютона.

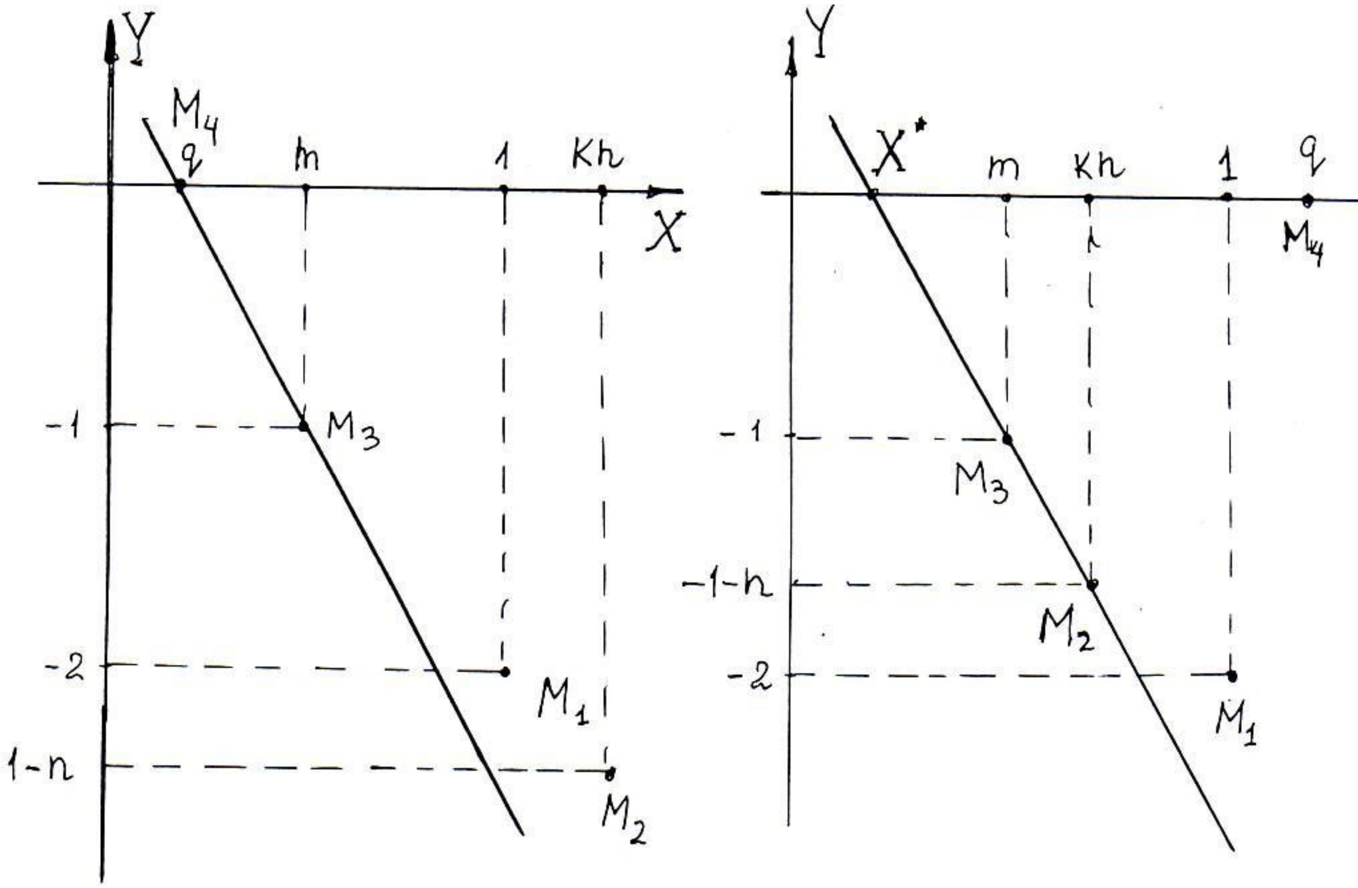

Рис. 19: Вторые два варианта расчета для значений параметров приведенных в третьей и четвертой строке таблицы 1 методом Ньютона.

Рассмотрим ОДУ

$$b\frac{\partial X}{\partial \xi} + b\mu\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} - D\frac{\partial^2 X^k}{\partial \xi^2} + \phi\frac{\partial X^m}{\partial \xi} - X^q G = 0, \qquad (6.14)$$

где b, D, G константы.

"Резонансы"возможны только в линейном уравнении. Анализ этого уравнения показывает, что все четыре варианта в Таблице 1 в параграфе 6.2 не дают возможности получить линейное уравнение с помощью преобразования (1.5) глава 1 §1.1. Мешает вторая производная (гиперболическое уравнение). Остается только случай, когда все параметры k, m, q, n стремятся к единице, тогда слабый разрыв убегает на бесконечность и исчезает. Таким образом, в гиперболических уравнениях слагаемых в асимптотических рядах, содержащих логарифмические слагаемые, не обнаружено.

6.2 Асимптотические решения квазилинейного вырождающегося гиперболического уравнения медленно меняющимися коэффициентами.

Введение. Гиперболические уравнения теплопроводности описывают температурные (диффузионные) волны, распространяющиеся по ненулевому фону [115]. Уравнения такого же типа рассматриваются и как уравнения, описывающие волны в среде с малой дисперсией [155] (см. также [128]).

В гиперболическом квазилинейном вырождающемся уравнении локализованные волны распространяются с конечной скоростью по ненулевому фону. В данном параграфе используется разработанный в работах [118, 81- 87, 182-185] эффективный асимптотический метод построения решений для описания распространения волн в среде с медленно меняющимися свойствами (совместно с В.Г. Данилов, В.П. Маслов). Модель рассмотренная ниже моделирует процесс распространения сформировавшиеся тепловой волны, излучающей энергию с фронта [1,2,78]. Условие введенное А.С.Компанейцем, с физической точки зрения, получило в данной работе математическое объяснение, как необходимое условие существования волны распространяющейся по ненулевому фону и имеющую слабую особенность.

□

Рассмотрим квазилинейное гиперболическое уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x,t)K(u)\frac{\partial u}{\partial x})+\varepsilon\delta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}- \\ -F(u)=0, \tag{6.15}$$

где ε малый параметр. Рассмотрим задачу построения асимптотического решения, удовлетворяющего условиям

$$a_0\le u(x,t,\varepsilon)\le a_1,\ u|_{x\to-\infty}=a_0,\ u|_{x\to\infty}=a_1-0. \tag{6.16}$$

Здесь следует выбрать ту модификацию алгоритма, которая разработана (В.Г. Данилов, В.П. Маслов) для построения ограниченных при $\varepsilon\to 0$ решений, область изменения которых ограничена.

Как доказано в выше перечисленных работах, построение ограниченного при $\varepsilon\to 0$ асимптотического решения, тесно связанно с краевой задачей для ОДУ для функции $W(\xi)$, которое в данном случае имеет вид

$$b\frac{dW}{d\xi} - \frac{d}{d\xi}((K(W) - b^2)\frac{dW}{d\xi}) - F(W) = 0,$$
$$W|_{\xi=0} = a_0,\ W|_{\xi\to\infty} = a_1. \qquad (6.17)$$

Теорема 6.2.1.

Уравнение (6.17) преобразованием, которое описано в параграфе 1.1 главы 1 и в данном случае имеет вид

$$(K(W) - b^2)\frac{dW}{d\xi} = \frac{d\Theta}{d\zeta}(\Theta^{-1}(\Theta))|_{\Theta=W}. \qquad (6.18)$$

сводится к краевой задаче для уравнения

$$b\frac{d\Theta}{d\zeta} - \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} - (K(\Theta) - b^2)F(\Theta) = 0.$$
$$\Theta|_{\zeta\to-\infty} = a_0,\ \Theta|_{\zeta\to\infty} = a_1,$$
$$R = (K(\Theta) - b^2)F(\Theta), \qquad (6.19)$$

где функция $\Theta(\zeta)$.

Доказательство:

Доказательство повторяет приведенное в [118] стр. 68, [184] стр. 20 .

При построении асимптотического решения, существенным является вид зависимости коэффициента переноса $K(u)$ и функции $F(u)$ в окрестности точек $u = a_0,\ u = a_1$.

Предположим, что алгебраическое уравнение не имеет корней

$K(\Theta) - b^2 \neq 0$ при значениях $\Theta \in (a_0,\ a_1)$.

Свойства ОДУ - эталонных уравнений изучались в вышеперечисленных работах [118], [184] и многими авторами ранее [6-8,18,19,105,181], все результаты наиболее полно приведены в [195]. Обычно рассматривают две ситуации, когда уравнение (6.19) является уравнением:

1) типа Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера.

2) типа Зельдовича,

Сформулируем следующую лемму.

Лемма 6.2.1.

Пусть алгебраическое уравнение $K(W) - b^2 \neq 0$ не имеет корней при $W \in (a_0, a_1)$.

Тогда, необходимое условие существования решения краевой задачи (6.19) имеет вид $\sqrt{K(a_0)} = b$.

Пример 6.2.1.

Пусть в уравнении (6.17)

$K(u) = 1 + \sqrt{u-1}\ F(u) = 2\sqrt{u-1}(4\sqrt{u-1} - 3u + 2)$.

В этом случае

$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ q = \frac{1}{2},\ k = \frac{3}{2}$.

Решение эталонного уравнения (6.17) удовлетворяющее условиям Леммы 6.2.1, существует $b = 1$ и имеет вид

$$W(\xi) = \begin{cases} 1 + [1 - exp(-\xi)]^2, & \xi > 0, \\ 1, & \xi \leq 0. \end{cases} \tag{6.20}$$

См. Рис. 17, где $a_o = 1, \ a_1 = 2$. Областью изменения функции W является отрезок $[1, 2]$. Решение будет распространяться справо налево по фону $W = 1$ и оно имеет слабый разрыв.

Обобщая свойства примера 6.2.1, предположим, что имеет место представление

$$K(u) = K(a_0) + \mu(u - a_0)^{k-1} + \mu_1(u - a_0)^k ...,$$
$$u \to a_0, \ k > 1. \tag{6.21}$$

Пусть имеет место представление

$$F(u) = \nu(u - a_0)^q + \nu_1(u - a_0)^{q+1} ..., \ q > 0, \ u \to a_0 + 0, \ \nu > 0.$$
$$F(a_1) = 0, \ \frac{dF}{du}|_{u=a_1} < 0. \tag{6.22}$$

Суммируя вышесказанное, предполагаем, что выполнено неравенство $k + q > 2$.

1) В первом рассматриваемом случае справедлива

Лемма 6.2.2. Пусть выполнено неравенство

$(K(W) - b^2)F(W) > 0, \ W \in (a_0, a_1)$ и выполнено равенство

$k + q = 2$ и (уравнение (6.19) классифицируется как уравнение типа Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера) существует решение краевой задачи (6.17) при значении скорости

$b \geq 2\sqrt{\frac{dR}{d\Theta}|_{\Theta=a_0}}, \quad R(\Theta) = (K(\Theta) - b^2)F(\Theta).$

Предположим, что выполнено неравенство

$\mu\nu = \frac{dR}{d\Theta}(0) > \frac{dR}{d\Theta}(\Theta),\ \Theta \in (a_0, a_1).$

Тогда существует решение краевой задачи (6.19) и выполнено неравенство согласования

$$K(a_0) \geq 4\mu\nu. \tag{6.23}$$

(см. подробное исследование эталонных уравнений в вышеупомянутых работах).

Следовательно, тогда существует локализованное решение краевой задачи (6.15),(6.16) и

$$b = \sqrt{K(a_0)}.$$

2) Во втором рассматриваемом случае предположим, что выполнено неравенство

$$(K(W) - b^2)F(W) > 0,\ W \in (a_0, a_1). \tag{6.24}$$

Здесь выполнено неравенство $k + q > 2$ и уравнение (6.19) классифицируется как уравнение Зельдовича и существует решение краевой задачи (6.17) при единственном значении скорости $b = b_0$ (константа Зельдовича). Это значение определено в Лемме 6.2.1.

Более подробно рассмотрим случай 1).

Далее переходим к построению рещения задачи с переменными, медленно меняющимися коэффициентами. Следуя, разработанному асимптотическому методу [15]–[17] (В.Г. Данилов, В.П. Маслов при участии автора), построено ограниченное при $\varepsilon \to 0$ решение задачи (6.15),(6.16), которое надо искать в виде

$$u(x,t,\varepsilon) = W_1(\frac{S}{\varepsilon} + \varepsilon g(\frac{S}{\varepsilon}, t) + r_3(\frac{S}{\varepsilon}, t, \varepsilon), t), \text{где}$$
$$S(x,t,\varepsilon) = \beta^0(t)(x + \varphi^0(t)) - \varepsilon\varphi^1(t). \qquad (6.25)$$

Выполнено неравенство $r_3(\frac{S}{\varepsilon}, t, \varepsilon)/\varepsilon^2) \leq C_0$ для любого $x,\ t$. Здесь C_0– константа независящая от ε и обозначено через $\xi = \frac{S}{\varepsilon} + \varepsilon g(\frac{S}{\varepsilon}, t),\ \tau = \frac{S}{\varepsilon}$. Таким образом, функция $W_1(\xi, t)$ является функцией двух переменных и по переменной ξ имеет слабую особенность в точке $\xi = 0$.

Лемма 6.2.3.

Пусть выполнены условия

$k > 1,\ k + q = 2,\ \sqrt{K(a_0)} + max[\frac{\delta(x,t)}{\sqrt{\lambda(x,t)}}] > 2\sqrt{\mu\nu}$ при всех $x \in R,\ t \in [0, T]$.

Тогда $b = b(t) = \sqrt{K(a_0)} + \frac{\delta(-\varphi^0,t)}{\sqrt{\lambda(-\varphi^0,t)}},\ t \in [0, T]$, где функция $\varphi^0(t)$ удовлетворяет ОДУ

$$\frac{d\varphi^0(t)}{dt} = \sqrt{K(a_0)\lambda(-\varphi^0, t)}. \qquad (6.26)$$

и функция $W_1(\xi, t)$ является решением задачи (6.17), где переменная t играет роль параметра. Справедливы асимптотические представления функции $W_1(\xi, t)$:

$$\text{при } \xi \to 0,\ W_1(\xi, t) = a_0 - c_1(t)\xi^\alpha + o(\xi^\alpha),$$
$$\alpha = \frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-q}. \qquad (6.27)$$

При $\xi \to \infty$ имеет место оценка

$$a_1 - W_1(\xi, t) \sim \exp(-|\frac{l}{K(a_0) - K(a_1)}|\xi), \qquad (6.28)$$

где константа l дается формулой

$$l = \frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{dR_1}{d\Theta}|_{\Theta=a_1}},\ R_1 = (K(\Theta) - K(a_1))F(\Theta). \quad (6.29)$$

□

Функция $g(\tau, t)$ определяется леммой.

Лемма 6.2.4.

Функция имеет вид

$$g(\tau, t) = -\int_0^\tau \exp(I(\xi))[\int_0^\xi f_0(\eta, t)\exp(-I(\eta))d\eta]d\xi, \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}
&I(\xi) = 2\ln|(K(W_1) - K(a_0))\frac{\partial W_1}{\partial \xi}| - \int_0^\xi \frac{b}{K(W_1) - K(a_0)}d\xi,\\
&f_0(\xi, t) = \{\frac{\partial W_1}{\partial \xi}(\beta^0\frac{d\varphi^1}{dt} + \frac{\xi + \varphi^1\beta^0}{\beta^0}\frac{d\beta^0}{dt}) - (\beta^0)^2\frac{\partial \delta}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}(\varphi^1 + \frac{\xi}{\beta^0})\frac{\partial W_1}{\partial \xi} +\\
&\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}2\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt}(\beta^0\frac{d\varphi^1}{dt} + \frac{\xi + \varphi^1\beta^0}{\beta^0}\frac{d\beta^0}{dt}) + \frac{\partial W_1}{\partial \xi}[\frac{d}{dt}(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt}) + \frac{d\varphi^0}{dt}\frac{d\beta^0}{dt}] -\\
&\frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi})\beta^0\frac{\partial \lambda}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}(\varphi^1 + \frac{\xi}{\beta^0}) -\\
&\frac{\partial \lambda}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}\beta^0 K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi} - F(W_1)\}\{(K(W_1) - K(a_0))\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\}^{-1}. \quad (6.31)
\end{aligned}$$

Для функции $\varphi^1(t) \in C^\infty([0, T])$ справедливы оценки

$g = O(\tau),\ \tau \to 0,\ g = O(\tau^2),\ \tau \to \infty.$

Замечание 6.2.1.

Функция W_1 имеет быструю и медленную переменную

$W_1(\frac{S}{\varepsilon} + \varepsilon g(\frac{S}{\varepsilon}, t) + r_3(\frac{S}{\varepsilon}, t, \varepsilon)) = W_1(\xi, t).$

Поэтому в формулах вычисляются как полные, так и частные производные. Переменная $\frac{S}{\varepsilon}$ в функции g обозначается в доказательстве через τ

$$\tau = \tau + \varepsilon g(\tau, t) - \varepsilon g(\tau, t) = \xi - \varepsilon g(\tau, t).$$

Замечание 6.2.2.

Равенство сформулированное в лемме 6.4.1 объяснено в данной работе, как необходимое условие существования решения имеющего слабую особенность и равного константе вне некоторой области (не нулевой фон). Оно трактуется, как равенство скорости тепловой волны и эффективной скорости звука в ее внутренней части. Это условие из физических соображений было впервые введено А.С.Компанейцем [92].

Теорема 6.2.2. Пусть выполнены леммы 6.2.1-6.2.4. Тогда асимптотическое локализованное решение задачи (6.15),(6.16) имеет вид (6.25), причем функция $\beta^0(t)$ в (6.25) имеет вид $\beta^0(t) = 1/\sqrt{\lambda(-\varphi^0, t)}$. Функции $\varphi^1(t), c_1(t) \in C^\infty([0, T])$.

Доказательство.

Подставим решение (6.25) в уравнение (6.15), и получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial \xi}(1+\varepsilon\frac{\partial g}{\partial \tau})[\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt}+\varepsilon\beta^0\frac{\varphi^1}{t}+\frac{\varepsilon\xi}{\beta^0}\frac{d\beta^0}{dt}]+\varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial t}+\\
&\varepsilon^2\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial t}+\\
&\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}(1+2\varepsilon\frac{\partial g}{\partial \tau}+O(\varepsilon^2))[(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt})^2+\\
&2\varepsilon\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt}(\beta^0\frac{d\varphi^1}{dt}+\frac{\xi+\varphi^1\beta^0}{\beta^0}\frac{d\beta^0}{dt})]+\\
&\varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \xi}[\frac{d}{dt}(\beta^0\frac{\varphi^0}{dt})+O(\varepsilon)]+\varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}[(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt})^2+O(\varepsilon)]+O(\varepsilon^2)-\\
&[(1+2\varepsilon\frac{\partial g}{\partial \tau}+O(\varepsilon^2))\frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi})+\varepsilon K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}]*\\
&(\beta^0)^2[\lambda(-\varphi^0,t)+\frac{\partial\lambda}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}\varepsilon(\varphi^1+\frac{\tau}{\beta^0})+O(\varepsilon^2)]-\\
&[\varepsilon\frac{\partial\lambda}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}+O(\varepsilon^2)]\beta^0K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}+\beta^0\delta(-\varphi^0,t)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}(1+\varepsilon\frac{\partial g}{\partial \tau})+\\
&\frac{\partial\delta}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}(\varphi^1+\frac{\xi}{\beta^0})\frac{\partial W_1}{\partial \xi}+O(\varepsilon^2)-F(W_1)=0.
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

Здесь $\frac{\partial S}{\partial t}=\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt}+(x+\varphi^0)\frac{d\beta^0}{dt}-\varepsilon\frac{d}{dt}(\beta^0\varphi^1)$,

$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=\frac{d}{dt}(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt})+\varepsilon[\frac{\tau+\beta^0\varphi^1}{\beta^0}\frac{d^2\beta^0}{dt^2}]+\frac{d\varphi^0}{dt}\frac{d\beta^0}{dt}-\varepsilon\frac{d^2}{dt^2}(\beta^0\varphi^1)$,

$x+\varphi^0=\varepsilon(\frac{\tau+\beta^0\varphi^1}{\beta^0})$, $\frac{\partial S}{\partial x}=\beta^0(t)+O(\varepsilon)$,

$\lambda(x,t)=\lambda(-\varphi^0,t)+\frac{\partial\lambda}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}\varepsilon(\varphi^1+\frac{\tau}{\beta^0})+O(\varepsilon^2)$.

Приравняем к нулю сумму слагаемых в (6.32) не стремящихся к нулю при $\varepsilon\to 0$, получим уравнение для функции W_1

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt}+\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt})^2-\\
&-\frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi})(\beta^0)^2\lambda(-\varphi^0,t)+\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\beta^0\delta(-\varphi^0,t)-\\
&-F(W_1)=0.
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Приравняем к нулю сумму слагаемых в (6.32), порядок которых ε

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \tau}\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}2\frac{\partial g}{\partial \tau}(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt})^2 + \frac{\partial W_1}{\partial \xi}\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt})^2 -$$
$$-2\frac{\partial g}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi})(\beta^0)^2\lambda(-\varphi^0,t) - K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}$$
$$(\beta^0)^2\lambda(-\varphi^0,t) + \beta^0\delta(-\varphi^0,t)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\frac{\partial g}{\partial \tau} = f,$$

$$f = \frac{\partial W_1}{\partial \xi}[\beta^0\frac{d\varphi^1}{dt} + \frac{\xi + \varphi^1\beta^0}{\beta^0}] + \frac{\partial W_1}{\partial t} +$$
$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}[2\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt}(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt} + \frac{\xi + \varphi^1\beta^0}{\beta^0}\frac{d\beta^0}{dt})] + \frac{\partial W_1}{\partial \xi}[\frac{d}{dt}(\beta^0\frac{\varphi^0}{dt}) + \frac{d\varphi^0}{dt}\frac{d\beta^0}{dt}] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi})\beta^0\frac{\partial \lambda}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}(\varphi^1 + \frac{\tau}{\beta^0}) - \frac{\partial \lambda}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}\beta^0 K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi} +$$
$$\beta^0\frac{\partial \delta}{\partial x}|_{x=-\varphi^0}(\varphi^1 + \frac{\xi}{\beta^0})\frac{\partial W_1}{\partial \xi} -$$
$$-\lambda(-\varphi^0,t)[\frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial x}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial x})]\beta^0. \tag{6.34}$$

Рассмотрим уравнение (6.33). Перепишем его в форме

$$\beta^0(\frac{d\varphi^0}{dt} + \delta(-\varphi^0,t))\frac{\partial W_1}{\partial \xi} -$$
$$-(\beta^0)^2\lambda(-\varphi^0,t)\frac{\partial}{\partial \xi}[[K(W_1) - (\frac{d\varphi^0}{dt}/\sqrt{-\varphi^0,t})^2]\frac{\partial W_1}{\partial \xi}] - \tag{6.35}$$
$$-F(W_1) = 0.$$

Положим:

$(\beta^0)^2\lambda(-\varphi^0,t) = 1,\ \beta^0(\frac{d\varphi^0}{dt} + \delta(-\varphi^0,t)) = b(t)$, и получим уравнение (6.17) и формулу для скорости. Функция g определена уравнением (6.34) и условием $g(0,t) = 0$.

После преобразований имеем

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial g}{\partial \xi}[b\frac{\partial W_1}{\partial \xi} + 2K(a_0)\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} -$$
$$2\frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi})][K(a_0)\frac{\partial W_1}{\partial \xi} - K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi}]^{-1} = f \tag{6.36}$$

где функция f после преобразований, аналогичных преобразованиям проведенным с эталонным уравнением, становится функцией f_0 в Лемме 6.2.4.

Кроме того, в преобразованиях использованы формулы, приведенные в замечании 6.2.1. Решение уравнения (6.36) дается формулой (6.30).

При $\xi \to 0$ имеем оценку

$$\exp(I(\xi)) \sim \xi^{\frac{-b}{\mu C^{k-1}}}[\tfrac{dW_1}{d\xi}(K(W_1) - K(a_0))]^2 \sim \xi^{\frac{-b}{\mu {C_0}^{k-1}}+2\alpha},$$

где $C_0 = \lim[(W_1 - a_0)\tau^{1-k}],\ \xi \to 0.$

Суммируя сказанное, получим оценку для функции g.

При $\xi \to \infty$ имеем оценку

$$\exp(I(\xi)) \sim \exp(\tfrac{-(b+2l)\xi}{|K(a_0)-K(a_1)|}),\ f \sim \xi$$

где

$$-(b + 2l) = \tfrac{-\sqrt{b^2+4|K(a_0)-K(a_1)|F'(a_1)}}{|K(a_0)-K(a_1)|}.$$

Таким образом интеграл в (6.30) сходится. Нижний предел во внутреннем интеграле равен нулю $\chi = 0$. Функции $\varphi^1(t),\ c_1(t)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции и здесь не выписываются. Алгоритм их вычисления приведен в [184]. Теорема 6.2.2 доказана.

Очевидно, можно рассмотреть задачу (6.15),(6.16) в случаях

$q < 1,\ k + q > 2,\ \mu F(u) \geq 0$, или $\mu F(u) \leq 0$.

Формулы асимптотики задачи (6.15) отличаются лишь спецификой, связанной с постоянным значением скорости $b = b_0$.

Поэтому эти формулы здесь не приводим. Если скорость химической реакции медленно меняется в зависимости от времени и положения в пространстве, то распределение стоков-источников в уравнении (6.15) можно моделировать функцией вида $\gamma^2(x,t)F(u)$. Функция $\gamma^2(x,t)$ моделирует медленные изменения скорости химической реакции, вызванные внешним воздействием (перемешивание) [18], [19], [58], [95].

Уравнение (6.33) переписывается в виде

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2}(\beta^0\frac{d\varphi^0}{dt})^2 - \frac{\partial}{\partial \xi}(K(W_1)\frac{\partial W_1}{\partial \xi})(\beta^0)^2\lambda(-\varphi^0,t) +$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\beta^0\delta(-\varphi^0,t) - \gamma^2(-\varphi^0,t)F(W_1) = 0. \qquad (6.37)$$

Для того, чтобы привести это уравнение к виду (6.37) положим

$\frac{d\varphi^0(t)}{dt} = \sqrt{K(a_0)\lambda(-\varphi^0,t)}/\gamma(-\varphi^0,t),$

$\beta^0(t) = \gamma(-\varphi^0,t)/\sqrt{\lambda(-\varphi^0,t)},$

$b = b(t) = \sqrt{K(a_0)}/\gamma(-\varphi^0,t) + \frac{\delta(-\varphi^0,t)\gamma(-\varphi^0,t)}{\sqrt{\lambda(-\varphi^0,t)}}.$

Остальные формулы и оценки в теореме 6.2.2 остаются теми же.

Пример 6.2.2.

В этом примере описана ситуация, когда нелинейное решение имеет слабую особенность на большем корне.

Пусть в уравнении (6.17)

$K(u) = 4 + \sqrt{2-u},\ F(u) = 2(\sqrt{2-u} - 1)(6 - 2\sqrt{2-u} + \sqrt{6}\sqrt{2-u} - 3u).$

В этом случае $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ q = \frac{1}{2},\ k = \frac{3}{2}.$

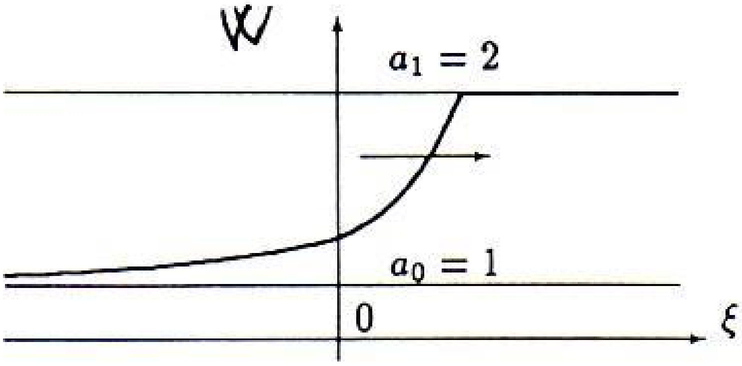

Рис. 20: Решения квазилинейного гиперболического уравнения, распространяющиеся слево направо, в среде по ненулевому фону и имеющие особенность на фронте слабого разрыва на большем корне $a_1 > a_0$ функции $F(a_1) = 0$.

Решение эталонного уравнения (6.17) существует при $b = 1$ и имеет вид

$$W = \begin{cases} 2, & \xi \geq 0, \\ 2 - [1 - exp(\xi)]^2, & \xi < 0. \end{cases} \tag{6.38}$$

См. Рис. 20. Область определения решения, которое распространяются по ненулевому фону и имеют особенность, уменьшается.

Предположим, что функции

$F(u),\ K(u) \in C^\infty(R^1/\{u = a_1\}),\ K(u) > 0$, для $u \in (a_0, a_1]$.

Обобщая свойства примера 6.2.2 предположим, что имеет место представление

$$K(u) = K(a_1) + \mu(a_1 - u)^{k-1} + \mu_1(a_1 - u)^k ...,\ u \to a_1,\ k > 1.$$
$$F(u) = \nu(a_1 - u)^q + \nu_1(a_1 - u)^{q+1} ...,\ q > 0,\ u \to a_1 - 0,\ \nu < 0.$$
$$F(a_1) = 0,\ \frac{dF}{du}|_{u=a_1>0},\ \mu\nu = const. \qquad (6.39)$$

Пример 6.2.2 демонстрирует другую ситуацию в которой также может быть построено асимптотическое решение. Важнейшим фактом для рассматриваемого класса уравнений, когда возможно построение локализованных решений, является выполнение неравенства

$K(W) - b^2 < 0,\ W \in (a_0, a_1)$. Поскольку оказывается , что коэффициент в уравнении (6.17) оказывается отрицательным. Из такой ситуации, оказывается, существует выход, и решение с областью изменения (a_0, a_1) может быть построено: $\nu < 0,\ \mu > 0$.

Краевая задача (6.17) в данном случае имеет вид

$$b\frac{dW}{d\xi} - \frac{d}{d\xi}(K(W) - b^2)\frac{dW}{d\xi}) - F(W) = 0,$$
$$W|_{\xi \to -\infty} = a_0,\ W|_{\xi \to 0} = a_1. \qquad (6.40)$$

и предполагается выполнение следующих условий

$$F(W) < 0,\ K(W) - K(a_1) > 0,\ W \in (a_0, a_1),$$
$$\frac{dF}{dW}|_{W=a_0} < 0. \qquad (6.41)$$

Теорема 6.2.3

Пусть выполнены условия (6.39), (6.41) на коэффициенты уравнения, входящего в задачу (6.40), а также условия

$k > 1,\ k + q = 2,\ u + \max \frac{\delta(x,t)}{\sqrt{\lambda(x,t)}} < \sqrt{K(a_1) - 2\sqrt{|\nu|\mu}}$ для любых $x \in R, t \in [0, T]$.

Тогда, асимптотическое локализованное решение краевой задачи (6.15),(6.16) имеет вид (6.25).

Функция $W_1(\xi, t)$ является решением краевой задачи (6.40)[16] при значении константы

$b = b(t) = -\sqrt{K(a_1)} + \frac{\delta(-\varphi^0,t)}{\sqrt{\lambda(-\varphi^0,t)}},$

где функция $\varphi^0(t)$удовлетворяет ОДУ

$\frac{d\varphi^0(t)}{dt} = -\sqrt{K(a_1)\lambda(-\varphi^0, t)}.$

Функция $\beta^0(t)$ имеет вид

$\beta^0(t) = 1/\sqrt{\lambda(-\varphi^0, t)}.$

Справедливы асимптотические представления функции W:

при $\xi \to 0,\ \ a_1 - W_1 = C_0\ |\xi|^\alpha + o(|\xi|^\alpha),\ \alpha = \frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-q}.$

При $\xi \to -\infty$, имеет место оценка

$W_1 - a_0 \sim \exp(\frac{l\xi}{K(a_0)-K(a_1)}),$

где l константа дается формулой

[16] t здесь рассматривается как параметр.

$l = \frac{b+\sqrt{b^2+4(K(a_0)-K(a_1))F'(a_0)}}{2}, \; b < 0.$

Функция $g(\tau, t)$ определяется в Лемме 6.2.4, где константа $K(a_0)$ заменяется на константу $K(a_1)$, и нижний предел во внутреннем интеграле также равен $\chi = 0$.

Доказательство.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство Теоремы 6.2.2 и леммы 6.2.2 в деталях. Подставим решение (6.25) в уравнение (6.15), мы получим уравнения (6.33) и (6.34). Отсюда следует краевая задача (6.40) . В данном случае, в силу описанных выше условий, необходимым условием существования локализованного решения является неравенство $b < 0$.

Действительно, умножим уравнение (6.40) на $\frac{dW}{d\xi}$ и проинтегрируем по области от минус бесконечности $-\infty$ до нуля. Используя краевые условия (6.41) получим

$b\int_{-\infty}^{0}(\frac{dW}{d\xi})^2 d\xi = \int_{a_0}^{a_1} F(W)dW < 0.$

Используя теорему 6.2.2 следует, что уравнение (6.40) связано с уравнением типа Колмогорова -Петровского- Пискунова- Фишера, аналогичное (6.18). Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны. Доказательство теоремы 6.2.3 завершено.

Имеет место еще один интересный случай. Предположим, что выполнены условия

$$F(W) < 0, \; K(W) - K(a_1) < 0, \; W \in (a_0, a_1),$$
$$\frac{dF}{dW}|_{W=a_0} < 0. \tag{6.42}$$

Здесь справедливы представления сформулированные в Теореме 6.2.3 и условия

$k + q = 2,\ \mu < 0,\ \nu < 0$. Этот случай разобран в [184] стр.191.

Заключение

1)разработан новый метод построения решений квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка параболического, эллиптического и гиперболического типов в **параметрической** форме. Метод основан на конструктивной замене независимых переменных и решения.

Для квазилинейных параболических не вырождающихся уравнений с частными производными второго порядка исходное уравнение сводится к системе четырех уравнений первого порядка с частными производными. Доказано, что условие разрешимости этой системы сводится к одному равенству с помощью ранее неизвестного тождества. см. Теоремы 1.2.1.– Теорема 1.2.3.

Построены решения в явной и параметрической форме полулинейного параболического уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова, уравнения Зельдовича , уравнения близкого к уравнению Колмогорова-Петровского-Пискунова-Фишера с большим функциональным произволом.(См.глава 1). Построены семейства точных решений полулинейных классических параболических уравнений в параметрической форме в трехмерной ситуации, для функций $f(Z)$ и $f(t, Z)$. Построены примеры в которых решение вычисляется через решение уравнения Абеля второго порядка (

§1.7). Аналогично строятся решения квазилинейных параболических уравнений, коэффициенты которых зависят от неизвестной функции и независимых переменных (§1.6).

2)Метод применен для построения точных решений уравнения Гамильтона –Якоби–Беллмана вида (50) соответстующих задаче синтеза оптимального управления математическим маятником находящимся под воздействием случайных возмущений. Теорема 2.3.1.,Теорема 2.3.2,Теорема 2.4.1. Решения задач для квазилинейных параболических уравнений с переменными коэффициентами выражаются, в данном случае, через решения задач для линейных параболических уравнений. Решена задача синтеза оптимального управления движением тела переменной массы, находящейся под воздействием гауссовские случайные возмущения в детерминированном случае.

3)Описан и обоснован метод построения новых классов точных решений в параметрической форме квазилинейных эллиптических уравнений. Приведены примеры построения решений, в частности решено уравнение с кубической нелинейностью. См.главу 3. Теоремы 3.1.1.– 3.1.3.

4)Построены с помощью предлагаемого метода решения квазилинейного невырождающегося гиперболического уравнения в двумерном и трехмерном случаях. См. главу 4.

5) Исследована важная в приложениях система уравнений Белоусова-Жаботинского и Курасава-Танаки. Найдены примеры решения задач Коши со специальными начальными данными. См. главу 5.

6)Проведена классификация особенностей, которые могут распространяться по ненулевому фону в моделях, связанных с квазилинейными вырождающимися гиперболическими уравнениями, методом многоугольников Ньютона. Построены асимптотические решения задачи Коши со специальными начальными данными, с медленно меняющимися коэффициентами для квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнений. Найдены необходимые условия существования таких решений.

Приложение

6.3 Содержание приложения.

Список литературы

[1] Андрианкин Э.И. Тепловая волна, излучающая энергию с фронта.// ЖТФ.– 1959.– Т.29.– №.11.–С.1368-1372.

[2] Андрианкин Э.И. Распространение не автомодельной тепловой волны. // ЖЭТФ.- 1978.- Т.35.-№.2.-С.428-432.

[3] Антонцев С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды.- Новосибирск.: Инс-т гидродинамики СО АН СССР. 1986.-108 с.

[4] Аристов С.Н. Периодические и локализованные точные решения уравнения. // ПМТФ.- 1999.-Т.40.- №.1.-С.22-26.

[5] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления.-М.: Высшая школа,2003.-614 с.

[6] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Наука,1974.-432с.

[7] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука, 1975.-240 с.

[8] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики.// Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундаментальные направления .- М.: ВИНИТИ, 1985.-т.3.-5-305 с.

[9] Азимов Д.М. Активные участки траекторий движения ракеты. Обзор исследований..// Автоматика и телемеханика.- 2005.-№ 11.-С.14-34.

[10] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Квазилокальные симметрии уравнений математической физики. //Математическое моделирование . Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики.- М.:Наука,1987.-С.22-56.

[11] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эврисический подход. // Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники., М.: ВИНИТИ,1989.-Т.34.-С.3-83.

[12] Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.:Наука,1992.-511 с.

[13] Беляев Н.М. Методы нестационарной теплопроводности. М.:Высшая школа,1978.-С.328.

[14] Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.// ПММ.-1952.-Т.16.- №.1.- С.67-68.

[15] Баренблатт Г.И. О автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде.// ПММ.- 1952.-Т.16.- №.6.-С.679-698.

[16] Баренблатт Г.И. О автомодельных решениях задачи Коши для нелинейного параболического уравнения нестацио-

нарной фильтрации газа в пористой среде. //ПММ.-1956.-Т.20.- №.6.- С.761-763.

[17] Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Ленинград.: Гидрометеоиздат,- 1978-255 с.

[18] Берман В.С. Нестационарное распространение волн горения в среде с медленно меняющимися свойствами.// ПММ.- 1978.- Т.42.-№3.-С.450-457.

[19] Берман В.С. О решении одной нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции.// ДАН. СССР.-1979.-Т.242.-№2.- С.265-267.

[20] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.- М.:Наука,1974.-345с.

[21] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. // УМН.-1983.- Т.38.- №.4.-С.133-187.

[22] Бабицкий В.И. Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.- М.: Наука,1985.-320с.

[23] Беллман Р. Динамическое програмирование.-М.: Из-во иностр.лит.,1960.-400с.

[24] Братусь А.С., Черноусько Ф.Л. Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях.// ЖВМ и МФ.-1974.- Т. 14.- №. 1. -С. 68-78.

[25] Братусь А.С. Решение некоторых задач оптимальной коррекции с погрешностью исполнения управляющего воздействия.// ПММ.-1974.- Т.38.-№.3.- С.433-440. Engl. tran. in J.Appl. Math. and Mech.

[26] Бородовский М.Б., Братусь А.С., Черноусько Ф.Л. Оптимальная импульсная коррекция при случайных возмущениях.//ПММ.- 1975.- Т.39.-№ 5. -С. 797-805. Engl. tran. in J.Appl.Math. and Mech.

[27] Братусь А.С. Метод приближенного решения уравнения Беллмана для задач оптимального управления системами, подверженными случайным возмущениям.//ПММ.-1975.- Т.39.- №.2.- С.235-245 . Engl. tran. in J.Appl. Math. and Mech.

[28] Братусь А.С., Колмановский В.Б. Приближенное оптимальное управление движением под воздействием пуассоновских и гауссовских случайных процессов.// Дифф.урав.-1977.-Т.8.- № 9.- С.1558-1569.

[29] Братусь А.С.,Посвянский В.П. Стационарные решения в замкнутой распределенной системе эволюции Эйген-Шустер.// Диффер.урав.-2006.-Т.42- №.12.-С.13-17.

[30] Братусь А.С. Приближенное решение одной задачи оптимального управления с вероятностным критерием. // ПММ.-1977.- Т.41.-№1.- С.13-23. Engl. tran. in J.Appl. Math. and Mech.

[31] Братусь А.С., Волосов К.А. Точные решения уравне-

ния Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления. // Докл. РАН.-2002.-Т. 385.-№. 3- С. 319-322. Bratus A.S., Volosov K.A. Exact solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for problems of optimal correction with an integral constraint on the total control resources.// (Russian) Dokl. Akad. Nauk-2002.- Vol.385.-No.3.,P.319-322.

[32] Белоносов В.С., Зеленяк Т.И. Нелинейные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск.: НГУ,1976.-155 с.

[33] Братусь А.С. Волосов К.А. Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления.//ПММ.- 2004.- Т .68.-№.5.- С.48-55. Engl. tran. in J.Appl.Math. and Mech.

[34] Бутковский А.Г. Характеристика систем с расперделенными параметрами.(справочное пособие) -М.:Наука,1979.-224с.

[35] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. 4 изд. -М.: Наука, 1980.-688с.

[36] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления нелинейных уравнений. -М.: Наука, 1969.-528 с.

[37]] Вишик М.И. О разрешимости краевых задач для квази-

линейных параболических уравнений высших порядков. //Мат. сборник., 1962.-Т. 59.- С. 289-325.

[38] Власов С.Н., Пискунова Л.В., Таланов В.И. Структура поля вблизи особенности , возникающей при фокусировке в кубической среде. //Журн. Эксперим. И теорет. Физики.- 1978.- Т.75.- №.5.-С.1602-1609.

[39] Вольперт А.И., Худяков С.И. О задаче Коши для квазилинейных вырождающихся уравнений второго порядка.// Мат. сборник.- 1969.- Т.78.-№.3.- С.374 -396.

[40] Вольперт А.И., Худяков С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.- 395 с.

[41] Волосевич П.П., Леванов Е.И. Различные режимы теплопереноса в двухтемпературной и трехтемпературной плазме. //Математическое моделирование. с.60-106.Процессы в нелинейных средах. Под редакцией Самарского А.А., Галактионова В.А., Курдюмова С.П. Сборник статей. М.:Наука.1986.- 312с.

[42] Волосевич П.П., Леванов Е.И., Маслянкин В.И. Бегущие волны в теплопроводной поглощающей среде.// Препринт ИПМ. им. Келдыша. АН СССР.- №.55.-1980.- 17 с.

[43] Волосевич П.П., Дягтярев Л.М., Курдюмов С.П. и др. Процесс сверхвысокого сжатия вещества и инициционирование термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения. //Физика плазмы. -1976.- Т.2- №6.- С.883-897.

[44] Волосов К.А. Течение степенной жидкости в диффузорах и конфузорах. //Жур. Механика композит. материалов. Деп. в ВИНИТИ.1981-№ 2310-81.

[45] Волосов К.А. О решениях Гамеля уравнений движения неньютоновских жидкостей со степенным реологическим законом.// Инжен. Физический Журнал.- 1981.- Т.26.-№.5.-Деп в ВИНИТИ № 5308-80.

[46] Волосов К.А. Температурные волны в движущейся среде.// Инжен. Физический Журнал.- 1981.- Т.26.-№ 5.- С.929-930.Деп.в ВИНИТИ 2507-81.

[47] Волосов К.А. К вопросу о влиянии мелкомасштабных фазовых неоднородностей на свойства неустойчивых резонаторов.// Жур. Прикладной спектроскопии.- 1981.- Т.35.- №.4.- С.710-713.

[48] Волосов К.А. Модель диффузии межкристалического кремния в процессе термического окисления.// Уральское отд. АНСССР. Инст. Матем. Сб. Асимптотические решения задач математической физики. Уфа. 1990.-с.17-32.

[49] Волосов К.А., Павлов К.Б., Романов А.С., Федотов И.А. Метастабильное состояние в процессах переноса описываемых Квазилинейным параболическим уравнением.// ПМТФ.-1982.- №.5.- С. 89-92.

[50] Волосов К.А., Романов А.С. О стационарных решениях в процессах описываемых нелинейным уравнением тепло-

проводности.// Инжен. Физический журнал.- 1982.- Т.17.- №.3.-С.68-72.

[51] Волосов К.А., Федотов И.А. Асимптотическое представление решения квазилинейного параболического уравнения в окрестности фронта. //ЖВМ и МФ.- 1983.- Т5.-№5.- С.93-101. Volosov K.A. Fedotov I.A. Asymptotic representations of the solution of a quasilinear parabolic equation in the vicinity of a front. (Russian), //Zh.Vychisl.Mat.i Mat.Fiz.-1983.-Vol.23.- No.5.-P.1249-1253.

[52] Волосов К.А., Романов А.С. Методы решения дифференциальных уравнений в инженерной практике. //Труды МГТУ им. Баумана.М.:Изд.МГТУ,1983.- №.398.-С.61-70.

[53] Волосов К.А., ДаниловВ.Г., Маслов В.П. Асимптотика волн горения в нелинейных неоднородных средах с медленно меняющимися свойствами .//Доклады АН СССР.- 1986.-Т.290.-№.5.-С.1089-1094. English transl. in Sovet Math.Dokl.

[54] Волосов К.А., Данилов В.Г., Маслов В.П. Структура слабого разрыва решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений.//Мат. зам.- 1988.-Т. 43.-№6.- С.829-839.

[55] Волосов К.А., Данилов В.Г., Колобов Н.А., Маслов В.П. Локализованные уединенные волны .// Док.

АН.СССР.- 1986.-Т.287.-№.6.-С.535-538. English transl. in Sovet Math.Dokl..

[56] Волосов К.А., Данилов В.Г. Модель термического окисления кремния .// Журнал Математического моделиров. - 1989.-Т.11.-№1.-С.58-67.

[57] Волосов К.А. Модель диффузии межкристалического кремния в процессе термического окисления. Асимптотические решения задач математической физики. // Урал. Отделение АН СССР. Башкирский научный центр. Институт математики. Сб. Уфа.1990.

[58] Волосов К.А. Температурные волны в нелинейной среде. с источником. Задачи матем. физики и асимптотика их решения.// Урал. Отделение АН СССР. Институт математики. Сб. Уфа . 1991.

[59] Волосов К.А., Данилов В.Г., Логинов А.М. Точные самоподобные двухфазные решения системы полулинейных параболических уравнений. // Теор. и математ. физика.- 1994.- Т.101.- №2.- С.189-199. `http://arXiv.org/find/math-ph/0103014/au:+Volosov_K.` (Engl).

[60] Волосов К.А. Преобразование приближенных решений линейных параболических решений в асимптотические решения квазилинейного параболического уравнения. // Мат. зам.- 1994.- Т.56.-№6.- С.122-126. Volosov K.A.Transformation of Approximate solutions of liner

parabolic equations into asymptotic solutions of quasilinear parabolic equations.// Mathematical Notes.-1994.-Vol.56.-№5-6.P.1295-1299.

[61] Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и инвариантные свойства анзаца метода Хирота-Сатсумы.// Диф.урав.- 2005.-Т.41.-№11.-С.1572-1575. Volosov K.A. Dressing of Solutions for Some Nonintegrable Problems and Invariant properties of ansatz of the Hirota Method. Differential Equations.- 2005.-Vol.41.-№11.-P.1647-1651.

[62] Волосов К.А. Новый способ построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде.// Диф. урав.– 2007.– Т.43.– №4.– С.492–497. English transl. Differential Equations. – 2007.–Vol.43.–No. 4.–P.507–512.

[63] Волосов К.А. Об одном свойстве анзаца метода Сатсума-Хирота для квазилинейных параболических уравнений.// Мат.заметки.– 2002.–Т.71.–№.3.– С.373–389. Volosov K.A. A Property of the Ansats of Hirota's Method for Quasilinear parabolic Equations. Mathematical Notes.– 2002.–Vol.71.–№.3.–P.339–354.

[64] Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в трехмерном случае. Моделирование автоволн. // Герценовские чтения. 16-20 апр. 2007.–СПб.:БАН,2007.–С.39–44.

[65] Воробьев Е.М. Частичные симметрии и многомерные интегрируемые дифференциальные уравнения.// Дифф. урав.–1989.–Т.25.- №3.–С.461–465.

[66] Воробьев Е.М. Инвариантные и частично инвариантные решения краевых задач. //Докл. АН СССР.– 1989.– Т.306.– №4.–С.836–840.

[67] Воробьев Е.М. Групповой анализ краевой задачи для уравнения ламинарного погранслоя. // Математическое моделирование.- 1991.- Т.3.-№11.-С.116–123.

[68] Воробьев Е.М. Частичные симметрии систем дифференциальных уравнений.// Док. АН.СССР.– 1986.–Т.287.– №5.–С.408–418. English transl. in Sovet Math.Dokl.

[69] Воробьев Е.М. Редукция дифференциальных уравнений с симметриями. // Известия АН СССР. Сер.матем.–1980.– Т.44.– №.4.–С.806–820.

[70] Воробьев Е.М. Введение в систему "Математика". М.: Финансы и статистика,1998.–261 с.

[71] Галактионов В.А., Курдюмов С.П.,Михайлов А.П.,Самарский А.А. Об одном подходе к к сравнению решений параболических уравнений.// В книге "Режимы с обострением:эволюция идеи".под.ред.Г.Г.Малинецкого.- М.:ФИЗМАТЛИТ,2006.–312с.

[72] Галактионова В.А., Курдюмова С.П.,Посашков С.А., Самарский А.А. Квазилинейное параболическое уравнение

со сложным спектором неораниченных автомодельных решений . с.142-183.// Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. Под редакцией Самарского А.А., Галактионова В.А., Курдюмова С.П. Сборник статей. М.:Наука,1986. –312с.

[73] Галактионов В.А., Дородницин В.А., Еленин Г.Е., Курдюмов С.П., Самарский А.А..Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точное решение, асимптотика, структуры. //Сб.ВИНИТИ. Итоги науки и техники.Современные проблемы математики. Новейшие достижения.–М., 1987.– Т.28.– С.95–205.

[74] Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии.//ЖВМ и МФ. –1994.–Т.34.–№3.–С.373–384.

[75] Гельфант И.М., Фомин С.М. Вариационное исчисление.–М.:Физматгиз,1961.– 228с.

[76] Гикхман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов.– М.:Наука,1977.–568с.

[77] Граник И.С., Мартинсон Л.К. Движение фронта тепловой волны в нелинейной среде с поглощением.//Инж.физ.журн.– 1980.–Т.35.–№4.– С.728–731.

[78] Грюканов М.Ф., Коктабаев Н.К. Нелинейные волны

при сжатии –пинча, ограниченного торцами. //Физика плазмы.–1981.–Т.7.–№6.- -С.1189–1194.

[79] Годунов С.К. Уравнения математической физики.– М.:Наука, 1979.– 391 с.

[80] Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком.– М.:Наука,1985.– 336с.

[81] Данилов В.Г. Лукашев Е.А. Асимптотическое решение типа спиральных волн для уравнений модели нелинейного ревербератора малой амплитуды.// Биофизика.–1990.– Т.35.–№.5.– С. 859–863.

[82] Данилов В.Г. Лукашев Е.А. Математическая модель нелинейного ревербератора малой амплитуды.// Биофизика.– 1990.– Т.35.–№5.–С. 855–858.

[83] Данилов В.Г., Маслов В.П. Квазиобратимость функций. упорядоченых операторов в теории псевдодифференциальных операторов.//Сб.ВИНИТИ. Современные проблемы математики: Итоги науки и техники. –1976.–Т.6.– С.1–160.

[84] Данилов В.Г., Маслов В.П. Асимптотика решений уравнений реакция - диффузия.// Мат.заметки.– 1988.–Т.44.–№ 1.– С. 152–163.

[85] Данилов В.Г. Глобальные формулы для решений квазилинейных параболических уравнений с малым параметром

и некорректность. // Мат.заметки.– 1989.– Т.46.–№ 1.– С. 129–140.

[86] Данилов В.Г., Субычев П.Ю. Точные однофазные и двухфазные решения полулинейных параболических уравнений.// Преринт МИ им. Стеклова.,АН СССР, 1988.–46 с.

[87] Данилов В.Г. Применение асимптотических методов в задачах тепломассопереноса. -Автореферат диссертации на соискание ученой степени д.ф-м.н. –М.,1989.–324 с.

[88] Данилов В.Г., Субычев П.Ю. Точные однофазные и двухфазные решения полулинейных параболических уравнений.// ТМФ.– 1991.–Т.89.–№1.–С.25–47.

[89] Дородницин В.А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком.// М. Препринт №57 ИПМ АН СССР.– 1979.–32 с.

[90] Дородницин В.А. об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником.// ЖВМ и МФ.–1982.–Т.22.–№6.–С.1393–1399.

[91] Дьяконов В.П. Mathematica в математических и научно-технических расчетах.– М. Солон–Пресс.2004.– 696 с.

[92] Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности зависящей от температуры. В книге "К 70летию А.Ф.Иоффе. М.:Изд.АН СССР.- 1950.-С.61-71.

[93] Зельдович Я.Б. К теории распространения пламени. // ЖФХ.–1948.–Т.22.–№1.–С.27–48.

[94] Зельдович Я.Б.Приближенная теория цепных реакций.// Кинетика и катализ.–1961.–№2.–С.305-314.

[95] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.В., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва.– М.:Наука.–1980.– 478 с.

[96] Змитриенко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте.// Препринт.ИПМ АН СССР.– 1979.– № 103.–67 с.

[97] Ито К, .Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. –М.: Мир, 1968.–300с.

[98] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения.– М.:Физматлит,2001.–560.

[99] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения.– М.:Международная программа образования,1996.–496.

[100] Карасев М.В., Маслов В.П. Квазиклассические солитонные решения уравнения Хартри. //Теор. и мат. физика.– 1979.–Т.40.–№2.–С.235–244.

[101] Каладжаро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны.Пер. с англ. Под ред. В. Е. Захарова.М.:Мир,1985.–472с.

[102] Калашников А.С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.// ЖВМ и МФ.- 1974.- Т.14.-№.4.- С.891-905.

[103] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.:Наука, 1985.–520 с.

[104] Колмогоров А.Н., Фомин С.В, Элементы теории функций и функционального анализа.М.:Наука,1968.– 496 с.

[105] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение в одной биологической проблеме.//Белютень МГУ.сек.А.–1937.– Т.1.–№6.– С.1-25.

[106] Колокольцов В.Н., Маслов В.П. Задача Коши для однородного уравнения Беллмана.// Докл. АН СССР.– 1987.–Т.296–№4.–С.796–800.

[107] Князева Е.Н., Курдюмов С.П. основания синергетики.Режимы с обостением, самоорганизация,темпомиры-СПб.:Алетейя,2005.– 414с.

[108] Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. – М.: Наука, 1977. – 399 с.

[109] Кринский В.И., Михайлов А. С.Автоволны. серия Физика.–М.:Изд.Знание, 1984.– № 10.– с.64.

[110] Курдюмов С.П. Режимы с обострением: эволюция идей. Под. ред. Г.Г.Малинецкого. –2-е изд. испр. и доп.– М.:ФИЗМАТЛИТ, 2006– 312 с.

[111] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика.т.6., Гидродинамика.– М.:Наука,1986.– 300с.

[112] Ладыженская О.А., Соллоников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.Наука, 1967.– 736 с.

[113] Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Пер.с англ. М.:ИЛ,1970.–300с.

[114] Людвиг Г., Хейль М. Теория пограничного слоя с диссипацией и ионизацией., пер. с анг., Проблемы механики. 1978.,№4.-148 с.

[115] Лыков А.В.,Берковский Б.М. Конвекция и тепловые волны.М.:Энергия,1974.–300с.

[116] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.–М.:Мир,1983.– 400 с.

[117] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование технологических процессов изготовления БИС.МИЭМ.– М.: ВИНИТИ, 1984.–132 с.

[118] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция

диссипативных структур) С добавлением Н.А.Колобова, М.:Наука,1987.–352 с.

[119] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Асимптотическое решение задачи течения пристенной струи ньютоновской и неньютоновской жидкости вдоль шероховатой поверхности.// Четвертая международная конференция по пограничным и внутренним слоям. BAIL IV, Новосибирск, 1986.–с.86.

[120] Маслов В.П., Омельянов Г.А. Об условиях типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн.// Сиб.мат.жур.– 1983.–т.24.–№ 5.–с.50–64.

[121] Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.:Наука,1976.– 140 с.

[122] Матвеев В.Б., Салле М.А. Darboux Transformation and Solutions. Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer–Varlag, New-York, 1991.–210 с.

[123] Маслов В.П. Три алгебры связанные с негладкими решениями квазилинейных гиперболических уравнений.// Успехи математических наук.–1980.–Т.35.–С.150–180.

[124] Мартинсон Л.К. Локализованные тепловые структуры в среде с объемным поглащением тепла.// ПМТФ.– 1981.– № 2.– С.70-73.

[125] Мартинсон Л.К. Исследование математической модели

процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглащением. с.279–309. Математическое моделирование. //Процессы в нелинейных средах. Под редакцией Самарского А.А., Галактионова В.А., Курдюмова С.П. Сборник статей. М.:Наука,1986.– 312с.

[126] Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности.//ЖВМ и МФ.– 1972.– № 12.– С.1048–1053.

[127] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики.– М.:Изд. МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2002.– 376с.

[128] Моисеенков В.Б. Гиперболическое решение в среде со слабой дисперсией. //Укр.мат.жур.– 1978.–Т.30.–№ 2.–С.254–262.

[129] Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.:Наука,1981.–399с.

[130] Олейник О.А. Математические задачи теории пограничного слоя.//УМН.–1968.–Т.23.–№3.–С.3–65.

[131] Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-Линь Задачи Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации.-// Изв.АН СССР.сер.мат.–1958.–Т.22.–№5.–С.667–704.

[132] Охоцимский Д.Е., Рясин В.А.,Ченцов Н.Н. Оптималь-

ная стратегия при корректировании. //Докл.АН СССР.– 1967.–Т.175.–№ 1.–С.47-50.

[133] Павлов К.Б. Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглащением тепла.// Жур.ПМ ТФ.– 1973.–№ 5.–С.96–101.

[134] Павлов К.Б., Романов А.С. Об изменении области локализации возмущений в процессах нелинейного переноса.// Изв.АН СССР. Механ. жидкости и газа.– 1980.–№ 6.–С.57-62.

[135] Полянин А.Д., Журов А.И., Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики.// Докл.АН СССР.–1998.– Т.360.–№ 5.–С.640- 644.

[136] Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А.. Справочник по точным решениям тепло и массопереноса.– М.:Факториал,1998.– 386 с.

[137] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики (Учебная физико-математическая литература)– М.:Физматлит, 2005.–448.

[138] Похожаев С.И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами.// Функц. Анализ и его прилож.– 1967.–Т.1.– № 3.–С.66-73.

[139] В.В.Пухначев Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений. //Док. АН СССР.– 1987.– Т.294.–№ 3.–С.535-538.

[140] Рудных Г.А., Семенов Э.И. Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии.// Сиб. Матем. жур.2000.–Т.41.–С.1141–1166.

[141] Развитие исследований по теории фильтрации в СССР.- М.:Наука, 1969.

[142] Самарский А.А. Теория разностных схем.– М.:Наука,1977.–655с.

[143] Самарский А.А., Курдюмов С.П., Волосевич П.П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью. // ЖВМ и МФ.– 1965.–Т.29.–№ 6.–С.199-217.

[144] Самарский А.А., Змитриенко Г.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.И. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. //Докл. АН СССР.–1976.–Т.227.– №.2.– С.321-324.

[145] Самарский А.А., Змитриенко Г.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.И. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте. //Препринт ИПМ АН СССР.–1979.– №67.

[146] Самарский А.А. Численные методы решения многомерных задач механики и физики.//ЖВМ и МФ.–1980.–Т. 20.–№ 6.–С.1418-1428.

[147] Самарский А.А.,Змитриенко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.И. Эффект метастабильной локализации теп-

ла в среде с нелинейной теплопроводностью.//Докл. АН СССР.-1975.- Т.223.- № 6.- С.1244-1347.

[148] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.И. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений., М.:Наука,1987.–480с.

[149] Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике пер.с англ. М.:Сов. радио,1977.–368с. Scot A. Active and Nonlinear Wave Propagation Media in Electronics, Wiley Interscience, New York.– 1970.

[150] Солитоны. Редакторы Р.Буллаф, Ф.Кодри. перевод с англ. Б.А.Дубровина, И.М.Кричевер, под ред. С.П.Новикова. М.:Мир,1983.–408с.

[151] Семечкин А.Е. Системный анализ и схемотехника.–М.:SVS-Аргус,2005.–536 с.

[152] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. Под редакцией Н.Н. Красовского. //Уральское отделение АН СССР., Институт матем. и механики. М.:Наука,1991.–216 с.

[153] Тараненко С.Н., Покровский Л.Д. Об условиях пространственной локализации решений нелинейного уравнения теплопроводности. //ЖВМ и МФ.-1982.- № 3.- С.747-751. Taranenko S.N., Pokrovskii L.D. Conditions of spatial localization for solutions of nonlinear heat equation. Zh.Vychsl.Mat.i Mat.Fiz.–1982.–Vol.22.–No.3.–P.747-751.

[154] Теркот Д., Шуберт Дж.Геодинамика.,Т.2.–М.:Мир,1975.320с.

[155] Толубинский Е.В. Теория процессов переноса. Киев.:Наукова думка,1969.–375 с.

[156] под редакцией Треногина В.А., Юдовича В.И., Келлер Дж.Б., Антман С. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения . М.:Мир,1974.– 255 с.

[157] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.– 720 с.

[158] Хаметов В.М. Асимптотика решений задачи Коши для линейного параболического уравнения второго порядка с малой дисперсией..// Матем.заметки.– 2000.– Т.68.– № 6.– С.917-934.

[159] Черноусько Ф.Л. Автомодельные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений.// ПММ.–1971.–Т.35.–№ 2.–С.333-342 Engl. tran. in J.Appl.Math. and Mech.

[160] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. –М.:Наука,1978.–352 с.

[161] Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска.– М.:Наука,1978.–272 с.

[162] Чумерина Е.С. Точные решения уравнения Гамильтона-Якоби -Беллмана в задаче управления движением мате-

матического маятника, находящегося под воздействием пуассоновских и гауссовских случайных возмущений.// М.:МГУ им.Ломоносова, Сборник статей молодых ученых фак. ВМ и К, 2005.– №2.– С.96-107.

[163] Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. .пер.с анг. Новосибирск.:Тамара Рожковская, 2003.– 562 с.

[164] Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы.– М.:Мир,1974.

[165] Acrivos A., Shah V.J., Peterson E.E. Momentum and heat Transfer in laminar boundary- layer of non-newtonian fluids past external surfase.// A.I.ch.E.J.–1960.–Vol.6.–No.2.

[166] Ablowitz M.J., Zeppetella A. Explicit Solutions of Fisher"s equation for Special Wave Speed.// Bellitin of Math.Biology. –1979.–Vol.41.–P.835-840.

[167] Aronson D.G., Weinberger H.F. Nolinear diffusion in population genetics. Ed. J.A. Goldstein. //Lecture Notes to Mathematics.– N.Y.,Springer.–Vol. 449.– 1975.

[168] Aronson D.G. The porous medium equation, in "Nomlinear Diffusion problems".(A. Fasano and M. Primicerio , Eds.) P.1–46, Lecture Notes in Mathematics,// Springer-Verlad, Berlin, 1986.–P.1224,

[169] Aronson D.G., Weinberger H.F. Nonlinear diffusion in population genetics combustion, and nerve pulse propagation, in "Partial Differential Equations and Retated

Topics"(Goldstein J.A. Ed.) p.5–49,// Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1975.–P.446

[170] Avdoshin S.M., Belov V.V., Maslov V.P., Chebotarev A.M. Design of Computational Media: Mathematical Aspects. in Mathematical Aspects of Computer Engineering.– M.:MIR, Edited by V.P. Maslov, K.A. Volosov.1988,

[171] Bather J.,Chernjff H. Sequential in the cjntrol of a space-ship (finite fuel)// J.Appl. Probabil.–1967.–V.4.-N.3.– C.548-604.

[172] Bensoussan A.,Lions J.-L. Nouvelle formulation de problemes de controle impulsionnet et applications. //.C.r.Acad. .Sci. Paris. Ser. A.–1973.– Vol.276.–No.18.–P.1189-1192.

[173] BensoussanA. Perturbation Methods in Optimal Control Chichester: Wiley.– 1988.– 573 p.

[174] BensoussanA., Lions J.–L. Controle impulsionnel et inequations qasi-variationnelles devolution.,//C.r.Acad.Sci.Paris.–Ser.A.-1973.–Vol.276.–No.20,P.1333-1338.

[175] Berkovsky B.M., Bashtovoi V.G.The finite velocity of heat propagation from the view- point of the kinetic theory. //Intern. J. Head and Mass Transfer.–1977.–Vol.20.–No.6.–P.621-626.

[176] Boussinesq J. Nheorie de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propadeant dans un Canal rectangulaire Comptes Rendus.–1871.–Vol.72.–P.755-759.

[177] Bratus A.S., Dimenberg M.F. Iourtchenko D.V., Noori M. Hybrid solution method for Dynamic programming equations for MDOF stochastic systems. //Dynamics and Control.– 2000.–No.10.–P.107-116.

[178] Bublic V.V. The exac solutions of equations for dynamics of viscous heat conducting gas. //Intern. Conf. Meth. Aerophys. Reseach. Proc. Pt.1.–Novosibirsk.– 1998.–P.41-43.

[179] Bratus A.S., Volosov K.A. Regularization of the Hamilton-Jacobi- Bellman equation with nonlinearity of the module type in optimal control problems.-// Soveremennaya Matematika I Ee Prilozheniya, Contemporary Mathematics and Its Applications v9 Suzdal Conference –3.-2003.–P.50-59.

[180] Bratus A.S., Volosov K.A. Regularization of the Hamilton–Jacobi– Bellman equation with nonlinearity of the module type in optimal control problems.–//Journal of Mathematical Sciences.Publisher cosultarts Bureau. An Inprint of Springer Verlag New-York LLG.- april 2005 -Vol.126.No.6.-P.1542-1552. `http://dx.doi.org/10.1007/s10958-005-0042-1`, `http://www.springeronline.com/authors` ISSN 1072-3374 (paper) 1573-8795 (Online) DoI 10.1007/s10958-005-0042.

[181] Casal P. Surleuseuble des solutions de l'equatijn de la couche limite.-//J.de Mecanique.– 1972.–Vol.1.– № 3.–P.459–469.

[182] Danilov V.G. Asymptotical solutions describing localized head structures in plasma. Nonlinear and turbulent processes

in physics., Proc. of the III Int. workshop, Kiev,Aptil 1987// Kiev.:Naukova Dumka, 1988.–Vol2.–P.124–127,

[183] Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. Mathematical Models in Computer-component Technology: Asymptotle Methods of Solution. in Mathematical Aspects of Computer Engineering. Edited by V.P. Maslov, K.A. Volosov.M.:MIR,1988.–P.238–383.

[184] Danilov V.G.,Maslov V.P. and Volosov K.A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluver Academic publishers.Dordrecht/Boston/London 1995.–316 p.

[185] Danilov V.G., Volosov K.A. Asimptotic solutions in mathematical models of nonlinear heat transfer. Proceedings contributed papers.// Int. Conf. on Plasma Phys.Kiev, 1987.–Vol.4.–P. 332-335

[186] Dimentberg M.F. Statistical dynamics of nonlinear and time-varying systems. NY., John Wiley & Sons Inc., 1988.–609 p.

[187] Dimentberg M.F. Bratus A.S., Iourtchenko D.V. Optimal bounded control of steady- state random vibrations. //Probabilistic Engineering Mechanics. 2000.–No.15.–P.381-386.

[188] Dimentberg M.F. Bratus A.S., Iourtchenko D.V. Bounded control of random vibration:hybrid solution to HJB equations. // Mechanica. 2002.–No.37,–p.129–141.

[189] Englar H.P. Relation between traveling wave solutions

of quasi-liner parabolic equations.// Proc. Acad. Math. Soc.1985.-Vol.93.-No.2.-P.297-302.

[190] Gilding B.H., Kershner R.O. The characterization of reaction–convection– diffusion processes by traveling waves. Reprinted from Journal of Differentional Equations . All Rights Reserved by Academic Press. New-York and London. 1996.–Vol.124.–No.1, January 1, P.27–79.

[191] Grank J. The mathematical of diffusion Oxford. Clerendon Press.1956.

[192] Hopf E. The partial differential equation.//Comm. Pure Appl. Math.– 1950.–Vol.3.–P.201–230.

[193] Ibragimov N.H. CRC handbook of Lie Group to Differential Equations. Ed.Boca Raton:CRC Press, 1994.–Vol.1.–429 p.

[194] T.Kawahara, M.Tanaka Interaction of traveling fronts on exact solution of nonlinear diffusion equations. //Phys lett.A 97 –1983.– P.311-330.

[195] Kershner R.O. Oncertain properties of generalized solutions of quasilinear degenerate parabolic equations,// Acta Math. Acad.Sci. Hungaricae.–1978.–Vol.32.–No.3.–P.301-330.

[196] Knerr B.F. The behaviour of the support of solution of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension. //Trans.Amer. Math. Soc.–1979.Vol.249.–No.2.–P.409-424.

[197] Larson D.A. Transient Bounds and Time- Asymptotic Behavior of Solutions to Nonlinear Equations. SIAM Appl.Math.–1978.–Vol.34.– No 1.–P.93-104.

[198] Murray J.Lectures on Nonlinear Differential Equations. Modelsin Biology.– Oxford.:Clarendon Press, 1977.– 227p.

[199] Newell A.C., Whithead, Finite bandwidth, finite amplitude convection,// J.Fluid Mech.– 1969.–Vol.38.–279-286 p.

[200] M.C. Nucci, P.A. Clarkson The nonclassical method is more general than the derect method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh– Nagumo equation.//(Phys.Lett.A.)–1992.–Vol.164.–P. 49-56,1992.

[201] Polyanin A.D. ,Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Eqnations. – Chapman & Hall/CPC,– 2004.–840 pp.

[202] Selforganig grtich: Autowaves and structures for form equilibrium. Ed. V. Krinsky.Sprinder–Verlag., 1984.-82 p.

[203] Vorob'ev E.M. Nonclassical and conditional symmetries. In CRC Handbook of Lie Group Analysis if Differential Equations.– CRC Press,– 1996.–Vol.3,p.291–328.

[204] Vorob'ev E.M. Symmetries of compatibility conditions for systems of differential equations.// Acta Applicandae Mathematicae.–1993.–Vol.26.–P.61– 86.