

На правах рукописи

**Семенов Евгений Сергеевич**

Цепочки Гюгонио-Маслова и особые вихревые  
решения системы уравнений мелкой воды

Специальность 01.01.03 — Математическая физика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор С. Ю. Доброхотов

Москва — 2005

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Цепочки Гюгонио-Маслова и особенности типа квадратного корня</b>	<b>22</b>
1.1 Цепочки Гюгонио—Маслова как необходимые условия существования особых вихревых решений . . . . .	23
1.2 Свойства сингулярной вихревой составляющей решения . .	27
1.3 Замыкание цепочки . . . . .	32
<b>2 Единственность особенности типа квадратного корня</b>	<b>34</b>
2.1 Вспомогательные утверждения . . . . .	34
2.2 Уравнение для функции $F$ с особенностью в морсовых координатах . . . . .	36
2.3 Модельные уравнения . . . . .	37
2.4 Возможные решения модельных уравнений . . . . .	40
2.5 Исходная система уравнений и особенности перечисленных типов . . . . .	45
<b>3 Анализ негладкой компоненты решения и возникновение условий Коши-Римана на траектории</b>	<b>51</b>
3.1 Негладкая (вихревая) компонента решения . . . . .	51
3.2 Особенность, “вмороженная” в поле скоростей . . . . .	54
3.3 Уравнение эйконала для функции $S$ . . . . .	54
3.4 Уравнение переноса для амплитуды и возникновение условий Коши-Римана . . . . .	57
3.5 Вычисление поправки $U^{(2)}$ . . . . .	59
3.6 Порядок остатка для негладкой составляющей решения . .	60
3.7 Закон сохранения для потенциального вихря и условия Коши-Римана . . . . .	60
3.8 Поправка к условиям Коши-Римана . . . . .	61

<b>4</b>	<b>Анализ гладкой составляющей решения</b>	<b>63</b>
4.1	Вывод цепочки Гюгонио-Маслова для гладкой составляющей, завершение доказательства теоремы 1 . . .	63
4.2	Цепочки Гюгонио-Маслова в новых комплексных переменных . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Интегрируемость оборванной цепочки: редукция к уравнению Хилла и одномерные гамильтоновы системы</b>	<b>72</b>
5.1	Новые зависимые переменные и интегралы оборванной цепочки . . . . .	73
5.2	Уравнение Ермакова и редукция к уравнению Хилла . . .	74
5.3	О влиянии устойчивости уравнения Хилла и наличия постоянной силы Кориолиса на траектории . . . . .	76
5.4	Критические режимы . . . . .	78
5.5	Критические режимы в случае $\beta = 0$ . . . . .	79
5.6	Влияние $\beta$ -эффекта и гамильтоновы системы в критических режимах . . . . .	81
5.7	Медленные траектории оборванной цепочки в случае, когда $\beta$ не является параметром возмущения . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Цепочки Гюгонио-Маслова для системы уравнений мелкой воды с учетом энергетического обмена</b>	<b>94</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>104</b>

# Введение

В 1980 году В.П. Маслов [28, 29] сформулировал гипотезу, согласно которой широкий класс квазилинейных гиперболических систем, включая гидродинамические уравнения, допускает лишь несколько типов решений с особенностями, обладающих следующими свойствами. Во-первых, структура особенности сохраняется в течение некоторого интервала времени (свойство структурной самоподобности); во-вторых, структура особенности не меняется при малых возмущениях (свойство структурной устойчивости). Такой выбор свойств соответствует наличию в уравнениях нелинейности: в случае линейных гиперболических систем структура любой особенности в начальных данных сохраняется для решения (по крайней мере в течение малого интервала времени). К указанным типам особых решений принадлежат ударные волны, “бесконечно узкие” солитоны и вихревые особые решения “типа корня квадратного из квадратичной формы.” Такие решения могут быть описаны формулой, аналогичной “нелинейным” (уиземовским) решениям и искаженным волнам Римана (см. [36])

$$w = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)F(S(x, t)), \quad (1)$$

где  $w$  – векторная (или скалярная) функция,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $F(\tau)$  – скалярная функция, гладкая вне  $\tau = 0$  и имеющая особенность при  $\tau = 0$ , а фаза  $S(x, t)$ , векторный (или скалярный) фон  $f(x, t)$  и амплитуда  $g(x, t)$  – гладкие функции. Особенность может соответствовать, например, разрыву первого рода (тогда мы имеем дело с ударными волнами), а может принадлежать классу  $C^1$ . Очевидно, особенности  $w(x, t)$  определяются нулями  $X(t)$  функции  $S(x, t)$ . Например, для ударных волн в одномерном ( $n = 1$ ) случае имеем  $F = \Theta(\tau)$ , где  $\Theta(\tau)$  функция Хевисайда ( $\Theta = 0$  при  $\tau < 0$  и 1 при  $\tau \geq 0$ ),  $S = x - X(t)$ . Для другого типа особенности по-прежнему  $S = x - X(t)$ , но  $F = \text{Sol}(\tau)$ , где  $\text{Sol}(\tau) = 0$  при  $\tau = 0$  и 1 при  $\tau = 0$ . В этом случае функция  $w$  описывает бесконечно узкий солитон на фоне  $u(x, t)$ . Решения такого вида возникают, например, как предельные решения уравнения Кортевега—де Фриза с дисперсией  $\epsilon^2$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  (см. [14, 30]).

Рассмотрим еще один пример в двумерном случае, который будет служить основным примером в этой работе. Пусть  $F = \tau^r$ , ( $0 < r < 1$ ), и для каждого  $t$  неотрицательная функция  $S$  обращается в нуль в единственной точке  ${}^t(x_1 = X_1(t), x_2 = X_2(t))$ . Тогда в общем случае функция  $S$  с точностью до слагаемых более высокого порядка представляет собой положительную квадратичную форму по переменным  $x$  с различными собственными значениями. Нулем функции  $S$  является точка  $x = X(t) = {}^t(X_1(t), X_2(t))$ ,двигающаяся вдоль траектории  $\Gamma = \{x = {}^t(X_1(t), X_2(t))\}$  (задающей особенность). В данном случае мы имеем слабую “точечную” особенность: сама функция  $w$  непрерывна и даже обращается в нуль в особой точке, но некоторые производные функции  $w$  не являются непрерывными. Конечно, можно рассматривать и другие функции  $F(t)$  с особенностями, обладающие похожими свойствами, например  $\tau \log \tau$ ,  $(const + \log \tau)^{-1}$ , а также различные их линейные комбинации.

Свойства “самоподобности и устойчивости” структуры означают следующее. Пусть решения имеют при некотором  $t_0$  вид (1) с заданной функцией  $F(\tau)$ . Тогда, во-первых, решение сохраняет вид (1) с той же функцией  $F(\tau)$  и при  $t > t_0$ , по крайней мере при достаточно малых  $t - t_0$ ; во-вторых, малые изменения начальных данных  $S(x, t_0)$ ,  $f(x, t_0)$ ,  $g(x, t_0)$  и коэффициентов исходного уравнения не влияет на структуру особенности функции  $w$ , определяемой функцией  $F$ . Гипотеза Маслова заключалась в том, что для многих квазилинейных гиперболических уравнений, имеющих физический смысл, почти все возможные особенности с указанными свойствами имеют описанный в приведенных выше примерах вид. *Более того, в последнем примере возможна особенность только с  $F = \sqrt{\tau}$*  (см. [29, 22, 14]). И хотя соответствующее уравнение может иметь частные решения (например, радиально-симметричные, т.е. такие, для которых  $S \sim x_1^2 + x_2^2$ ), отличные от описанных выше, эти особые решения, по-видимому, пропадают при малых возмущениях. Доказательство этой гипотезы совсем не тривиально; в настоящей работе оно приведено для слабой точечной особенности системы уравнений мелкой воды. (По поводу другого типа особенностей см. [14].) Приведем лишь некоторые *алгебраические* соображения, обосновывающие существование особенностей упомянутых типов.

Поскольку исходная система нелинейна, необходимо определить произведения и степени компонентов функции (1). Функции вида  $f(x, t) + g(x, t)F(S(x, t))$ , где  $F = \Theta(\tau)$ ,  $F = \text{Sol}(\tau)$  и  $F = \sqrt{\tau}$ , обладают весьма важным свойством: каждая из них порождает алгебру функций с особенностью над кольцом гладких функций, имеющую

только две образующих: 1 и  $F$ . Это свойство справедливо в силу того, что  $F^2 = F$  в первых двух случаях и  $F^2(S) = G(x, t)$  есть гладкая функция в третьем случае. Для того чтобы изучить свойства решения (1), его следует подставить в исходную систему, сгруппировать слагаемые при различных типах особенностей, а затем и регулярные (гладкие) слагаемые и приравнять их к нулю. При этом исходная система распадается на две системы с функциями  $S, f, g$  (которые, вообще говоря, подлежат определению). Если рассматривать решения (1), основываясь на алгебрах с более чем двумя генераторами (например, если  $F = \tau^{1/3}$ , образующие суть  $1, \tau^{1/3}, \tau^{2/3}$ ), то исходная система будет распадаться на три системы, являющимися *переопределенными*, и т. д. Это лишь эвристическое объяснение: в случае бесконечного числа образующих не очевидно, как можно корректно обосновать группировку слагаемых, соответствующих различным особенностям, и дальнейшее разложение исходной системы.

## Цепочки Гюгонио—Маслова и их замыкание

Другое очень важное наблюдение, сделанное в [29], заключалось в том, что, независимо от физической природы рассматриваемого явления, решения с особенностью (1) и их описания очень близки с математической точки зрения. Одной из таких общих характеристик являются новые бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (цепочки), определяющие динамику решений. Хотя решения (1) имеют особенности, они определяются гладкими скалярными и векторными функциями  $S(x, t), f(x, t), g(x, t)$ . Следовательно, с этими функциями, а также и с самими решениями (1), можно связать как множество коэффициентов их рядов Тейлора в (особых) точках  $x = X(t)$ , так и сами траектории  $x = X(t)$ . Указанные цепочки возникают как необходимые условия существования решения (1). В случае ударных волн первое уравнение в такой цепочке совпадает с хорошо известным условием Гюгонио, а последующие уравнения могут рассматриваться как поправки к первому уравнению. Несмотря на то что цепочки для особенностей других типов могут иметь иной вид и, вероятно, имеют другой физический смысл, в [29] было установлено, что их математическая сущность оказывается одинаковой. Такие цепочки называются *цепочками Гюгонио—Маслова*.

На цепочки Гюгонио—Маслова в нелинейных задачах можно также посмотреть с другой точки зрения. Решения вида (1) являются обобщенными решениями, и, следовательно, методы исследования таких решений связаны с построением алгебр распределений и их

приложениями в теории нелинейных уравнений (см. [39, 21], а также [14], где эти уравнения рассматриваются достаточно подробно). Понятно, что структура обобщенных решений может зависеть от выбора соответствующей обобщенной функции. При этом оказывается, что одних лишь математических соображений недостаточно для того, чтобы указанный выбор был единственным. Обычно введение того или иного распределения в нелинейных задачах основывается на предшествующей регуляризации обобщенной функции, зависящей от некоторого малого или большого параметра. Вообще говоря, конечный результат зависит также и от используемой регуляризации, что “нехорошо” с точки зрения возможных физических приложений. С другой стороны, в физических задачах гиперболические системы не существуют сами по себе; как правило, они возникают в качестве некоторого приближения уравнений с малой вязкостью или дисперсией. Таким образом, гиперболические системы следует рассматривать как пределы таких “прообразов”, их решения должны быть пределами решений “прообразов”, и решения “предельной” гиперболической системы (так же как и соответствующий малый параметр) должны быть согласованы с исходными уравнениями. Грубо говоря, это всегда (и автоматически) выполняется для регулярных решений гиперболических систем. Однако выяснение того факта, выполняются ли указанные условия для решений с особенностями, представляет собой серьезную проблему. Часто оказывается весьма сложно или даже невозможно изучить описанное соответствие. Более того, во многих реальных физических ситуациях соответствующий «прообраз» с вязкостью или дисперсией принимается не всеми специалистами в качестве подходящей модели. Тем не менее, существуют некоторые характеристики обобщенных решений, инвариантные относительно выбора способа регуляризации обобщенных функций. *Цепочки Гюгонио—Маслова как раз и являются такого рода характеристиками, поскольку они возникают как необходимые условия.*

Цепочки для ударных волн и решений уравнений газодинамики были изучены много лет назад (см. [28, 30, 42], а также [52, 13]). Систематическое изучение цепочек Гюгонио—Маслова для особых вихревых решений было начато сравнительно недавно в работах [22, 10].

Цепочки Гюгонио—Маслова незамкнуты, поскольку первые  $N$  уравнений содержат более  $N$  неизвестных. Поэтому положение особенности, вообще говоря, нельзя однозначно определить из таких систем. Замыкание такой системы возможно при помощи использования глобальных свойств решений или некоторых дополнительных предположений [28, 30] (см. также [47]), например, предположения о малости негладкой амплитуды. Незамкнутые

цепочки уравнений возникают в различных задачах статистической физики и механики. Хорошо известны цепочки Боголюбова—Борна—Грина—Кирквуда—Ивона, цепочки моментов, возникающие в статистической гидромеханике (см., например, [11, 25]). Проблема замыкания этих цепочек является одной из наиболее интересных и трудных в математической физике. Напомним, что после замыкания ББГКИ-цепочек получается кинетическое уравнение Больцмана.

Для цепочек типа Гюгонио, возникающих при описании ударных волн для простейшего нелинейного уравнения (уравнения Хопфа для простой волны) в работе [47] был предложен метод замыкания, основанный на приравнивании лишних компонент решения (с большими номерами) к нулю. Похожая процедура замыкания использовалась в статистической механике и гидродинамике (см., например, [25, 11]). Цель настоящей работы состоит в использовании цепочек типа Гюгонио, которые обрываются в духе работы [47], для описания траекторий вихревых особенностей решений системы (2) и в применении этого подхода к исследованию задачи о траекториях мезомасштабных вихрей в атмосфере и океане.

Ясно, что системы уравнений, полученные обрывом цепочек Гюгонио—Маслова, не могут адекватно описывать распространение особенности на *больших* интервалах времени, так как обрыв цепочки неизбежно влечет за собой локализацию задачи: эволюция особенности определяется только тем, что происходило вблизи данного момента времени. Однако если рассматриваются не слишком большие интервалы времени и если оборванная цепочка обладает некоторым свойством устойчивости, то использование такой оборванной цепочки представляется вполне оправданным. С другой стороны, например, в задаче о траектории глаза тайфуна невозможно достаточно достоверно измерить поле скорости  $u$  и геопотенциала  $\eta$  в начальный момент времени для того, чтобы получить корректную задачу Коши для соответствующей системы уравнений в частных производных. Однако траектория глаза тайфуна может быть при этом измерена достаточно точно, например при помощи спутников, и последующая траектория может быть предсказана на основании известной предыстории посредством решения задачи экстраполяции. С этой целью можно в свою очередь пользоваться формулами для траекторий вихря, полученными интегрированием (оборванных) цепочек. Таким образом, локализация оказывается вполне обоснованной с точки зрения физической постановки задачи.



## Уравнение мелкой воды и мезомасштабные вихри

В статье [29] содержится также идея, согласно которой решения (1) могут применяться для описания некоторых природных явлений: волн цунами в океане (случай «узких солитонов») и мезомасштабных (или «крупных») вихрей в атмосфере и океане (тайфунов, ураганов, рингов и т.д., что соответствует случаю особенности типа квадратного корня). Таким образом, оборванные “вихревые” цепочки Гюгонио—Маслова могут с определенной точностью описывать динамику мезомасштабных вихрей.

Система уравнений мелкой воды также хорошо известна как простейший пример двумерного бездисперсионного приближения с нулевой вязкостью в моделировании различных эволюционных физических процессов, включая распространение мезомасштабных вихрей в атмосфере и океане [20, 34, 18]. Такая система с переменной силой Кориолиса в так называемом  $\beta$ -плоскостном приближении имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\nabla, \eta \mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \omega \mathbf{T} \mathbf{u} + \nabla \eta = 0. \quad (2)$$

где  $x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ , а неизвестными являются двумерный вектор  $\mathbf{u}(x, t) = {}^t(\mathbf{u}_1(x, t), \mathbf{u}_2(x, t))$  и функция  $\eta(x, t)$  – геопотенциал атмосферы (или уровень свободной поверхности в теории волн на воде),  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\nabla = {}^t(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ ,  $\omega = \tilde{\omega} + \beta x_2$  есть удвоенная частота Кориолиса на  $\beta$ -плоскости, наконец  $\tilde{\omega}$ ,  $\beta$  суть параметры (физические константы),  $\beta$  предполагается достаточно малой. Обозначим также через  $(,)$  скалярное произведение; индекс  $t$  слева вверху будет обозначать транспонирование матриц и векторов.

Система (2) обладает рядом важных свойств, таких как наличие закона сохранения, возможность гамильтонова представления и т. д. Одним из таких свойств является существование лагранжева инварианта — так называемого *потенциального вихря* или *инварианта Россби*

$$\Pi = \frac{\mathbf{u}_{2x_1} - \mathbf{u}_{1x_2} + \omega}{\eta}. \quad (3)$$

Свойство инвариантности означает, что  $\Pi$  остается неизменным вдоль траекторий поля вектора скорости  $\mathbf{u}$ :  $\Pi_t + (\mathbf{u}, \nabla) \Pi = 0$ .

В этой работе изучаются вихревые решения этой системы, имеющие особенность типа квадратного корня, имея прежде всего в виду возможные приложения в физике атмосферы и океана. Отметим, что в планы исследования не входит изучение взаимодействия вихрей, а также

вопроса их возникновения и исчезновения (изучение только систем без вязкости и дисперсии недостаточно для исследования этого вопроса). Задача может быть коротко сформулирована следующим образом: *если система имеет уединенный вихрь (1) со специальными, достаточно разумными физическими свойствами, то что можно сказать о его динамике, траектории и форме вблизи своего центра?*

Приведем теперь соображения Маслова относительно связи слабых особенностей уравнений мелкой воды (2) с моделями движения мезомасштабных вихрей. Если мы предположим, что решения системы (2) описывают крупномасштабные явления в атмосфере или океане (например распространение тайфунов, ураганов, рингов) и мезомасштабные вихри отвечают решениям, имеющим в некоторой точке слабую точечную особенность и обладающим свойствами структурной устойчивости и самоподобности, то в силу единственности структуры такой особенности, траектория центра вихря («глаза» тайфуна) должна быть близка к траектории центра слабой точечной особенности типа квадратного корня. Отметим еще, что траектория центра вихря и геопотенциал  $\eta$ , соответствующие природному мезомасштабному вихрю, должны обладать следующими свойствами, разумными с физической точки зрения. Траектории не имеют слишком больших «дрожаний и петель», а  $\eta$  есть положительная функция, достаточно медленно изменяющаяся вдоль траектории. Эта дополнительная информация играет важную роль при изучении решений (1) с точки зрения их пригодности к описанию динамики мезомасштабных вихрей.

## **Интегрируемость оборванных вихревых цепочек Гюгонио—Маслова для уравнений мелкой воды**

В настоящей работе показано, что после ряда преобразований оборванная цепочка для вихревых решений системы (2) сводится к сложной системе, содержащей 17 обыкновенных дифференциальных уравнений. Интересным и довольно неожиданным оказывается тот факт, что интегрирование этих 17 уравнений в случае постоянных частот Кориолиса ( $\beta = 0$ ) приводит в точности к линейному уравнению Хилла, хорошо известному в теории колебаний, небесной механике, теории солитонов и т.д.

Наличие  $\beta$ -эффекта приводит к появлению дополнительных слагаемых порядка  $\beta$  в соответствующей системе 17-ти обыкновенных дифференциальных уравнений. Если считать  $\beta$  малым параметром, то наблюдается медленная («адиабатическая») эволюция постоянных

интегрирования в невозмущенной оборванной цепочке. Отметим еще одно интересное и неожиданное явление: при наличии упомянутых выше разумных предположений о траектории центра вихря и геопотенциале усредненные уравнения оказываются гамильтоновыми системами с одной степенью свободы, интегрируемыми в квадратурах и аналогичными *уравнению физического маятника*. В случае, когда параметр  $\beta$  нельзя считать параметром возмущения, у указанной системы 17-ти обыкновенных дифференциальных уравнений удастся найти семейство двумерных многообразий параметров цепочки, в окрестности которых могут существовать разумные с точки зрения приложений медленные траектории.

В конечном счете мы имеем дело с семейством решений, зависящих от некоторых параметров. Запишем эти параметры как  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2 \dots)$ . Предположим, что мы построили семейство таких решений и траектория движения описывается некоторой функцией  $X(t, \Gamma) = (X_1(t, \Gamma), X_2(t, \Gamma))$ . Тогда, исходя из предположения о том, что функции (1) описывают мезомасштабные вихри, и зная траекторию центра вихря (глаза тайфуна) при  $t \in [0, T]$ , мы можем попытаться предсказать последующее движение центра следующим образом. Пусть  $\Gamma^N = (x_1 = X_1^N(t), x_3 = X_2^N(t)), t \in [t_1, t_2]$ , — траектория центра настоящего природного вихря. Выберем параметры  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2 \dots)$  из того условия, что траектории  $\Gamma$  и  $\Gamma^N$  должны быть близки на интервале  $[0, T_0]$ , например, в смысле минимизации среднего значения квадратного корня из разности между теоретической и наблюдаемой траекториями вихря. Тогда, если нам известны параметры  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ , мы можем однозначно определить траекторию  $\Gamma$  при  $t > t_2$ . Таким образом, приходим к классической задаче оптимизации.

В связи с соображениями, высказанными в этом пункте, еще раз отметим роль единственности структуры типа квадратного корня. Если бы утверждение относительно единственности отсутствовало, другой выбор функции  $F$  в (1) (например,  $F = \tau^{1/3}$  или  $\tau \log \tau$  и т.д.) мог бы привести к совершенно другим формулам для возможных траекторий, скоростей и пр. Таким образом, можно сказать, что формулы для траекторий мезомасштабных вихрей, скоростей, геопотенциалов и т.д., которые получены в этой работе, являются *необходимым условием* (хотя, конечно, они получаются с помощью довольно грубого приближения).

## Краткое содержание и структура работы

Изложение построено следующим образом. В главе 1 приводится постановка задачи и формулируются результаты, касающиеся структуры особого решения и вида цепочек Гюгонио-Маслова. Ищутся решения системы уравнений (2) вида:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \rho(x, t) + \tilde{\rho}(x, t), & \tilde{\rho}(x, t) &= R(x, t)F(S(x, t)), \\ \mathbf{u}(x, t) &= u(x, t) + \tilde{u}(x, t), & \tilde{u}(x, t) &= U(x, t)F(S(x, t)), \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $t \in [0, T]$ ;  $\rho$ ,  $R$  и  $S$  гладкие скалярные функции,  $u = {}^t(v, w)$  и  $U = {}^t(U_1, U_2)$  гладкие двумерные вектор-функции. Предполагается, что функции удовлетворяют одним или несколькими из следующих условий

(i) для любого  $t$   $S(x, t) \geq 0$ , и равенство  $S(x, t) = 0$  выполняется в любой момент времени  $t \in [0, T]$  в единственной точке  $x = X(t) = {}^t(X_1(t), X_2(t))$ . Множество  $\Gamma = \{x = X(t), t \in [0, T]\}$  назовем *траекторией* особого решения (4) уравнений (2) на интервале времени  $[0, T]$ .

Функции  $S$ ,  $U$  и  $R$  находятся в общем положении, в том смысле, что

(ii) Матрица  $\mathbf{H}(t) = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\Gamma} = \text{Hess } S|_{\Gamma}$  вторых производных невырождена и, как следует из условия (i), положительна на  $\Gamma$ .

(iii) Собственные значения матрицы  $\text{Hess } S|_{\Gamma}$  различны (показано, что если существует решение (4), такое, что  $S(x, t)$  удовлетворяет сформулированному предположению при  $t = t_0$ , то это предположение выполняется также для любого  $t > t_0$ ).

(iv) разложение  $U$  и  $R$  по степеням  $(x - X(t))$  начинается с наименее возможных степеней. (Это предположение иногда можно опустить, но оно является естественным с точки зрения возможных приложений и, кроме того, позволяет упростить большинство рассуждений.)

(v) Функция  $F$  удовлетворяет следующим условиям:

(v-a) Функция  $F(\tau)$  непрерывна при  $\tau \geq 0$ ,  $F(0) = 0$ ;

(v-b)  $F(\tau)$  является гладкой при  $\tau > 0$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow +0} F'(\tau) = \infty$ .

Рассматриваются только те решения системы (2), для которых  $\eta$  является строго положительной (это следует из ее физического смысла). Пусть  $g_{ij}(t) = i!j!\partial^{i+j}g(x, t)/\partial x_1^i \partial x_2^j|_{\Gamma}$  для любой гладкой функции  $g(x, t)$ . Положим также  $\omega_0 = \omega|_{\Gamma}$  и  $\rho_0 = \eta|_{\Gamma}$ . Справедлива

**Теорема 1.** Пусть система (2) имеет решение (4), удовлетворяющее условиям (i)–(v). Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Без ограничения общности можно считать, что в (4)  $F = \sqrt{\tau}$ .

**2a.** Траектория  $X(t)$  вмерозжена в поле скоростей  $\mathbf{u}$  (а также в  $u$ ):

$$\dot{X}(t) = u(X(t), t) \equiv \mathbf{u}(X(t), t) \stackrel{\text{def}}{=} V(t) = {}^t(V_1(t), V_2(t)) \quad (5)$$

**2b.** С точностью до функций, обращающихся в ноль вместе со всеми своими производными на траектории  $\Gamma$ , функция  $S$  является решением уравнения эйконала (или Гамильтона-Якоби)

$$S_t + (u, \nabla S) = 0. \quad (6)$$

**2c.** Комплексные скорости  $u(x, t) = v(x, t) + iw(x, t)$  (и  $\mathbf{u}_1(x, t) + i\mathbf{u}_2(x, t)$ ) на траектории  $X(t)$  удовлетворяют условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial x_2}|_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} q(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}|_{\Gamma} = -\frac{\partial w}{\partial x_1}|_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} p(t) \quad (7)$$

$u$

$$\rho_{20}|_{\Gamma} = \rho_{02}|_{\Gamma} + \beta V_1/2, \quad \rho_{11}|_{\Gamma} = \beta V_2/2. \quad (8)$$

**2d.** Вторая поправка к условиям Коши-Римана имеет вид

$$(2\mathbf{H} - \text{tr}(\mathbf{H})\mathbf{I}) \begin{pmatrix} v_{20} + v_{02} + \frac{1}{10}(c\rho_{01} - \beta) \\ w_{20} + w_{02} - \frac{1}{10}c\rho_{10} \end{pmatrix} = \text{tr}(\mathbf{H}) \begin{pmatrix} v_{20} - v_{02} - w_{11} \\ w_{02} - w_{20} - v_{11} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

**2e.** “Потенциальный вихрь”  $\Pi$  сохраняется вдоль траектории  $\Gamma$ :

$$\Pi|_{\Gamma} = \frac{\omega_0 - 2p}{\rho_0} = c = \text{const.}$$

**2f.** Функции  $\tilde{\rho} = R\sqrt{S}$  и  $\tilde{u} = U\sqrt{S}$  определяются формулами

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} = \varphi\sqrt{S} \begin{pmatrix} \mathbf{T}P \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}S\sqrt{S} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0}\mathbf{T}(\nabla(\varphi\rho))^{(1)} \\ -\varphi c\rho_0(t) \end{pmatrix} + O(|x - X(t)|^4)$$

где гладкие функции  $S$ ,  $\varphi$  и вектор-функция  $P$  имеют вид

$$S = \frac{\rho_0(t)}{2}(x - X(t), \Pi(t)B\Pi^*(t)(x - X(t))) + O(|x - X(t)|^3),$$

$$P = \nabla S \equiv \rho_0(t)\Pi(t)B\Pi^*(t)(x - X(t)) + O(|x - X(t)|^2),$$

$$\Pi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ матрица поворота на угол}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t p(t)dt \equiv \theta_0 - \frac{1}{2} \int_0^t \text{rot}_3 u(X(t), t)dt,$$

$$\varphi = A + O(|x - X(t)|), \quad A = \text{const},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+b & 0 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}, \quad b, \quad \theta_0 \quad \text{и} \quad A \quad - \quad \text{вещественные константы,}$$

характеризующие начальную структуру вихревого решения,  $|b| < 1$ .

Интересен тот факт, что возникают условия Коши-Римана (7), а также “поправки” (9) к ним. Эти условия, как правило, не выполняются для произвольных траекторий поля скоростей, и, следовательно, они описывают влияние существования вихря на “гладкий фон”  $u(x, t)$ .

Цепочка Гюгонио-Маслова для особых решений вида (4) – бесконечная цепочка уравнений, связывающая коэффициенты в разложении функций фона  $u(x, t)$  и  $\rho(x, t)$  в ряд Тейлора по  $x$  в окрестности траектории  $X(t)$  с учетом соотношений (7) и (8). Для описания траекторий особенностей решений системы (2) цепочка замыкается в духе работы Ф.Прасада и Р.Равиндран<sup>1</sup>: слагаемые, содержащие коэффициенты полиномов третьего порядка в разложении  $\rho$  и  $u$  приравниваются к нулю. Это приводит к системе 17 обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих коэффициенты тейлора в разложении  $\rho$  и  $u$  до второго порядка включительно и включающих уравнения  $\dot{X} = V$ ,  $\dot{\omega}_0 = \beta V_2$ . Цепочка Гюгонио-Маслова приводится ниже (см. формулы (13)–(21)) в новых комплексных переменных.

В главе 2 доказывается пункт 1. Теоремы 1. Схема доказательства выглядит следующим образом. Прежде всего, удобно перейти к подвижной системе координат  $(x', t)$ , где  $x' = x - X(t)$ , и положим  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - V$ . Тогда система (2) записывается в виде (мы опускаем штрихи на новых переменных  $x$ )

$$\eta_t + (\nabla, \eta \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + \nabla \eta + \dot{V} - \omega \mathbf{T}(\mathbf{u} + V) = 0. \quad (10)$$

После подстановки решения вида (4) в уравнения (10), получаем уравнение вида

$$F'(\tau)A + F(\tau)B + F(\tau)F'(\tau)C + F^2(\tau)D + E = 0.$$

с гладкими векторными коэффициентами  $A, B, C, D$  и  $E$ . Здесь  $\tau = S(x, t)$ . Анализ этого уравнения приводит к следующему утверждению

**Лемма** (о модельных уравнениях). *Пусть выполнены условия (ii)–(iii), тогда справедливы следующие утверждения А. Существуют гладкие функции  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , зависящие от  $(x, t)$  и такие, что  $F$  удовлетворяет уравнению Риккати*

$$\alpha(x, t)F'(\tau) + \beta(x, t)F^2(\tau) + \gamma(x, t)F(\tau) + \delta(x, t) = 0,$$

где производные по  $x$  функции  $\alpha$  не равны нулю при  $x = 0$ .

---

<sup>1</sup>Ravindran R., Prasad P. A new theory of shock dynamics. Part I (II) // Appl. Math. Lett. - 1990. - 3, № 3. - С 77-79

**В.** Функция  $F$  удовлетворяет одному из следующих трех “модельных” уравнений:

- квадратному уравнению:  $a(x, t)F^2(\tau) + b(x, t)F(\tau) + c(x, t) = 0$ ,
- линейному дифференциальному уравнению:  $a(x, t)F'(\tau) + b(x, t)F(\tau) + c(x, t) = 0$ ,
- или кубическому уравнению:  $a(x, t)F^3(\tau) + b(x, t)F^2(\tau) + c(x, t)F(\tau) + d(x, t) = 0$ . Здесь  $a, b, c, d$  также гладкие функции, некоторые производные которых по  $x$ -не равны нулю при  $x = 0$ .

Анализ модельных уравнений приводит к следующему утверждению.

**Лемма.** Без ограничения общности можно считать, что существует всего четыре возможные функции  $F$  в (4): (F1)  $F = \tau^\kappa$ , (F2)  $F = \tau \log \tau$ , (F3)  $F = \tau^{1/3} + \sigma \tau^{2/3+n}$ , (F4)  $F = \tau^{2/3} + \sigma \tau^{4/3+n}$ , где  $0 < \kappa < 1$ ,  $\sigma = \pm 1$  или  $0$ ,  $n \geq 0$  целое число. Квадратное уравнение имеет лишь решение типа (F1) с  $\kappa = 1/2$ ; линейное дифференциальное уравнение имеет решения типа (F1) и (F2); кубическое уравнение имеет решения (F1) с  $\kappa = 1/2$ , (F3) и (F4).

Далее решения вида (4) с функциями  $F$  из (F1)–(F4) подставляются в уравнения (10). При  $\kappa \neq 1/2$  получившиеся системы уравнений оказываются несовместны. Таким образом справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** Решений с особенностью вида (F1)–(F4) при  $\kappa \neq 1/2$  не существует.

Из перечисленных лемм следует утверждение пункта 1. Теоремы 1.

В главе 3 изучается негладкая часть решения и доказываются пункты **2а.–2ф.** Теоремы 1. После подстановки решения вида (4) с  $F = \sqrt{\tau}$  в (10) уравнения для  $(u, \rho)$  и  $(\tilde{u}, \tilde{\rho})$  распадаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u + \tilde{\rho} \tilde{u}) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u + \nabla \rho + \dot{V} - \omega \mathbf{T}(u + V) + (\tilde{u}, \nabla) \tilde{u} &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} u + \rho \tilde{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (u, \nabla) \tilde{u} + (\tilde{u}, \nabla) u + \nabla \tilde{\rho} - \omega \mathbf{T} \tilde{u} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Показывается, что хотя система (12) линейная относительно  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\rho}$ , нельзя напрямую применить методы разложений по гладкости или лучевых разложений<sup>2</sup> для задачи Коши  $\tilde{\rho}|_{t=0} = R(x, 0)\sqrt{S(x, 0)}, \tilde{u}|_{t=0} = U(x, 0)\sqrt{S(x, 0)}$ . По существу, используются идеи, восходящие к этим методам, однако имеются некоторые существенные отличия,

---

<sup>2</sup>Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Пространственно-временной лучевой метод. - Ленинград: ЛГУ, 1985

существенные с точки зрения лучевого метода. Прежде всего, использование разложения по гладкости не гарантирует структуры (4) решения, даже если эта структура имеет место при  $t = 0$ . Кроме того возникает ситуация, известной в теории гиперболических уравнений как “негладкая смена кратности характеристик”: собственные частоты  $\lambda_0 = S_t + (u, \nabla)S$ ,  $\lambda_{\pm} = |S_t + (u, \nabla)S| \pm \rho|\nabla S|$ , соответствующие гидродинамической и акустической моде одновременно обращаются в ноль на траектории центра особенности  $X(t)$ . Таким образом, рассматривается вся система (11)–(12) и изучаются ее свойства. С первого взгляда может показаться, что система (11)–(12) недоопределена: имеются шесть уравнений относительно семи неизвестных функций  $v$ ,  $w$ ,  $\rho$  и  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $R$ ,  $S$ . Показывается, что заданные свойства функции  $S$  и гладкость всех названных функций фактически приводит к возникновению уравнения эйконала для фазы  $S$  и система замыкается.

Процедура аналитических вычислений состоит в разложении всех функций в ряды Тейлора, подстановки этих рядов в систему (12) и приравнивании коэффициентов при соответствующих степенях  $x$ . Указанная процедура приводит к некоторым равенствам и уравнениям для коэффициентов в рядах Тейлора  $S^{(k)}$ ,  $U^{(k)}$ ,  $u^{(k)}$  и т.д. При этом прослеживается прямая аналогия с методом ВКБ: для фазы выводится уравнение эйконала (6), а условия Коши-Римана (7) получаются из уравнения, аналогичному уравнению переноса. Показывается также, что условия Коши-Римана можно получить из условия сохранения потенциального вихря. Также, выводятся поправки к условиям Коши-Римана следующего порядка (9), которые интересны тем, что в уравнения (9), дающие условия на гладкий фон входят параметры особой части решения (4).

В главе 4 выводится цепочка Гюгонио-Маслова. Показано, что цепочку удобнее всего получить, если вместо вещественных переменных  $x_1$ ,  $x_2$  в исходных уравнениях мелкой воды, а также в описании функций  $\rho$ ,  $u$  использовать комплексные переменные

$$z = x_1 - X_1(t) + i(x_2 - X_2(t)), \quad \bar{z} = x_1 - X_1(t) - i(x_2 - X_2(t)).$$

После введения новых комплексных переменных  $X' = X_1 + iX_2$ ,  $V' = V_1 + iV_2$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $U$ ,  $W$  и вещественных переменных  $\mu$  и  $\lambda$  (эти переменные выражаются через коэффициенты в разложении функций  $\rho$  и  $u$  в ряд Тейлора по  $z$ ,  $\bar{z}$  в окрестности траектории  $X(t)$  до второго порядка



включительно) цепочка Гюгонио-Маслова принимает вид

$$\dot{X} = V, \quad (13)$$

$$\dot{V} + i\omega_0 V - \frac{i\sigma}{\mu^3}(Y + W - 2\bar{Z}) = 0, \quad (14)$$

$$\dot{Y} = i(p - \omega_0)Y - \frac{i\beta(2p + \omega_0)\mu^3}{3|c|} + f_1, \quad (15)$$

$$\dot{Z} = i(3p - \omega_0)Z + \frac{i\omega_0\beta\mu^3}{3|c|} + f_2, \quad (16)$$

$$\dot{W} = -ipW, \quad (17)$$

$$\dot{U} = i(p + \omega_0)U + f_3, \quad (18)$$

$$\dot{\lambda} = 2\beta\mu^3\left(\frac{\omega_0}{2}ImY - \frac{2p + \omega_0}{2}ImZ - \frac{2p}{3}ImW\right), \quad (19)$$

$$\dot{\omega}_0 = \beta ImV \equiv \beta V_2, \quad (20)$$

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} + b^2\mu = \frac{1}{\mu^3}(\lambda + 2|c|Re((Z - \bar{Y})W + \frac{3}{2}ZY)). \quad (21)$$

Здесь слагаемые  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  содержат коэффициенты Тейлора 3-го порядка. Обрыв цепочки (замыкание) означает, что  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  приравняются к нулю.

В главе 5 изучается оборванная цепочка (13)–(21) в трех случаях:  $\beta = 0$ ,  $\beta$  – мало, и случай, когда  $\beta$  нельзя считать параметром возмущения. В работах С.Ю. Доброхотова<sup>3</sup> было показано, что оборванная цепочка (13)–(21) точно интегрируется и сводится к уравнению Хилла в случае  $\beta = 0$

$$z''_{\Phi\Phi} + Q(\Phi)z = 0.$$

Это сведение позволяет выявить ряд свойств траекторий  $\Gamma$  связав их со свойствами уравнения Хилла (такими, как свойства устойчивости, рассмотрением зон и лакун в спектре и т.д.). Физически разумное предположение о достаточной гладкости траекторий  $\Gamma$  и вполне элементарное исследование уравнений для скорости и функций  $Y, Z, W$  приводят к требованию *малости* малости одной из следующих частот:

$\nu_1 = (p - \omega_0)$  мала, тогда  $Z \simeq 0, W \simeq 0$  (случай I);

$\nu_2 = (\omega_0 - 3p)$  мала, тогда  $Y \simeq 0, W \simeq 0$  (случай II);

$\nu_3 = -p$  мала, тогда  $Y \simeq 0, Z \simeq 0$  (случай III).

Это требование должно быть выполнено как в случае  $\beta = 0$ , так и в случае малых  $\beta$ .

В случае  $\beta = 0$  у системы (13)–(21) легко получаются траектории в виде окружности, если положить в случаях I, II, III последовательно  $(Z = 0, W = 0)$ ,  $(Y = 0, W = 0)$ ,  $(Z = 0, Y = 0)$ . Если

---

<sup>3</sup>Доброхотов С. Ю. Редукция к уравнению Хилла цепочки Гюгонио-Маслова для траекторий уединенных вихрей уравнений мелкой воды // Теор. и мат. физ. - 1997. - 112, № 1. - С. 47-66

считать параметр  $\beta$  малым, то слагаемые с  $\beta$  в (13)–(21) играют роль адиабатического возмущения, которое, в частности, “деформирует” указанные траектории. Одним из эффектов влияния этих слагаемых состоит в том, что движение по “деформированным” окружностям может менять направление и появляются траектории  $\Gamma$  в виде зигзагов. Такие “деформированные” траектории могут быть описаны с помощью *гамильтоновых систем с одной степенью свободы*. Для всех случаев I, II и III они имеют одинаковую структуру

$$\dot{\omega}_0 = f \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -f \frac{\partial H}{\partial \omega_0}, \quad \omega_0|_{t=0} = \omega_0(0), \quad \psi|_{t=0} = \psi(0),$$

$$H = \cos \psi M + N,$$

но с разными функциями  $f$ ,  $M$  и  $N$ . Здесь гамильтоновыми переменными являются частота  $\omega_0$  и угол  $\psi$  направления скорости  $V$ . Например, для случая, когда мала частота  $3p - \omega_0$ ,

$$M = M_2 \sqrt{1 + \frac{7}{12|c|M_2^2} \left( \frac{11}{4} - \frac{7}{4(2\eta - 1)^2} - \frac{1}{2\eta - 1} + \frac{1}{14} \log(2\eta - 1) \right)}$$

$$N = -\frac{7(\omega_2)^{3/2}}{4} \int_1^{\eta^7} \frac{y^9(5y^7 - 6)}{\sqrt{(y^7 + 3)(2y^7 - 1)^3}} dy.$$

$$f = -\frac{4\sqrt{\omega_0(2\eta - 1)^3}}{7\eta\sqrt{\eta + 3}}, \quad \eta = \frac{\omega_0}{\omega_2},$$

где  $M_1$  и  $\omega_2$  – константы интегрирования. Ее фазовые портреты на плоскости  $(\omega_0, \psi)$  определяются интегралом системы  $H$ :  $H = \text{const}$ , и для отдельных областей почти совпадают с хорошо известными фазовыми портретами траекторий физического маятника (см. Рис. 1).

В каждом из 3-х случаев, траектория  $X(t)$  зависит от шести параметров  $\omega_i, M_i, c, \psi_0, X_1^0, X_2^0$  (так как  $\omega_0 = \bar{\Omega} + \beta X_2^0$ ). Эти шесть “существенных” параметров могут быть восстановлены при помощи полученных в диссертационной работе формул через шесть имеющих физический смысл величин: начальные положение  $(X_1^0, X_2^0)$  и скорость  $(V_1^0, V_2^0)$  центра вихря, потенциальный вихрь  $c$  и третья компонента  $\text{rot}_3 v$  в центре вихря.

При выводе указанных в конце предыдущего пункта гамильтоновых систем существенным является предположение об относительной малости слагаемых, пропорциональных  $\beta$  (“вынуждающих сил”) в правых частях уравнений для  $Y$  и  $Z$ . Если эти слагаемые не малы, то ясно, что их нельзя рассматривать как адиабатическое

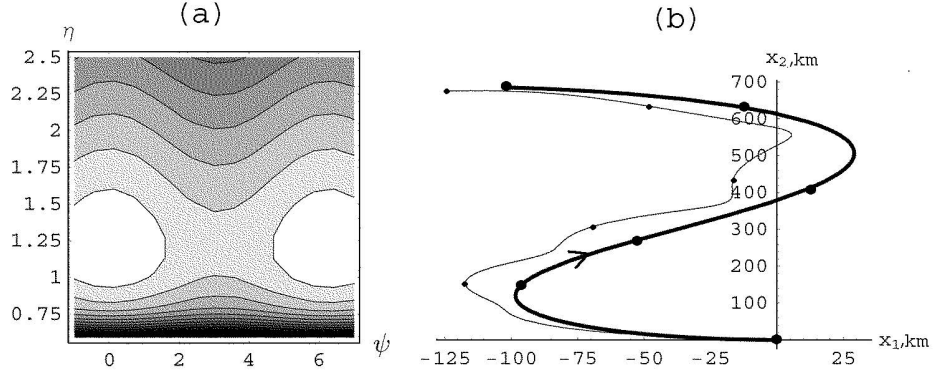


Рис. 1: Пример фазового портрета гамильтоновой системы (а) и траектории центра вихря на  $\beta$ -плоскости в случае когда мала частота  $3p - \omega_0$  (b). Траектория, отмеченная жирной линией, соответствует траектории гамильтоновой системы с одной степенью свободы, траектория, отмеченная тонкой линией, – решению 17 уравнений оборванной цепочки Гюгонио-Маслова до усреднения.

возмущение, и более того, они могут играть существенную роль в описании траекторий Г. Имея ввиду явные выражения для правых частей в системе (13)–(21), предполагается, что для интересующих нас решений в первом приближении всеми производными по  $t$  можно пренебречь, что приводит к уравнению для определения критических точек системы. Элементарный анализ показывает, что эти критические точки образуют два двумерных (пересекающихся) гладких “критических” многообразия, характеризуемых условиями (а)  $W = 0$  и (b)  $p = 0$ . Таким многообразиям отвечают траектории с равномерным движением, параллельным оси  $x_1$  (т.е. движениям вдоль параллели), причем случай (b) не дает подходящих для описания мезомасштабных вихрей траекторий. В первом приближении движение определяется линейризованными уравнениями в некоторой окрестности этих критических многообразий. Показано, что собственные значения соответствующей матрицей Якоби находятся из уравнения

$$\lambda_i^8 + 22\omega_0^2\lambda_i^6 + (105 + \frac{9\delta}{2})\omega_0^4\lambda_i^4 + (148 + \frac{171\delta}{2})\omega_0^6\lambda_i^2 + (64 - 81\delta - \frac{243\delta^2}{2})\omega_0^8 = 0,$$

где безразмерный параметр  $\delta = \frac{\beta^2}{3|c|\omega_0^3}$ .

Медленные движений в окрестности критического многообразия возможны тогда, когда существуют “маленькие” корни  $\lambda$  этого полинома.

Одно из собственных значений обращается в ноль тогда и только тогда, когда слагаемое  $(64 - 81\delta - \frac{243\delta^2}{2})\omega_0^8$  в последнем уравнении обращается в ноль. Это дает  $\delta = \frac{\sqrt{465}-9}{27} \sim 0,465$ . Например, в случае, когда  $\beta$  плоскость касается земли в точке, расположенной на широте  $20^\circ$  ( $\tilde{\omega} \approx 0.18$  1/час) такая ситуация реализуется, если принять значение геопотенциала на траектории  $\Gamma$  соответствующее высоте слоя атмосферы  $\sim 10$  км ( $\eta|_\Gamma \approx 860000 \text{ км}^2/\text{час}^2$ ). Иными словами, в окрестности широты  $20^\circ$  возможно наличие медленных траекторий, если предположить, что воображаемая высота слоя атмосферы равна 10 км. Заметим, что в задачах о мезомасштабных вихрях в атмосфере этой величине часто приписываются значения  $7 \div 12$  км.

В главе 6 описывается цепочка Гюгонио-Маслова для более сложной системы уравнений, описывающих динамику двумерных вихрей в атмосфере с учетом энергетического обмена между атмосферой и океаном<sup>4</sup>: После обезразмеривания эта система выглядит следующим образом.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \omega \mathbf{T} \mathbf{u} + \nabla \eta + (\eta + \delta) \nabla \Theta = 0. \quad (22)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) + \delta \text{rot}_3 \mathbf{u} - \eta k (\Theta - \hat{\Theta}) = 0. \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta + k (\Theta - \hat{\Theta}) = 0. \quad (24)$$

В отличие от уравнений мелкой воды, добавляется еще одно уравнение для скалярной функции  $\Theta(x, t)$  (плотность или температура),  $\text{rot}_3 \mathbf{u} = \partial \mathbf{u}_2 / \partial x_1 - \partial \mathbf{u}_1 / \partial x_2$ ,  $\delta$ ,  $k$  – физические константы, характеризующие приток массы из пограничного слоя атмосферы (слоя Экмана) и нагрев вихря,  $\hat{\Theta}$  – соответствует значению температуры поверхности океана.

Показывается, что для особых решений типа корня квадратного из квадратичной формы выполнены условия вмерзженности и уравнение Гамильтона-Якоби вида (6) для фазы  $S$ . Условия Коши-Римана (7) тоже сохраняются, если потребовать дополнительные условия на гладкую составляющую  $\theta(x, t)$  функции  $\Theta(x, t)$ , а именно  $\nabla \theta(x, t)|_\Gamma = 0$ . Численный анализ соответствующей цепочки Гюгонио-Маслова показал, что у оборванной цепочки существует семейство траекторий близких по параметрам к описанному в предыдущей главе режиму, но при этом центр особенности может двигаться в меридиональном направлении.

---

<sup>4</sup>Должанский Ф. В., Крымов В. А., Манин Д. Ю. Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений// Усп. физ. наук. - 1990. - 160, № 7. - С. 1-47

## Доклады и публикации

Основные результаты работы были представлены на семинаре профессора Альбеверио в Институте прикладной математики Боннского Университета, на Международном семинаре “Дни Диффракции” в 2002, 2003, 2004 годах, на международном семинаре “Asymptotic Analysis and the Physics of Atmosphere and Ocean” в 2004 году, на международном семинаре “Mathematical aspects of tsunami” в 2005 году, а также отражены в 6 публикациях [1, 2, 3, 4, 5, 6].

## Благодарности

Результаты этой работы были получены в рамках проектов РФФИ 99-00415 и 01-02-00850. Результаты главы 5, 6 были получены совместно с профессором Б.Тироцци из Университета “La Sapienza” (Рим). Результаты главы 2 были получены совместно с К.В.Панкрашкиным. Автор диссертации выражает им свою благодарность.

В ходе работы над диссертацией автор имел чрезвычайно полезные дискуссии с В.Г.Даниловым, В. Ф. Должанским, В. П. Масловым, А.И.Шафаревичем, А.Сперанса, которым автор также выражает свою признательность.

Особую благодарность автор хочет выразить своему научному руководителю и наставнику Сергею Юрьевичу Доброхотову за неоценимую помощь и поддержку в научной работе.

# Глава 1

## Цепочки Гюгонио-Маслова и особенности типа квадратного корня

Итак, будем искать решения системы (2) в виде

$$\begin{aligned}\eta &= \rho(x, t) + \tilde{\rho}(x, t), & \tilde{\rho}(x, t) &= R(x, t)F(S(x, t)), \\ \mathbf{u} &= u(x, t) + \tilde{u}(x, t), & \tilde{u}(x, t) &= U(x, t)F(S(x, t)),\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $x = {}^t(x_1, x_2) \in R^2$  и  $t \in [0, T]$ ;  $\rho$ ,  $R$  и  $S$  гладкие скалярные функции,  $u = {}^t(v, w)$  и  $U = {}^t(U_1, U_2)$  гладкие двумерные вектор-функции. Предполагается, что функции удовлетворяют одним или несколькими из следующих условий

(i) для любого  $t$   $S(x, t) \geq 0$ , и равенство  $S(x, t) = 0$  выполняется в любой момент времени  $t \in [0, T]$  в единственной точке  $x = X(t) = {}^t(X_1(t), X_2(t))$ . Множество  $\Gamma = \{x = X(t), t \in [0, T]\}$  назовем *траекторией* особого решения (1.1) уравнений (2) на интервале времени  $[0, T]$ .

Функции  $S$ ,  $U$  и  $R$  находятся в общем положении, в том смысле, что

(ii) Матрица  $\mathbf{H}(t) = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{\Gamma} = \text{Hess } S|_{\Gamma}$  вторых производных невырождена и, следовательно, положительна на  $\Gamma$ .

(iii) Собственные значения матрицы  $\text{Hess } S|_{\Gamma}$  различны (далее будет показано, что если существует решение (2.1), такое, что  $S(x, t)$  удовлетворяет сформулированному предположению при  $t = t_0$ , то это предположение выполняется также для любого  $t > t_0$ ).

(iv) разложение  $U$  и  $R$  по степеням  $(x - X(t))$  начинается с наименее возможных степеней. (Это предположение иногда можно опустить, но оно является естественным с точки зрения возможных приложений и, кроме того, позволяет упростить дальнейшие рассуждения.)

(v) Функция  $F$  удовлетворяет следующим условиям:

(v-a.) Функция  $F(\tau)$  непрерывна при  $\tau \geq 0$ ,  $F(0) = 0$ ;

(v-b.)  $F(\tau)$  является гладкой при  $\tau > 0$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow +0} F'(\tau) = \infty$ .

Очевидно, функция  $F$  в (1.1) не определяется однозначно условием (v): ее можно умножить на не обращающуюся в нуль гладкую функцию и прибавить к ней любую гладкую функцию, зависящую от  $S$  и равную нулю на траектории  $X(t)$ . Более того, в некоторых случаях функцию  $S$  можно умножить на некоторую не обращающуюся в нуль гладкую функцию переменных  $(x, t)$ . Как отмечалось ранее, нелинейность в системе (2) совместно с предположением о “самоподобности и устойчивости” структуры особенности лишает нас возможности выбрать функцию  $F$  произвольным образом. Таким образом, проблема заключается в том, чтобы описать все подходящие функции  $F$  в (1.1) и затем получить по крайней мере некоторые характеристики решений (1.1), среди которых наиболее важными являются траектории  $\Gamma$  и значения на  $\Gamma$  функций  $\rho$ ,  $R$ ,  $u$ ,  $U$ , некоторых их производных,  $\text{Hess } S|_{\Gamma}$ , и т.д., т. е. характеристик решения в окрестности траектории  $\Gamma$ . Вначале из асимптотических соображений мы выберем соответствующее приближение, а именно потребуем, чтобы наше приближенное решение являлось в некотором смысле главным членом в формальном асимптотическом разложении по степеням  $x^{-1}X(t)$  (т. е. главным в смысле гладкости). Зависимость траектории  $X(t)$  от параметров явно указываться не будет.

## 1.1 Цепочки Гюгонио—Маслова как необходимые условия существования особых вихревых решений

Сформулируем некоторые результаты. Будем пользоваться следующими обозначениями:

1) точка над символом обозначает дифференцирование по времени;  
 2) звездочка в качестве верхнего правого индекса обозначает сопряженную матрицу; буква “ $t$ ” в качестве верхнего левого индекса обозначает транспонирование.

3) пусть  $G(x, t)$  — гладкая функция или вектор, и пусть  $X(t)$  — некоторая траектория. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора

$$G \sim \sum_{k=0}^{\infty} G^{(k)}(x, t), \quad (1.2)$$

где  $G^{(k)}(x, t) = \sum_{m_1+m_2=k} G_{m_1 m_2}^{(k)}(t) (x_1 - X_1(t))^{m_1} (x_2 - X_2(t))^{m_2}$ ,  
 $G_{m_1, m_2}^{(m_1+m_2)}(t) = \frac{1}{m_1! m_2!} \frac{\partial^{(m_1+m_2)} G}{\partial x^{m_1} \partial x^{m_2}}(X(t), t)$ ,

Таким образом,  $G(x, t)$  – однородные полиномы порядка  $k$ ,  $G_{m_1, m_2}^{(m_1+m_2)}(t)$  – коэффициенты Тейлора. (Подчеркнем, что мы включаем факториалы в коэффициенты.) Верхний индекс в этих коэффициентах не дает новой информации, и мы будем опускать его в этой главе. Однако он будет полезен при громоздких выкладках последующих глав; там мы его снова введем. Для упрощения обозначений будем писать  $\rho_0(t)$ , вместо  $\rho_{00}$ .

4) символ  $o(|y|^\infty)$  используется для обозначения гладкой функции, убывающей при  $|y| \rightarrow 0$  быстрее любой целой степени  $|y|$ .

Функция  $\eta$  на должна быть строго положительной (это следует из ее физического смысла), поэтому далее будем рассматривать только те решения системы (2), которые удовлетворяют этому условию. Далее,  $\rho_0(t)$  должна быть положительной для траектории  $\Gamma$  (мы увидим, что наши решения сохраняют это свойство во времени). Положим также

$$q(t) = \frac{1}{2} \operatorname{div} u(X(t), t), \quad (1.3)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2}(X(t), t) - \frac{\partial w}{\partial x_1}(X(t), t) \right) \equiv -\frac{1}{2} \operatorname{rot}_3 u(X(t), t), \quad (1.4)$$

$$\omega_0 = \tilde{\omega} + \beta X_2(t). \quad (1.5)$$

**Теорема 2.** Пусть система (2) имеет решение (1.1), удовлетворяющее условиям (i)–(v). Тогда имеют место следующие утверждения.

**1.** Без ограничения общности можно считать, что в (1.1)  $F = \sqrt{\tau}$ .

**2a.** Траектория  $X(t)$  вмерозжена в поле скоростей  $\mathbf{u}$  (а также в  $u$ ):

$$\dot{X}(t) = u(X(t), t) \equiv \mathbf{u}(X(t), t) \equiv V(t) \iff \dot{X}_1 = V_1, \quad \dot{X}_2 = V_2. \quad (1.6)$$

**2b.** Функция  $S$  является решением уравнения эйконала (или Гамильтона-Якоби)

$$S_t + (u, \nabla S) = o(|x - X(t)|^\infty). \quad (1.7)$$

**2c.** Комплексные скорости  $u(x, t) = v(x, t) + iw(x, t)$  ( $u$   $\mathbf{u}_1(x, t) + i\mathbf{u}_2(x, t)$ ) на траектории  $X(t)$  удовлетворяют условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2}|_\Gamma = q(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{\partial w}{\partial x_1}|_\Gamma = p(t) \quad (1.8)$$

$u$

$$\rho_{20}|_\Gamma = \rho_{02}|_\Gamma + \beta V_1/2, \quad \rho_{11}|_\Gamma = \beta V_2/2. \quad (1.9)$$

**2d.** Вторая поправка к условиям Коши–Римана имеет вид

$$(2\mathbf{H} - \operatorname{tr}(\mathbf{H})\mathbf{I}) \begin{pmatrix} v_{20} + v_{02} + \frac{1}{10}(c\rho_{01} - \beta) \\ w_{20} + w_{02} - \frac{1}{10}c\rho_{10} \end{pmatrix} = \operatorname{tr}(\mathbf{H}) \begin{pmatrix} v_{20} - v_{02} - w_{11} \\ w_{02} - w_{20} - v_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$



**2е.** “Потенциальный вихрь”  $\Pi$  (3) сохраняется вдоль траектории  $\Gamma$ :

$$\Pi|_{\Gamma} = \frac{\omega_0 - 2p}{\rho_0} = c = \text{const}. \quad (1.11)$$

**2ф.** Функции  $\tilde{\rho} = R\sqrt{S}$  и  $\tilde{u} = U\sqrt{S}$  определяются формулами

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} = \varphi\sqrt{S} \begin{pmatrix} \mathbf{T}P \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}S\sqrt{S} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0}\mathbf{T}(\nabla(\varphi\rho))^{(1)} \\ -\varphi c\rho_0(t) \end{pmatrix} + O(|x - X(t)|^4) \quad (1.12)$$

где гладкие функции  $S$ ,  $\varphi$  и вектор-функция  $P$  имеют вид

$$\begin{aligned} S &= \frac{\rho_0(t)}{2}(x - X(t), \Pi(t)B\Pi^*(t)(x - X(t))) + O(|x - X(t)|^3), \\ P &= \nabla S \equiv \rho_0(t)\Pi(t)B\Pi^*(t)(x - X(t)) + O(|x - X(t)|^2), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\Pi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ матрица поворота на угол}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t p(t)dt \equiv \theta_0 - \frac{1}{2} \int_0^t \text{rot}_3 u(X(t), t)dt, \quad (1.14)$$

$$\varphi = A + O(|x - X(t)|), \quad A = \text{const}, \quad (1.15)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+b & 0 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}, \quad b, \theta_0 \text{ и } A - \text{ вещественные константы,}$$

характеризующие начальную структуру вихревого решения,  $|b| < 1$ .

**2г.** Производные  $\rho_{lj}$ ,  $v_{lj}$ ,  $w_{lj}$ , функции  $V_1 = v(X(t))$ ,  $V_2 = w(X(t))$ ,  $\omega_0(t)$ ,  $\rho_0$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$  и

$$r = \rho_{20} - \beta V_1/4 \equiv \rho_{02} + \beta V_1/4 \quad (1.16)$$

удовлетворяют помимо (1.6) и (1.8) следующим уравнениям

(начальным соотношениям цепочки Гюгонио—Маслова):

$$\dot{V}_1 - \omega_0 V_2 + \rho_{10} = 0, \quad \dot{V}_2 + \omega_0 V_1 + \rho_{01} = 0, \quad (1.17)$$

$$\dot{\rho}_0 + 2q\rho_0 = 0, \quad (1.18)$$

$$\dot{\rho}_{10} + 3q\rho_{10} - p\rho_{01} + \rho_0(w_{11} + 2v_{20}) = 0, \quad (1.19)$$

$$\dot{\rho}_{01} + 3q\rho_{01} + p\rho_{10} + \rho_0(v_{11} + 2w_{02}) = 0, \quad (1.20)$$

$$\dot{q} - p^2 + q^2 + \omega_0 p + 2r + \beta V_1/2 = 0, \quad (1.21)$$

$$\dot{p} + 2pq - \omega_0 q - \beta V_2/2 = 0, \quad (1.22)$$

$$\dot{r} + 4qr + \frac{1}{2}\rho_{10}(3v_{20} + w_{11} + v_{02}) + \frac{1}{2}\rho_{01}(v_{11} + 3w_{02} + w_{20}) = f_0, \quad (1.23)$$

$$\dot{v}_{20} + 3qv_{20} - \omega_0 w_{20} - p(v_{11} - w_{20}) = f_1, \quad (1.24)$$

$$\dot{v}_{11} + 3qv_{11} - \omega_0 w_{11} - p(2v_{02} - 2v_{20} - w_{11}) + \beta p = f_2, \quad (1.25)$$

$$\dot{v}_{02} + 3qv_{02} - \omega_0 w_{02} + p(v_{11} + w_{02}) - \beta q = f_3, \quad (1.26)$$

$$\dot{w}_{20} + 3qw_{20} + \omega_0 v_{20} - p(w_{11} + v_{20}) = f_4, \quad (1.27)$$

$$\dot{w}_{11} + 3qw_{11} + \omega_0 v_{11} - p(-2w_{20} + 2w_{02} + v_{11}) + \beta q = f_5, \quad (1.28)$$

$$\dot{w}_{02} + 3qw_{02} + \omega_0 v_{02} + p(w_{11} - v_{02}) + \beta p = f_6, \quad (1.29)$$

$$\dot{\omega}_0 - \beta V_2 = 0, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{10}(v_{11} + w_{02}) + \rho_{01}(v_{20} + w_{11}) \\ & + \rho_0(v_{21} + w_{12}) + \beta(\dot{V}_2/4 + qV_2 + pV_1/2) = 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{10}(3v_{20} + w_{11} - v_{02}) - \rho_{01}(v_{11} + 3w_{02} - w_{20}) \\ & + \rho_0(3v_{30} + w_{21} - v_{12} - 3w_{03}) + \beta(\dot{V}_1/2 + 2qV_1 - pV_2) = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Здесь  $f_0 = -\rho_0(3v_{30} + 3w_{03} + w_{21} + v_{12})$ ,  $f_1 = -3\rho_{30}$ ,  $f_2 = -2\rho_{21}$ ,  $f_3 = -\rho_{12}$ ,  $f_4 = -\rho_{21}$ ,  $f_5 = -2\rho_{12}$ ,  $f_6 = -3\rho_{03}$ .

**3.** Условия (1.6)–(1.9) и (1.17)–(1.32), а также представления (1.12)–(1.15) необходимы и достаточны для того, чтобы функция (1.1) удовлетворяла исходной системе с точностью до  $O(|x - X(t)|^3)$ .

Доказательство утверждения **1** дано в главе 2. Соотношения, записанные в теореме, являются аналогом условий Гюгонио и поправок высших порядков для уединенных вихрей уравнений (2). Условия “вмороженности” (1.6) для вихря, условия Коши-Римана (1.8) и поправка (1.10) вытекают из наличия негладкой составляющей в решении (1.1), возникновение этих условий основано на рассуждениях, близких рассуждениям лучевого метода или метода ВКБ, примененного к разложениям по гладкости в соответствии с гладкостью. Отметим, что эти условия существенным образом связаны с условием асимметрии вихря (iii). Рассуждения в главе 3 позволяют получить соотношения, аналогичные (1.6)–(1.10) и возникающие при анализе существования

слагаемых высших порядков в разложении в ряд Тейлора для функций  $S$ ,  $U$ , и  $R$ . Что касается условий (1.17)–(1.32) то они возникают главным образом при последовательном дифференцировании исходной системы с учетом (1.6)–(1.9) и вычислении результата в точках траектории  $x = X(t)$  (см. главу 4).

## 1.2 Свойства сингулярной вихревой составляющей решения

Формулы (1.12)–(1.15) достаточно просты (для двумерной задачи). Они легко поддаются анализу, особенно если при этом ограничиться главными членами функций  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\rho}$ . Главный член вектора  $\tilde{u}$  имеет вид

$$\tilde{u} = A\rho_0(t)^{3/2} \sqrt{Q(y(x, t))} \mathbf{T} \nabla Q(y(x, t)) + O(|x - X(t)|)^3,$$

а главный член геопотенциала имеет вид

$$\tilde{\rho} = -\frac{2}{3} c\rho_0(t)^{5/2} \sqrt{Q(y(x, t))} + O(|x - X(t)|)^4$$

где  $Q = \frac{1}{2}((1+b)y_1^2 + (1-b)y_2^2)$ ,  $y = \Pi^*(t)(x - X(t))$ .

Функция  $\tilde{u}$  описывает движение уединенного вихря вдоль траектории  $\Gamma$  поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  (или  $u(x, t)$ ). Это не удивительно - данный факт хорошо известен в гидродинамике. Таким образом, решения вида (1.1) не противоречат законам гидродинамики. (Однако для решений вида (1.1) это утверждение требует доказательства.) Достаточно интересен тот факт, что в теореме возникают условия Коши-Римана (1.8) и поправки к ним. Эти условия могут не выполняться для произвольных траекторий поля скоростей, и, следовательно, они описывают влияние существования вихря на “гладкий фон”  $u(x, t)$ . При этом условия Коши-Римана (1.8) возникают только благодаря факту наличия слабой точечной особенности у решения (1.1). *Поправки (1.10) представляют интерес тем, что задают условие на гладкий фон в которое входят параметры особой части решения (1.1) (вторые производные от функции  $S$  на траектории особенности).*

Как отмечалось выше, вихрь (особая часть решения (1.1)) не имеет угловой симметрии относительно своего центра, его структура в окрестности центра (траектории  $\Gamma$ ) определяется квадратичной формой  $Q(y)$  и функцией  $\rho_0$ , имеющей смысл геопотенциала  $\eta$  на траектории  $\Gamma$ . Сечения  $Q = \text{const}$  являются эллипсами с полуосями  $1/\sqrt{(1 \pm b)}$ . В исходной системе координат они двигаются вдоль  $X(t)$  и вращаются (в

силу условий Коши-Римана) с угловой скоростью  $\dot{\theta} = -\frac{1}{2} \text{rot}_3 u(X(t), t)$ . Однако это вращение не является вихревым вращением внутри вихря: оно является только вращением “эллипса асимметрии”. То же самое можно сказать о сечениях квадратичной формы  $S^{(2)}$ , но теперь полуоси эллипсов  $S^{(2)} = \text{const}$  изменяются пропорционально  $\sqrt{\rho_0}$ . Угол  $\theta_0$  определяет начальный угол осей этого эллипса.

Отметим также, что “вихревая” (негладкая) составляющая и решения растет с увеличением расстояния от  $X(t)$  довольно медленно - как  $|x - X(t)|^2$  (как  $\sqrt{S} \approx |x - X(t)|, |P| \approx |x - X(t)|$ ), а функция  $\tilde{\rho}$  растет еще медленнее<sup>1</sup>, а именно как  $|x - X(t)|^3$ . Такой медленный рост скорости означает, что это решение отличается от решений, основанных на моделях, в которых вихри представляются как “твердое тело”. В последнем случае скорость растет линейно, т.е. как  $|x - X(t)|$ .

Поведение сингулярной (“вихревой”) составляющей  $\tilde{\rho}$  геопотенциала  $\eta$  существенным образом зависит от констант  $A$  и  $c$ . Согласно предположению об общем положении, аналогично (ii), (iv), можно считать, что  $c \neq 0$ , это соответствует физическому смыслу потенциального вихря. Например, для вихрей в атмосфере  $\rho_0(t) > 0$  (так как геопотенциал – положительная функция). Тогда при всех  $t$  негладкая компонента  $\tilde{\rho}$  имеет минимум на  $\Gamma$ , если  $Ac < 0$ , и максимум, если  $Ac > 0$ . Первый случай соответствует циклонам, а второй - антициклонам. Проанализируем направление сингулярной составляющей векторов скорости на линиях уровня функции  $S^{(2)}$  в координатах  $x' = x - X(t)$ . Вектор  $\nabla S^{(2)}$  является внешней нормалью к этим кривым. Следовательно,  $\mathbf{T}\nabla S^{(2)}$  на каждой из кривых суть касательные векторы, направление которых совпадает с направлением движения по часовой стрелке. Если мы теперь рассмотрим сечение функции  $|\tilde{u}| = |P^{(1)}|\sqrt{S^{(2)}} + O(|x'|^3)$  то увидим похожую картину, хотя векторы  $\mathbf{T}P^{(1)} = \mathbf{T}\nabla S^{(2)}$  уже не будут касательными векторами к соответствующим линиям уровня. Это означает, что построенный вихрь вращается по часовой стрелке, если  $A > 0$  и против часовой стрелки, если  $A < 0$ . Известно также, что циклоны - это вихри, закрученные против часовой стрелки, а антициклоны - это вихри, закрученные по часовой стрелке. Следовательно, в первом случае имеем  $A < 0$ , а во втором случае –  $A > 0$ . Отсюда, а также из предыдущих рассуждений следует, что с точки зрения возможных приложений решений с особенностями (1.1) к динамике мезомасштабных вихрей в атмосфере интересен лишь случай  $c > 0 \iff c = \Pi|_{\Gamma} > 0$ . При этом мы

<sup>1</sup>Медленный рост функций (1.12) позволяет использовать их при описании тропических циклонов что соответствует наличию “глаза” тайфуна.

имеем циклон, если  $A < 0$  и антициклон, если  $A > 0$ . Подчеркнем, что указанный выбор знаков  $s$  и  $A$  основан лишь на некоторых физических, а не математических рассуждениях: с математической точки зрения возможны все ситуации. Этот выбор аналогичен выбору волн сжатия и растяжения в теории ударных волн. (Для того чтобы сделать правильный выбор, необходимо включить в рассмотрение некоторые дополнительные соображения, такие как возрастание энтропии. С другой стороны, решения противоположных знаков, вероятно, могут возникать в других физических задачах, также описываемых системой (2).)

Очевидно, размер кривых в случае когда  $|\tilde{u}| = \text{const} \iff |P^{(1)}|\sqrt{S^{(2)}} \approx \text{const}$  пропорционален  $\rho_0^{3/2}(t)$  вблизи траектории  $\Gamma$ . Следовательно, можно сказать, что вихрь сжимается, по крайней мере локально, если  $\rho_0^{3/2}(t)$  возрастает, и расширяется, если  $\rho_0^{3/2}(t)$  убывает. Из уравнения (1.18) также вытекает, что коэффициент расширения определяется дивергенцией поля скоростей  $u(x, t)$  (или  $\mathbf{u}(x, t)$ ) на траектории  $X(t)$ .). Описанная динамика сохраняет асимметрию вихря, что важно с точки зрения условия (iii). По существу, в первом приближении мы имеем конформное преобразование вихря: он поворачивается и расширяется с одним и тем же коэффициентом по всем направлениям.

Подчеркнем, что все упомянутые факты вытекают из существования решения (1.1) и не требуют привлечения соображений, связанных с вопросами возмущения и обрыва при исследовании цепочек Гюгонио-Маслова. Применяя процедуру обрыва цепочки и учитывая малость параметра  $\beta$  мы найдем некоторые дополнительные свойства таких решений и их траекторий. Например,  $\rho_0$  может быть выражена через функцию от частоты Кориолиса  $\omega_0$ , и, следовательно (в некотором довольно грубом приближении), расширение вихря может быть выражено через функцию высоты, на которой находится центр вихря (см. главу 5).

**Замечание.** 1) Уравнение (1.30) получается из (1.5) дифференцированием; как будет показано дальше, удобнее использовать (1.5), а не (1.30).

2) Как уже отмечалось, система (2) порождает переменную, которая постоянна вдоль траекторий векторного поля  $\mathbf{u}$ , а именно – “потенциальный вихрь”  $\Pi$ . Хорошо известно, что при использовании асимптотических процедур некоторые особые свойства, такие как наличие законов сохранения или гамильтоновой структуры, проявляются также в уравнениях для функций, определяющих асимптотику. Например, законы сохранения играют важную роль

в методе усреднения Уизема для уравнения Кортевега-де Фриза: усредненные законы сохранения суть уравнения для медленно меняющихся параметров конидальных волн (см., например, [36, 19]). В связи с этим интересно было бы понять, что означает существование неизменного потенциального вихря для цепочки Гюгонио-Маслова. Оказывается, что для гладкой составляющей выполняется тождество (1.11), и отсюда для негладкой составляющей вытекают условия Коши-Римана (1.8) (см. раздел 3.7). Более того, из существования  $\Pi$  следуют и другие интересные факты, такие как интегрируемость оборванной цепочки и пр.

3) Уравнения (1.9) вытекают из условий Коши-Римана, т. е. из сохранения потенциального вихря.

4) Функция  $\varphi$  в (1.12) дописывает поправку в асимптотическом разложении функций  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{u}$ . Представление (1.12) включает в себя также поправку  $U^{(2)}$ , которая выражается через фазовую поправку  $S^{(3)}$  и содержит новую неизвестную функцию  $\varphi^{(1)}$ , зависящую линейным образом от  $x - X(t)$  и гладким образом от  $t$ :

$$U^{(2)} = AP_{\perp}^{(2)} + \varphi^{(1)}P_{\perp}^{(1)} + \frac{2}{3\rho_0}S^{(2)}\mathbf{T}\nabla(\varphi^{(1)}\rho_0 + \varphi_0\rho^{(1)}). \quad (1.33)$$

Здесь  $P_{\perp}^{(2)} = \mathbf{T}\nabla S^{(3)}$ . Тогда в (1.12)  $\varphi = A + \varphi^{(1)}$ . Для того чтобы найти функции  $S^{(3)}$  и  $\varphi^{(1)}$ , необходимо получить поправки  $U^{(3)}$  и  $R^{(3)}$ , т. е. асимптотическое решение, удовлетворяющее исходной системе с точностью до  $|x - X(t)|^4$ . Теорема 1 остается справедливой при произвольном выборе функций  $\varphi^{(1)}$  и  $S^{(3)}$ ; например, можно выбрать эти функции тождественно равными нулю. Записывая  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{u}$  в виде (1.12) мы видим, что в действительности разложение по гладкости - или по степеням  $(x_j - X_j(t))$  - решений (1.1) есть не что иное, как разложение по степеням  $S^{k+1/2}$ . Можно также надеяться, что (1.12) подскажет структуру приближений более высокого порядка.

5) Как отмечалось выше, выбор фазы  $S$  осуществляется не единственным образом: ее можно умножить на любую гладкую положительную функцию, при этом изменится амплитуда  $(U, R)$ . Мы покажем, что - с точностью до указанного преобразования - фаза  $S$  удовлетворяет *уравнению эйконала или уравнению Гамильтона-Якоби*

$$S_t + (u, \nabla S) = 0,$$

которое является одним из ха рактеристических уравнений, соответствующих линеаризации исходной системы (2) на гладком фоне  $u, \rho$ . В гидродинамике эта характеристика называется

“гидродинамической” или “медленной” *mode*. модой. Линеаризованное уравнение имеет также две другие характеристики, которые называются “акустическими” или “быстрыми” модами. Таким образом, чисто математические построения показывают, что рассматриваемый вихрь распространяется вдоль траектории, соответствующей медленной моде. Рассмотрим задачу Коши  $S|_{t=0} = S_0(x)$  с гладкой начальной функцией  $S_0$  для уравнения эйконала. Гладкое решение этой задачи существует при всех  $t$  из  $(-\infty, \infty)$ . Вопрос заключается в том, для всякой ли начальной фазы  $S_0$  удовлетворяющей условиям (i)-(iii) будет получаться подходящая для решения (1.1) фаза  $S^{(2)}$ . Квадратичная форма  $S^{(2)}$  есть приближенное решение этого уравнения, и в начальный момент времени эта квадратичная форма может быть выбрана более или менее произвольно. Вопрос о полном решении  $S$  и о приближениях высоких порядков  $S^{(3)}, S^{(4)}$ , и т. д. остается открытым.

6) Сжимаемость в системе (2) играет важную роль как при возникновении цепочки, так и при дальнейшем ее анализе. Если вместо системы (2) рассмотреть двумерное уравнение Эйлера для несжимаемой жидкости (формально это означает, что уравнение непрерывности в системе (2) заменяется на уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ), то, как показал Г. Коваль, вектор-функции  $(X(t), V(t))$  не будут связаны с другими производными  $u$  и  $\rho$ , т. е. траектория  $\Gamma$  может быть выбрана произвольным образом. Это связано с тем фактом, что уравнения Эйлера во всем пространстве инвариантны относительно перехода к неинерциальной системе координат. С физической точки зрения этот факт, очевидно, объясняется следующим образом: граничные эффекты в несжимаемой среде влияют на траекторию особенности даже в нулевом приближении, тогда как в случае сжимаемой среды задача распространения особенности может быть локализована, если пренебречь некоторыми поправками к решению более высокого порядка. Наличие сжимаемости при возникновении цепочки Гюгонио-Маслова в случае точечных особенностей вполне согласуется с тем фактом, что условия Гюгонио для ударных волн получаются из уравнений газодинамики, где также имеется сжимаемость. Добавим также, что линеаризованные уравнения Эйлера имеют только один тип характеристик, соответствующих гидродинамической или медленной моде; быстрые моды в данном случае отсутствуют. Как только что было указано, из требования “структурной самоподобности” уравнения (1.1) следует, что особенность асимптотически двигается только по “медленной” (или “гидродинамической”) моде (см. главу 3) и не отдает энергии “быстрым” (“акустическим”) модам, наличие которых обеспечивается сжимаемостью. Таким образом, мы видим, что хотя

траектория может быть включена в цепочку только в силу наличия акустических мод, “основная составляющая” вихря распространяется в основном по гидродинамической моде, а не по акустическим модам.

### 1.3 Замыкание цепочки

Из общего вида соотношений (1.23)–(1.32) следует, что вместе с (1.6) и (1.17) – (1.30) они образуют недоопределенную систему дифференциальных уравнений. Такая ситуация сохранится, если мы выпишем необходимые условия, связанные с коэффициентами ряда Тейлора для функций  $u$ ,  $\rho$ ,  $S$ ,  $U$  и  $R$ . Другими словами, мы получили незамкнутую цепочку и должны ее замкнуть. Как уже отмечалось, проблема замыкания цепочек является одной из самых сложных и интересных в математической физике. Мы будем замыкать цепочку тем же методом, что и в работах [47, 11], приравнивая правые части в (1.23)–(1.29) (т. е. слагаемые, содержащие коэффициенты полиномов третьего порядка в разложении  $\rho$  и  $u$ ) нулю:

$$f_j = 0, \quad j = 0, \dots, 6 \quad (1.34)$$

Соотношения (1.31) и (1.32) будем рассматривать как уравнения, ограничивающие выбор  $v_{j3-j}$  и  $w_{j3-j}$ . (Из этих уравнений вытекает, что в общем случае невозможно сделать все третьи производные функций  $v, w, \rho$  равными нулю и в то же время сохранить точность  $O(|x - X(t)|^3)$  в остаточном члене (2).) В результате мы получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы не будем переписывать “замкнутые” уравнения (1.23)–(1.29), а просто будем считать далее, что имеет место (1.34).

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Предположим, что коэффициенты  $\rho_k$ ,  $v_k$ , и  $w_k$ ,  $|k| \leq 2$ , удовлетворяют (1.6) и (1.17)–(1.30), функции  $S$ ,  $U$  и  $R$  определены при помощи (1.12)–(1.15), а коэффициенты  $\rho_k$ ,  $u_k$  и  $v_k$ ,  $k = (k_1, k_2)$ ,  $k_1 + k_2 = 3$ , , выбраны описанным выше способом. Тогда функции (1.1) удовлетворяют исходной системе (2) с точностью  $O(|x - X(t)|^3)$  для любых значений коэффициентов ряда Тейлора для  $u = (v, w)$  и  $\rho$  с номерами  $k = (k_1, k_2)$ ,  $|k| \geq 4$ , и для  $U = (U_1, U_2)$ ,  $R$ , и  $S$  с номерами  $|k| \geq 3$ . В частности, полагая все указанные старшие коэффициенты равными нулю, получим приближенные решения, удовлетворяющие (1.1) с точностью  $\text{mod } O(|x - X(t)|^3)$ , с функциями  $u$ ,  $\rho$ ,  $U$ ,  $R$  и  $S$  – полиномами по  $(x - X(t))$  (степени не выше  $\leq 3$ ). Таким образом, обрывая цепочку посредством (1.34), мы получаем*



*асимптотическое в некотором смысле решение (по степеням  $x - X(t)$ ) уравнений (2).*

До настоящего времени не дано строгое доказательство того факта, что описанное выше замыкание цепочки дает приближенную траекторию особенности, близкую к реальной траектории на некотором интервале времени. Однако далее мы увидим, что имеющие смысл решения замкнутой цепочки должны быть устойчивыми (и выбираются устойчивыми). Поэтому, если предположить, что правые части в (1.23)–(1.29), хотя и не равны нулю, но являются достаточно малыми, то, вероятно, можно доказать, что их влияние на решения данной системы мало на некотором интервале времени. С другой стороны, оценка  $O(|x - X(t)|^3)$  остаточного члена в правой части в (2) есть наименьшая оценка, позволяющая полностью определить главную составляющую негладкой компоненты решения (1.1). Численный анализ и аналитические рассуждения показывают, что, учитывая только слагаемые порядка  $\leq 1$  в системе, содержащей слагаемые второго порядка, мы получим сильно искаженное описание поведения решений.

Мы видим, что метод, используемый для обрыва цепочки, достаточно разумен: обрыв на предыдущем шаге (когда мы полагаем  $v_{20} = w_{02} = v_{02} = \dots = 0$ ) не позволяет получить правильное описание главной негладкой составляющей решения, тогда как учет последующих слагаемых значительно усложняет уравнения для коэффициентов в ряде Тейлора. (Если обрывать цепочку на третьем шаге, то к имеющейся системе необходимо добавить еще 12 уравнений; обрыв на четвертом шаге приводит к появлению еще 27 уравнений, и т. д.)

## Глава 2

# Единственность особенности типа квадратного корня

Цель этой главы - доказать утверждение 1 из теоремы 1, т. е. единственность особенности типа квадратного корня в широком классе решений вида (1.1) уравнений (2). В этой главе будем пользоваться некоторыми новыми локальными обозначениями  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, A, B, C, D, E$  которые имеют другой смысл, нежели в других главах.

### 2.1 Вспомогательные утверждения

Прежде всего, перейдем к подвижной системе координат  $(x', t)$ , где  $x' = x - X(t)$ , и положим  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - V$ . Тогда система (2) записывается в виде (мы опускаем штрихи на новых переменных  $x$ )

$$\eta_t + (\nabla, \eta \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + \nabla \eta + \dot{V} - \omega \mathbf{T}(\mathbf{u} + V) = 0. \quad (2.1)$$

и изучаются решения системы (2.1) вида (1.1). В новых координатах имеем

$$S = \frac{1}{2}(x, \mathbf{H}(t)x) + O(|x|^3).$$

Обозначим  $P_\perp = \mathbf{T}P$ ; такое же обозначение будем использовать для всех двумерных векторов, например,  $U_\perp = \mathbf{T}U$ ,  $P_\perp^{(1)} = \mathbf{T}P^{(1)}$ .

Поскольку функция  $S$  представима в виде  $S = \frac{1}{2}(x, \mathbf{H}(t)x) + O(|x|^3)$  (см. условие (ii)) и  $\mathbf{H}$  - положительная матрица, по лемме Морса [45] существует гладкая замена переменных  $x = x(y, t)$ , такая, что  $S = y^2$ .

Следующее утверждение достаточно хорошо известно, и его доказательство элементарно.

**Лемма 1.** 1. Пусть  $z^{(k)}$  - однородный полином порядка  $k$ , тогда справедливо тождество Эйлера  $(x, \nabla)z^{(k)} = kz^{(k)}$ .

2.  $S^{(2)} = (x, P^{(1)})/2$ .

**Лемма 2.** Пусть гладкая вектор-функция  $z$  такова, что  $(z, P) = 0$ , Тогда существует гладкая функция  $\alpha$ , такая, что  $z = \alpha P_{\perp}$ . Отсюда вытекает, что если  $z = z^{(k)}$  есть однородный полином переменной  $x$  порядка  $k$ ,  $z^{(k)} \neq 0$ , то это же утверждение справедливо с  $z^{(k)}$  вместо  $z$ ,  $P^{(1)}$  вместо  $P$ , и с однородным полиномом порядка  $(k-1)$   $\alpha^{(k-1)}$  вместо  $\alpha$ . Если  $k = 0$  то  $z = 0$ .

**Доказательство.** Очевидно, достаточно доказать утверждение относительно  $z$ . Перейдем от координат  $x$  к координатам Морса  $y$ . Тогда получим  $P = {}^t(\partial x / \partial y)^{-1} {}^t(y_1, y_2)$ . Следовательно,  $((\partial x / \partial y)^{-1} z, y) = 0$ . Положим  $w = (\partial x / \partial y)^{-1} z$  и разложим в ряд Тейлора компоненты  $w_1(y_1, y_2, t)$  и  $w_2(y_1, y_2, t)$  вектора  $w$  вблизи точек  $(y_1, 0)$ ,  $(0, y_2)$  соответственно. В результате получим  $w_1(y_1, y_2, t) = w_1(y_1, 0, t) + y_2 w_1(y_1, y, t)$  где  $0 < y < y_2$ , аналогичное равенство выполняется для  $w_2(y_1, y_2, t)$ . Если положить  $w_1(y_1, 0, t) = w_1^0(y_1, t)$ ,  $\tilde{w}_1(y, t) = w_1(y_1, y, t)$   $w_2(0, y_2, t) = w_2^0(y_2, t)$ ,  $\tilde{w}_2(y, t) = w_2(y, y_2, t)$ , то вектор  $w$  запишется в виде  $w_1 = w_1^0(y_1, t) + y_2 \tilde{w}_1(y, t)$  и  $w_2 = w_2^0(y_2, t) + y_1 \tilde{w}_2(y, t)$ , где  $w_i^0$  и  $\tilde{w}_i$  гладкие функции. Условие ортогональности для  $z$  и  $P$  принимает вид  $y_1 w_1^0(y_1, t) + y_2 w_2^0(y_2, t) + y_1 y_2 (\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) = 0$ . В этом уравнении положим последовательно  $y_1 = 0$  и  $y_2 = 0$  и получим  $w_1^0 = w_2^0 = 0$ . Далее, поделим его на  $y_1 y_2$  и получим  $\tilde{w}_1 = -\tilde{w}_2 \equiv \tilde{g}(y, t)$  и  $(\partial x / \partial y)^{-1} z = \tilde{g} \mathbf{T} y$ . Теперь заметим, что  $\mathbf{T}^t Q = (\det Q)^2 Q^{-1} \mathbf{T}$  для любой невырожденной  $2 \times 2$  матрицы  $Q$ . Следовательно,

$$z = \tilde{g} \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 \mathbf{T} y = \tilde{g} \det \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 \mathbf{T}^t \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^{-1} y = g \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) P_{\perp}.$$

Лемма 2 доказана.  $\square$

Для формулировки следующей леммы необходимо дать определение взаимно простых квадратичных форм. Будем говорить, что квадратичные формы  $S(x)$ ,  $\tilde{S}(x)$  взаимно просты, если отношение  $S(x)/\tilde{S}(x)$  не определено в нуле (например, пусть  $S(x) = x_1^2 + 2x_2^2$  и  $\tilde{S}(x) = x_1^2 + x_2^2$ ; тогда  $S(x)/\tilde{S}(x)$  не определено в нуле).

**Лемма 3.** Пусть гладкие функции  $S(x)$ ,  $\tilde{S}(x)$ ,  $x \in R^2$  удовлетворяют следующим условиям в некоторой окрестности точки  $x = 0$ :

1.  $S(x) > 0$ ,  $\tilde{S}(x) > 0$  если  $x \neq 0$ ,  $S(0) = \tilde{S}(0) = 0$ ;
2. матрицы  $\text{Hess } S \Big|_{x=0}$ ,  $\text{Hess } \tilde{S} \Big|_{x=0}$  вторых производных невырождены (и, значит, положительны) при  $x = 0$ ;

3. квадратичные формы  $S^{(2)}$ ,  $\tilde{S}^{(2)}$  взаимно просты. Предположим, что выполняется равенство  $\Phi S = \Psi \tilde{S}$ , где  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  - гладкие функции.

Тогда существует гладкая функция  $\alpha(x)$  такая, что с точностью до функций равных нулю вместе со всеми своими производными в точке  $x=0$  :  $\Phi = \alpha \tilde{S}$ ,  $\Psi = \alpha S$ .

**Доказательство.** Лемма 3 доказана в [22]. Для полноты изложения дадим несколько иное доказательство приведенных равенств. Функция  $S(x)$  удовлетворяет условиям 1.–3. леммы 5. Таким образом, мы можем использовать координаты Морса  $y$  такие, что  $S(x, t) = y^2 = S^{(2)}$ .

Теперь запишем равенство  $\Phi S = \Psi \tilde{S}$  в виде

$$(\Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \dots)S^{(2)} = (\Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \dots)(\tilde{S}^{(2)} + \tilde{S}^{(3)} + \dots), \quad (2.2)$$

где  $G^{(k)}$  – однородный полином порядка  $k$  в разложении в ряд Тейлора по  $y$  вблизи точки  $y = 0$ . Поскольку в этом уравнении коэффициенты при однородных полиномах одного и того же порядка совпадают, то, используя предположения леммы, получаем  $\Phi^{(0)} = 0$ ,  $\Psi^{(0)} = 0$ ,  $\Phi^{(1)} = 0$ ,  $\Psi^{(1)} = 0$ ,  $\Phi^{(2)} = \alpha^{(0)} \tilde{S}^{(2)}$ ,  $\Psi^{(2)} = \alpha^{(0)} S^{(2)}$ ,  $\Phi^{(3)} = \alpha^{(0)} \tilde{S}^{(3)} + \alpha^{(1)} \tilde{S}^{(2)}$ ,  $\Psi^{(3)} = \alpha^{(1)} S^{(2)}$ , где  $\alpha^{(0)}$  – заданная константа,  $\alpha^{(1)}$  – некоторый однородный полином первого порядка по  $x$ . Применим метод математической индукции. Предположим, что формулы

$$\Phi^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha^{(i)} \tilde{S}^{(k-i)}, \quad \Psi^{(k)} = \alpha^{(k-2)} S^{(2)}, \quad (2.3)$$

справедливы при  $k = 2, 3, \dots, n-1$ , где  $\alpha^{(i)}$  заданный однородный полином по  $x$  порядка  $i$ . Покажем, что данные формулы справедливы при  $k = n$ . Для этого приравняем слагаемые одного и того же порядка в (2.2):  $S^{(2)}(\Phi^{(n)} - \sum_{i=2}^{n-1} \alpha^{(i-2)} \tilde{S}^{(n-i+2)}) = \Psi^{(n)} \tilde{S}^{(2)}$ . Отсюда вытекает, что (2.3) выполняется при  $k = n$  с некоторой однородной формой  $\alpha^{(n-2)}$  порядка  $(n-2)$ . Таким образом, формулы (2.3) верны при  $k = n$ . Отсюда следует равенство  $\Phi = \alpha \tilde{S}$ ,  $\Psi = \alpha S$  для рядов Тейлора функций  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $S$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\alpha$ .  $\square$

## 2.2 Уравнение для функции $F$ с особенностью в морсовых координатах

Подставим функции (1.1) в систему (2.1). Тогда получим систему

$$F'(\tau)A + F(\tau)B + F(\tau)F'(\tau)C + F^2(\tau)D + E = 0. \quad (2.4)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda R + \rho(U, P) \\ RP + \Lambda U \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} R_t + (\nabla, \rho U + Ru) \\ \hat{\Gamma}U + (U, \nabla)u + \nabla R - w\mathbf{T}U \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2R(U, P) \\ (U, P)U \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} (\nabla, RU) \\ \dot{U} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho_t + (\nabla, \rho u) \\ \hat{\Gamma}u + \nabla \rho + \dot{V} - \omega\mathbf{T}(u + V) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\tau = S(x, t)$ ,  $\dot{U} = (U, \nabla)U$ ,  $\hat{\Gamma} = \partial/\partial t + (u, \nabla)$ .

Снова сделаем гладкую замену переменных  $x = x(y, t)$ , при которой  $S = y^2$ . Векторы  $A, B, C, D$ , и  $E$  гладким образом зависят от  $y$ . Введем также полярные координаты  $\tau, \varphi$ :  $y_1 = \sqrt{\tau} \cos \varphi$ ,  $y_2 = \sqrt{\tau} \sin \varphi$ , и подставим их в систему (2.4). Тогда при каждом  $\varphi$  получим систему дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами, гладким образом зависящими от  $\sqrt{\tau}$ ,  $\varphi$ , и  $A = A(x(y(\sqrt{\tau}, \varphi)))$ . Для упрощения обозначений не будем писать все эти аргументы, оставив лишь зависимость коэффициентов от  $x$ .

Заметим, что можно сделать следующую замену функций  $S$  и  $F$ . Можно умножить  $S$  на любую (строго) положительную функцию, что будет соответствовать масштабированию амплитуд  $U, R$  в представлении (1.1). Можно также прибавить произвольную гладкую функцию переменного  $\tau$  к функции  $F$ , что соответствует сдвигу фона  ${}^t(u, \rho)$  в (1.1). Далее мы будем часто пользоваться этими фактами, а также тем фактом, что  $F$  не зависит от  $\varphi$ .

Доказательство можно разбить на три основные части:

- получение из (2.4) более простых уравнений, решения которых находятся явно,
- выбор из этих решений тех, которые удовлетворяют (v),
- доказательство того факта, что из всех полученных решений только  $F = \sqrt{\tau}$  удовлетворяет системе (2.4).

## 2.3 Модельные уравнения

Поскольку у нас имеется система трех уравнений для одной функции  $F$ , можно попытаться исключить члены с  $F'$  и  $FF'$  и получить квадратное уравнение. К сожалению, в силу возможного вырождения компонентов коэффициентов  $A, C$  и их комбинаций, это не всегда возможно. Поэтому нужно найти другой способ упрощения уравнения (2.4).

**Лемма 4.** *(о модельных уравнениях) Пусть выполнены условия (ii)–(iii), и пусть система (2.4) имеет решение  $F$ . Тогда справедливы следующие*

утверждения. **А.** Существуют гладкие функции  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , зависящие от  $(x, t)$  и такие, что  $F$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$\alpha(x, t)F'(\tau) + \beta(x, t)F^2(\tau) + \gamma(x, t)F(\tau) + \delta(x, t) = 0, \quad (2.5)$$

где производные по  $x$  функции  $\alpha$  не равны нулю при  $x = 0$ .

**В.** Функция  $F$  удовлетворяет одному из следующих трех уравнений:

- квадратному уравнению

$$a(x, t)F^2(\tau) + b(x, t)F(\tau) + c(x, t) = 0, \quad (2.6)$$

если либо  $(U, P_\perp) \neq o(|x|^\infty)$ ,  $(\dot{U}, U_\perp) \neq o(|x|^\infty)$ , и  $(U, P) = o(|x|^\infty)$ , либо  $(U, P_\perp) = o(|x|^\infty)$ ,

- линейному дифференциальному уравнению

$$a(x, t)F'(\tau) + b(x, t)F(\tau) + c(x, t) = 0, \quad (2.7)$$

если  $(U, P_\perp) \neq o(|x|^\infty)$ ,  $(\dot{U}, U_\perp) = o(|x|^\infty)$ ,

- кубическому уравнению

$$a(x, t)F^3(\tau) + b(x, t)F^2(\tau) + c(x, t)F(\tau) + d(x, t) = 0, \quad (2.8)$$

если  $(U, P_\perp) \neq o(|x|^\infty)$ ,  $(\dot{U}, U_\perp) \neq o(|x|^\infty)$ ,  $(U, P) \neq o(|x|^\infty)$ .

Здесь  $a, b, c, d$  также гладкие функции, некоторые производные которых по  $x$  не равны нулю при  $x = 0$ .

**С.** Если  $\psi = o(|x|^\infty)$ , то  $F^n \partial^m F / \partial \tau^m \psi = o(|x|^\infty)$  для любых целых  $n$  и  $m \geq 0$ .

**Доказательство.** Заметим, что уравнение Риккати играет важную роль: утверждение **С.** леммы 4 вытекает непосредственно из уравнения (2.5).

Для доказательства леммы 4 используются в основном чисто алгебраические процедуры. Рассматриваются отдельно следующие два случая: (а)  $(U, P_\perp) \neq o(|x|^\infty)$ , (б)  $(U, P_\perp) = o(|x|^\infty)$ . Вначале изучим случай (а). Преобразуем систему (2.4). Коэффициенты преобразованной системы будут помечаться штрихом. Мы не будем выписывать сами системы, а запишем только их коэффициенты, которые соответствуют коэффициентам (2.4).

Наш метод заключается в том, чтобы попытаться исключить члены, содержащие  $F'$  и  $FF'$ . К сожалению, в общем случае такое упрощение невозможно, так как при этом могут пропасть и другие коэффициенты.

Начнем с того, что сделаем равным нулю только коэффициент  $C$ . При этом не будем отслеживать, какой вид примут  $B$  и  $E$  (так как в действительности мы мало что знаем о них). Умножим первое уравнение в (2.4) на  $U$  и вычтем его из второго и третьего уравнений, умноженных на  $2R$ ;

$$A' = \begin{pmatrix} \Lambda R + \rho(U, R) \\ 2R^2 P + (\Lambda R - \rho(U, P))U \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 2R(U, P) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D' = \begin{pmatrix} (\nabla, RU) \\ 2R\dot{U} - (\nabla, RU)U \end{pmatrix}.$$

В системе со штрихами умножим второе и третье уравнения на  $U_\perp$  и  $P_\perp$  и получим в системе (2.4) новые коэффициенты

$$A'' = \begin{pmatrix} \Lambda R + \rho(U, P) \\ 2R^2(U_\perp, P) \\ (\rho(U, P) - \Lambda R)(U, P_\perp) \end{pmatrix}, \quad C'' = \begin{pmatrix} 2R(U, P) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D'' = \begin{pmatrix} (\nabla, RU) \\ 2R(\dot{U}, U_\perp) \\ 2R(\dot{U}, P_\perp) - (\nabla, RU)(U, P_\perp) \end{pmatrix}.$$

Второе уравнение в полученной системе и есть нужное нам уравнение (2.5).

Теперь рассмотрим следующие подслучаи: (a.1)  $(\dot{U}, U_\perp) = o(|x|^\infty)$ , (a.2)  $(\dot{U}, U_\perp) \neq o(|x|^\infty)$ . В случае (a.1) в силу утверждения С. леммы 4 член  $(\dot{U}, U_\perp)F^2$  в полученном уравнении Риккати можно включить в коэффициент  $E_2''$  и тогда мы получим уравнение (2.7).

Рассмотрим случай (a.2). Вначале предположим, что (a.2.1)  $(U, P) \neq o(|x|^\infty)$ . Выразим  $F'$  через  $F^2$  и  $F$  из уравнения Риккати и подставим полученное выражение в первое уравнение. Получим кубическое уравнение (2.8) с невырожденным коэффициентом при  $F^3$ .

Если (a.2.2)  $(U, P) = o(|x|^\infty)$ , умножим первое уравнение системы с двумя штрихами на  $(U_\perp, P)$  и прибавим его к третьему уравнению той же системы; в результате получим, что коэффициенты при  $F'$  и  $FF'$  в полученном уравнении суть  $o(|x|^\infty)$  – эти члены могут быть отнесены к соответствующему коэффициенту  $E$ . Коэффициент при  $F^2$  есть  $D_3''' = 2(R(\dot{U}, P_\perp) - (\nabla, RU)(U, P_\perp))$ . В силу леммы 2,  $U$  представимо в виде  $U = \alpha P_\perp + \mu P$ , где  $\alpha, \mu$  – гладкие функции,  $\mu = o(|x|^\infty)$  и некоторые производные функции  $\alpha$  не равны нулю при  $x = 0$ . После ряда вычислений выражение для  $D_3'''$  принимает вид  $2\alpha^2(P, \mathbf{Q}P) + \zeta$ , где

матрица  $\mathbf{Q}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -R \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} - (P_\perp, \nabla R) & R \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \\ R \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} & -R \frac{\partial^2 S}{\partial x_2 \partial x_1} - (P_\perp, \nabla R) \end{pmatrix}$$

и  $\zeta = o(|x|^\infty)$ . Теперь предположим, что  $D_3''' = o(|x|^\infty)$ . Тогда в силу леммы 2 получаем  $\mathbf{Q}P = \gamma P + \delta P_\perp$ , где  $\gamma, \delta$  – гладкие функции и  $\gamma = o(|x|^\infty)$ . Это, в частности, означает, что с точностью до  $o(|x|^\infty)$  имеем  $S_{x_1 x_1} = -S_{x_2 x_2}$ . Но в этом случае матрица  $\mathbf{H}$  (см. условие (ii)) не будет положительно определена. Это противоречие завершает доказательство в случае (a).

Анализ случая (b) основан на аналогичных идеях, но требует более тонких рассуждений, кото рые мы опускаем (см. [2]).

## 2.4 Возможные решения модельных уравнений

Наши предыдущие рассуждения показывают, что коэффициенты уравнения (2.4) являются гладкими функциями, зависящими только от  $\sqrt{\tau}$ . Тем не менее, используя предположение о существовании решений, удовлетворяющих (v), покажем, что в действительности мы можем считать их гладкими по  $\tau$ . Следующее утверждение играет важную роль во всех наших исследованиях.

**Лемма 5.** Пусть  $u, v$  – гладкие функции переменной  $y$  и пусть некоторые производные функции  $v$  при  $y = 0$  не равны нулю. Если функция  $f(\tau)$  такова, что  $f(\tau) = u(y_1, y_2)/v(y_1, y_2)$ , то  $f(\tau) = \tau^n \Phi(\tau)$ , где  $\Phi$  гладкая функция и  $n$  целое число.

**Доказательство.** Положим  $y_1 = \sqrt{\tau} \cos \varphi$ ,  $y_2 = \sqrt{\tau} \sin \varphi$ ,

$$\alpha(\tau, \varphi) = u(\sqrt{\tau} \cos \varphi, \sqrt{\tau} \sin \varphi), \quad \beta(\tau, \varphi) = v(\sqrt{\tau} \cos \varphi, \sqrt{\tau} \sin \varphi);$$

тогда  $\alpha$  и  $\beta$  гладкие функции  $\sqrt{\tau}$  и

$$f(\tau) = \frac{\alpha(\tau, \varphi)}{\beta(\tau, \varphi)}. \quad (2.9)$$

Выпишем главные члены  $\alpha$  и  $\beta$  в разложении по  $\tau$ :

$$\alpha = \alpha_m(\varphi) \tau^{m/2} + a_m(\tau, \varphi) \tau^{m/2}, \quad \beta = \beta_k(\varphi) \tau^{k/2} + b_k(\tau, \varphi) \tau^{k/2}, \\ a_m(0, \varphi), b_k(0, \varphi) = 0.$$



Если  $p = m - k$  нечетное, то по крайней мере в некоторой окрестности нуля главный член  $f$  в разложении по  $\tau$

$$\frac{\alpha_m(\varphi)}{\beta_k(\varphi)} \tau^{p/2}. \quad (2.10)$$

Заметим, что  $\alpha_m$  и  $\beta_k$  могут быть представлены в виде однородных полиномов порядка  $m$  и  $k$ , соответственно, по  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , и выражение (2.10 в этом случае зависит от  $\varphi$ .

Таким образом, число  $p$  должно быть четным. Положим  $n = p/2$  и умножим обе части (2.9) на  $\tau^{-n}$ ; тогда мы можем записать (2.9) в форме

$$\Psi = \frac{W}{Z}, \quad \text{где} \quad \Psi(\tau) = \tau^{-n} f(\tau), \quad (2.11)$$

$$W(\tau, \varphi) = \alpha(\tau, \varphi) \tau^{-m/2}, \quad Z(\tau, \varphi) = \beta(\tau, \varphi) \tau^{-k/2}.$$

Очевидно, что  $W(0, \varphi), Z(0, \varphi) \neq 0$  и, таким образом,  $\Psi$  гладкая функция  $\sqrt{\tau}$  и  $\Psi(0) \neq 0$ . Для удобства положим  $\xi = \sqrt{\tau}$ . Теперь для каждого  $N$  мы можем записать

$$\Psi = \sum_{l=0}^N \Psi_l \xi^l + o(\xi^N), \quad W = \sum_{l=0}^N W_l(\varphi) \xi^l + o(\xi^N), \quad Z = \sum_{l=0}^N Z_l(\varphi) \xi^l + o(\xi^N).$$

Подставим эту сумму в (2.11) и соберем коэффициенты порядка  $\xi^l$ ; тогда для  $l \leq N$  получим

$$W_l = \sum_{j=0}^l \Psi_j B_{l-j}. \quad (2.12)$$

Взяв достаточно большое  $N$ , получим (2.12) для любого  $l$ . Это уравнение для нечетных  $l$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} W_1 &= \Psi_0 Z_1 + \Psi_1 Z_0, \\ W_3 &= \Psi_0 Z_3 + \Psi_1 Z_2 + \Psi_2 Z_1 + \Psi_3 Z_0, \\ W_5 &= \Psi_0 Z_5 + \Psi_1 Z_4 + \Psi_2 Z_3 + \Psi_3 Z_2 + \Psi_4 Z_1 + \Psi_5 Z_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения получим  $\Psi_1 = 0$  (действительно,  $W_1 - \Psi_0 Z_1$  полином нечетного порядка по  $\cos \phi$  и  $\sin \phi$  и не может быть равен полиному четного порядка  $\Psi_1 Z_0$ ). Подставляя это равенство во второе уравнение, получим  $\Psi_3 = 0$ , и т.д. В итоге мы видим, что  $\Psi_l = 0$  при всех нечетных  $l$ . Напомним, что  $\Psi_l = d^l \Psi / d\xi^l(0)$ , и, очевидно, существует гладкая функция  $\Phi$  такая, что  $\Psi(\xi) = \Phi(\tau)$ . Теперь нам только нужно вспомнить, что  $\Psi = \tau^{-n} f$ .  $\square$

**Следствие 1.** Пусть функция  $F$  удовлетворяет уравнению

$$u(y_1, y_2)F(\tau) + v(y_1, y_2) = 0, \quad (2.13)$$

где  $u$  и  $v$  гладкие функции, некоторые производные которых в точке  $(0, 0)$  не обращаются в ноль, и граничным условиям

$$F(0) = 0. \quad (2.14)$$

Тогда  $F$  гладкая.

**Лемма 6.** Пусть  $a$ ,  $b$ , и  $c$  гладкие функции, некоторые производные которых не обращаются в ноль в точке  $y = 0$ . Если функция  $F(\tau)$  удовлетворяет одному из следующих уравнений

$$a(y_1, y_2, t)F^2(\tau) + b(y_1, y_2, t)F(\tau) + c(y_1, y_2, t) = 0, \quad (2.15)$$

$$a(y_1, y_2, t)F'(\tau) + b(y_1, y_2, t)F(\tau) + c(y_1, y_2, t) = 0, \quad (2.16)$$

граничному условию (ams4.11) и, кроме того, условию

$$F'(0) = \infty. \quad (2.17)$$

Тогда все производные функции  $\phi = b'_\varphi a - ba'_\varphi = 0$  и  $\psi = c'_\varphi a - ca'_\varphi = 0$  в точке  $(0, 0)$  обращаются в ноль.

**Доказательство.** Пусть  $y_1 = \sqrt{\tau} \cos \varphi$  и  $y_2 = \sqrt{\tau} \sin \varphi$ . разделим обе части (2.10) или (2.11) на  $a$  и продифференцируем по  $\varphi$ ; тогда мы получим

$$(b'_\varphi a - ba'_\varphi)F + (c'_\varphi a - ca'_\varphi) = 0, \quad (2.18)$$

или  $\phi F + \psi = 0$ . Предположим, что некоторые производные  $\phi$  в точке  $(0, 0)$  не обращаются в ноль. если производные  $\psi$  обращаются в ноль, тогда, очевидно,  $F$  не может удовлетворять (2.17). Если некоторые производные  $\psi$  в  $(0, 0)$  не равны нулю, тогда, следуя лемме 5 and (2.14), получим, что  $F$  гладкая и не может удовлетворять (2.17). Таким образом все производные  $\phi$  в точке  $(0, 0)$  обращаются в ноль. так как  $F$  в некоторой окрестности 0, имеем  $\psi(y_1, y_2) = O(\tau^\infty)$ . Так как  $\psi$  гладкая, все ее производные нулевые.  $\square$

**Лемма 7.** Пусть  $u$  и  $v$  гладкие функции, некоторые производные не обращаются в ноль в точке  $(0, 0)$ , и пусть все производные функции  $\phi = v'_\varphi u - v u'_\varphi$  обращаются в ноль в точке  $(0, 0)$ . Тогда, по крайней мере в некотором секторе  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  имеем  $v(y_1, y_2) = \tau^n \alpha(\tau, \varphi) u(y_1, y_2)$ , где  $n$  целое число, а  $\alpha$  гладкая функция  $\tau$ , некоторые производные которой не обращаются в ноль.

**Доказательство.** Выберем сектор  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  так что  $u, v \neq 0$  при  $(y_1, y_2) \in \delta$ ; тогда все производные функции  $\psi = \phi/(uv)$  очевидно равны нулю в этом секторе. Имеем  $v'_\varphi/v = u'_\varphi/u + \psi$ . Отсюда получаем

$$\log |v| = \log |u| + W(\tau) + Z(y_1, y_2),$$

где все производные функции  $Z$  обращаются в ноль. Мы можем переписать это в форме

$$v(y_1, y_2) - Y(y_1, y_2) = Q(\tau)u(y_1, y_2),$$

где  $Q = \pm \exp W$ ,  $Y = \pm(\exp Z - 1)$ , и все производные  $Y$ , очевидно обращаются в ноль. Применяя лемму 5, получим  $Q(\tau) = \tau^n G(\tau)$ , где  $G$  гладкая функция с некоторыми необращающимися в ноль производными. Для завершения доказательства, положим  $\alpha = G + \tau^{-n}Y/a$ .  $\square$

Рассмотрим квадратное уравнение и линейное дифференциальное уравнение (2.7). Разделим каждое из них на  $a$  и продифференцируем по  $\varphi$ . Тогда в обоих случаях получим линейное уравнение  $uF + v = 0$ , где  $u = b'_\varphi a - ba'_\varphi$ ,  $v = c'_\varphi a - ca'_\varphi$ . Если  $u$  имеет не равные нулю производные при  $y = 0$ , то из леммы 5 и условия (v-a) вытекает гладкость  $F$ . Следовательно  $F$  не удовлетворяет условию (v-b). Значит, все производные функций  $u$  и  $v$  равны нулю при  $y = 0$ . Применяя лемму 7, получаем  $b = \tau^{-n}\mu a$ ,  $c = \tau^{-n}\gamma a$ , где  $n$  – неотрицательное целое число и  $\mu, \gamma$  гладкие функции переменной  $\tau$ . Далее, поделив уравнения (2.6), (2.7) на  $a$ , получим уравнения того же типа:

$$\tau^n F^2 + \mu F + \gamma = 0 \quad (a), \quad \tau^n F' + \mu F + \gamma = 0 \quad (b), \quad (2.19)$$

но с коэффициентами, гладким образом зависящими от  $\tau$ .

Теперь можем воспользоваться точными формулами для решений полученных уравнений.

Для **квадратного уравнения** (2.19) имеем  $F = (-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\gamma\tau^n})/(2\tau^n)$ . Если выполняется неравенство  $\mu^2 - 4\gamma\tau^n \neq o(|x|^\infty)$ , то условие (v) дает  $F = \sqrt{\tau}$ . Если то из условия (v-a) вытекает представление  $F = f + \sqrt{\psi}$  с гладкой функцией  $f$ . Подставим это выражение в уравнение Риккати (2.5) Получим для  $\sqrt{\psi}$  уравнение Риккати с гладкими коэффициентами. Это означает, что  $\sqrt{\psi}$  есть гладкая функция и  $F$  не удовлетворяет условию (v-b).

Теперь рассмотрим **линейное уравнение** (2.19b). Разберем различные случаи.

Предположим, что  $\mu = o(|x|^\infty)$ . Тогда функция  $\delta = \mu F + \gamma$  гладкая,  $F' = -\delta/\tau^n$  и из условия (v-a) вытекает гладкость  $F$ . Пусть  $\gamma = o(|y|^\infty)$ . Тогда  $\delta = \gamma/F$  гладкая и  $\tau^n F'/F + e = 0$ , где  $e = \mu + \delta$  гладкая функция. Следовательно,  $\frac{F'(\tau)}{F(\tau)} = -\frac{e(y_1, y_2)}{\tau^n}$ , или по лемме 5,  $\frac{F'(\tau)}{F(\tau)} = \tau^m \Phi(\tau)$ , где  $\Phi$  гладкая функция. Тогда  $F(\tau) = \exp \int \tau^m \Phi(\tau) d\tau$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\Phi(0) \neq 0$ . Если  $m \geq 0$ , то  $F(0) \neq 0$ . Если  $m < -1$ , то либо  $F(0) = \infty$  либо  $F'(0) = 0$ . Предположим, что  $m = -1$ , тогда  $F(\tau) = \tau^\kappa \Psi(y)$ , где  $\kappa = \Phi(0)$ ,  $\Psi$  гладкая функция, не равная нулю при  $y = 0$ . Условие (v) выполняется тогда и только тогда, когда  $0 < \kappa < 1$ .

Теперь предположим, что обе функции  $\mu$  и  $\gamma$  имеют не равные нулю производные. Перепишем (2.19b) в виде  $F' = AF + B$ , где  $A = \tau^m \mu_0$ ,  $B = \tau^k \gamma_0$ ,  $m, k$  – целые числа;  $\mu_0, \gamma_0$  гладкие функции, не равные нулю при  $y = 0$ . В этом случае  $F$  можно записать в виде

$$F(\tau) = \left( \int B(\tau) \exp \left( - \int A(\tau) d\tau \right) d\tau \right) \exp \left( \int A(\tau) d\tau \right).$$

Непосредственный анализ показывает, что в случаях (a)  $m \geq 0$  и (b)  $m \leq -2$  решений не существует. В случае (c)  $m = -1$  имеется единственная возможность  $F = \tau^k$ ,  $0 < k < 1$ . Тем самым рассмотрение линейного дифференциального уравнения завершено.

**Кубическое уравнение** (2.8) при помощи стандартной подстановки  $F = z + g(\tau)$ ,  $g = -\mu/(3\tau^n)$  сводится к каноническому виду  $z^3 + 3pz + 2q = 0$ , где  $3p = -(-\gamma/\tau^n + \mu/(3\tau^n))$ ,  $2q = \delta/\tau^n - 2\mu^3/(3\tau^n)^2 - \mu\gamma/(3\tau^2n)$ . Воспользуемся формулой Кардано

$$z = (-q + \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3} + (-q - \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3},$$

где ветви кубического корня выбираются так, чтобы произведение двух слагаемых было равно  $-p$ . Дальнейший анализ основан на сравнении порядков  $p$  и  $q$  в окрестности точки  $y = 0$ . Заметим, что в случае  $q^2 + p^3 = o(|x|^\infty)$  мы должны использовать уравнение Риккати (2.5) как это было сделано для квадратного уравнения.

В следующем утверждении собраны результаты всех наших рассуждений.

**Лемма 8.** *Без ограничения общности можно считать, что модельные уравнения (2.6), (2.7), (2.8) имеют только следующие решения, удовлетворяющие (v): (F1)  $F = \tau^\kappa$ , (F2)  $F = \tau \log \tau$ , (F3)  $F = \tau^{1/3} + \sigma \tau^{2/3+n}$ , (F4)  $F = \tau^{2/3} + \sigma \tau^{4/3+n}$ , где  $0 < \kappa < 1$ ,  $\sigma = \pm 1$  or  $0$ ,  $n \geq 0$  целое число. Квадратное уравнение (2.6) имеет лишь решение типа (F1) с*

$\kappa = 1/2$ , линейное дифференциальное уравнение (2.7) имеет решения типа (F1) и (F2), кубическое уравнение (2.8) имеет решения (F1) с  $\kappa = 1/2$ , (F3) и (F4).

## 2.5 Исходная система уравнений и особенности перечисленных типов

Лемма 8 лишь накладывает некоторые ограничения на возможные типы решений с особенностями, но не гарантирует существование таких решений. По существу, мы использовали до сих пор только часть системы (2.4). Теперь мы воспользуемся оставшимися уравнениями для того, чтобы показать, что система несовместна с функциями (F1)–(F4), если  $\kappa \neq 1/2$ . Вначале получим уравнения, связывающие коэффициенты  $A, B, C, D$  и  $E$  в (2.4) для случая, когда  $F$  имеет вид (F1)–(F4). Нам будет удобнее работать с самими уравнениями (2.4), а не с их линейными комбинациями. Подставляя соответствующие функции  $F$  в систему (2.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим следующие уравнения для коэффициентов  $A, B, C, D$ , которые должны быть пренебрежимо малыми функциями, т. е. функциями обращающимися в нуль вместе со всеми своими производными при  $x = 0$ .

**Лемма 9.** Пусть  $\kappa \neq 1/2$ . Тогда с точностью до  $o(|x|^\infty)$  выполняются следующие соотношения:

$$(F1) : \quad \kappa A + BS = 0, \quad \kappa C + DS = 0, \quad E = 0; \quad (2.20)$$

$$(F2) : \quad A + BS + CS = 0, \quad C + DS = 0, \quad A + E = 0; \quad (2.21)$$

$$(F3) : \quad \begin{cases} A + 3BS + (2 + 3n)CS^{2n+1} + 3DS^{2n+2} = 0, \\ C + 3DS + (2 + 3n)\sigma AS^n + 3\sigma BS^{n+1} = 0, \\ E + (1 + n)\sigma CS^n + 2\sigma DS^{n+1} = 0; \end{cases} \quad (2.22)$$

$$(F4) : \quad \begin{cases} 2A + 3BS + (4 + 3n)CS^{2n+2} + 3DS^{2n+3} = 0, \\ 2C + DS + (4 + 3n)\sigma AS^n + 3\sigma BS^{n+1} = 0, \\ E + (2 + n)\sigma CS^{n+1} + 2\sigma DS^{n+2} = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Каждая из этих систем совместна только тогда, когда все производные функций  $U$  и  $R$  обращаются в нуль на траектории  $X(t)$ . Другими словами, решений с особенностью вида (F1)–(F4) при  $\kappa \neq 1/2$  не существует.

**Доказательство** неравенств (2.20)–(2.23) получается непосредственно. Доказательство несовместности – более тонкий результат. Воспользуемся

методом математической индукции по наименьшему порядку  $k$  ненулевой производной функций  $U$  и  $R$ . Разложим  $S$ ,  $U$ ,  $R$ , и т. д. в ряды Тейлора и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ . Очевидно, это эквивалентно дифференцированию соответствующих уравнений и последующей подстановке  $x = 0$ . Наш подход заключается в том, чтобы изучить первое и второе уравнения в системах (2.20)–(2.23). В большинстве случаев достаточно оставить лишь члены наименьшего порядка в разложениях  $U$ ,  $R$  и  $S$  в ряды по степеням  $x$ . Доказательство леммы 9 содержит в себе доказательство ряда вспомогательных утверждений. Несколько первых шагов во всех случаях совпадают, но начиная с леммы 14 процесс раздваивается.

Разложим все функции в ряды Тейлора, подставим эти ряды в системы (2.20)–(2.23), и приравняем коэффициенты при наименьших степенях  $x$ . Первые три уравнения имеют вид

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} (u^{(0)}, P^{(1)})R^{(0)} + \rho^{(0)}(U^{(0)}, P^{(1)}) \\ R^{(0)}P^{(1)} + (u^{(0)}, P^{(1)})U^{(0)} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.24)$$

**Лемма 10.**  $U^{(0)} = 0$ ,  $R^{(0)} = 0$ .

**Доказательство.** Умножим первое уравнение на  $(u^{(0)}, P^{(1)})$  и вычтем из него второе уравнение, умноженное скалярно на  $P^{(1)}$  и затем на  $\rho^{(0)}$ . Получим  $((u^{(0)}, P^{(1)})^2 - \rho^{(0)}(P^{(1)})^2)R^{(0)} = 0$ . Поскольку  $(P^{(1)})^2$  есть квадратичная форма,  $\rho^{(0)} \neq 0$ , и  $(u^{(0)}, P^{(1)})$  есть линейная форма, то первый сомножитель в получившемся уравнении не равен нулю. Следовательно,  $R^{(0)} = 0$ . Далее, из первого уравнения немедленно вытекает, что  $(U^{(0)}, P^{(1)}) = 0$  и, следовательно  $U^{(0)} = 0$ . Доказательство завершено.  $\square$

Теперь предположим, что

$$U_j = 0, \quad R_j = 0, \quad j < k, \quad k \geq 1. \quad (2.25)$$

Выпишем слагаемые наименьшего порядка в первом векторном уравнении в системах (2.20)–(2.23). Все они имеют один и тот же вид:

$$\begin{aligned} R^{(k)}(u^{(0)}, P^{(1)}) + \rho^{(0)}(U^{(k)}, P^{(1)}) + \nu S^{(2)}(\rho^{(0)}(\nabla, U^{(k)}) + (u^{(0)}, \nabla)R^{(k)}) &= 0, \\ R^{(k)}P^{(1)} + (u^{(0)}, P^{(1)})U^{(k)} + \nu S^{(2)}(\nabla R^{(k)} + (u^{(0)}, \nabla)U^{(k)}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $\nu$  – число, зависящее от системы.

**Лемма 11.** *Предположим, что выполнено соотношение (2.25) и  $u^{(0)} \neq 0$ . Тогда либо (I)*

$$((u^{(0)}, P^{(1)})^2 - \rho^{(0)}(P^{(1)})^2) = \delta_0 S^{(2)}, \quad (2.27)$$

где  $\delta_0(t) < 0$  гладкая функция, либо (II) соотношение (2.27) не выполняется, и тогда  $U^{(k)} = 0$ ,  $R^{(k)} = 0$ .

**Доказательство.** Умножим первое уравнение в системе (2.26) на  $(u^{(0)}, P^{(1)})$  а второе на  $P^{(1)}$ , а затем на  $\rho^{(0)}$ , после чего вычтем одно из другого. Получим  $((u^{(0)}, P^{(1)})^2 - \rho^{(0)}(P^{(1)})^2)R^{(k)} = \delta^{(k)}S^{(2)}$ , где  $\delta^{(k)}$  - однородный полином по  $(x_1, x_2)$  порядка  $k$ , который может быть выписан явно. Таким образом, либо выполняется соотношение (2.27), где, очевидно  $\delta_0(t) < 0$ , либо  $R^{(k)}$  делится на  $S^{(2)}$ :  $R^{(k)} = \tilde{R}^{(k-2)}S^{(2)}$ . Из второго уравнения вытекает, что  $U^{(k)} = \tilde{U}^{(k-2)}S^{(2)}$ .

Непосредственно проверяется, что  $\tilde{R}^{(k-2)}$  и  $\tilde{U}^{(k-2)}$  снова удовлетворяют системе (2.26) с числом  $\tilde{\nu} = \nu/(1 + \nu)$ . Мы видим, что  $\tilde{R}^{(k-2)}$  и  $\tilde{U}^{(k-2)}$  делятся на  $S^{(2)}$ , и мы снова получаем систему (2.26) для полиномов  $\tilde{R}^{(k-4)}$  и  $\tilde{U}^{(k-4)}$ . Продолжая процесс, на некотором шаге получим, что порядок этих полиномов меньше, чем 2, и поэтому  $\tilde{R}^{(k-2m)} = 0$  и  $\tilde{U}^{(k-2m)} = 0$ . Следовательно, имеем  $R^{(k)} = 0$  и  $U^{(k)} = 0$ . Доказательство леммы завершено.  $\square$

**Лемма 12.** При условии  $u^{(0)} \neq 0$  имеем  $U^{(k)} = 0$ ,  $R^{(k)} = 0$ .

**Доказательство.** Очевидно, без ограничения общности можно считать, что  $U^{(k)}$  и  $R^{(k+1)}$  одновременно не делятся на  $S^{(2)}$ . Иначе, используя инвариантность (указанную в доказательстве предыдущей леммы) системы (2.26) относительно подстановки  $R^{(k)} = \tilde{R}^{(k-2)}S^{(2)}$ ,  $U^{(k)} = \tilde{U}^{(k-2)}S^{(2)}$ , мы можем свести задачу к случаю меньшего  $k$  и т. д. Умножим скалярно второе уравнение в (2.26) на  $\mathbf{T}P = P_{\perp}$ . Существует однородный полином порядка  $k$   $\phi^{(k-1)}$ , для которого выполняется  $(U^{(k)}, P_{\perp}) = \phi^{(k-1)}S^{(2)}$ , откуда сразу получаем

$$U^{(k)} = \phi^{(k-1)}\mathbf{T}x + \mu^{(k-1)}P^{(1)}, \quad (2.28)$$

где  $\mu^{(k-1)}$  есть однородный полином порядка  $(k - 1)$ . Подставим  $U^{(k)}$  вида (2.28) во второе уравнение в системе (2.26) и скалярно умножим его на вектор  $x$ . В результате получим

$$R^{(k)} = \frac{1}{2 + \nu k}(-2(u^{(0)}, \nu S^{(2)} \nabla \mu^{(k-1)} + (\nu + 1)\mu^{(k-1)}P^{(1)}) + \nu(u^{(0)}, P^{(1)})). \quad (2.29)$$

Умножим скалярно второе уравнение в (2.26) на  $u^{(0)}$  и положим  $\psi^{(k)} = R^{(k)} + (u^{(0)}, U^{(k)})$ . В результате получим уравнение  $\psi^{(k)}(u^{(0)}, P^{(1)}) + \nu S^{(2)}(u^{(0)}, \nabla \psi^{(k)}) = 0$ , из которого, очевидно, следует, что  $\psi^{(k)} = \tilde{\psi}^{(k-2)}S^{(2)}$ , где  $\tilde{\psi}^{(k-2)}$  есть однородный полином порядка  $(k - 2)$ .

Подставляя  $\psi^{(k)}$  в предыдущее равенство, снова заключаем, что  $\tilde{\psi}^{(k-2)}$  делится на  $S^{(2)}$  и т.д.

Таким образом, находим, что  $\psi^{(k)} = 0$  или  $R^{(k)} = -(u^{(0)}, U^{(k)})$ . Обозначим  $\chi = 1/(2 + \nu k + \nu)$ . Сравнивая  $R^{(k)}$  с (2.29), получаем

$$U^{(k)} = 2\chi(\nu S^{(2)} \nabla \mu^{k-1} + (\nu + 1)\mu^{(k-1)} P^{(1)} + \tilde{\sigma}^{(k)} \mathbf{T} u^{(0)}), \quad (2.30)$$

где  $\tilde{\sigma}^{(k)}$  однородный полином порядка  $k$ . Подставим  $R^{(k)}$  и  $U^{(k)}$  во второе уравнение в (2.26) и затем скалярно умножим его на  $x$ . Получим  $\tilde{\sigma}^{(k)} = \sigma^{(k-2)} S^{(2)}$ , где  $\sigma^{(k-2)}$  – однородный полином порядка  $k$ . Используя очевидные тождества  $2S^{(2)} \nabla \mu^{(k-1)} = (\nabla \mu^{(k-1)}, P_{\perp}^{(1)}) \mathbf{T} x + (P \nabla \mu^{(k-1)}, x) P^{(1)}$ ,  $(P^{(1)})^2 \nabla \mu^{(k-1)} = (\nabla \mu^{(k-1)}, P^{(1)}) P^{(1)}$  в (2.30), находим

$$U^{(k)} = \left( \mu^{(k-1)} + \sigma^{(k-2)} \chi (\mathbf{T} u^{(0)}, x) \right) P^{(1)} + \chi (P_{\perp}^{(1)}, (\nu \nabla \mu^{(k-1)} + \sigma^{(k-2)} \mathbf{T} u^{(0)})) \mathbf{T} x,$$

Умножим скалярно полученную формулу для  $U^{(k)}$  и (2.28) на  $x$ . Сравнивая результаты, получаем  $\tilde{\sigma}^{(k)} = 0$ .

Поскольку уравнения (2.26) линейны относительно  $R^{(k)}$ ,  $U^{(k)}$  и  $R^{(k)} = -(u^{(0)}, U^{(k)})$ , то сомножитель  $2\chi$  в (2.30) можно включить в  $\mu^{(k-1)}$ . Таким образом,

$$U^{(k)} = \nu S^{(2)} \nabla \mu^{(k-1)} + (\nu + 1)\mu^{(k-1)} P^{(1)}. \quad (2.31)$$

Применяя оператор  $\frac{1}{2} \nabla$  к уравнению (2.27) и сокращая  $\mathbf{H}$ , получим

$$(u^{(0)}, P^{(1)}) u^{(0)} = \rho^{(0)} P^{(1)} + \frac{1}{2} \delta_0 x, \quad (2.32)$$

Умножая скалярно (2.32) на  $U^{(k)}$ , получим  $(u^{(0)}, P^{(1)})(u^{(0)}, U^{(k)}) = \rho^{(0)}(U^{(k)}, P^{(1)}) + \delta_0(U^{(k)}, x)/2$ . Подставим  $R^{(k)} = -(u^{(0)}, U^{(k)})$  в первое уравнение в (2.26) и воспользуемся последним соотношением. Уравнение примет вид  $\delta_0(x, U^{(k)}) + 2\nu S^{(2)}((u^{(0)}, (u^{(0)}, \nu)U^{(k)}) - \rho^{(0)}(\nabla, U^{(k)})) = 0$ . Подставляя в него  $U^{(k)}$  вида (2.31) и используя (2.32), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \mu^{(k-1)}((\nu^2 k + \nu^2 + \nu k + 1)\delta_0 + \nu(\nu + 1)(u^{(0)}, \mathbf{H} u^{(0)}) \\ & - \nu(\nu + 1)\rho^{(0)} \Delta S^{(2)}) + \nu^2 S^{(2)}((u^{(0)}, \nabla)(u^{(0)}, \nabla \mu^{(k-1)}) - \rho^{(0)} \Delta \mu^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Применяя оператор  $\nabla$  к (2.32), придем к уравнению  $(u^{(0)}, \mathbf{H} u^{(0)}) = \rho^{(0)} \Delta S^{(2)} + \delta_0$ . Таким образом, (2.33) принимает вид

$$\mu^{(k-1)}(\nu + 1)(\nu k + 1)\delta_0 + \nu^2 S^{(2)}((u^{(0)}, \nabla)(u^{(0)}, \nabla \mu^{(k-1)}) - \rho^{(0)} \Delta \mu^{(k-1)}) = 0,$$

откуда вытекает, что  $\mu^{(k-1)}$  делится на  $S^{(2)}$ . Теперь из (2.31) и выражения для  $R^{(k)}$  следует, что  $U^{(k)}$  и  $R^{(k)}$  делятся на  $S^{(2)}$ , это противоречит нашему предположению.  $\square$



**Лемма 13.**  $R^{(k)} = 0$  если  $R^{(j)} = 0$  и  $U^{(j)} = 0$  for  $j < k$ , при  $k \geq 1$ .

Поскольку  $u^{(0)} = 0$ , то второе из уравнений (2.26) принимает вид  $R^{(k)}P^{(1)} + \nu S^{(2)}\nabla R^{(k)} = 0$ . Умножим его на  $x$ . В силу тождества Эйлера имеем  $(x, \nabla R^{(k)}) = kR^{(k)}$  и  $(P^{(1)}, x) = 2S^{(2)}$ . Следовательно,  $R^{(k)}(\nu k + 2) = 0$ , откуда получаем  $R^{(k)} = 0$ .

Таким образом, для завершения доказательства леммы 9 осталось показать, что  $U^{(k)} = 0$  при выполнении следующего предположения:  $u^{(0)} = 0$  и  $R^{(j+1)} = 0$ ,  $U^{(j)} = 0$  for  $j < k$ , где  $k \geq 1$ . Запишем первые векторные уравнения для наименьших степеней  $x$  в (2.20)–(2.23). Они имеют один и тот же вид:

$$(U^{(k)}, P^{(1)}) + \nu S^{(2)}(\nabla, U^{(k)}) = 0, \quad (2.34)$$

$$R^{(k+1)}P^{(1)} + \Lambda^{(2)}U^{(k)} + \nu S^{(2)}(U_t^{(k)} + (u^{(1)}, \nabla)U^{(k)} + (U^{(k)}, \nabla)u^{(1)} + \nabla R^{(k+1)} - \omega^{(0)}\mathbf{T}U^{(k)}) = 0. \quad (2.35)$$

Рассмотрим детально уравнения (2.20), (2.21). Доказательство неразрешимости уравнений (2.22), (2.23) носит аналогичный чисто алгебраический характер. Нам понадобятся вторые векторные уравнения в системах (2.20)–(2.21). Приравняем коэффициенты при наименьших степенях в разложении по степеням  $x$  к нулю. В результате получим уравнения

$$R^{(k+1)}(U^{(k)}, P^{(1)}) + \nu S^{(2)}(\nabla, R^{(k+1)}U^{(k)}) = 0 \quad (2.36)$$

$$(U^{(k)}, P^{(1)})U^{(k)} + \nu S^{(2)}(U^{(k)}, \nabla)U^{(k)} = 0. \quad (2.37)$$

**Лемма 14.** Уравнения (2.34), (2.35) и (2.37) совместны в том и только в том случае, если  $U^{(k)} = 0$ .

**Доказательство.** Умножим (2.35) на  $P^{(1)}$  и воспользуемся выражением для  $(U^{(k)}, P^{(1)})$  из уравнения (2.34). Получим, что  $R^{(k+1)}$  делится на  $S^{(2)}$ :  $R^{(k+1)} = \tilde{R}^{(k+1)}S^{(2)}$ . Теперь заметим, что если  $U^{(k)} = S^{(2)}\tilde{U}^{(k-2)}$ , то подстановка  $U^{(k)}$ ,  $R^{(k+1)}$  в (2.34), (2.35), (2.37) дает такую же систему для  $\tilde{U}^{(k-2)}$ ,  $\tilde{R}^{(k+1)}$  с  $\tilde{\nu} = \nu/(1 + \nu)$  вместо  $\nu$ . Следовательно, без ограничения общности можно считать, что  $U^{(k)}$  не делится на  $S^{(2)}$  (в противном случае мы приходим за конечное число шагов к исходной системе с  $k < 2$ ).

Из уравнений (2.34), соотношения  $2S^{(2)} = (P^{(1)}, x)$  и леммы 2 получаем

$$U^{(k)} = \alpha^{(k-1)}(t, x)x + \sigma^{(k-1)}(t, x)P_{\perp}^{(1)}, \quad \alpha^{(k-1)} = -\frac{1}{2}\nu(\nabla, U^{(k)}) \quad (2.38)$$

где  $\sigma^{(k-1)}$  есть  $(k-1)$ -форма с коэффициентами, являющимися гладкими функциями переменной  $t$ .

Из (2.34), выразим  $(U^{(k)}, P^{(1)})$  через  $(\nabla, U^{(k)})S^{(2)}$  и подставим результат в (2.37). Тогда получим  $(U^{(k)}, \nabla)U^{(k)} = (\nabla, U^{(k)})U^{(k)}$ . Остальные вычисления показывают, что это уравнение можно переписать в виде  $\det(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x}) = 0$ . Отсюда следует, что векторы  $\frac{\partial U_1^{(k)}}{\partial x}$  и  $\frac{\partial U_2^{(k)}}{\partial x}$  коллинеарны, т. е.,  $\frac{\partial U_1^{(k)}}{\partial x} = \gamma_0 \frac{\partial U_2^{(k)}}{\partial x}$ , где  $\gamma_0(t)$  гладкая функция. Интегрируя эти соотношения по  $x$  и учитывая тот факт, что  $U^{(k)}$  однородные полиномы по  $x$ , получаем  $U_2^{(k)} = U_1^{(k)} \gamma_0$ .

Подставим это выражение в (2.38) и умножим скалярно обе части получившегося соотношения на  $\mathbf{T}x$ ; в результате получим  $U_1^{(k)}(x_2 - \gamma_0 x_1) = 2\sigma^{(k-1)}S^{(2)}$ , что противоречит предположению о том, что  $U^{(k)}$  не делится на  $S^{(2)}$ , так как  $(x_2 - x_1\gamma_0) \neq 0$ .

Тем самым завершается доказательство леммы 14 и 9.  $\square$

В заключение отметим, что соответствующей системой для  $F = \sqrt{\tau}$  является (3.1), (3.4) и в отличие от предыдущих случаев эта система может быть совместной, если  $U$  и  $R$  имеют ненулевые производные. Этот случай изучается в следующей главе.

## Глава 3

# Анализ негладкой компоненты решения и возникновение условий Коши-Римана на траектории

Цель этой главы – получить цепочку уравнений для коэффициентов в рядах Тейлора, соответствующую решению с особенностью типа квадратного корня. Мы дадим естественное объяснение возникновению некоторых коэффициентов в разложении и появлению некоторых соотношений.

### 3.1 Негладкая (вихревая) компонента решения

Изучим теперь решения системы (2) вида (1.1) с функциями  $\rho$ ,  $S$ ,  $R$ ,  $u$  и  $U$  удовлетворяющими условиям, описанным в главе 1 и представимыми рядами (1.2). Как и ранее вначале перейдем к координатам, связанным с центром точечной особенности, и перепишем систему (2) в виде (2.1). Центр точечной особенности теперь имеет координату  $x = 0$ . Из свойств  $S$  следует, что

$$S^{(0)} = S^{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad S = S^{(2)} + S^{(3)} + \dots,$$

где  $S^{(2)} = \frac{1}{2}(x, \mathbf{H}(t)x)$  положительно определенная квадратичная форма, причем  $S^{(2)} \neq \mu(t)(x_1^2 + x_2^2)$ . Вернемся к исходной системе (2.1). Предположим, что она имеет решение вида (1.1) с  $F = \sqrt{\tau}$  и  $\tilde{u} =$

$U\sqrt{S}$ ,  $\tilde{\rho} = R\sqrt{S}$ . Тогда уравнения для  $(u, \rho)$  и  $(\tilde{u}, \tilde{\rho})$  распадаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u + \tilde{\rho} \tilde{u}) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u + \nabla \rho + \dot{V} - \omega \mathbf{T}(u + V) + (\tilde{u}, \nabla)\tilde{u} &= 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} u + \rho \tilde{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (u, \nabla)\tilde{u} + (\tilde{u}, \nabla)u + \nabla \tilde{\rho} - \omega \mathbf{T}\tilde{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Предположим, что нам известны функции  $\rho(x, t)$  и  $u(x, t)$ . Тогда для  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\rho}$  мы имеем *линейную систему* of уравнений. При этом нас интересуют решения с особенностями вида (1.1). Для системы (3.2) рассмотрим задачу Коши  $\tilde{\rho}|_{t=0} = R(x, 0)\sqrt{S(x, 0)}$ ,  $\tilde{u}|_{t=0} = U(x, 0)\sqrt{S(x, 0)}$ . Таким образом, мы приходим к задаче о нахождении решений с особенностью для гиперболической системы. Хорошо известно, что такие задачи можно решать при помощи разложений по гладкости или лучевых разложений (см., например, [8, 27]). Далее мы по существу используем идеи, восходящие к этим методам. Однако имеются некоторые отличия, существенные с точки зрения лучевого метода, которые не позволяют использовать для нашей задачи напрямую результаты о разложениях по гладкости. Прежде всего, использование разложения по гладкости позволяет построить решение задачи Коши, а не решение со специальной структурой. В частности, такое разложение не гарантирует структуры (1.1) решения, даже если эта структура имеет место при  $t = 0$ . Даже если главная негладкая составляющая решения имеет вид (1.1) с  $F = \sqrt{\tau}$ , последующие, более гладкие слагаемые с  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\rho}$  вполне могут иметь другую структуру; иными словами, согласно разложению по гладкости амплитуды  $U$  и  $R$  в (1.1) не обязаны быть гладкими. С другой стороны, можно потребовать, чтобы  $R$  и  $U$  были гладкими, но тогда возникает риск получения лишних условий, которые являются следствием выбранного способа решения. Поэтому, несмотря на то что мы помним о лучевых разложениях, все рассуждения будут проводится только на основе условий (3.2) и гладкости  $u$ ,  $\rho$ ,  $U$  и  $R$ .

Для реализации сказанного повторим процедуру, использованную в лемме 9 для решений с особенностями типа квадратного корня: подставим функции (1.1) с  $F = \sqrt{\tau}$  в (3.2), спроизведем соответствующее дифференцирование и сгруппируем слагаемые, содержащие  $\sqrt{S}$  в знаменателе, в левой части и слагаемые, содержащие  $\sqrt{S}$  в числителе, в правой части. Тогда получим

$$\frac{1}{2\sqrt{S}} \begin{pmatrix} \Lambda & \rho P_1 & \rho P_2 \\ P_1 & \Lambda & 0 \\ P_2 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = -\sqrt{S} \begin{pmatrix} f \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Это приводит к системе

$$\Lambda R + \rho(P, U) + 2Sf = 0, \quad \Lambda U + PR + 2SF = 0, \quad (3.4)$$

Здесь

$$f = R_t + (\nabla, uR + \rho U), \quad F = U_t + (u, \nabla)U + (U, \nabla)u - \omega \mathbf{T}U + \nabla R. \quad (3.5)$$

Если бы мы попытались применить лучевые разложения для нахождения решений с особенностью системы (3.3), то мы бы представили функции  $R$  и  $U$  некоторыми (асимптотическими) рядами; для первых коэффициентов  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{U}_1$ , и  $\tilde{U}_2$  в этих рядах для  $R$ ,  $U_1$ , и  $U_2$  соответственно мы бы получили уравнения относительно собственных векторов матрицы в (3.3)), соответствующих нулевому собственному значению. Собственные значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_{\pm}$  этой матрицы имеют вид (см., например, [Co]):  $\lambda_0 = \Lambda$ ,  $\lambda_{\pm} = \Lambda \pm \rho|P|$ . Если мы положим  $\lambda_0 = 0$  или  $\lambda_{\pm} = 0$  (как в ВКБ методе), то получим характеристические уравнения (уравнения эйконала или Гамильтона-Якоби), соответствующие различным модам, описывающим распространение особенностей: медленной (гидродинамической) в первом случае и быстрым (акустическим) в других случаях. Заметим также, что при  $P = 0$  все  $\lambda_0$  и  $\lambda_{\pm}$  совпадают и, более того,  $\lambda_{\pm}$  перестают быть гладкими. Таким образом, мы имеем дело с ситуацией, известной в теории гиперболических уравнений как “негладкая смена кратности характеристик”. Поскольку нас интересует точка из  $R_x^2$ , в которой  $S$  достигает своего минимума, то в этой точке имеем  $P = 0$ . Следовательно, мы не можем исключить те точки, где  $P \neq 0$ . Более того, именно те точки  $x$  где  $P = \nabla S$  обращается в нуль, представляют для нас основной интерес. Наконец, мы не можем просто отбросить правую часть в (3.3) для “главного члена” разложения без дополнительного рассмотрения, так как левая и правая части в (3.3) имеют один и тот же порядок малости при  $|x| \rightarrow 0$ . Таким образом, мы должны с самого начала рассмотреть всю систему (3.1), (3.2) и изучить ее свойства. С первого взгляда может показаться, что система (3.2) недоопределена: имеются три уравнения относительно четырех неизвестных функций ( $U_1, U_2, R, S$ ) (или шесть уравнений для семи неизвестных функций, если добавить систему (3.1) и функции фона  $(v, w, \rho)$ ). Мы покажем, что заданные свойства функции  $S$  и гладкость всех названных функций фактически приводит к возникновению уравнения эйконала для фазы  $S$  и система замыкается.

### 3.2 Особенность, “вмороженная” в поле скоростей

Так же как и в предыдущей главе, разложим все функции в ряды Тейлора, подставим эти ряды в системы (3.4) и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях  $x$ . Указанная процедура приводит к некоторым равенствам и уравнениям для коэффициентов в рядах Тейлора  $S^{(k)}, U^{(k)}, u^{(k)}$  и т.д.

**Лемма 15.** **1.**  $U^{(0)} = 0$ ,  $R^{(0)} = 0$ . **2.**  $u^{(0)} = 0$ ; другими словами, особенность “вморожена” в поле скоростей  $u + V$  ( $u$  в общем поле скоростей, так как  $\mathbf{u} = u + V$  в точке  $x = X(t)$ ): особая точка  $X(t)$  перемещается вдоль траектории поля  $\mathbf{u}$ .

**Доказательство.** Для доказательства выпишем слагаемые наименьшего порядка в уравнениях системы (3.4). Они имеют вид (2.24). Следовательно, справедливы лемма 10 и первая часть леммы 15. Второе утверждение есть частный случай леммы 12.  $\square$

### 3.3 Уравнение эйконала для функции $S$

“Вмороженность” особенности в поле скоростей позволяет доказать, что фаза  $S$  может быть без ограничения общности выбрана в качестве решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Рассматривая старшие члены в (3.4), получаем уравнения

$$\rho^{(0)}(U^{(1)}, P^{(1)}) + 2S^{(2)}\rho^{(0)}(\nabla, U^{(1)}) = 0, \quad R^{(1)}P^{(1)} + 2S^{(2)}\nabla R^{(1)} = 0. \quad (3.6)$$

**Лемма 16.** *Имеют место следующие равенства*

$$R^{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad U^{(1)} = A\mathbf{T}P^{(1)}, \quad (3.7)$$

где  $A(t)$  гладкая функция.

**Доказательство.** Первое равенство есть частный случай леммы 13 для  $k = 1$ . Далее, из первого уравнения в (3.6) следует, что  $(U^{(1)} + (\nabla, U^{(1)})x, P^{(1)}) = 0$ , и, таким образом,  $U^{(1)} = -(\nabla, U^{(1)})x + A\mathbf{T}P_{\perp}^{(1)}$ . Применяя к этому соотношению оператор  $\text{div}$  убеждаемся в том, что  $(\nabla, U^{(1)}) = 0$ . Следовательно, имеют место уравнения (3.7).  $\square$

**Лемма 17.** *Предположим, что по крайней мере одна из производных  $\partial U / \partial x_j$  не равна нулю. Тогда без ограничения общности можно*

считать, что с точностью до функций  $o(|x|^\infty)$   $S$  является решением уравнения эйконала (или Гамильтона-Якоби)  $\Lambda \equiv S_t + (u, \nabla S) = 0$ . Следовательно  $S^{(2)}$  является решением уравнения эйконала с линеаризованными коэффициентами

$$S_t^{(2)} + (u^{(1)}, \nabla S^{(2)}) = 0 \iff \Lambda^{(2)} = 0. \quad (3.8)$$

*Доказательство.* Умножая скалярно уравнение (3.4) на  $P_\perp$ , получаем

$$\Lambda(P_\perp, U) + 2S(F, P_\perp) = 0, \quad (3.9)$$

По предположению леммы 17  $A \neq 0$  в (3.7) на некотором временном интервале  $[0, T]$ . Функции  $(U, P_\perp)$  и  $S$  удовлетворяют предположениям леммы 3, и имеет место уравнение (3.9). Следовательно, существует гладкая функция  $\alpha(x, t)$ , представимая в виде своего ряда Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  с гладкими коэффициентами, гладким образом зависящими от  $t$ , такая, что  $\Lambda = \alpha S$ . Вспоминая, что  $\Lambda = S_t + (u, P)$ , приходим к уравнению

$$S_t + (u, \nabla S) = \alpha S. \quad (3.10)$$

Пусть функция  $D(x, t)$  – гладкая и положительная в окрестности  $x = 0$ . Мы можем написать  $S = DS'$ , где функция  $S'$  удовлетворяет тем же условиям, что и функция  $S$ . Тогда мы можем вынести функцию  $D$  из радикала в (1.1) и включить в амплитуду  $U$  и  $R$  т.е. сделать замену переменных:

$$S' = S/D, \quad U' = U\sqrt{D}, \quad R' = R\sqrt{D}.$$

Подставим  $S = DS'$  в (3.10), получим

$$D\left(\frac{\partial S'}{\partial t} + (u, \nabla S')\right) + S'\left(\frac{\partial D}{\partial t} + (u, \nabla D) - \alpha D\right) = 0. \quad (3.11)$$

Выберем функцию  $D(x, t)$  так чтобы

$$D_t + (u, \nabla D) - \alpha D = 0.$$

Это уравнение легко решается методом характеристик:

$$D(x, t) = \exp\left(\int_0^t \alpha(X(x_0, \tau), \tau) d\tau\right) \Big|_{x_0 = X^{-1}(x, t)}.$$

Здесь  $X(x_0, t)$  решение уравнения  $\dot{x} = u(x, t)$  с начальными условиями  $x|_{t=0} = x_0$ . Начальные условия для  $D(x, t)$  мы выбрали так, чтобы не изменились начальные условия для  $S$ ,  $U$ ,  $R$ . Уравнение (3.11) было

сведено к уравнению Гамильтона–Якоби (1.7) для функции  $S'$ . Таким образом без потери общности мы можем положить  $\alpha(x, t) = 0$  and  $\Lambda = 0$ . Доказательство леммы завершено.

Наличие уравнения эйконала позволяет замкнуть систему (3.4), (3.1) для функций  $u, \rho, U, R, S$  а также упростить систему (3.4) и вывести некоторые полезные формулы. А именно – система (3.4) теперь принимает вид

$$\rho(P, U) + 2Sf = 0 \quad (a), \quad PR + 2SF = 0 \quad (b). \quad (3.12)$$

**Следствие 2.** *Функция  $R$  представляется в виде*

$$R = -2\alpha(x, t)S, \quad (3.13)$$

и  $F = \alpha P$ , где  $\alpha(x, t)$  – гладкая функция.

Для доказательства последнего равенства, умножим скалярно уравнение (3.12b) на  $P$ . Используя лемму 3, немедленно получаем (3.13). Второе равенство следует из (3.12b).

Мы уже использовали хорошо известный факт, что интегрирование уравнения эйконала для  $S$  сводится к системе  $\dot{x} = u$  и фаза  $S$  не меняется вдоль траектории. Таким образом, если нам известна  $S$  в начальный момент времени  $t_0$  и известна скорость фона, то мы можем найти  $S$  при  $t \geq t_0$ . Но напомним, что скорость фона  $u$  также является неизвестной функцией; более того, нет уверенности, что гладкие решения  $u, U, \rho, R$  существуют при любом выборе начальной фазы  $S$ . Воспользуемся теорией возмущений (основанной на разложениях в ряды Тейлора) для преодоления этой трудности. Ограничимся при этом рассмотрением главного члена  $S^{(2)}$  функции  $S$ .

Тогда с (3.8) мы можем связать линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (так как  $u^{(1)} = \partial u / \partial x|_{x=0}x$ ) и ее матрицу Коши  $G(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u^{(1)}(x), & x|_{t=0} &= x^0, & (a) \\ \dot{G} &= \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}G, & G|_{t=0} &= E. & (b) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Предположим, что

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}(x, \mathbf{H}^0 x) \quad \text{при } t = 0,$$

где  $\mathbf{H}^0 = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}|_{t=0} \equiv \Pi^0 B(\Pi^0)^*$  есть вещественная симметричная положительная матрица, причем  $\Pi^0 = \Pi(\theta_0)$ ,  $B$  определены в (1.12)-(1.15). Интегрируя (3.8), получаем следующее утверждение.



**Следствие 3.** Функция  $S^{(2)}$  имеет вид

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}(x, \mathbf{H}(t)x) \equiv \frac{1}{2}(x^0, \mathbf{H}^0 x^0). \quad (3.15)$$

Здесь  $\mathbf{H} = {}^t G^{-1} \mathbf{H}^0 G^{-1}$  – симметричная положительная матрица и  $x^0 = G(t)^{-1}x$ .

Обозначим через  $d/dt$  полную производную в силу (3.14а):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla).$$

Тогда в силу выбора  $S$ , вектор-функции  $P, P_{\perp}$  удовлетворяют уравнениям (сопряженным к (3.14))

$$\frac{dP}{dt} = -{}^t(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x})P \quad (\text{a}), \quad \frac{dP_{\perp}}{dt} = \mathbf{T}^t(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x})\mathbf{T}P_{\perp} \quad (\text{b}). \quad (3.16)$$

### 3.4 Уравнение переноса для амплитуды и возникновение условий Коши-Римана

**Лемма 18.** На траектории  $\Gamma$  выполняются условия Коши-Римана (1.8) и имеют место следующие формулы:  $A(t) = A = \text{const}$ ,

$$F^{(1)} = \frac{1}{3}A(\omega_0 + \text{rot}_3 u^{(1)})P^{(1)} \equiv \frac{1}{3}A(\omega_0 - 2p)P^{(1)}, \quad (3.17)$$

$$R = (\frac{2}{3}A(2p - \omega_0) + O(|x|))S. \quad (3.18)$$

**Доказательство.** В силу (3.13) из (3.12b) находим

$$(F^{(1)}, P_{\perp}^{(1)}) = 0 \iff F^{(1)} = \alpha_0 P^{(1)}, \quad \alpha_0(t) = \alpha(0, t). \quad (3.19)$$

Из определения  $F$  следует, что

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= U_t^{(1)} + (u^{(1)}, \nabla)U^{(1)} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}U^{(1)} - \omega_0 \mathbf{T}U^{(1)} + \nabla R^{(2)} \\ &= \frac{d}{dt}U^{(1)} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}U^{(1)} - \omega_0 \mathbf{T}U^{(1)} + \nabla R^{(2)} \\ &= \dot{A}P_{\perp}^{(1)} + A\dot{P}_{\perp}^{(1)} + A\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}P_{\perp}^{(1)} + \omega_0 AP^{(1)} - 2\alpha_0 P^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя  $F^{(1)}$  в (3.19), получаем следующее уравнение переноса для функции  $A(t)$ :

$$\dot{A}(P^{(1)})^2 + \frac{A}{2} \frac{d}{dt}(P^{(1)})^2 + A(P_{\perp}^{(1)}, \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}P_{\perp}^{(1)}) = 0. \quad (3.21)$$

Преобразуем последнее слагаемое. Заметим, что в силу системы (3.1) функции  $\rho_0$  и  $u^{(1)}$  удовлетворяют (1.18) (для доказательства достаточно положить  $x = 0$  in (3.1)). Отсюда находим, что  $\operatorname{div} u^{(1)} = -\dot{\rho}_0/\rho_0$ . Далее,

$$\begin{aligned} (P_\perp^{(1)}, \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} P_\perp^{(1)}) &= ((P_2^{(1)})^2 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} - P_1^{(1)} P_2^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \\ &\quad - P_1^{(1)} P_2^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + (P_1^{(1)})^2 \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2}) \\ &= (\text{by (4.1)}) = -(P^{(1)}, \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} P^{(1)}) - (P^{(1)})^2 \dot{\rho}_0/\rho_0 \\ &= (\text{by (3.16a)}) = (\dot{P}^{(1)}, P^{(1)}) - (P^{(1)})^2 \dot{\rho}_0/\rho_0. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3.21), получаем

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{A(P^{(1)})^2}{\rho_0} \right) = 0, \quad \text{or} \quad A(t)(P^{(1)})^2 = \rho_0(t) \frac{A(0)}{\rho_0(0)} (P_0^{(1)})^2(x^0). \quad (3.22)$$

Теперь заметим, что

$$P^{(1)}(t) = {}^t G^{-1} P_0^{(1)} \equiv {}^t G^{-1} \mathbf{H}^0 x^0, \quad P_0^{(1)} = \mathbf{H}^0 x^0,$$

на траекториях системы (3.14a), где  $G(t)$  – матрица Коши этой системы. Таким образом, из (3.22) вытекает равенство двух квадратичных форм. Это возможно, только если матрица Коши  $G$  удовлетворяет уравнению

$$G^t G = A(t) \rho_0(0) (A(0) \rho_0(t))^{-1} E.$$

Здесь  $E$  единичная  $2 \times 2$  матрица. Очевидно, это равенство возможно, только если  $G$  представимо в виде  $G = g(t) \Pi(t)$ , где матрица поворота  $\Pi$  определенная в части **2е.** теоремы 1, и угол  $\theta(t)$  – гладкая функция. Выясним, что это означает для системы (3.14b). Подставим  $G$  в (3.14(b)), продифференцируем  $G$  и умножим справа на  $\Pi^* = \Pi^{-1}$ . В результате получим соотношение  $\dot{g} + \dot{\theta} \mathbf{T} g - g u_x^{(1)} = 0$ , из которого немедленно вытекают условия Коши-Римана (1.8) на  $\Gamma$ . Воспользуемся обозначениями (1.3), (1.4). Из последнего уравнения получаем формулы (1.14) и (1.15) для  $g(t)$  и  $\theta(t)$ , а из (4.1) получаем соотношение  $\rho_0(t) = \rho_0(0)/g^2(t)$ ; объединяя его с (3.22), имеем  $A = \text{const}$ . Теперь подставим полученные выражения в (3.19), (3.20), тогда, учитывая (3.16b) получим  $\alpha = \frac{1}{3} A(\omega_0 - 2p)$  и формулы (3.17) – (3.18). Подставляя выражения для  $g$  и  $\theta$  в (3.15) и (3.7), получаем слагаемые  $O(|x - X(t)|^2)$  в (1.12).  $\square$

### 3.5 Вычисление поправки $U^{(2)}$

Рассмотрим первое уравнение в (3.4). Собирая слагаемые порядка  $|x|^3$ , получим

$$\rho^{(0)}(P^{(1)}, U^{(2)}) + (P^{(2)}, U^{(1)}) = -2S^{(2)}f^{(1)}.$$

Учитывая (3.7) и равенство  $S^{(2)} = \frac{1}{2}(P^{(1)}, x)$ , получим

$$(\rho_0(U^{(2)} - \rho_0 A(P_{\perp}^{(2)} + f^{(1)}x, P^{(1)})) = 0, \quad \text{где} \quad P_{\perp}^{(2)} = \mathbf{T}P^{(2)} = \mathbf{T}\nabla S^{(3)}.$$

Лемма 7 влечет

$$U^{(2)} = AP_{\perp}^{(2)} - \frac{1}{\rho_0}f^{(1)}x + \phi^{(1)}(x, t)P_{\perp}^{(1)}, \quad (3.23)$$

где  $\phi^{(1)}$  некоторая линейная форма от  $x$ . Для  $f$  имеем

$$f^{(1)} = \operatorname{div}(\rho_0 U^{(2)} + \rho^{(1)}U^{(1)}) = \rho_0 \operatorname{div} U^{(2)} + U^{(1)}(\nabla \rho^{(1)}).$$

Так как для любой линейной формы от  $x$   $\gamma(x, t)$ ,  $\operatorname{div}(\gamma(x, t)x) = 3\gamma(x, t)$ , то взяв дивергенцию от обеих частей равенства (3.23) найдем:

$$\operatorname{div} U^{(2)} = \frac{A}{4} \operatorname{div} P_{\perp}^{(2)} - \frac{3}{4\rho_0}(U^{(1)}, \nabla \rho^{(1)}) + \frac{1}{4}\nabla \phi^{(1)} \cdot P_{\perp}^{(1)}.$$

Отсюда и из (3.23) следует формула

$$U^{(2)} = AP_{\perp}^{(2)} + \phi^{(1)}P_{\perp}^{(1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{\rho_0}\left((\phi\rho)^{(1)}, P_{\perp}^{(1)}\right)x. \quad (3.24)$$

Здесь  $\phi = A + \phi^{(1)}$ . Легко проверить следующее соотношение:

$$x(\nabla(\phi\rho)^{(1)}, P_{\perp}^{(1)}) = -2S^{(2)}\mathbf{T}\nabla(\phi\rho)^{(1)} + (\phi\rho)^{(1)}P_{\perp}^{(1)}. \quad (3.25)$$

Подставляя это в (3.24) получим

$$U^{(2)} = AP_{\perp}^{(2)} + \phi^{(1)}P_{\perp}^{(1)} + \frac{1}{2\rho_0}S^{(2)}\mathbf{T}\nabla(\phi\rho)^{(1)} - \frac{1}{4\rho_0}(\phi\rho)^{(1)}P_{\perp}^{(1)}.$$

Вводя новую переменную  $\phi'^{(1)} = \frac{3}{4}\phi^{(1)} - \frac{1}{4}\frac{A}{\rho_0}\rho^{(1)}$  перепишем последнее выражение в виде:

$$U^{(2)} = AP_{\perp}^{(2)} + \phi'^{(1)}P_{\perp}^{(1)} + \frac{2}{3\rho_0}S^{(2)}\mathbf{T}\nabla(\phi'\rho)^{(1)}. \quad (3.26)$$

Здесь  $\phi'^{(0)} = A$ . В дальнейшем для упрощения обозначений штрихи у новых переменных мы опускаем. Линейная форма  $\phi^{(1)}$  пока остается неизвестной.

### 3.6 Порядок остатка для негладкой составляющей решения

Нетрудно доказать следующее утверждение.

**Лемма 19.** Пусть коэффициенты  $S^{(i)}, U^{(i)}$  и  $R^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , в разложениях соответствующих функций в ряды Тейлора определены по формулам  $S^{(0)} = S^{(1)} = R^{(0)} = 0, U^{(0)} = 0$ , а также (3.15), (3.7), (1.33), и (3.18), соответственно. Тогда вектор-функции  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\rho}$  удовлетворяют системе (3.2) с точностью до  $O(x^3)$ .

### 3.7 Закон сохранения для потенциального вихря и условия Коши-Римана

Из предыдущего видно, что именно из закона сохранения для  $(P^{(1)})^2 A / \rho_0(t)$  вытекают условия Коши-Римана. Мы уже говорили, что уравнения (2) также имеют переменные, которые остаются постоянными на траекториях поля скоростей  $\mathbf{u}$ . Теперь мы покажем, что условия Коши-Римана являются следствием закона сохранения для потенциального вихря (3).

Отделим друг от друга гладкую и негладкую составляющие в законе сохранения для  $\Pi$  (3). Негладкая составляющая имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla)\right) \frac{\tilde{\Omega}\rho - \Omega\tilde{\rho}}{\rho^2 - \tilde{\rho}^2} + (\tilde{u}, \nabla) \frac{\Omega\rho - \tilde{\Omega}\tilde{\rho}}{\rho^2 - \tilde{\rho}^2} = 0. \quad (3.27)$$

Здесь  $\Omega = u_{2x_1} - u_{1x_2} + \omega$  и  $\tilde{\Omega} = \tilde{u}_{2x_1} - \tilde{u}_{1x_2}$ .

Если в полученном уравнении заменить  $\tilde{u}$  и  $\tilde{\rho}$  выражениями (1.1) и затем умножить уравнения на  $-S^{3/2}$ , то уравнение примет вид

$$\begin{aligned} S \left( \frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla) \right) \frac{\rho(U, \mathbf{TP}) + 2S\rho(\mathbf{T}\nabla, U) + 2\Omega SR}{\rho^2 - SR^2} - \\ \frac{1}{2} \frac{\rho(U, \mathbf{TP}) + 2S\rho(\mathbf{T}\nabla, U) + 2\Omega SR}{\rho^2 - SR^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + (u, \nabla S) \right) - \\ S^2(U, \nabla) \frac{2\Omega\rho + R(U, \mathbf{TP}) + 2SR(\mathbf{T}\nabla, U)}{\rho^2 - SR^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Приравняем в уравнении (3.28) главную по  $x$  часть к нулю. Учитывая вид  $U^{(1)}$ , равенство  $u^{(0)} = 0$ , и уравнение эйконала для  $S^{(2)}$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{A(t)}{\rho_0(t)} ((P^{(1)})^2) \right] + \frac{d}{dt} [2S^{(2)} \nabla^2 S^{(2)}] = 0, \quad \frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \right) \quad (3.29)$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, показывают, что (3.29) имеет место тогда и только тогда, когда первое и второе слагаемые в левой части (3.29) равны нулю [42]. Из этих равенств вытекают условия Коши-Римана.

### 3.8 Поправка к условиям Коши-Римана

Выпишем члены порядка  $|x|^3$  в уравнении (3.28) и поделим на  $S^{(2)}$ . Имеем

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{(U, P_\perp) + 2S(\mathbf{T}\nabla, U)}{\rho} \right]^{(3)} - 2S^{(2)}(U^{(1)}, \nabla) \left[ \frac{\Omega}{\rho} \right]^{(1)} = 0. \quad (3.30)$$

Подставим теперь выражения (3.7) и (3.26) в (3.30), произведем дифференцирования, воспользовавшись уравнениями (1.7) и (3.16) и умножим результат на  $\frac{\rho^{(0)}}{A}$ , получим уравнение, аналогичное (3.21):

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{\dot{\phi}^{(1)}}{A} - \left[ \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} - 2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right) P^{(1)}, P^{(1)} \right) + \\ & 2S^{(2)} \left( \left( \nabla \left( \left[ \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} + \frac{\dot{\phi}^{(1)}}{A} \right), P^{(1)} \right) + \left( \frac{\dot{\phi}^{(1)}}{A} - \left[ \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} \right) \Delta S^{(2)} + \right. \\ & \left. \left( \nabla \frac{\dot{\phi}^{(1)}}{A}, P^{(1)} \right) - \Delta(u^{(2)}, P^{(1)}) - \rho_0(P_\perp^{(1)}, \nabla) \left[ \frac{\Omega}{\rho} \right]^{(1)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Разделим уравнение непрерывности системы (3.1) на  $\rho$ , и соберем члены первого порядка малости по  $|x|$ , получим  $\left[ \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^{(1)} = -\operatorname{div} u^{(2)}$ . Приравнявая теперь коэффициенты при различных степенях  $x$  к нулю в системе координат, где матрица  $\mathbf{H}$  диагональна (аналогично тому, как мы это делали при выводе условий Коши-Римана), приходим к системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} & 6b_1(b_2(2v_{20} - w_{11} + \psi_{10}) + \\ & \quad b_1(-2v_{02} - 8v_{20} + w_{11} + 4\psi_{10} + \pi_{01})) = 0, \\ & -2b_1(2b_1(v_{11} - 2w_{02} - \psi_{01}) + \\ & \quad b_2(2v_{11} + 6w_{02} + 6w_{20} - 3\psi_{01} + \pi_{10})) = 0, \\ & -2b_2(-2b_2(2v_{20} - w_{11} + \psi_{10}) + \\ & \quad b_1(6v_{02} + 6v_{20} + 2w_{11} - 3\psi_{10} - \pi_{01})) = 0, \\ & 6b_2(b_1(-v_{11} + 2w_{02} + \psi_{01}) + \\ & \quad b_2(v_{11} - 8w_{02} - 2w_{20} + 4\psi_{01} - \pi_{10})) = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь  $\psi_{10}$ ,  $\psi_{01}$  – коэффициенты линейной формы  $\frac{\dot{\phi}^{(1)}}{A}$ ,  $\pi_{10}$ ,  $\pi_{01}$  – коэффициенты формы  $\rho_0 \left[ \frac{\Omega}{\rho} \right]^{(1)}$ . Исключая из этих уравнений  $\psi_{10}$  и  $\psi_{01}$ , приходим к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}(b_1 - b_2)(8v_{02} + 10v_{20} + w_{11} - \pi_{01}) &= (b_1 + b_2)(v_{20} - v_{02} - w_{11}), \\ \frac{1}{10}(b_2 - b_1)(8w_{20} + 10w_{02} + v_{11} + \pi_{10}) &= (b_1 + b_2)(w_{02} - w_{20} - v_{11}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Переписывая последнюю систему уравнений в исходной системе координат, получим уравнение

$$\frac{1}{10}(2\mathbf{H} - \text{tr}(\mathbf{H})I) \begin{pmatrix} 8v_{02} + 10v_{20} + w_{11} - \pi_{01} \\ 8w_{20} + 10w_{02} + v_{11} + \pi_{10} \end{pmatrix} = \text{tr}(\mathbf{H}) \begin{pmatrix} v_{20} - v_{02} - w_{11} \\ w_{02} - w_{20} - v_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Подставляя сюда  $\pi_{10} = -c\rho_{10} + 2w_{20} - v_{11}$  и  $\pi_{01} = -c\rho_{01} + w_{11} - 2v_{02} + \beta$  приходим к уравнению (1.10).

Перепишем уравнение (1.10) в другом, важном с точки зрения результатов главы 5 виде. Для этого введем новые переменные:  $\mu = 1/\sqrt{|c|\rho_0}$ ,  $Y = \mu^3|c|^{-1}(2\mathbf{v}_{z\bar{z}} - \beta/3)|_\Gamma$ ,  $Z = \mu^3|c|^{-1}(\mathbf{v}_{z\bar{z}} + \beta/3)|_\Gamma$ ,  $U = \mu^3|c|^{-1}\mathbf{v}_{z\bar{z}}|_\Gamma$ ,  $W = 2\mu^3|c|^{-1}(-ic\rho_{\bar{z}} - \mathbf{v}_{\bar{z}z} + \mathbf{v}_{z\bar{z}} + \beta/2)|_\Gamma$ . Здесь черта означает комплексное сопряжение,  $\partial/\partial z = (\partial/\partial x_1 - i\partial/\partial x_2)/2$ .

Обозначим  $J = Y + \frac{1}{10}i(Y + W - 2\bar{Z}) + \frac{11}{30}\frac{\beta\mu^3}{|c|}$ . Тогда (1.10) перепишется в виде:

$$(2\mathbf{H} - \text{tr}(\mathbf{H})I) \begin{pmatrix} \text{Re } J \\ \text{Im } J \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{H}) \begin{pmatrix} \text{Re } \bar{U} \\ \text{Im } \bar{U} \end{pmatrix}.$$

Отметим одно свойство уравнения (1.10). Если собственные значения матрицы  $\mathbf{H}$  равны, то (1.10) переходит в

$$\begin{pmatrix} v_{20} - v_{02} - w_{11} \\ w_{02} - w_{20} - v_{11} \end{pmatrix} = 0$$

или, в новых переменных,  $U = 0$ .

Уравнение (1.10) можно считать дополнительным уравнением для переменных  $U$ ,  $Y$ ,  $W$ ,  $Z$ . Если мы исключим указанные переменные из полученного уравнения и из уравнений (5.4)–(5.7) пренебрегая слагаемыми из правой части, содержащими третьи производные функции  $\rho$  то получим уравнение, связывающее третьи производные  $\rho$ . Мы не учитываем это уравнение в рассматриваемом приближении.

## Глава 4

# Анализ гладкой составляющей решения

### 4.1 Вывод цепочки Гюгонио-Маслова для гладкой составляющей, завершение доказательства теоремы 1

Решение системы (3.2), соответствующей негладкой составляющей решения, основывалось на разложении в ряд Тейлора или, что то же самое, на повторном дифференцировании по  $x_1$ ,  $x_2$  и последующей подстановке  $x_1 = X_1(t)$  и  $x_2 = X_2(t)$ . Ясно, что та же процедура оказывается естественной и при исследовании части этой системы, отвечающей гладкой составляющей. Никаких особых трудностей здесь не возникает, и, учитывая равенство  $u^{(0)} = 0$ , мы приходим к следующему набору уравнений:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + (\nabla, \rho_0 u^{(1)}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + (\nabla, \rho_0 u^{(2)} + \rho^{(1)} u^{(1)}) = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + (\nabla, \rho^{(1)} u^{(2)} + \rho^{(2)} u^{(1)}) + (\nabla, \rho_0 u^{(3)}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{dV}{dt} - \omega_0 \mathbf{T}V + \nabla \rho^{(1)} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(1)} + \nabla \rho^{(2)} - \omega_0 \mathbf{T}u^{(1)} - \beta x_2 \mathbf{T}V = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(2)} + (u^{(2)}, \nabla) u^{(1)} - \omega_0 \mathbf{T}u^{(2)} \quad (4.6)$$

$$+ \nabla \rho^{(3)} - \beta x_2 \mathbf{T}u^{(1)} = 0. \quad (4.7)$$

Приравняв в (4.1)–(4.7) соответствующие коэффициенты при одночленах  $1$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_2^2$ ,  $x_1 x_2$  и  $x_2^3$ . Из (4.1), (4.2), (4.4) получаем

уравнения (1.17) - (1.20). Теперь рассмотрим уравнение (4.5). После простых преобразований оно принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} x \right) + \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right)^2 x - \omega_0 \mathbf{T} \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) x - \beta x_2 \mathbf{T} V + \mathbf{C} x = 0,$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2\rho_{20}^{(2)} & \rho_{11}^{(2)} \\ \rho_{11}^{(2)} & 2\rho_{02}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Это эквивалентно следующему матричному уравнению для элементов  $q$ ,  $p$ ,  $\rho_{lm}^{(2)}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} & \dot{p} \\ -\dot{p} & \dot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q^2 - p^2 & 2qp \\ -2qp & q^2 - p^2 \end{pmatrix} - \omega_0 \begin{pmatrix} -p & q \\ -q & -p \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 & V_2 \\ 0 & -V_1 \end{pmatrix} + \mathbf{C} = 0.$$

Переписывая покомпонентно эти уравнения, получим два уравнения, содержащие  $\dot{q}$  и отличающиеся только слагаемыми  $2\rho_{20}^{(2)}$  и  $2\rho_{02}^{(2)} + \beta V_1$ , а также два уравнения, содержащие  $\dot{p}$  и отличающиеся слагаемыми  $\rho_{11}^{(2)}$  и  $-\rho_{11}^{(2)} + \beta V_2$ . Используя обозначение (1.16), немедленно получаем (1.21), (1.22) и следующее утверждение.

**Лемма 20.** Система (4.1)–(4.7) совместна, если имеют место равенство (1.9). Эти равенства вытекают из условий Коши-Римана.

Равенства (1.9) позволяют получить некоторые дополнительные соотношения между  $v_{30}^{(3)}$ ,  $w_{03}^{(3)}$ ,  $v_{20}^{(3)}$ , и т.д., с одной стороны, и  $\rho_{10}^{(1)}$ ,  $\rho_{01}^{(1)}$ ,  $w_{20}^{(2)}$ , и т.д., с другой стороны. Действительно, записывая (4.3) для коэффициентов при одночленах  $x_1^2$ ,  $x_2^2$  и  $x_1 x_2$ , получаем (1.31) и уравнения

$$\dot{\rho}_{20}^{(2)} + 4q\rho_{20}^{(2)} + \rho_{10}^{(1)}(3v_{20}^{(2)} + w_{11}^{(2)}) + \rho_{01}^{(1)}w_{20}^{(2)} + \rho_0(3v_{30}^{(3)} + w_{21}^{(3)}) - p\rho_{11}^{(2)} = 0, \quad (4.8)$$

$$\dot{\rho}_{02}^{(2)} + 4q\rho_{02}^{(2)} + \rho_{10}^{(1)}v_{02}^{(2)} + \rho_{01}^{(1)}(v_{11}^{(2)} + 3w_{02}^{(2)}) + \rho_0(v_{12}^{(3)} + 3w_{03}^{(3)}) + p\rho_{11}^{(2)} = 0. \quad (4.9)$$

Вычитая (4.9) из (4.8) получим (1.32), что может рассматриваться совместно с (1.31), как условие, ограничивающее выбор  $v_{30}^{(3)}$ ,  $w_{30}^{(3)}$ ,  $v_{21}^{(3)}$ ,  $v_{21}^{(3)}$  и т.д. Прибавляя (4.8) к (4.9) и вводя переменную  $r$  согласно (1.16), приходим к (1.23). Остается приравнять коэффициенты при соответствующих одночленах в оставшихся уравнениях (4.1) и (4.7). В результате получим цепочку (1.17)–(1.32) Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.



## 4.2 Цепочки Гюгонио-Маслова в новых комплексных переменных

Цепочку (1.17)–(1.32) можно переписать в более простом виде. Вместо  $t(x_1, x_2)$  введем следующие комплексные координаты  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ , будем использовать комплексные производные  $\partial/\partial z = (\partial/\partial x_1 - i\partial/\partial x_2)/2$ ,  $\partial/\partial \bar{z} = (\partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2)/2$  и комплексные функции  $V'(t) = V_1(t) + iV_2(t)$ ,  $u' = u_1 + iu_2$  и т.д. Для упрощения обозначений мы опускаем штрихи над функциями. Далее будет удобно использовать переменную

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{|c|\rho_0}} \quad (4.10)$$

вместо  $\rho_0$  (или иногда вместе с  $\rho_0$ ). Положим  $\sigma = 1$ , если  $c > 0$  и  $\sigma = -1$  если  $c < 0$ . Тогда уравнение (1.11) можно переписать в виде

$$p = \frac{\omega_0 - \sigma\mu^{-2}}{2}. \quad (4.11)$$

Далее, введем переменные <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{\rho_0^{3/2}|c|^{5/2}}(v_{20} + v_{02} + iw_{20} + iw_{02} - \frac{\beta}{3}) \\ &\equiv \frac{\mu^3}{|c|}(\frac{1}{2}\Delta \mathbf{v}|_\Gamma - \frac{\beta}{3}) \equiv \frac{\mu^3}{|c|}(2\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\beta}{3})|_\Gamma, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\rho_0^{3/2}|c|^{5/2}}(\frac{v_{20} - v_{02} + i(w_{20} - w_{02})}{2} + \frac{v_{11} + iw_{11}}{2i} + \frac{\beta}{3}) \\ &\equiv \frac{\mu^3}{|c|}(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} + \frac{\beta}{3})|_\Gamma, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$U = \frac{1}{\rho_0^{3/2}|c|^{5/2}}(\frac{v_{20} - v_{02} + i(w_{20} - w_{02})}{2} - \frac{v_{11} + iw_{11}}{2i}) \equiv \frac{\mu^3}{|c|}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \bar{z}^2}|_\Gamma, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\rho_0^{3/2}|c|^{5/2}}(\frac{c}{i}(\rho_{10} + i\rho_{01}) + iv_{11} - 2v_{02} - 2iw_{20} + w_{11} + \beta) \\ &\equiv -ic\frac{\mu^3}{|c|}(\rho_{10} + i\rho_{01}) - Y + 2\bar{Z} \\ &\equiv 2\frac{\mu^3}{|c|}(\frac{c}{i}\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}|_\Gamma - \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \bar{z} \partial z}|_\Gamma + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{z}^2}|_\Gamma + \frac{\beta}{2}) \equiv -\frac{2i}{|c|^{5/2}\rho_0^{1/2}}\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}}|_\Gamma, \end{aligned} \quad (4.15)$$

---

<sup>1</sup>В этом разделе мы используем обозначение  $U$  для новой переменной, которая имеет совершенно иной смысл, нежели амплитуда  $U$  в формуле (1)

$$\lambda = \frac{1}{4} - 2r\mu^4 - 2|c| \operatorname{Re}((Z - \bar{Y})W + \frac{3}{2}YZ)). \quad (4.16)$$

Наконец, обозначим

$$b^2 = \frac{\omega_0^2 + 2\beta \operatorname{Re} V}{4}. \quad (4.17)$$

**Лемма 21.** В новых переменных  $\mu, V, Y, Z, U, W, \omega_0, \lambda$  система (1.17)–(1.30) принимает вид

$$\dot{V} + i\omega_0 V - \frac{i\sigma}{\mu^3}(Y + W - 2\bar{Z}) = 0, \quad (4.18)$$

$$\dot{Y} = i(p - \omega_0)Y - \frac{i\beta(2p + \omega_0)\mu^3}{3|c|} + h_1, \quad (4.19)$$

$$\dot{Z} = i(3p - \omega_0)Z + \frac{i\omega_0\beta\mu^3}{3|c|} + h_2, \quad (4.20)$$

$$\dot{W} = -ipW, \quad (4.21)$$

$$\dot{U} = i(p + \omega_0)U + h_3, \quad (4.22)$$

$$\dot{\lambda} = 2\beta\mu^3(\frac{\omega_0}{2}\operatorname{Im}Y - \frac{2p + \omega_0}{2}\operatorname{Im}Z - \frac{2p}{3}\operatorname{Im}W) + h_4, \quad (4.23)$$

$$\dot{\omega}_0 = \beta\operatorname{Im}V \equiv \beta V_2, \quad (4.24)$$

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} + b^2\mu = \frac{1}{\mu^3}(\lambda + 2|c|\operatorname{Re}((Z - \bar{Y})W + \frac{3}{2}ZY)), \quad (4.25)$$

где слагаемые  $h_1, h_2, h_3$  и  $h_4$  содержат коэффициенты Тейлора третьего порядка.

Эти уравнения возникают естественным образом, если вместо вещественных переменных  $x_1, x_2$  в исходных уравнениях мелкой воды, а также в описании функций  $\rho, u$  сразу использовать комплексные переменные  $z, \bar{z}$ .

Чтобы не усложнять обозначения будем считать, что  $(u, \nabla) = u\frac{\partial}{\partial z} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ,  $\operatorname{div} u = \frac{\partial}{\partial z}u + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{u} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\operatorname{rot}_3 u = \frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}) = 2\operatorname{Im}\frac{\partial u}{\partial z}$ .

В новых переменных уравнения (3.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho + (u, \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} u &= \mathcal{F}(R, U, S), \\ \frac{\partial}{\partial t}u + (u, \nabla)u + \dot{V} + i\omega(u + V) + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rho &= \mathcal{G}(U, S), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где  $\mathcal{F} = -\operatorname{div}(SRU)$ ,  $\mathcal{G} = -S(U, \nabla)U - \frac{1}{2}U(U, \nabla)S$ . Мы будем также использовать уравнение (3.28). Перепишем его в виде:

$$S((\frac{\partial}{\partial t} + (u, \nabla))\mathcal{P} + (U, \nabla)\check{\mathcal{P}}) - \frac{1}{2}\check{\mathcal{P}}(U, \nabla)S = 0. \quad (4.27)$$

Здесь

$$\mathcal{P} = \frac{\rho(\operatorname{rot} u + \omega) - SR \operatorname{rot} U + \frac{1}{2}R(\mathbf{T}\nabla S, U)}{\rho^2 - SR^2},$$

$$\check{\mathcal{P}} = \frac{S \operatorname{rot} U - \frac{1}{2}(\mathbf{T} \nabla S, U) - SR(\operatorname{rot} u + \omega)}{\rho^2 - SR^2}.$$

Обозначим  $g^{(k)}$  однородные полиномы  $k$ -той степени в тейлоровском разложении функций  $g$  по степеням  $z, \bar{z}$ :

$$g^{(k)} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} g_{i,k-i} z^i \bar{z}^{k-i}.$$

В силу условий замороженности, имеем для  $u$ :  $u = u^{(1)} + u^{(2)} + O(|z|^3)$ ,  $u^{(1)} = (q - ip)z$ . Для  $\omega$  имеем

$$\omega = \omega(z, \bar{z}, t) = \omega_0(t) - i \frac{\beta}{2}(z - \bar{z}), \quad \omega_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{(0)} = \omega|_{\Gamma}.$$

Заметим, что  $\rho_{m,n} = \bar{\rho}_{n,m}$ ,  $\mathcal{P}_{m,n} = \bar{\mathcal{P}}_{n,m}$  так как  $\rho$  и  $\mathcal{P}$  вещественные функции. Будем писать  $\rho_0$  вместо  $\rho^{(0)}$ .

Теперь задача вывода цепочки состоит в приравнивании в (4.26) коэффициентов одинакового порядка. Операция дифференцирования по  $t$  не меняет порядок полиномов от  $z, \bar{z}$  в тейлоровском разложении. Операция дифференцирования по  $z$  и  $\bar{z}$  понижает порядок соответствующего полинома на единицу. Умножение полинома на  $z^m \bar{z}^n$  повышает порядок на  $m + n$ . Таким образом систему (4.26), (4.27) мы можем переписать в виде.

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_0 u^{(1)} \equiv \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + 2q\rho_0 = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{dV}{dt} + i\omega_0 V + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho^{(1)} = 0, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}^{(0)} = 0, \quad (4.30)$$

и для  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(k)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \rho^{(k)} + \rho^{(k)} \operatorname{div} u^{(1)} + (u^{(k)}, \nabla) \rho^{(1)} + \rho^{(1)} \operatorname{div} u^{(k)} = \\ \mathcal{M}_k + \mathcal{F}^{(k)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(k)} + (u^{(k)}, \nabla) u^{(1)} + i\omega_0 u^{(k)} = \mathcal{N}_k + \mathcal{G}^{(k)}. \quad (4.32)$$

$$S^{(2)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}^{(k)} + (u^{(1)}, \nabla) \mathcal{P}^{(k)} \right) = \mathcal{L}_k. \quad (4.33)$$

Здесь функции  $\mathcal{M}_k, \mathcal{N}_k$  — однородные полиномы  $k$ -ой степени, зависящие от однородных полиномов низшей степени в Тейлоровском разложении

функций  $\rho$ ,  $u$ , от  $\rho^{(k+1)}$ ,  $u^{(k+1)}$  и их производных по  $z$ ,  $\bar{z}$ . Функция  $\mathcal{L}_k$  не содержит полиномов  $\mathcal{P}^{(k)}$ , а также производных от них. Из формул (4.33) следует, что  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0$ ,  $\mathcal{F}^{(k)} = \mathcal{G}^{(k)} = 0$  для  $k = 0, 1, 2$ .

Уравнение (4.27) немедленно дает один из интегралов цепочки

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0 - 2p}{\rho_0} = \mathcal{P}^{(0)} \equiv \Pi^{(0)} = \text{const.} \quad (4.34)$$

Справедливо следующее очевидное, но важное для дальнейшего утверждение, опирающееся на условия Коши–Римана (6.11):

*Мономы  $z^m \bar{z}^n$  являются собственными функциями оператора  $(u^{(1)}, \nabla)$  с собственными значениями  $(q(m+n) - ip(m-n))$ :*

$$(u^{(1)}, \nabla) z^m \bar{z}^n = (q(m+n) - ip(m-n)) z^m \bar{z}^n. \quad (4.35)$$

Дифференцируя последовательно уравнения (4.32) по  $z$  и  $\bar{z}$  используя (4.35), теперь получим систему уравнений для коэффициентов Тейлора в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{m,n} + ((1+m+n)q - i(1+m-n)p + i\omega_0) u_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} (\mathcal{N}_{m+n} + \mathcal{G}^{(m+n)}),$$

Заметим, что эта система уравнений диагональна по переменным  $u_{m,n}$ . К сожалению аналогичные уравнения для тейлоровских коэффициентов, полученные из уравнения (4.31) не имеют подобной структуры. Однако, подобную структуру, как следует из (4.33), имеют уравнения для тейлоровских коэффициентов  $\mathcal{P}_{m,n}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{m,n} + (q(m+n) - ip(m-n)) \mathcal{P}_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \mathcal{L}_k.$$

Поэтому при выводе уравнений для тейлоровских коэффициентов функций, определяющих особое решение (1.1), наряду с уравнением непрерывности в (2), удобно рассматривать и уравнение для потенциального вихря (3).

В силу равенства (4.35) в уравнениях для  $u_{m,n}$  и  $\mathcal{P}_{m,n}$  возникают “комплексные” частоты вида  $Nq(m+n) + ipM + i\omega_0 K$ . С помощью уравнения (4.28) вещественные части этих частот можно “убить”, произведя замену переменных  $u_{m,n} = \rho_0^{(1+m+n)/2} \tilde{u}_{m,n}$ ,  $\mathcal{P}_{m,n} = \rho_0^{(m+n)/2} \tilde{\mathcal{P}}_{m,n}$ , что дает уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_{m,n} + i(\omega_0 - (1+m-n)p) \tilde{u}_{m,n} = \rho_0^{-(1+m+n)/2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} (\mathcal{N}_k + \mathcal{G}^{(k)}). \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_{m,n} - ip(m-n) \tilde{\mathcal{P}}_{m,n} = \rho_0^{-(m+n)/2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \mathcal{L}_k \quad (4.37)$$

с уже чисто вещественными частотами.

Остановимся подробнее на уравнениях цепочки с номерами  $k = 1, 2$ . Разлагая функции, определяющие фон, в ряд Тейлора, подставляя в уравнения (4.26) и собирая слагаемые одинаковой степени по  $z$ ,  $\bar{z}$  до второго порядка включительно, мы получим следующий набор уравнений:

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \rho^{(1)} + \rho^{(1)} \operatorname{div} u^{(1)} + \rho_0 \operatorname{div} u^{(2)} = 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) \rho^{(2)} + \rho^{(2)} \operatorname{div} u^{(1)} + \\ (u^{(2)}, \nabla) \rho^{(1)} + \rho^{(1)} \operatorname{div} u^{(2)} + \rho_0 \operatorname{div} u^{(3)} = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(1)} + i\omega_0 u^{(1)} + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho^{(2)} + \beta(z - \bar{z})V/2 = 0, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + (u^{(1)}, \nabla) u^{(2)} + u^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} u^{(1)} + i\omega_0 u^{(2)} + \\ 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho^{(3)} + \beta(z - \bar{z})u^{(1)}/2 = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Делая аналогичную процедуру для уравнения (4.11), но собирая в нем слагаемые третьего порядка, и производя деление на  $S^{(2)}$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}^{(1)} + (u^{(1)}, \nabla) \mathcal{P}^{(1)} = 0. \quad (4.42)$$

Подставим  $u^{(1)} = (q - ip)z$  в (4.40), получим

$$(\dot{q} - i\dot{p})z + (q - ip)^2 z + 2\rho_{11}z + 2\rho_{02}\bar{z} + i\omega_0(q - ip)z + \beta(z - \bar{z})V/2 = 0.$$

Собирая коэффициенты Тейлора при  $\bar{z}$  и приравнивая их к нулю, придем к равенствам  $\rho_{20} = \rho_{02} = \beta V/4$ , которые можно рассматривать как уравнения связи, аналогичные (6.11).

Приравнивая далее к нулю вещественную и мнимую части коэффициентов при  $z$ , придем к двум уравнениям:

$$\dot{q} - p^2 + q^2 + \omega_0 p + 2\rho_{11} + \beta V_1/2 = 0, \quad (4.43)$$

$$\dot{p} + 2pq - \omega_0 q - \beta V_2/2 = 0. \quad (4.44)$$

Заметим, что уравнение (4.34) может быть также получено из уравнений (4.28), (4.44) и уравнения для  $\omega_0$ :

$$\dot{\omega}_0 = \beta \operatorname{Im} V, \quad (4.45)$$

которое получается дифференцированием по  $t$  равенства  $\omega_0 = \tilde{\omega} + \beta X_2$ . Таким образом, вводя константу  $c$ , мы можем исключить функцию  $p(t)$  и уравнение (4.44) из цепочки. Напомним, что мы рассматриваем случай  $c \neq 0$ . Из уравнений (4.28), (4.43) можно легко вывести, что функция  $\mu = 1/\sqrt{|c|\rho}$  удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\mu} + \frac{\omega_0^2 + 2\beta Re V}{4}\mu = \mu^{-3}\left(\frac{1}{4} - 2\rho_{11}\mu^4\right). \quad (4.46)$$

Таким образом, вместо обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (4.28), (4.43), можно использовать уравнение второго порядка для  $\mu$ .

Дифференцируя (4.41) последовательно по  $z$ ,  $\bar{z}$ , приходим к уравнениям (4.36) для  $m + n = 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{u}_{11} + i(\omega_0 - p)\tilde{u}_{11} &= -\frac{2\rho_{12}}{\rho_0^{3/2}} + \frac{\beta(q - ip)}{2\rho_0^{3/2}}, \\ \frac{d}{dt}\tilde{u}_{20} + i(\omega_0 - 3p)\tilde{u}_{20} &= -\frac{2\rho_{21}}{\rho_0^{3/2}} - \frac{\beta(q - ip)}{\rho_0^{3/2}}, \\ \frac{d}{dt}\tilde{u}_{02} + i(\omega_0 + p)\tilde{u}_{02} &= -\frac{2\rho_{03}}{\rho_0^{3/2}}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы избавиться в этих уравнениях от переменной  $q$ , удобно ввести переменные  $Y = \frac{1}{|c|^{5/2}}(2\tilde{u}_{11} - \frac{\beta}{3\rho_0^{3/2}})$ ,  $Z = \frac{1}{|c|^{5/2}}(\tilde{u}_{20} + \frac{\beta}{3\rho_0^{3/2}})$ ,  $U = \frac{1}{|c|^{5/2}}\tilde{u}_{02}$ . Это дает следующие уравнения (4.19), (4.20) и (4.22) с  $h_1 = -4\frac{\rho_{12}\mu^3}{|c|}$ ,  $h_2 = -2\frac{\rho_{21}\mu^3}{|c|}$  и  $h_3 = -2\frac{\rho_{03}\mu^3}{|c|}$ . Дифференцируя (4.42) по  $\bar{z}$  и умножая результат на  $1/\sqrt{\rho_0}$ , приходим к уравнениям (4.37) для  $m = 0$ ,  $n = 1$ :  $\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{P}}_{01} + ip\tilde{\mathcal{P}}_{01} = 0$ . Вместо  $\tilde{\mathcal{P}}_{01}$  удобнее использовать функцию  $W = -\frac{2i}{|c|^{5/2}}\tilde{\mathcal{P}}_{01} = 2\frac{\mu^3}{|c|}(ic\rho_{01} - u_{11} + \overline{u_{20}} + \frac{\beta}{2})$ , для которой выполнено уравнение (4.21). Отсюда немедленно следует, что  $|W|$  есть интеграл полной цепочки. Разумеется, это уравнение можно получить, комбинируя уравнения (4.38), (4.41). Однако из уравнения для потенциального вихря, оно выводится непосредственно.

Выражая  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rho^{(1)} = \rho_{01}$  в (4.29) через  $W$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $\mu$  приходим к уравнению (4.18), где  $\sigma = \text{sign } c$ . Применяя  $\partial^2/\partial z\partial \bar{z}$  к (4.39) и заменяя соответствующие коэффициенты Тейлора на функции  $Y$ ,  $Z$ ,  $U$ , и  $W$ , мы получим уравнение  $\dot{\rho}_{11} + 4q\rho_{11} + \sigma c^4\rho_0^3 \text{Im}((Z + \bar{Y})W + 3YZ) + \rho_0 u_{21} + \rho_0 \bar{u}_{12} = 0$ . Для того, чтобы избавиться в этом уравнении от переменной  $q$ , удобно ввести переменную  $r = \rho_{11}\mu^4$ , для которой будет выполнено уравнение

$$\dot{r} + \frac{c}{\mu^2} \text{Im}((Z + \bar{Y})W + 3YZ) + \mu^2(\rho_0 u_{21} + \rho_0 \bar{u}_{12}) = 0. \quad (4.47)$$

После введения переменной  $\lambda$  последнее уравнение перепишется в виде (4.23).

Уравнение (4.46) можно переписать в виде (4.25).

Уравнения (4.18)–(4.25), где  $p = (\omega_0 - \sigma\mu^{-2})/2$  можно рассматривать, как первые уравнения цепочки Гюгонио-Маслова для особых решений (3) уравнений (2). Мы обрываем цепочку положив  $\rho_{21} = \rho_{12} = \rho_{03} = 0$ , а также  $u_{21} = u_{12} = 0$ . Заметим, что функция  $U$  входит только в уравнение (4.22), которое всегда разрешимо относительно  $U$ , поэтому при отыскании траектории  $x = X(t)$  мы можем это уравнение не рассматривать.

## Глава 5

# Интегрируемость оборванной цепочки: редукция к уравнению Хилла и одномерные гамильтоновы системы

Как уже отмечалось, довольно неожиданно оказалось, что система (1.6), (1.17)–(1.30), (1.34) с  $\beta = 0$  (сила Кориолиса постоянна) может быть в точности сведена к уравнению Хилла

$$\frac{d^2\psi}{d\Phi^2} + Q\psi = 0. \quad (5.1)$$

$$Q = \lambda + 2|c| \operatorname{Re} \left( (\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\bar{\alpha}_3)e^{i\Phi} + \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2e^{2i\Phi} \right), \quad (5.2)$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  – комплексные параметры,  $\lambda$  вещественный параметр. (Вместе с  $c \neq 0$ , они суть константы интегрирования оборванной цепочки; смысл этих констант мы проясним в этой главе.) Далее мы полагаем  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  и чертой обозначаем комплексное сопряжение.

Указанная редукция была проведена в [15, 16] при помощи довольно громоздкой процедуры. Анализ этой процедуры позволил затем указать новые переменные, в которых система (1.6), (1.17)–(1.30), (1.34) записывается в значительно более простом виде, и (при  $\beta = 0$ ) найти интегралы этой системы, непосредственно объясняющие возможность сведения укороченной цепочки к уравнению Хилла. Эти интегралы также оказались полезными при асимптотическом анализе системы при малом  $\beta$ . Один из интегралов данной системы уже был указан; (1.11) есть следствие этого интеграла.



## 5.1 Новые зависимые переменные и интегралы оборванной цепочки

Как показано в предыдущей главк, цепочка Гюгонио-Маслова принимает более простой вид (4.18)–(4.25) в новых комплексных переменных  $\mu, V, Y, Z, U, W, \omega_0, \lambda$ . После приравнивания к нулю  $h_1, h_2, h_3$  и  $h_4$ , получаем оборванную цепочку

$$\dot{V} + i\omega_0 V - \frac{i\sigma}{\mu^3}(Y + W - 2\bar{Z}) = 0, \quad (5.3)$$

$$\dot{Y} = i(p - \omega_0)Y - \frac{i\beta(2p + \omega_0)\mu^3}{3|c|}, \quad (5.4)$$

$$\dot{Z} = i(3p - \omega_0)Z + \frac{i\omega_0\beta\mu^3}{3|c|}, \quad (5.5)$$

$$\dot{W} = -ipW, \quad (5.6)$$

$$\dot{U} = i(p + \omega_0)U, \quad (5.7)$$

$$\dot{\lambda} = 2\beta\mu^3\left(\frac{\omega_0}{2}ImY - \frac{2p + \omega_0}{2}ImZ - \frac{2p}{3}ImW\right), \quad (5.8)$$

$$\dot{\omega}_0 = \beta ImV \equiv \beta V_2, \quad (5.9)$$

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} + b^2\mu = \frac{1}{\mu^3}(\lambda + 2|c|Re((Z - \bar{Y})W + \frac{3}{2}ZY)). \quad (5.10)$$

К этим уравнения следует добавить уравнение (1.6). Очевидно, функция  $U$  не оказывает влияния на траекторию, поэтому мы не будем рассматривать ее в дальнейшем.

Прежде чем начать изучение специальных свойств системы (5.3)–(5.10), заметим, что эта система (или ее эквивалентные формы) инвариантна относительно замены переменных  $p \rightarrow -p, \omega_0 \rightarrow -\omega_0, c \rightarrow -c, V \rightarrow \bar{V}, Y \rightarrow \bar{Y}$  и т. д. (черта означает комплексное сопряжение). Поэтому всюду далее *без ограничения общности будем считать, что  $\omega_0 \geq 0$* . (Другими словами, наши рассуждения будут справедливы для северного полушария; переход к южному полушарию может быть осуществлен путем указанной замены переменных.)

Положим

$$\phi_1 = \int_0^t (p - \omega_0)dt, \quad \phi_2 = \int_0^t (\omega_0 - 3p)dt,$$

$$\phi_3 = -\int_0^t p dt, \quad \phi_4 = \int_0^t (p + \omega_0)dt.$$

**Следствие 4.** Пусть  $\beta = 0$ ; тогда

$$\frac{d}{dt}(Ye^{-i\phi_1}) = \frac{d}{dt}(Ze^{i\phi_2}) = \frac{d}{dt}(We^{-i\phi_3}) = \frac{d}{dt}(Ue^{-i\phi_4}) = \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

т. е. функции  $\alpha_1 = Ye^{-i\nu_1}$ ,  $\alpha_2 = Ze^{-i\nu_2}$ ,  $\alpha_3 = We^{-i\nu_3}$ ,  $\alpha_4 = Ue^{-i\nu_4}$  и  $\lambda$ , а также  $c = (\omega_0 - 2p)/\rho_0$  и  $\omega_0$ , являются интегралами системы (5.3)–(5.10) и, следовательно, оборванной цепочки (1.6), (1.17)–(1.30), (1.34).

## 5.2 Уравнение Ермакова и редукция к уравнению Хилла

Заменим  $t$  новой независимой переменной

$$\Phi = \int_0^t (2p - \omega_0) dt \equiv c \int_0^t \rho_0 dt, \quad (5.11)$$

которая определена корректна, так как  $\rho_0 \neq 0$ . Последнее неравенство будет выполнено, если рассматривать достаточно гладкие решения исходной системы и считать, что  $\rho_0 \neq 0$  ат по крайней в одной точке. Напомним, что согласно физическому смыслу функция  $\rho_0$  (геопотенциал) строго положительна на  $\Gamma$  это согласуется с нашими предположениями и с последующими формулами. Используя переменную  $\Phi$  и  $\sqrt{\rho_0}$  вместо  $\rho_0$ , перепишем уравнение (5.10) в виде

$$\frac{d^2 \sqrt{\rho_0}}{d\Phi^2} + Q \sqrt{\rho_0} = \frac{a^2}{(\sqrt{\rho_0})^3}, \quad a = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\beta V_1}}{2|c|}. \quad (5.12)$$

Здесь

$$Q = \lambda + 2|c| \operatorname{Re}((Z - \bar{Y})W + \frac{3}{2}YZ). \quad (5.13)$$

Уравнение (5.12) с  $a = \text{const}$  (сила Кориолиса постоянна) известно как уравнение Ермакова (см. [23] стр. 351) и может быть сведено к линейному уравнению (5.1) при заданной функции  $Q^1$ . Переформулируем данное утверждение в удобном для нас виде.

**Лемма 22.** Пусть  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – некоторые вещественнозначные решения уравнения (3.1) с единичным определителем Вронского  $\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' = 1$ , и пусть  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ . (Здесь и далее обозначаем  $\psi' = d\psi/d\Phi$ .) Тогда общее решение уравнения (5.12) с  $a = \text{const} > 0$  имеет вид

$$\rho_0 = a\mathcal{R}(\Phi, \gamma), \quad (5.14)$$

где  $\mathcal{R}(\Phi, \gamma) = (|\psi|^2 \sqrt{1 + |\gamma|^2} + \operatorname{Re}(\psi^2 \gamma))$  и  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$  есть комплексная константа интегрирования.

---

<sup>1</sup>Интересно, что его векторное обобщение возникает в других моделях динамики жидкости [49].

**Доказательство** следует из формулы Ермакова для (5.12) и может быть получено прямым дифференцированием (5.14) (см. также [42]).  $\square$

Ясно, что решения  $\psi_1, \psi_2$  зависят от потенциала  $Q$  и, следовательно, от параметров  $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Для упрощения обозначений мы не будем явно указывать эту зависимость. Из леммы 22 немедленно вытекают формулы (в случае  $\omega = \omega_0 = \text{const}$ ) для решений системы (5.3)–(5.10) и, следовательно, для оборванных цепочек (1.6), (1.17)–(1.30), (1.34) через решения уравнения (5.1). Мы не имеем возможности привести здесь формулы для всех компонент  $\rho_0, p, q, v_{10}$ , и т.д., поэтому приведем лишь формулу для геопотенциала  $\rho_0$ . Остальные компоненты также нетрудно получить последовательным интегрированием. Отметим только, что при интегрировании возникнут новые (дополнительно к  $\omega_0, c, \lambda, \alpha_j, \gamma$ ) константы интегрирования, а именно: начальные (комплексная) скорость  $V^0$  и координата  $X^0$  о° центра вихря. Таким образом, окончательно получим решение оборванной цепочки, зависящее от 17 параметров. Геопотенциал  $\rho_0$  зависит при этом только от  $(\omega_0, c, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma)$ , для упрощения обозначений мы не указываем эту зависимость.

**Теорема 3.** *Предположим, что  $\beta = 0$  и  $\omega_0 \neq 0$  в системе (1.6), (1.17)–(1.30), (1.34) (или в системе (5.3)–(5.10)) и  $\mathcal{R}(\Phi, \gamma)$  есть введенная выше функция. Тогда  $\rho_0$ -компонента общего решения этой системы при  $c \neq 0$  имеет вид*

$$\rho_0(t) = \frac{|\omega_0|}{2|c|} \mathcal{R}(\Phi(t), \gamma). \quad (5.15)$$

Здесь функция  $\Phi(t)$ , которая также зависит от параметров  $\omega_0, \alpha, \lambda$ , и  $\gamma$ , определяется как решение уравнения

$$\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\mathcal{R}(\Phi, \gamma)} = -\frac{\sigma\omega_0 t}{2}. \quad (5.16)$$

Достаточно подставить функции  $Y, W, Z$  в потенциал  $Q$  вида (5.13) и заметить, что после соответствующих сокращений *переменная  $t$  (неожиданно) пропадает и в полученном выражении остается только переменная  $\Phi$* , при этом  $Q$  оказывается равным потенциалу (5.2). Теперь заменим  $\rho_0$  в формуле (5.11) для  $\Phi$  на правую часть (5.15) и, проинтегрировав, получим (5.16).

### 5.3 О влиянии устойчивости уравнения Хилла и наличия постоянной силы Кориолиса на траектории

Вначале напомним некоторые сведения о решениях уравнения Хилла. Согласно общей теории (см., например, [37]), возможно следующее поведение решений системы (5.1), (5.2):

1. Существует базис решений системы (5.1), (5.2) состоящий из функций (решений Флоке) вида  $\psi = \psi_0 \exp(i\Omega_0 \Phi)$ ,  $\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 \exp(-i\Omega_0 \Phi)$ , где  $\Omega_0$  – вещественное число, называемое характеристическим показателем,  $\psi_0(\Phi, \alpha, \lambda)$  гладкая комплексная функция,  $2\pi$ -периодическая по  $\Phi$  и не обращающаяся в нуль. 2. Экспоненциально неустойчивый случай. В этом случае существует базис решений системы (5.1), (5.2), состоящий из решений Флоке вида  $\psi_+ = \psi_+^0(\Phi)e^{\delta\Phi}$ ,  $\psi_- = \psi_-^0(\Phi)e^{-\delta\Phi}$ , где  $\delta > 0$  – характеристический показатель. Экспоненциальная неустойчивость сохраняется также при малых изменениях  $\lambda$  и  $\alpha$ .

3. Линейно неустойчивый случай. В этом случае существует базис решений системы (5.1), (5.2) состоящий из  $2\pi$ -периодической функции  $\psi_1(\Phi)$  и функции вида  $\psi_2(\Phi) + \Phi\psi_1(\Phi)$ , где  $\psi_2(\Phi)$  is a  $2\pi$ -периодическая функция. Данная ситуация имеет место, когда  $\lambda$  и  $\alpha$  лежат на границе между зоной сильной устойчивости и зоной экспоненциальной неустойчивости; она не сохраняется при малых изменениях  $\lambda$  и  $\alpha$ . Далее этот случай подробно рассматриваться не будет.

Следующее утверждение представляет собой элементарное следствие из теории Флоке-Ляпунова для уравнения Хилла (см., например, [37])

**Лемма 23.** *В случаях устойчивости и экспоненциальной неустойчивости уравнение Хилла (5.1), (5.2) имеет следующий базис решений:  $\psi_1 = g(\Phi) \cos \theta e^{\delta\Phi}$ ,  $\psi_2 = g(\Phi) \sin \theta e^{-\delta\Phi}$ . Здесь  $g(\Phi) > 0$  is a  $2\pi$ -периодическая гладкая функция переменной  $\Phi$ , характеристический показатель  $\delta$  положителен в неустойчивом случае, и  $\delta = 0$  в устойчивом случае, гладкая функция  $\theta(\Phi)$  представима в виде  $\theta(\Phi) = \frac{n\Phi}{2} + \theta_0(\Phi)$ , где  $\theta_0$   $2\pi$ -периодическая функция,  $n$  целое число,  $d\theta/d\Phi = \delta \sin 2\theta + 1/g^2(\Phi)$ .*

**Замечание.** 1. Указанное представление для  $\psi_{1,2}$  вообще говоря, не единственно.

2. Число  $|n|$  характеризует номер зоны неустойчивости (см., например, [37]).

**Теорема 4.** 1. Предположим, что либо  $\omega_0 > 0$  и параметры  $\alpha$  и  $\lambda$  принадлежат зоне экспоненциальной неустойчивости, либо  $\omega_0 = 0$ . Тогда для сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  существует  $t_\varepsilon > 0$  такое, что либо  $0 < \rho_0(t_\varepsilon) < \varepsilon$  либо  $\rho_0(t_\varepsilon) > 1/\varepsilon$ .

2. Предположим, что  $\omega_0 > 0$  и параметры  $\alpha$  и  $\lambda$  принадлежат зоне устойчивости. Тогда ком понента  $\rho_0(t)$  представляет собой почти периодическую функцию с двумя периодами  $\omega$  и  $\omega/\Omega_0$  и является ограниченной снизу положительными константами при каждом  $t$ . Более того,  $\rho_0$ , (и, следовательно, компоненты скорости  $V_1, V_2$ , и самой траектории  $X_1, X_2$  выражается через функции  $g(\Phi)$  и  $\theta(\Phi)$  следующим образом:

$$\frac{\omega g^2(\Phi)}{2|c|(\sqrt{1+|\gamma|^2} + |\gamma|\cos(\omega(t-\tilde{t})))}, \quad (5.17)$$

здесь  $\tilde{t} = \arctan\left(\frac{\tilde{\gamma}\gamma_2}{\gamma_2^2\sqrt{1+|\gamma|^2}+\gamma_1}\right)$ ,  $\tilde{\gamma} = \sqrt{1+|\gamma|^2} - \gamma_1$ , а функция  $\Phi(t)$ , зависящая также от  $\omega_0, \alpha, \lambda$ , определяется как гладкое решение уравнения

$$\tan \Theta(\Phi(t)) = (\gamma_2 - \tan \frac{\omega\sigma}{2}(t-t_0))/(\sqrt{1+|\gamma|^2} - \gamma_1), \quad \Phi(0) = 0.$$

**Доказательство.** После некоторых вычислений, основанных на предыдущих теореме и лемме, получаем

$$\rho_0 = \frac{|\omega_0|g^2(\Phi)\tilde{\gamma}e^{-2\delta\Phi}}{2|c|(\cos^2 \frac{\omega_0\sigma}{2}(t-t_0)e^{-4\delta\Phi}\tilde{\gamma}^2 + \gamma_2 \cos^2 \frac{\omega_0\sigma}{2}(t-t_0) + \sin^2 \frac{\omega_0\sigma}{2}(t-t_0))}, \quad (5.18)$$

где  $t_0$  – константа, которая выражается через  $\gamma_1, \gamma_2, \alpha$ , и  $\lambda$  по формуле

$$\tan(\Theta|_{\Phi=0}) = (\gamma_2 + \tan \frac{\omega_0\sigma t_0}{2})/\tilde{\gamma}.$$

Рассмотрим вначале неустойчивый случай. Пусть существует  $\varepsilon_0 > 0$ , такое, что  $\rho_0 > \varepsilon_0$  при всех  $t > 0$ . Тогда, очевидно,  $|\Phi| > |c|\varepsilon_0 t$ . Следовательно, для достаточно больших решений  $t_k$  уравнения  $\tan(\omega_0\sigma(t_k-t_0))/2 = \gamma_2$  число  $\rho_0(t_k) = \frac{\omega_0}{2|c|}(\sqrt{1+|\gamma|^2}+\gamma_1)g^2(\Phi(t_k))e^{2\delta\Phi(t_k)}$  будет либо сколь угодно большим, если  $c > 0$ , либо сколь угодно малым, если  $c < 0$ . Последнее противоречит нашему предположению.  $\square$

В устойчивом случае  $\delta = 0$  и выражение (5.18) легко сводится к (5.17). Свойство почти периодичности следует из детального анализа (5.17). Доказательство утверждения 1) теоремы для случая  $\omega_0 = 0$  основано на том факте, что согласно (3.24),  $\rho_0$  есть квадрат некоторого решения уравнения Хилла, и проводится аналогично предыдущим рассуждениям.

**Замечание.** В приложениях, вероятно, не следует полностью игнорировать неустойчивые случаи, так как сами траектории могут изучаться для “средних” интервалов времени, когда геопотенциал  $\rho_0$  все еще остается в физически разумных пределах. Однако чем больше приращение  $\delta$ , тем быстрее  $\rho_0$  покидает эти пределы. Можно сделать вывод, что если неустойчивые режимы и возникают на практике, то это возможно только тогда, когда параметры  $\alpha$  и  $\gamma$  близки к зоне устойчивости, а сами зоны неустойчивости достаточно малы.

## 5.4 Критические режимы

Система (5.3)–(5.10) выглядит намного проще, чем исходная оборванная система (1.17)–(1.30), (1.34). Но, учитывая (1.6) мы все же имеем 17 обыкновенных дифференциальных уравнений. Следовательно, ее решение зависит от 17 параметров. Ясно, что не все решения описывают динамику мезомасштабных вихрей. Таким образом, из всех решений системы (5.3)–(5.10) нужно выбрать некоторое специальное семейство решений, которые могут описывать указанную динамику. Натурные эксперименты показывают, что траектории таких вихрей описываются (по крайней мере после усреднения) достаточно гладкими (или кусочно гладкими) кривыми. Более того, на этих траекториях потенциал  $\rho_0$  (и, следовательно, функции  $\mu$  и  $\omega_0$ ) должны меняться достаточно медленно и локально. На малых интервалах времени соответствующие решения должны совпадать с решениями цепочки со *стационарным* геопотенциалом. образом, производная  $\frac{d^2\mu}{dt^2}$  в (5.10)) должна быть достаточно малой, и, следовательно, ей можно пренебречь. Из анализа уравнения (5.3) и (1.6) можно также заключить, что быстрые компоненты переменных  $Y, Z$  и  $W$  должны быть достаточно малы: в противном случае траектория  $x = X(t)$  содержит много петель или же движение вдоль нее может оказаться слишком быстрым. Очевидно, только одна из переменных  $Y, Z$  и  $W$  содержит много петель или же движение вдоль нее может оказаться слишком быстрым. Очевидно, только одна из переменных:

$\nu_1 = (p - \omega_0)$  мала, тогда  $Z \simeq 0, W \simeq 0$  (случай I);

$\nu_2 = (\omega_0 - 3p)$  мала, тогда  $Y \simeq 0, W \simeq 0$  (случай II);

$\nu_3 = -p$  мала, тогда  $Y \simeq 0, Z \simeq 0$  (случай III).

Естественно назвать специальные решения оборванной цепочки с указанными свойствами “*критическими режимами*”, похоже, они играют роль “аттракторов” как в случае оборванных цепочек, так и в случае полной цепочки.

## 5.5 Критические режимы в случае $\beta = 0$

Вначале обсудим критические режимы в случае  $\beta = 0$ . Колебательная составляющая потенциала (5.2) оказывается равной нулю, при этом имеем  $b^2 = \omega_0^2/4$ . Это позволяет использовать во всех трех случаях уравнения

$$\mu^2 = 2\sqrt{\lambda}/\omega_0, \quad \rho_0 = \frac{1}{|c|\mu^2} = \frac{\omega_0}{2|c|\sqrt{\lambda}}, \quad (5.19)$$

вместо (5.10), а также записать

$$p = \frac{\omega_0}{2} \left(1 - \frac{\sigma}{2\sqrt{\lambda}}\right). \quad (5.20)$$

Очевидно, существование такого типа обусловлено исключительно наличием частоты Кориолиса  $\omega_0$ , организующей “потенциальную яму” в (5.12). Следовательно, стационарный (или “квазистационарный” в случае  $\beta \neq 0$ ) геопотенциал порождается силой Кориолиса<sup>2</sup>. Этот стационарный геопотенциал соответствует решению  $\psi = ge^{i\sqrt{\lambda}\Phi}$ ,  $g = 1/\sqrt[4]{\lambda}$  уравнения (5.1) с  $Q = \lambda$  и  $\gamma = 0$  в (5.14).

Так как здесь  $p = \text{const}$ , то легко интегрируются другие уравнения системы (1.6), (5.3)-(5.10). При этом получаются следующие формулы для (комплексных) траекторий особенностей (вихрей) (1.1):

$$X = X^0 + \mathbf{a}e^{i\omega_0 t} + \mathbf{b}e^{i\nu_j t} \quad (5.21)$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  – комплексные константы интегрирования; кроме того, предположим сейчас, что частоты  $\nu_j$  во всех формулах не обращаются в нуль.

Таким образом, в стационарном случае траектории определяются почти периодическими или периодическими (если соответствующие частоты соизмеримы) функциями, чьи частоты равны  $(\omega_0, p - \omega_0)$ ,  $(\omega_0, \omega_0 - 3p)$  или  $(\omega_0, -p)$ , соответственно. Частота  $\omega_0$  определяет собственные колебания или вращения под действием силы Кориолиса; если все  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  равны нулю, то движение происходит вдоль окружности с центром  $X^0$  и радиусом  $|\mathbf{a}|$  при этом частота (угловая скорость) равна  $\omega_0$ . Такие “несобственные движения” будем называть “быстрыми”; характерное время этих движений  $T = 2\pi/\omega_0$ . Как упоминалось выше, с точки зрения дальнейших приложений к распространению мезомасштабных вихрей интересно исследовать ситуации, когда  $t \gg T$  и траектории (или по крайней мере некоторые

---

<sup>2</sup>Заметим, что вблизи экватора, где  $\omega_0$  очень мало, тайфунов и ураганов нет

их усреднения) являются гладкими кривыми без петель. Тогда величина  $|\mathbf{a}|$  должна быть достаточно малой, и интересующие нас траектории задаются уравнением  $X(t) \approx X^0 + \mathbf{b}e^{i\nu_j t}$ , которое определяет движение вдоль окружностей  $X^0$  с центром  $|\mathbf{b}|$  и (малыми) угловыми скоростями  $\nu_j$ . Заметим, что

$$\begin{aligned}\nu_1 \equiv p - \omega_0 = 0 &\iff \lambda = 1/4, \quad \sigma = -1, \\ \nu_2 \equiv 3p - \omega_0 = 0 &\iff \lambda = 9/4, \quad \sigma = 1, \\ \nu_3 \equiv -p = 0 &\iff \lambda = 1/4, \quad \sigma = 1.\end{aligned}$$

Как и для гладких траекторий, частоты  $p - \omega_0, 3p - \omega_0, p$  должны быть малы. Тогда для режимов I, II, III  $\sigma = -1, \sigma = 1, \sigma = 1$  соответственно. Точки  $\lambda = \frac{1}{4}$  и  $\lambda = \frac{9}{4}$  являются “следами” первой и третьей зон неустойчивости для уравнения Хилла (5.1) после перехода от осциллирующего потенциала  $Q$  к постоянному потенциалу  $\lambda$ . Таким образом, мы видим, что *гладкие траектории возникают вблизи первой и третьей зон неустойчивости (или лагун в спектре) уравнения Хилла*. Если  $\mathbf{a} = 0$ , то точные траектории (5.21) описывают равномерное движение вдоль окружностей с центром в  $X^0$  и радиусом  $|\mathbf{b}|$ . Итак, для достаточно гладких траекторий (с “малыми” частотами  $\nu_j$ ) получаем следующие результаты. Движение на указанных окружностях происходит по часовой стрелке, если в случаях I), III)  $\nu_{1,3} < 0 \iff \frac{1}{4} < \lambda \iff \lambda$  лежит в окрестности первой лагуны во второй зоне устойчивости, или в случае II) ( $\nu_2 < 0 \iff \frac{9}{4} < \lambda \iff \lambda$  лежит в окрестности третьей лагуны в четвертой зоне устойчивости. Движение происходит против часовой стрелки, если в случаях I), III) ( $\nu_{1,3} > 0 \iff \frac{1}{4} < \lambda \iff \lambda$  лежит в окрестности первой лагуны в первой зоне устойчивости, или в случае II) ( $\nu_2 > 0 \iff \frac{9}{4} < \lambda \iff \lambda$  лежит в окрестности третьей лагуны в третьей зоне устойчивости. В случае когда частота  $\nu_j$  равна нулю, вместо (5.21) ) имеем уравнение  $X = X^0 + \mathbf{a}e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{b}t$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  – константы интегрирования. Если  $\mathbf{a} = 0$  (“собственное движение” отсутствует), то траектории  $X$  являются прямыми линиями. (При ненулевом  $\mathbf{a}$ , в окрестности этих прямых возникают петли.) При переходе параметра  $\lambda$  из одной зоны устойчивости в другую, направление движения меняется, и, более того, траектории, являющиеся кругами с петлями, превращаются в момент перехода в прямые с петлями. Поэтому интересно рассмотреть ситуацию, при которой параметры  $\omega_0, p, \rho, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $X^0$  являются медленными (адиабатическими) функциями времени, а режимы могут постепенно переходить один в другой. Такая ситуация возникает, если мы будем учитывать  $\beta$ -эффект (зависимость  $\omega_0$  от широты). Именно этот случай



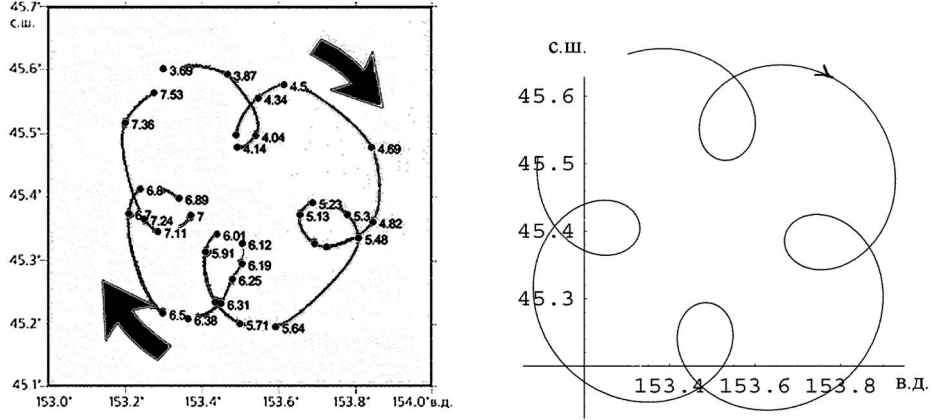


Рис. 5.1: Сравнение одной из траекторий, заданных формулой (5.21) ( $a = 10\text{km}$ ,  $b = 50\text{km}$ ,  $\omega_0 = .33/\text{час}$ ,  $\nu = .04/\text{час}$ ), с траекторией тихоокеанического вихря Ойясио [35].

будет изучен в следующем разделе. На рисунке 5.1 приводится сравнение одной из траекторий, описанных выше и тихоокеанического вихря Ойясио.

## 5.6 Влияние $\beta$ -эффекта и гамильтоновы системы в критических режимах

Предположим теперь, что  $\beta$  малый положительный параметр, и попытаемся построить некоторые асимптотические решения системы (5.3)-(5.10) для временного интервала  $\sim 1/\beta$ . В действительности мы пользуемся методами усреднения, причем поскольку мы предположили, что одна из частот рассматриваемой системы достаточно мала, мы делаем частичное усреднение (см., например, [7]). Несмотря на то что последующий анализ проводится на физическом уровне строгости (сюда входит центральный для нас вопрос о возникновении оборванных уравнений), в результате мы приходим к результатам, которые подтверждаются численными исследованиями.

Вначале рассмотрим при сделанных выше предположениях уравнения (5.3)-(5.10) в случае II. Будем считать, что  $3p - \omega_0$ , а также функции  $Y$  и  $W$  малы и  $\sigma = 1$ . Предположим также, что по крайней мере главные составляющие функций  $\omega_0, p, \lambda, \rho_0$  и  $\mu$  меняются

достаточно медленно. Тогда для этих функций в первом приближении мы можем пользоваться соотношениями (5.19), (5.20). Покажем, что в данном приближении можно выразить  $p, \lambda, \rho_0$  и  $\mu$  через  $\omega_0$  (и, следовательно, через  $X_2$ ). Рассмотрим уравнение (5.5). Его можно переписать в виде

$$\dot{G} = i\nu G + i\beta F, \quad (5.22)$$

где  $G = \bar{Z}$ ,  $\nu = -(3p - \omega_0)$ ,  $F = -\frac{\omega_0 \mu^3}{3|c|}$ . Интегрируя это уравнение, находим

$$G = e^{i\phi(t)} \left( G_0 + i\beta \int_0^t e^{-i\phi(y)} F(y) dy \right), \quad \phi = \int_0^t \nu(y) dy, \quad G_0 = \text{const.}$$

Хотя мы предполагаем, что частота  $\nu$  мала, она, тем не менее, порождает некоторое малое колебание функции  $G = \bar{Z}$ . Слагаемое с интегралом может компенсировать некоторые колебания. Будем считать, что после интегрирования эти колебания оказываются малыми по сравнению с колебаниями, определяемыми множителем  $e^{i\phi(t)}$  и предположим, что  $G \sim e^{i\phi(t)} \bar{g}$ . Теперь рассмотрим уравнение (5.3). После отбрасывания компонент  $W$  и  $Z$  в (5.3) получаем уравнение  $\dot{V} + i\omega_0 V = -\frac{2i}{\mu^3} \bar{Z}$ . Запишем формально решение этого уравнения в виде  $V = -2i \left( \frac{d}{dt} + i\omega_0 \right)^{-1} \frac{\bar{Z}}{\mu^3}$ . Если  $Z$  меняется достаточно медленно, то исключая  $\frac{d}{dt}$  можем написать  $V \approx -2\bar{Z}/(\omega_0 \mu^3)$ . Но поскольку в функцию  $\bar{Z}$  входит множитель  $e^{i\phi(t)}$  содержащий некоторые колебания, имеет место следующая формула (более точная, чем предыдущая):

$$V \approx -e^{i\phi(t)} \frac{2i}{i\nu + i\omega_0} \frac{\bar{g}}{\mu^3} \equiv f \bar{Z}, \quad f = \frac{2}{\mu^3(3p - 2\omega_0)}. \quad (5.23)$$

Теперь получим дифференциальное уравнение для  $\lambda$  как функции переменной  $\omega_0$ . Для этого мы должны рассмотреть следующие два уравнения для  $\dot{\lambda}$  и  $\dot{\omega}_0$ , соответствующие приближению рассматриваемого режима (при этом считаем, что переменными  $Y$  и  $Z$  можно пренебречь):

$$\dot{\lambda} \approx -\beta \mu^3 (2p + \omega_0) \text{Im} Z, \quad \dot{\omega}_0 \approx \beta \text{Im} V \equiv -\beta f \text{Im} Z.$$

Поделив уравнение для  $\dot{\lambda}$  на уравнение для  $\dot{\omega}_0$  получим ( $\text{Im} Z$  сокращаются!)  $d\lambda/d\omega_0 = (2p + \omega_0)(3p - 2\omega_0)\mu^6/2$ . Переменные  $p$  и  $\mu$  выражаются через  $\lambda$  и  $\omega_0$  при помощи (5.19), (5.20). Таким образом, приходим к уравнению с разделяющимися переменными  $d\lambda/d\omega_0 = \sqrt{\lambda}(3 - 10\sqrt{\lambda} - 8\lambda)/(2\omega_0)$ . Из предыдущих рассуждений видно, что малость  $(3p - \omega_0)$  означает малость  $(\lambda^{1/2} - 3/2)$ . Учитывая этот факт

(благодаря которому пропадает решение  $-\eta$  в формуле ниже), после интегрирования находим

$$\lambda^{-1/2} = 2 \frac{2\eta - 1}{\eta + 3}, \quad \eta = \left(\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)^{7/2}. \quad (5.24)$$

Здесь  $\omega_2 > 0$  есть константа интегрирования; кроме того, предполагается, что по крайней мере  $\omega_0 > \frac{\omega_2}{2^{2/7}}$ . Отсюда получаем

$$\rho_0 = \frac{1}{|c|\mu^2} \equiv \frac{\omega_0(2\eta - 1)}{|c|(3 + \eta)}, \quad p = \frac{\omega_0(4 - \eta)}{2(3 + \eta)}, \quad f = -\frac{4\sqrt{\omega_0(2\eta - 1)^3}}{7\eta\sqrt{\eta + 3}}. \quad (5.25)$$

Аналогичные рассуждения и вычисления в случае режимов I, III дают

$$\sigma = -1, \quad V \approx fY, \quad f = -\frac{1}{p\mu^3} = \frac{2\sqrt{\omega_0}(\xi - 1)^{3/2}}{\xi}, \quad Z \approx W \approx 0, \\ \lambda^{-1/2} = 2(\xi - 1), \quad \rho_0 \equiv -\frac{1}{c\mu^2} = -\frac{\omega_0(\xi - 1)}{c}, \quad p = \frac{\omega_0\xi}{2}, \quad (\text{I}) \quad (5.26)$$

и

$$\sigma = 1, \quad V \approx fW, \quad f = \frac{1}{(\omega_0 - p)\mu^3} = \frac{\sqrt{\omega_0(\zeta + s)^3}}{\zeta\sqrt{\zeta - s}}, \quad Y \approx Z \approx 0, \\ \lambda^{-1/2} = 2\frac{\zeta + s}{\zeta - s}, \quad \rho_0 \equiv \frac{1}{c\mu^2} = \frac{\omega_0(\zeta + s)}{|c|(\zeta - s)}, \quad p = -s\frac{\omega_0}{\zeta - s}. \quad (\text{III}) \quad (5.27)$$

Здесь  $\xi = \frac{\omega_0}{\omega_1}$ ,  $\zeta = \left(\frac{\omega_0}{\omega_3}\right)^{4/3}$ ;  $\omega_1 > 0, \omega_3 > 0$ , константы интегрирования,  $s = \pm 1$  и предполагается, что по крайней мере  $\omega_0 > \omega_1$  в случае <sup>3</sup> I и  $\omega_0 > \omega_3$  в случае III. В отличие от случаев I, II в случае III имеются две различные возможности для реализации подходящих решений, соответствующие различным знакам  $s = \pm 1$  в формулах (5.27); мы обсудим эти различия позже. Теперь понятно, что приближенное решение оборванных цепочек для критических режимов I, II, III исводится к решению системы уравнений (5.22) и

$$\dot{\omega}_0 = \beta f ImG, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.28)$$

---

<sup>3</sup>Следовательно, согласно нашим предыдущим исследованиям сингулярной составляющей решения (1.1) этот случай не может быть связан с движением мезомасштабных вихрей в атмосфере. Тем не менее, вероятно, он может реализовываться в некоторых других физических задачах, описываемых уравнениями (2)

где в случаях I, II, III соответственно имеем

$$G = Y, \quad \nu \equiv p - \omega_0 = \omega_0 \frac{(\xi - 2)}{2}, \quad F = \frac{2p + \omega_0}{3c} \mu^3 = \frac{\xi + 1}{3c \sqrt{\omega_0(\xi - 1)^3}}; \quad (5.29)$$

$$G = \bar{Z}, \quad \nu \equiv \omega_0 - 3p = \omega_0 \frac{5\eta - 6}{2(\eta + 3)}, \quad F = -\frac{\omega_0 \mu^3}{3|c|} = -\frac{1}{3|c|} \sqrt{\frac{(\eta + 3)^3}{\omega_0(2\eta - 1)^3}}; \quad (5.30)$$

$$G = W, \quad \nu \equiv -p = s \frac{\omega_0}{\zeta - s}, \quad F = 0. \quad (5.31)$$

Удобно использовать экспоненциальное представление для  $Y, Z$  и  $W$ , введя неизвестную амплитуду  $M$  и угол (скорость)  $\psi$ :

$$Y = Me^{i\psi} \text{ (case I)}, \quad \bar{Z} = Me^{i\psi} \text{ (case II)}, \quad W = Me^{i\psi} \text{ (case III)}. \quad (5.32)$$

Следующее утверждение является одним из главных результатов работы.

**Теорема 5.** *Все системы (5.22), (5.28)– (5.31) интегрируемы в квадратурах; при этом в (5.32)*

$$M = M_1 \frac{\sqrt{(\xi - \xi_+)(\xi - \xi_-)}}{\xi - 1}, \quad \xi_{\pm} = 1 - \frac{1}{6cM_1^2} (1 \pm \sqrt{1 - 12cM_1^2}) \text{ (I)}, \quad (5.33)$$

$$M = M_2 \sqrt{1 + \frac{7}{12|c|M_2^2} \left( \frac{11}{4} - \frac{7}{4(2\eta - 1)^2} - \frac{1}{2\eta - 1} + \frac{1}{14} \log(2\eta - 1) \right)} \text{ (II)}, \quad (5.34)$$

$$M = M_3 \text{ (III)}. \quad (5.35)$$

Здесь  $M_1, M_2, M_3$  константы интегрирования; кроме того, здесь и далее предполагается, что  $\omega_0 > \tilde{\omega}_i$ ,  $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 \xi_+$ ,  $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 (\eta_2)^{2/7}$ ,  $\tilde{\omega}_3 = \omega_3$ , где  $\xi_+$  наибольший корень подкоренного выражения в (5.33), случай II. Более того, системы для  $\omega_0$  и  $\psi$  могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\dot{\psi} = f \frac{\partial H}{\partial \omega_0}, \quad \dot{\omega}_0 = -f \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \omega_0 > \tilde{\omega}_i \quad (5.36)$$

с гамильтоновой структурой, индуцированной 2-симплектической формой  $f d\omega_0 \wedge d\psi$  и гамильтонианами

$$H = \beta M \cos \psi + N, \quad (5.37)$$

$$N = \frac{(\omega_1)^{3/2}}{4} \left( \frac{\sqrt{\xi}(2\xi^2 - 3\xi + 9)}{4\sqrt{\xi - 1}} - \frac{9}{4} \log(\sqrt{\xi - 1} + \sqrt{\xi}) \right) \text{ (case I)}, \quad (5.38)$$

$$N = -\frac{7(\omega_2)^{3/2}}{4} \int_1^{(\frac{\omega_0}{\omega_2})^{1/2}} \frac{y^9(5y^7 - 6)}{\sqrt{(y^7 + 3)(2y^7 - 1)^3}} dy \quad (\text{case II}), \quad (5.39)$$

$$N = \frac{3(\omega_3)^{3/2}}{4} \int_1^{(\frac{\omega_0}{\omega_3})^{4/3}} \frac{\zeta^{9/8}}{\sqrt{(\zeta - s)(\zeta + s)^3}} d\zeta \quad (\text{case III}). \quad (5.40)$$

для приближенных траекторий  $X$  соответствующих режимам  $I, II, III$  и восстанавливаемых по формуле

$$X(t) = X^0 + \int_0^t V d\tau = X^0 + \int_0^t f(\omega_0(\tau)) M(\omega_0(\tau)) e^{i\psi(\tau)} d\tau. \quad (5.41)$$

Здесь  $X^0 = X_1^0 + iX_2^0$  - константа интегрирования.

**Доказательство.** Подставляя (5.32) в (5.22), умножая результат на  $e^{-i\psi}$  и разделяя вещественную и мнимую части, получаем систему

$$\dot{M} = \beta F \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \nu + \frac{\beta F}{M} \cos \psi, \quad \dot{\omega}_0 = \beta M f \sin \psi.$$

Поделив первое из этих уравнений на третье, находим  $dM^2/d\omega_0 = 2F/f$ . Интегрирование данного уравнения в различных случаях дает (5.33)-(5.35). Простое дифференцирование показывает, что второе и третье уравнения из последней системы могут быть записаны в виде (5.37) с гамильтонианом

$$H = \beta e^{\int_{\alpha_0}^{\omega_0} \frac{F(\phi)}{M^2(\phi)f(\phi)} d\phi} \cos \psi + \int_{\alpha_0}^{\omega_0} \frac{\nu(\phi)}{M(\phi)f(\phi)} e^{\int_{\alpha_0}^s \frac{F(\phi')}{M^2(\phi')f(\phi')} d\phi'} d\phi,$$

где  $\alpha_0$  - константа интегрирования. Заменяя  $\frac{F}{f}$  на  $\frac{1}{2} \frac{dM^2}{d\omega_0}$  после интегрирования получаем первый (5.37). Похожим образом мы можем записать  $N$  в форме  $N = \int_0^{\omega_0} \frac{\nu(\phi)}{f(\phi)} d\phi$ . После некоторых преобразований приходим к формулам (5.38)-(5.40).  $\square$

**Замечание.** 1. Полученные гамильтоновы системы описывают адиабатически возмущенные траектории (окружности), которые упоминались в предыдущем разделе. Напомним, что движение по окружностям может происходить по часовой стрелке или против часовой стрелки. Это зависит от знака  $\nu$  и определяется принадлежностью к зоне устойчивости уравнения Хилла. Как отмечалось ранее, включение малого параметра  $\beta$  в оборванную цепочку означает адиабатическое возмущение ради уса и угловой скорости для траекторий, которые становятся медленно меняющимися функциями времени  $t$ . Один из эффектов такого возмущения - это способность траекторий

“перескакивать” точки  $\sqrt{\lambda} = 1/2, 3/2$  (следы лакун) и изменять направление движения “зигзагоподобным” образом. Это объясняется наличием возмущенной “силы”  $F$  в уравнении (5.22). Поэтому указанный эффект отсутствует в случае III; и поэтому для него возникают два различных режима (со знаками  $\pm$ ).

2. Нетрудно доказать, что функция  $\rho_0(\omega_0)$  в (5.25) (случай II), (5.27) (случай III) возрастает при возрастании  $\omega_0$ . Согласно формуле (1.13) это означает, что *вихрь (1.12) сжимается, двигаясь с юга на север*.

**4. Описание возможных траекторий мезомасштабных вихрей.** Теперь мы хотим связать траектории  $x = X(t)$  (5.41), полученные при помощи приближенного интегрирования и сведения к гамильтоновым системам (5.37) с траекториями реальных тайфунов. В действительности в каждом из случаев II, III имеется семейство гамильтоновых систем, зависящих от трех параметров  $\omega_i, M_i$ , и  $c$ . Каждое решение фиксированной системы зависит от двух параметров  $\psi_0 = \psi|_{t=0}$  и  $\omega_0 = \omega|_{t=0}$ . Следовательно, в каждом из случаев I, II, III траектория  $X(t)$  зависит от шести параметров  $\omega_i, M_i, c, \psi_0, X_1^0, X_2^0$  (так как  $\omega_0 = \tilde{\Omega} + \beta X_2^0$ ), и определение траектории сводится к восстановлению этих параметров. Понятно, что исходное решение (1.1) зависит от бесконечного числа параметров; после обрыва у нас остается 16 свободных начальных данных для системы (1.6), (1.17)–(1.30), (1.34). При математических рассуждениях, основанных на разумных физических требованиях относительно медленного изменения геопотенциала  $\rho_0$  и “гладкости” траекторий, автоматически “отфильтровываются” шесть основных параметров, играющих существенную роль при определении траекторий, и оставшиеся 10 параметров, которые оказывают малое и, вероятно, случайное воздействие на траектории. Эти шесть “существенных” параметров могут быть восстановлены при помощи полученных выше формул через шесть имеющих физический смысл величин: начальные положение  $(X_1^0, X_2^0)$  и скорость  $(V_1^0, V_2^0)$  центра вихря, потенциальный вихрь  $c$  и третья компонента  $\text{rot}_3 v$  в центре вихря. Понятно, что в настоящее время нетрудно численно проинтегрировать систему из 17 (и более) уравнений при помощи ЭВМ. Но при этом достаточно сложно или даже невозможно получить полный набор начальных данных для этой системы, используя данные, основанные на наблюдениях за реальными тайфунами и ураганами. Наши математические рассуждения позволяют (хотя и весьма приближенно) решить эту задачу и восстановить начальные “математические” данные при помощи относительно малого разумного набора “физических” данных, которые можно получить, наблюдая за тропическими циклонами.

Согласно теории гамильтоновых систем траектории системы (5.36) являются замкнутыми или открытыми линиями уровня  $H$  на полуплоскостях  $\omega_0 > \tilde{\omega}_i$ . Полуплоскости разделяются сепаратрисами на зоны с топологически подобными траекториями. Каждая зона с замкнутыми траекториями имеет центр, являющийся устойчивой точкой покоя для  $H$ . Сепаратрисы пересекаются в (гиперболических) седловых точках  $H$ , но могут также начинаться и заканчиваться на границах  $\omega_0 = \tilde{\omega}_i$ . Критическими точками для  $H$  являются  $(\psi, \omega_0) = (\pi m, \omega_{cr}^m)$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots$  где  $\omega_{cr}^m$  решения уравнений  $\nu(\omega_0)M(\omega_0) = (-1)^{m+1}\beta F(\omega_0)$ . Эти критические точки являются устойчивыми, если

$$\frac{\nu}{f} \left( \frac{\nu}{f} - \beta^2 \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left( \frac{F}{\nu} \right) \right) \Big|_{\omega_0 = \omega_{cr}^m} > 0,$$

(если  $m = 2l$ , то это точки максимума, а если  $m = 2l + 1$ , то это точки минимума) и являются седловыми в противном случае. Вблизи центров фазовые портреты системы (5.36) аналогичны фазовому портрету физического маятника, но при этом траектории двигаются по часовой стрелке вблизи точек максимума и против часовой стрелки вблизи точек минимума. При некоторых значениях параметров  $M_i, \omega_i, c$  седловые точки отсутствуют; в частности, они всегда отсутствуют в случае III. Поведение траекторий системы (5.36) отражается на поведении траекторий  $X(t)$ . Из экспериментов известно, что, как правило, мезомасштабные вихри в северном полушарии практически в течение всего периода своего существования перемещаются с юга на север; в обратном направлении они могут перемещаться лишь в течение короткого промежутка времени сразу после возникновения и незадолго до исчезновения. Таким образом, имеется некое правило, не позволяющее тайфунам перемещаться в северном полушарии с севера на юг. Оборванная цепочка (5.3)–(5.10) не содержит этого правила; скорее всего, оно не содержится и в системе (2), следовательно, необходимо рассматривать более сложные модели для того, чтобы получить соответствующие ограничения. Таким образом, мы априори должны рассматривать такие временные интервалы и решения оборванной системы, для которых траектории  $\Gamma$  удовлетворяют указанному правилу. В частности, это означает, что на фазовой (полу)плоскости  $(\psi, \omega_0)$  нас интересуют только части фазовых кривых, лежащие в прямоугольнике  $\tilde{\omega}_i < \omega_0, -\pi - \delta < \psi < \delta$ , или  $\tilde{\omega}_i < \omega_0, -\delta < \psi < \pi + \delta$ , где  $\delta$  – некоторая малая положительная константа, а также соответствующие части траекторий  $\Gamma$ . Далее, замкнутые траектории системы (5.36) порождают зигзагообразные траектории ( $Z$ –образные вблизи точек максимума и  $S$ –образные вблизи точек минимума), а незамкнутые

$(\psi, \omega_0)$ -траектории порождают  $\supset - b \subset -$  траектории  $X(t)$ .

5. Сравнение траекторий оборванной цепочки Гюгонио-Маслова и оюномерных Гамильтоновых систем. Проведем сравнение траекторий системы (5.3)–(5.10) до усреднения с траекториями Гамильтоновых систем (5.36) на примере случая II, когда мала частота  $\nu_2 = 3p - \omega_0$ .

Из формул (5.37) 7.26 7.31 видно, что расположение линий уровня функции  $H$  в зависимости от  $\psi$  и  $\eta$  зависит только от двух параметров:  $m = \sqrt{c}M_2$  и  $g = \beta/\sqrt{\omega^3 c}$ . На рисунке 5.2(a) изображены линии уровня гамильтониана  $H$  в зависимости от  $^t(\psi, \eta)$  при  $m = 10$ ,  $g = 0.02$ . Возьмем параметры, отвечающие  $30^\circ$  северной широты:  $\tilde{\omega} = 7.25 \times 10^{-5}/\text{сек}$ ,  $\beta = 2 \times 10^{-11}/\text{м} \cdot \text{сек}$ ;  $c = 2.6 \times 10^{-4} \text{сек}/\text{м}^2$ . На рисунках 5.2(b)–(d) жирной линией нарисованы траектории вихрей на  $\beta$ -плоскости, полученные интегрированием соответствующей Гамильтоновой системы (5.36). В качестве начальных условий были взяты следующие значения переменных:  $\psi(0) = 0$ ,  $\omega_0(0) = 7.52 \times 10^{-5}/\text{сек}$  (b);  $\psi(0) = 0$ ,  $\omega_0(0) = 7.47 \times 10^{-5}/\text{сек}$  (c);  $\psi(0) = \pi$ ,  $\omega_0(0) = 6.73 \times 10^{-5}/\text{сек}$  (d). Для сравнения подбирались траектории системы (5.3)–(5.10) при

## 5.7 Медленные траектории оборванной цепочки в случае, когда $\beta$ не является параметром возмущения

При выводе указанных в конце предыдущего пункта гамильтоновых систем существенным является предположение об относительной малости параметра  $\beta$ . Если этот параметр не мал, то ясно, что слагаемые с  $\beta$  нельзя рассматривать как адиабатическое возмущение, и более того, они могут играть существенную роль в описании траекторий Г.

Напомним, что мы хотим исследовать систему (5.3)–(5.10) для описания траекторий тропических циклонов. Как мы уже говорили, далеко не все ее решения годятся для этой цели, и при отборе подходящих решений нужно использовать дополнительные соображения. Скорость движения их центров относительно невелика  $\sim 4 \div 20$  км/час и меняется достаточно медленно на характерных временах существования тропических циклонов (5–10 дней). Также медленно изменяется значение геопотенциала на траектории. Таким образом компоненты  $V$  и  $\mu$  укороченной цепочки (5.3)–(5.10) должны меняться достаточно медленно, причем компоненты  $V_1$ ,  $V_2$  должны быть относительно небольшими. Имея ввиду явные выражения для правых частей в системе (5.3)–(5.10), можно предположить, что для



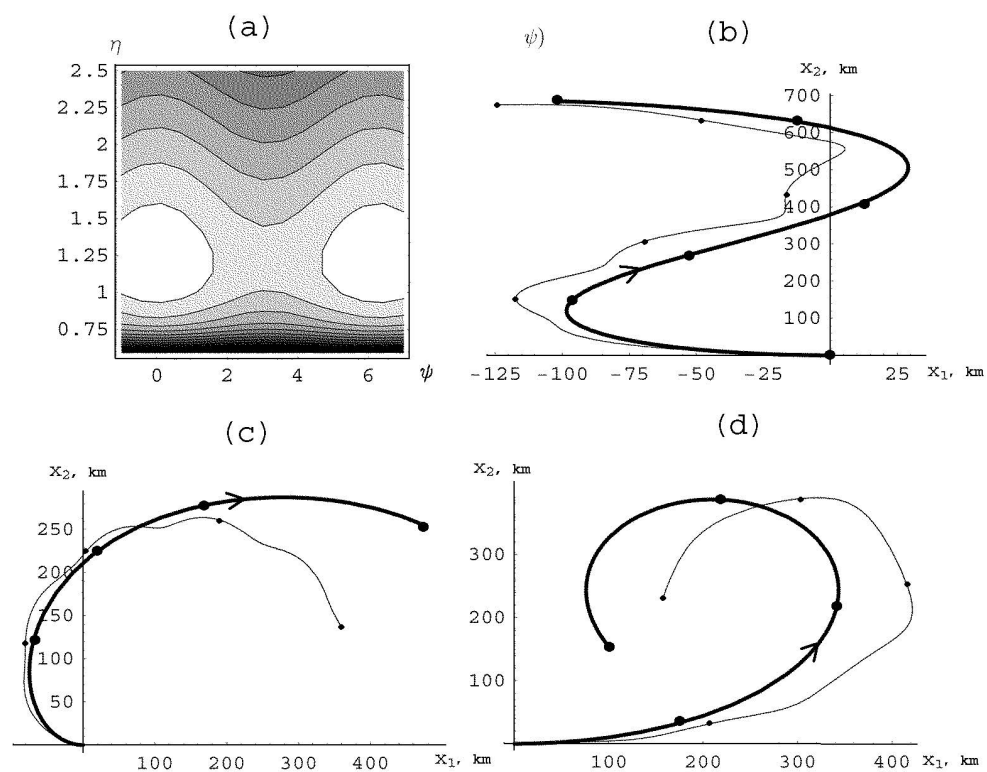


Рис. 5.2: Линии уровня гамильтониана  $H(\omega_0, \psi)$  как функции от  $\eta$  и  $\psi$  (a) и сравнение траекторий на  $\beta$ -плоскости, соответствующих одномерной гамильтоновой системе (жирные линии), и траекторий оборванной цепочки Гюгонио-Маслова (тонкие линии) между сепаратрисами (b), ниже сепаратрисы (c) и выше сепаратрисы (d).

интересующих нас решений в первом приближении всеми производными по  $t$  можно пренебречь, что приводит к следующим равенствам, определяющим критические точки системы (мы отбрасываем уравнение для  $U$ ):

$$\begin{aligned} V^0 = \bar{V}^0 &= \frac{\beta(2p - \omega_0)(p + \omega_0)}{c\omega_0(p - \omega_0)(3p - \omega_0)}, \\ Y^0 = \bar{Y}^0 &= \frac{\beta\mu^3(2p + \omega_0)}{3|c|(p - \omega_0)}, \quad Z^0 = \bar{Z}^0 = \frac{\beta\mu^3\omega_0}{3|c|(\omega_0 - 3p)}, \quad pW^0 = p\bar{W}^0 = 0, \\ \lambda^0 &= \mu^4 \left( \frac{\omega_0^2}{4} - \frac{k\beta}{2\omega_0} \frac{\omega_0^2 - 12p\omega_0 - 12p^2}{(\omega_0 - 3p)(\omega_0 - 2p)} \right), \quad s = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Как видно из приведенных формул, эти критические точки образуют два двумерных (пересекающихся) гладких “критических” многообразия, характеризуемых условиями **(a)**  $W = 0$  и **(b)**  $p = 0$ . Таким многообразиям отвечают траектории с равномерным движением, параллельным оси  $x_1$  (т.е. движениям вдоль параллели). Естественно считать, что интересующие нас решения должны находиться в некоторой окрестности этих критических многообразий, причем все компоненты этих решений, опять же меняются достаточно медленно. Ясно, что в первом приближении это движение определяется линеаризованными уравнениями, и тем самым характеризуются собственными значениями соответствующей матрицей Якоби.

Учитывая сказанное, представим систему (5.3)–(5.10) в несколько ином виде. Добавим к комплексным неизвестным функциям  $V, Y, Z, W$  комплексно сопряженные  $\bar{V}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}$  и выделим из полного набора неизвестных переменные  $(V, \bar{V}, Y, \bar{Y}, Z, \bar{Z}, W, \bar{W}, \lambda, s)$ . Вектор столбец, составленный из этих функций обозначим через  $\xi$ . Тогда систему (5.3)–(5.10) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F^0(\omega_0, \mu) + F^1(\omega_0, \mu, \xi) + F^2(\omega_0, \mu, \xi), \\ \dot{\omega}_0 &= \frac{\beta}{2i}(V - \bar{V}), \quad \dot{\mu} = s, \\ \dot{X} &= V. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Здесь  $F^1(\omega_0, \mu, \xi) = Q(\omega_0, \mu)\xi$ ,  $Q$  –  $10 \times 10$  матрица, Отличные от нуля компоненты независящего от  $\xi$  вектора  $F^0$ :  $F_Y^0 = -F_{\bar{Y}}^0 = -\frac{i\beta}{3|c|}(2p + \omega_0)\mu^3$ ;  $F_Z^0 = -F_{\bar{Z}}^0 = \frac{i\beta}{3|c|}\omega_0\mu^3$ ;  $F_s^0 = -\frac{\omega_0^2}{4}\mu$ ; а единственная отличная от нуля компонента квадратично зависящего от  $\xi$  вектора  $F^2$  определяются равенством  $F_s^2 = \mu^{-3}2|c|Re((Z - \bar{Y})W + 3ZY/2)$ .

Обозначим через  $\xi_0(\omega_0, \mu)$  критическую точку системы (5.43). Если к уравнениям для определения критических точек добавить уравнение

$V = 0$ , то это дает уравнение связывающее  $p$  или  $\mu$  с  $\omega_0$ . Учитывая, что в (5.42)  $c = (\omega - 2p)/\rho_0$ , а значение геопотенциала на траектории  $\rho_0$  строго положительно, получаем

$$p = -\omega_0 \iff \mu = \frac{1}{\sqrt{3\omega_0}}$$

Движение по траекториям далеко вне окрестности этих множеств оказывается весьма быстрым, и возможность использования соответствующих решений укороченной цепочки в задаче о тропических циклонах маловероятно. Поэтому окрестность критического многообразия  $\mathbf{b}$  ( $p = 0$ ) мы здесь не рассматриваем. Тем самым мы имеем одномерные инвариантные многообразия, параметризуемые  $\omega_0$ . Заменяем теперь переменную  $\xi$  на  $\xi'$  по формуле  $\xi = \xi' + \xi^0(\omega_0, \mu)$  и перепишем систему (5.43) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}' &= \Lambda(\omega_0, \mu)\xi' + F^2(\omega_0, \mu, \xi') \\ \dot{\omega}_0 &= \frac{\beta}{2i}(V' - \bar{V}'), \quad \dot{\mu} = s', \quad \dot{X} = V' + V^0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Здесь  $\Lambda(\omega_0, \mu)$ — $10 \times 10$  матрица, которая действует на вектор  $\xi'$  по следующему правилу:

$$\Lambda\xi' = Q(\omega_0, \mu)\xi' - \frac{\partial \xi^0}{\partial \omega_0} \frac{\beta}{2i}(V' - \bar{V}') - \frac{\partial \xi^0}{\partial \mu} s' + \frac{\partial F^2}{\partial \xi}(\omega_0, \mu, \xi^0(\omega_0, \mu)) \cdot \xi'.$$

Теперь критические точки определяются равенством  $\xi' = 0$  и медленные движения в окрестности критического многообразия в первую очередь определяются собственными числами матрицы  $\Lambda(\omega_0, \mu)$ . Обычная процедура исследования систем в окрестности инвариантных подмногообразий состоит в исследовании устойчивости системы сначала в линейном приближении. Однако нас интересует прежде всего возможность наличия у системы (5.44) медленных движений. Если все числа матрицы  $\Lambda$  велики по абсолютной величине, независимо от того вещественные они или комплексные, то есть независимо от того порождает линейная часть системы устойчивую или неустойчивую ситуацию, система (5.44) не будет иметь медленных движений.

Поэтому прежде чем проводить дальнейшее, вообще говоря, нетривиальное исследование системы (5.44) в окрестности критических многообразий сначала следует выяснить возможны ли вообще медленные траектории, а если возможны, то при каких значениях параметров.

Именно, собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}$  матрицы в вариациях  $\Lambda(\omega_0, \mu)$  (см. рис. 5.3) для первой подсистемы в критических точках, для

которых  $W = 0$ ,  $p = -\omega_0$ , определяются следующим образом:  $\lambda_9 = ip$ ,  $\lambda_{10} = -ip$ , а остальные собственные значения находятся из уравнения

$$\lambda_i^8 + 22\omega_0^2\lambda_i^6 + (105 + \frac{9\delta}{2})\omega_0^4\lambda_i^4 + (148 + \frac{171\delta}{2})\omega_0^6\lambda_i^2 + (64 - 81\delta - \frac{243\delta^2}{2})\omega_0^8 = 0,$$

где безразмерный параметр  $\delta = \frac{\beta^2}{3|c|\omega_0^3}$ . Медленные движений в окрестности критического многообразия возможны тогда, когда существуют “маленькие” корни  $\lambda$  этого полинома. Одно из собственных значений обращается в ноль тогда и только тогда, когда слагаемое  $(64 - 81\delta - \frac{243\delta^2}{2})\omega_0^8$  в последнем уравнении обращается в ноль. Это дает  $\delta = \frac{\sqrt{465}-9}{27} \sim 0,465$ .

Рассмотрим в качестве примера случай, когда  $\beta$  плоскость касается земли в точке, расположенной на широте  $20^\circ$  ( $\tilde{\omega} \approx 0.18$  1/час) и зададимся вопросом при каком значении геопотенциала возможна ситуация, когда одно из собственных значений обращается в ноль в окрестности этой точки. Соответствующие вычисления показывают, что такая ситуация реализуется, если принять значение геопотенциала на траектории  $\Gamma$  соответствующее высоте слоя атмосферы  $H \sim 10$  км ( $\eta|_\Gamma = gH \approx 860000 \text{ км}^2/\text{час}^2$ ,  $g$  – ускорение свободного падения). Иными словами, в окрестности широты  $20^\circ$  возможно наличие медленных траекторий, если предположить, что высота слоя атмосферы равна 10 км. Заметим, что в задачах о мезомасштабных вихрях в атмосфере (в отличие от океана) толщина слоя атмосферы – воображаемая величина, которой часто приписываются значения  $7 \div 12$  км.

$$\begin{pmatrix}
-\frac{1}{32} \mathfrak{i} (32 + 27 \delta) \omega_0 & \frac{27}{32} \mathfrak{i} \delta \omega_0 & 3 \mathfrak{i} \sqrt{3} \omega_0^{3/2} & 0 & 0 \\
-\frac{27}{32} \mathfrak{i} \delta \omega_0 & \frac{1}{32} \mathfrak{i} (32 + 27 \delta) \omega_0 & 0 & -3 \mathfrak{i} \sqrt{3} \omega_0^{3/2} & 6 \mathfrak{i} \sqrt{3} \omega_0^{3/2} \\
-\frac{1}{16} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & \frac{1}{16} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & -2 \mathfrak{i} \omega_0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{16} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & \frac{1}{16} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & 0 & 2 \mathfrak{i} \omega_0 & 0 \\
\frac{1}{64} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & -\frac{1}{64} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & 0 & 0 & -4 \mathfrak{i} \omega_0 \\
\frac{1}{64} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & -\frac{1}{64} \mathfrak{i} \sqrt{3} \delta \sqrt{\omega_0} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mathfrak{i} \beta (-32+51 \delta)}{1152 \omega_0} & \frac{\mathfrak{i} \beta (-32+51 \delta)}{1152 \omega_0} & -\frac{\mathfrak{i} \beta}{6 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} & \frac{\mathfrak{i} \beta}{6 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} & -\frac{\mathfrak{i} \beta}{6 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} \\
-\frac{\beta}{4 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} & -\frac{\beta}{4 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} & \frac{\beta}{8} & \frac{\beta}{8} & \frac{\beta}{4} \\
-6 \mathfrak{i} \sqrt{3} \omega_0^{3/2} & 3 \mathfrak{i} \sqrt{3} \omega_0^{3/2} & 0 & 0 & \frac{27 \sqrt{3} \delta \omega_0^{5/2}}{8 \beta} \\
0 & 0 & -3 \mathfrak{i} \sqrt{3} \omega_0^{3/2} & 0 & \frac{27 \sqrt{3} \delta \omega_0^{5/2}}{8 \beta} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta \omega_0^2}{4 \beta} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta \omega_0^2}{4 \beta} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7 \delta \omega_0^2}{16 \beta} \\
4 \mathfrak{i} \omega_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7 \delta \omega_0^2}{16 \beta} \\
0 & \mathfrak{i} \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathfrak{i} \omega_0 & 0 & 0 \\
\frac{\mathfrak{i} \beta}{6 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} & -\frac{2 \mathfrak{i} \beta}{9 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} & \frac{2 \mathfrak{i} \beta}{9 \sqrt{3} \sqrt{\omega_0}} & 0 & \frac{(-32+59 \delta) \sqrt{\omega_0}}{96 \sqrt{3}} \\
\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{12} & -\frac{\beta}{12} & 3 \sqrt{3} \omega_0^{3/2} & 0
\end{pmatrix}$$

Рис. 5.3: Матрица  $\Lambda(\omega_0, \mu)$  при  $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}\omega_0}$ . Здесь  $\delta = \frac{\beta^2}{3|c|\omega_0^3}$ .

## Глава 6

# Цепочки Гюгонио-Маслова для системы уравнений мелкой воды с учетом энергетического обмена

Рассмотрим следующую систему уравнений, описывающую динамику двумерных вихрей в атмосфере с учетом энергетического обмена между атмосферой и океаном (см. [18])

$$\frac{\partial(\rho(H - \delta_E))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(H - \delta_E)\mathbf{u}) = \rho\delta_E\xi, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} - \omega\mathbf{T}\mathbf{u} + \frac{g}{\rho}\nabla(\rho H) = \nu\Delta\mathbf{u}. \quad (6.2)$$

Здесь  $x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{u}$  вектор скорости,  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\nabla = {}^t(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ ,  $\omega = \tilde{\omega} + \beta x_2$  удвоенная частота Кориолиса на  $\beta$ -плоскости; кроме того функция  $H(x, t)$  – эффективная высота атмосферы,  $\rho(x, t) > 0$  плотность,

$$\xi = \text{rot}_3 \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

$g$  – ускорение свободного падения,  $\nu$  – вязкость,  $\delta_E = \sqrt{\nu/\omega}$  – высота слоя Экмана<sup>1</sup>. Запишем

$$\rho = \rho_0 + \rho',$$

---

<sup>1</sup>Эффект наличия вязкости, силы кориолиса и условия Дирихле для скорости ветра на границе атмосферы и океана в начальной трехмерной модели, в результате чего образуется так называемый слой Экмана в нижней части атмосферы. После сведения задачи к двумерной остается слагаемое  $\rho\delta_E\xi$  в правой части уравнения (6.1) (см. например [34]).

$$T = T_0 + T'.$$

Здесь  $T$  – температура,  $\rho_0, T_0$  и  $\rho', T'$  соответственно средние значения плотности и температуры и их отклонения. Предполагается также, что справедливо приближение Буссинеска

$$\rho' = \alpha \rho_0 T', \quad \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T' = Q/c_p, \quad (6.3)$$

где  $\alpha, c_p$  постоянные,  $Q$  приток тепла на единицу массы.

В первом приближении считается, что

$$Q = -k(T' - \hat{T}),$$

Здесь  $k$  некоторая физическая константа, а  $\hat{T} + T_0$  температура поверхности океана. Вообще говоря  $\hat{T}$  может быть функцией от  $x_1, x_2$ . Подставим  $T' = \frac{\rho'}{\alpha \rho_0}$  в (6.3) и обозначим  $\hat{\rho} = \alpha \hat{T} \rho_0$ . Имеем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho' + \frac{k}{c_p}(\rho' - \hat{\rho}) = 0.$$

Перепишем также последнее слагаемое в левой части (6.1) в форме  $\rho(H - \delta_E) + \rho \delta_E$ , и запишем (6.2) как

$$-(H - \delta_E) \frac{k}{c_p}(\rho' - \hat{\rho}) + \rho \frac{\partial(H - \delta_E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(H - \delta_E)\mathbf{u}) + \rho \delta_E \text{rot}_3 \mathbf{u} = 0.$$

Разделим последнее уравнение на  $\rho$  и обозначим

$$\eta = g(H - \delta_E),$$

далее получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \omega \mathbf{T} \mathbf{u} + \nabla \eta + \frac{\eta + g \delta_E}{\rho} \nabla \rho = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) + g \delta_E \text{rot}_3 \mathbf{u} - \eta \frac{k(\rho' - \hat{\rho})}{c_p \rho} = 0. \quad (6.5)$$

Предполагается, что  $\rho' \ll \rho_0$ , поэтому мы можем заменить  $\rho$  в знаменателе (6.4) и (6.5) на  $\rho_0$ . Введем новую переменную  $\Theta = (\rho' - \hat{\rho})/\rho_0$  и обозначим  $\delta = g \delta_E$ ,  $k' = \frac{k}{c_p}$ . Для упрощения обозначений опустим штрихи в определении  $k'$ . Также будем считать  $\nu$  достаточно малым и опустим слагаемое  $\nu \Delta \mathbf{u}$  в правой части (6.4)

Окончательно, система принимает следующий вид.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \omega \mathbf{T} \mathbf{u} + \nabla \eta + (\eta + \delta) \nabla \Theta = 0. \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) + \delta \operatorname{rot}_3 \mathbf{u} - \eta k \Theta = 0. \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta + k \Theta = 0. \quad (6.8)$$

Будем искать особые решения со структурой “типа квадратного корня” из квадратичной формы вида

$$\mathbf{u} = u(x, t) + \tilde{u}(x, t), \quad \tilde{u}(x, t) = U(x, t) \sqrt{S(x, t)}, \quad (6.9)$$

$$\eta = \rho_0(x, t) + \tilde{\rho}(x, t), \quad \tilde{\rho}(x, t) = R(x, t) \sqrt{S(x, t)}, \quad (6.10)$$

$$\Theta = \theta_0(x, t) + \tilde{\theta}(x, t), \quad \tilde{\theta}(x, t) = N(x, t) \sqrt{S(x, t)}. \quad (6.11)$$

Здесь гладкие функции  $u, \eta, \rho$  определяют “фон”,  $U, N, R$  – “амплитуду”,  $S$  – “фазу”. Относительно последней предполагается условия (i)–(iii) (см. главу 1).

При  $\delta = 0, k = 0$  и  $\Theta = \text{const}$  система уравнений (6.6)–(6.8) переходит в систему уравнений мелкой воды на  $\beta$ -плоскости (2) для неизвестных  $\mathbf{u}, \eta$ . Заметим, что в силу нелинейного слагаемого  $\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta$  в уравнении (6.8) мы не можем предположить, что функция  $\Theta(x, t)$  не содержит особенности ( $N(x, t) = 0$  в (6.11)), если только функция  $\Theta(x, t)$  не зависит от  $x$ . С другой стороны, условие типа (iv) для функции  $N$  может дать дополнительные условия на функции, определяющие гладкую часть решения ( $u, \rho$  и  $\theta$ ) (типа условий вмерзновенности особенности в поле скоростей и условий Коши-Римана). Поэтому мы предполагаем условие (iv) для функций  $U, R$ , но не предполагаем аналогичного условия для  $N$ .

Повторим процедуру, аналогичную той, которая использовалась в главе 3. Прежде всего, перейдем в систему координат, связанную с центром особенности:

$$\begin{aligned} x' &= x - X(t), & \mathbf{u}'(x', t) &= \mathbf{u}(x' + X(t), t) - V(t) \\ \eta'(x', t) &= \eta(x' + X(t), t), & \Theta'(x', t) &= \Theta(x' + X(t), t), \end{aligned}$$

где  $V(t) = \dot{X}(t)$  – скорость центра особенности,  $X(t)$  – траектория центра особенности. Тогда система (6.6)–(6.8) записывается в виде (мы опускаем



штрихи на новых переменных  $x$ )

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \dot{V} - \omega \mathbf{T}(\mathbf{u} + V) + \nabla \eta + (\eta + \delta) \nabla \Theta = 0. \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) + \delta \operatorname{rot}_3 \mathbf{u} - \eta k \Theta = 0. \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta + k \Theta = 0. \quad (6.14)$$

После подстановки негладкого решения (6.9)–(6.11) в уравнения (6.12)–(6.14), последующего приравнивания отдельно гладкой части и части содержащей особенность каждого уравнения, мы получаем систему дифференциальных уравнений для гладких функций  $u_1, u_2, \rho, \theta$  и  $U_1, U_2, R, N, S$ : (уравнения “порожденные” гладкой частью решения)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} - \omega \mathbf{T}(u + V) + \dot{V} + \nabla \rho + (\rho + \delta) \nabla \theta + \tilde{\rho} \nabla \tilde{\theta} = 0, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u + \tilde{\rho} \tilde{u}) + \delta \operatorname{rot}_3 u - k \rho (\theta - \hat{\theta}) - k \tilde{\rho} \tilde{\theta} = 0, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\theta} + k (\theta - \hat{\theta}) = 0, \quad (6.17)$$

и (уравнения “порожденные” негладкой частью решения)

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{u} + \tilde{\rho} u) + \delta \operatorname{rot}_3 \tilde{u} - k \tilde{\rho} (\theta - \hat{\theta}) - k \rho \tilde{\theta} = 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + u \cdot \nabla \tilde{\theta} + \tilde{u} \cdot \nabla \theta + k \tilde{\theta} = 0, \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u \cdot \nabla \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla u - \omega \mathbf{T} \tilde{u} + \nabla \tilde{\rho} + (\rho + \delta) \nabla \tilde{\theta} + \tilde{\rho} \nabla \theta = 0. \quad (6.20)$$

Анализ уравнений порожденных “негладкой частью” приводит к соотношениям, позволяющим выразить фазу  $S$  и амплитуды  $U, R, N$  через гладкие составляющие решения. Выпишем эти соотношения в исходной системе координат.

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия (i)–(iv), тогда выполнено условие вооруженности

$$\dot{X} = u|_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} V \equiv \mathbf{u}|_{\Gamma}, \quad (6.21)$$

и без уменьшения общности можно считать, что функция  $S$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{d}{dt} S = \frac{\partial}{\partial t} S + (u, \nabla) S = 0 \quad (6.22)$$

с точностью до функций  $o(|x - X(t)|^\infty)$ . При этом

1) Если  $N|_\Gamma \neq 0$ , то функции  $\rho$  и  $\theta$  удовлетворяют соотношению

$$(\nabla\rho + (\rho + \delta)\nabla\theta)|_\Gamma = 0 \quad (6.23)$$

и траектории  $X(t)$  центра особенности описывается системой уравнений

$$\dot{X} = V, \quad \dot{V} = \omega_0 \mathbf{T}V, \quad \dot{\omega}_0 = \beta V_2, \quad (6.24)$$

где  $\omega_0 = \omega|_\Gamma$ .

2) Если  $N|_\Gamma = 0$ , то  $R|_\Gamma = 0$  и на траектории особенности  $\Gamma$  выполнены условия Коши-Римана

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}|_\Gamma, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_2}|_\Gamma = -\frac{\partial w_2}{\partial x_1}|_\Gamma,$$

для комплексной функции  $w_1(x, t) + iw_2(x, t)$ , где

$${}^t(w_1, w_2) = (\mathbf{T}P, \nabla N)(\nabla\rho + (\rho + \delta)\nabla\theta) + 2 \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(X(t), t) \right\| u.$$

3) В случае, когда  $\nabla N|_\Gamma = 0$  с необходимостью справедливо  $\nabla\theta|_\Gamma = 0$ , выполнены условия Коши-Римана (1.8), а негладкая часть решения имеет следующую структуру

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \left( \phi(t) \left( \mathbf{T}\nabla S + \frac{\delta}{\rho} \nabla S \right) + O(\|x - X(t)\|^2) \right) \sqrt{S}, \\ R &= O(|x - X(t)|^2), \quad N = O(|x - X(t)|^2) \\ R + (\rho + \delta)N &= -\frac{2}{3}\phi(t)(\text{rot}_3 u + \omega)S + O(\|x - X(t)\|^3) \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\dot{\phi} = \delta c \phi, \quad c = \left. \frac{\text{rot}_3 u + \omega}{\rho} \right|_\Gamma.$$

$$S = \frac{A(t)}{2}(x - X(t), \Pi(t)B\Pi^*(t)(x - X(t)) + O(|x - X(t)|^3),$$

где  $\Pi(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) & \sin \alpha(t) \\ -\sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{pmatrix}$  матрица вращения на угол  $\alpha(t) = \alpha_0 - \frac{1}{2} \int_0^t \text{rot}_3 u(X(t), t) dt$ ,  $\Pi^*(t)$  транспонированная матрица  $\Pi(t)$ ,  $A(t) = A_0 \exp(-\int_0^t \text{div } u(X(t), t) dt)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1+b & 0 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}$ ,  $b$ ,  $\alpha_0$  и  $A_0$  — константы,  $-1 < b < 1$ .

**Доказательство.** Система (6.18)–(6.20) линейна относительно сингулярных функций  $\tilde{\eta}, \tilde{\rho}, \tilde{u}$ . Если предположить, что функции  $\rho, \theta, u$ , определяющие фон известны, то мы можем выразить функции  $\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \tilde{u}$  (или  $N, R, U, S$ ) через  $\rho, \theta, u$ . Как и в случае уравнений мелкой воды, условие структурной самоподобности решения может привести к дополнительным условиям на функции фона  $\rho, \theta, u$ .

Подставим функции  $\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \tilde{u}$  в форме (6.9)–(6.10) в уравнения (6.18)–(6.20). После дифференцирования и последующего умножения на  $2\sqrt{S}$ , получим

$$\begin{aligned}\Lambda U + (R + (\rho + \delta)N)P + 2SF &= 0, \\ \Lambda R + \rho PU - \delta P_{\perp}U + 2Sf &= 0, \\ \Lambda N + 2SQ &= 0.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Здесь

$$\begin{aligned}F &= U_t + (u, \nabla)U + (U, \nabla)u - \omega \mathbf{T}U + \nabla R + (\rho + \delta)\nabla N + R\nabla\theta, \\ f &= R_t + (\nabla, \rho U + Ru) - \delta(\mathbf{T}\nabla, U) - kR\theta - k\rho N, \\ Q &= N_t + (u, \nabla N) + (U, \nabla\theta) + kN\end{aligned}$$

Теперь разложим функции  $\Lambda, U, R, Q, S, N, P, \dots$  в ряды Тейлора по  $x_1, x_2$  в окрестности точки  $x = 0$ , подставим в уравнения (6.26), и соберем слагаемые порядка  $\|x\|$ , это даст систему уравнений

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)}U^{(0)} + (R^{(0)} + (\rho + \delta)N^{(0)})P^{(1)} &= 0, \\ \Lambda^{(1)}R^{(0)} + \rho^{(0)}(P^{(1)} - \frac{\delta}{\rho^{(0)}}P_{\perp}^{(1)})U^{(0)} &= 0, \\ \Lambda^{(1)}N^{(0)} &= 0,\end{aligned}\tag{6.27}$$

которая с необходимостью влечет

**Лемма 24.**  $N^{(0)} + (\eta_0^{(0)} + \delta)R^{(0)} = 0, U^{(0)} = 0$  и  $u^{(0)}R^{(0)} = 0$ .

Теперь соберем слагаемые порядка  $\|x\|^2$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)}U^{(1)} + D^{(1)}P^{(1)} + 2S^{(2)}F^{(0)} &= 0, \\ (\Lambda R)^{(2)} + \rho^{(0)}P^{(1)}U^{(1)} - \delta P_{\perp}^{(1)}U^{(1)} + 2S^{(2)}f^{(0)} &= 0, \\ (\Lambda N)^{(2)} + 2S^{(2)}Q^{(0)} &= 0,\end{aligned}\tag{6.28}$$

Здесь  $D^{(1)} = R^{(1)} + (\rho^{(0)} + \delta)N^{(1)} + \rho^{(1)}N^{(0)}$ .

1) Предположим, что  $N^{(0)} = N|_{\Gamma} \neq 0$ , тогда лемма 24 влечет  $R^{(0)} = R|_{\Gamma} \neq 0$ . Третье уравнение в системе (6.27) влечет, что в этом

случае выполнено условие замороженности  $u^{(0)} = 0$ . Третье уравнение из системы (6.28) перепишется в виде  $\Lambda^{(2)}N^{(0)} + 2S^{(2)}Q^{(0)} = 0$ . Отсюда и из раздела 3.3 следует, что без уменьшения общности мы можем предположить, что выполнено уравнение Гамильтона-Якоби  $\Lambda = S_t + S(u, \nabla)S = 0$ . Вектор  $P^{(1)}$  не может быть параллелен при всех  $x$  вектору  $F^{(0)}$ , зависящего только от времени, поэтому из первого уравнения системы (6.28) следует, что  $D^{(1)} = R^{(1)} + (\rho_0 + \delta)N^{(1)} + \rho^{(1)}N^{(0)} = 0$  и  $F^{(0)} = \nabla R^{(1)} + (\rho_0 + \delta)\nabla N^{(1)} + R^{(0)}\nabla\theta^{(1)}$ . Это и Утверждение 24 влечет соотношение (6.23). Теперь, если мы соберем слагаемые порядка  $|x|$  в уравнении (6.15), мы немедленно придем к (6.24).

2) Пусть теперь  $N^{(0)} = 0$ , тогда  $R^{(0)} = 0$ . Допустим, что  $u^{(0)} \neq 0$ , тогда последнее уравнение в (6.28) запишется в виде  $\Lambda^{(1)}N^{(1)} + 2S^{(2)}Q^{(0)} = 0$ .  $S^{(2)}$  не может быть представлено в виде произведения двух линейных форм, поэтому  $N^{(1)} = 0$ . Первое уравнение из системы (6.28) имеет вид второго уравнения из (2.26) при  $k = 1$ ,  $\nu = 2$ . Таким образом, следуя процедуре, изложенной в доказательстве леммы 12, получаем формулы  $U^{(1)} = 3\mu^{(0)}P^{(1)}$ ,  $R^{(1)} = -(u^{(0)}, U^{(1)})$ . Второе уравнение в (6.28) отличается от первого в (2.26) слагаемым  $-\delta P_{\perp}^{(1)}U^{(1)}$  и  $-2S^{(2)}(\mathbf{T}\nabla, U^{(1)})$  в левой части, которые обращаются в нуль в силу вида  $U^{(1)}$ . Поэтому соображения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 12 остаются в силе для уравнений (6.28). И предположение того что  $u^{(0)} \neq 0$  влечет  $U^{(1)} = R^{(1)} = 0$ , в то время как мы предполагаем, что разложение  $U^{(1)} \neq 0$ .

Из первого уравнения в (6.28) следует, что  $D^{(1)} = F^{(0)} = 0$ , второе уравнение перепишется в виде

$$\rho^{(0)}P^{(1)}U^{(1)} - \delta P_{\perp}^{(1)}U^{(1)} + 2S^{(2)}(\rho^{(0)}\operatorname{div} U^{(1)} - \delta(\mathbf{T}\nabla, U^{(1)})) = 0.$$

Это уравнение влечет

$$U^{(1)} = \phi_0(t)(P_{\perp}^{(1)} + \frac{\delta}{\rho}P^{(1)}). \quad (6.29)$$

Соберем члены порядка  $|x|^3$  в уравнениях (6.26). Первое уравнение дает

$$\Lambda^{(2)}U^{(1)} + (R^{(2)} + (\rho^{(0)} + \delta)N^{(2)} + \rho^{(1)}N^{(1)})P^{(1)} + 2S^{(2)}F^{(1)} = 0.$$

Умножив скалярно на  $P_{\perp}^{(1)}$  и используя вид  $U^{(1)}$ , получим, что  $\Lambda^{(2)}$  делится на  $S^{(2)}$ . Отсюда и из раздела 3.3 следует, что без уменьшения общности мы можем предположить, что выполнено уравнение Гамильтона-Якоби  $\Lambda = S_t + S(u, \nabla)S = 0$ . Тогда

$$R^{(2)} + (\rho^{(0)} + \delta)N^{(2)} + \rho^{(1)}N^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} D^{(2)} = -2\alpha(t)S^{(2)}$$

и  $(F^{(1)}, P_{\perp}^{(1)}) = 0$ , где  $\alpha(t)$  некоторая гладкая функция времени. Последнее уравнение является аналогом “уравнения переноса” (3.21).

$$F^{(1)} = U_t^{(1)} + (u^{(1)}, \nabla)U^{(1)} + (U^{(1)}, \nabla)u^{(1)} - \omega_0 \mathbf{T}U^{(1)} + \nabla D^{(2)} - N^{(1)}\nabla\rho^{(1)} + R^{(1)}\nabla\theta^{(1)}$$

В силу вида  $D^{(2)}$ , уравнение  $(F^{(1)}, P_{\perp}^{(1)}) = 0$  перепишется в виде

$$(P^{(1)}, U_t^{(1)} + (u^{(1)}, \nabla)U^{(1)} + (U^{(1)}, \nabla)u^{(1)} - \omega_0 \mathbf{T}U^{(1)} - N^{(1)}\nabla\rho^{(1)} + R^{(1)}\nabla\theta^{(1)}) = 0$$

Подставляя сюда (6.29), учитывая равенство  $D^{(1)} = 0$  и собирая затем коэффициенты Тейлора при  $x_1^2$ ,  $x_1x_2$  и  $x_2^2$  получим три уравнения. Условие разрешимости этих уравнений есть условие Коши-Римана для векторной функции  $w$  в пункте 2) Теоремы 6. Утверждение пункта 3) Теоремы получается в результате простой процедуры, изложенной в Главе 3.  $\square$

Другие уравнения из цепочки Гюгонио-Маслова получается приравниванием коэффициентов Тейлора к нулю при одинаковых степенях в уравнениях в уравнениях порожденных гладкой частью решения. Вычисления удобно проводить в комплексных координатах  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ , используя комплексные производные  $\partial/\partial z = (\partial/\partial x_1 - i\partial/\partial x_2)/2$ ,  $\partial/\partial \bar{z} = (\partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2)/2$  и комплексные функции  $X(t) = X_1(t) + iX_2(t)$ ,  $V(t) = V_1(t) + iV_2(t)$ ,  $u = u_1 + iu_2$  и т.д. вместо соответствующих двумерных векторных функций. Введем также следующие функции:  $\rho_0 = \rho|_{\Gamma}$ ,  $q = 1/2 \operatorname{div} u|_{\Gamma}$ ,  $p = -\frac{1}{2} \operatorname{rot}_3 u$ ,  $\mu = 1/\sqrt{\rho_0 c}$ ,  $Y = \mu^3(2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}|_{\Gamma} - \beta/3)$ ,  $Z = \mu^3(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}|_{\Gamma} + \beta/3)$ ,  $U = \mu^3 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}}|_{\Gamma}$ ,  $W = -\mu^3 \rho_0 2i\partial\Pi/\partial\bar{z}|_{\Gamma}$ ,  $\tau = \frac{\partial^2 \theta/\partial z \partial \bar{z}|_{\Gamma}}{\rho_0 c}$ ,  $\xi = \frac{\partial^2 \theta/\partial z \partial \bar{z}|_{\Gamma}}{\rho_0 c}$ ,  $r = \mu^4 \partial^2 \rho/\partial \bar{z} \partial z|_{\Gamma} + \tau/c$ .

**Теорема 2.** *Первые 11 уравнений Цепочки Гюгонио-Маслова имеют вид*

$$\dot{X} - V = 0, \quad (6.30)$$

$$\dot{V} + i\omega_0 V - \frac{i}{c\mu^3}(Y + W - 2\bar{Z}) = 0, \quad (6.31)$$

$$\dot{Y} - i(p - \omega_0)Y + \frac{i}{3}\beta(2p + \omega_0)\mu^3 = \frac{1}{2}\gamma\beta\mu^3 + E_1 + f_1, \quad (6.32)$$

$$\dot{Z} - i(3p - \omega_0)Z - \frac{i}{3}\omega_0\beta\mu^3 = -\frac{1}{2}\gamma\beta\mu^3 + E_2 + f_2, \quad (6.33)$$

$$\dot{U} - i(p + \omega_0)U = E_3 + f_3 \quad (6.34)$$

$$\dot{W} + ipW = -2c\delta p\mu^2 W - c\delta\omega_0\mu^2(Y - 2\bar{Z}) - \delta\beta\mu^3 c + E_4 \quad (6.35)$$

$$\ddot{\mu} + \frac{\omega_0^2 + 2\beta \operatorname{Re} V}{4}\mu - \mu^{-3}\left(\frac{1}{4} - r\right) = -2\mu^{-1}\delta\tau \quad (6.36)$$

$$\dot{r} + \frac{1}{\mu^2 c} \operatorname{Im}((Z + \bar{Y})W + 3YZ) = k\theta_0 r + 2p\delta\mu^2\tau, \quad (6.37)$$

$$\dot{c} = -\gamma c, \quad \dot{\omega}_0 - \beta \operatorname{Im} V = 0, \quad (6.38)$$

$$\dot{\theta}_0 + k\theta_0 = 0, \quad \dot{\tau} + k\tau = 0, \quad \dot{\xi} - 2ip\xi + k\xi = 0, \quad (6.39)$$

Здесь неизвестными являются комплексные функции  $X(t)$ ,  $V(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ ,  $W(t)$ ,  $U(t)$  и вещественные функции  $\omega_0(t)$ ,  $c(t)$ ,  $r(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\mu(t)$ ;  $E_1 = \frac{2i}{c\mu^2}((Y + W - 2\bar{Z})\tau - (\bar{Y} + \bar{W} - 2Z)\bar{\xi})$ ,  $E_2 = -\frac{2i}{c\mu^2}(\bar{Y} + \bar{W} - 2Z)\tau$ ,  $E_3 = \frac{2i}{c\mu^2}(Y + W - 2\bar{Z})\bar{\xi}$ ,  $E_4 = \frac{2i}{c\mu^2}((Y + W - 2\bar{Z})\tau + (\bar{Y} + \bar{W} - 2Z)\bar{\xi})$ ,  $\gamma = \delta 2p/\rho_0 + k\theta_0$ ,  $p = (\omega_0 - \rho_0 c)/2$ ,  $\rho_0 = 1/(\mu^2 c)$ ;  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  зависят от коэффициентов Тейлора функций  $u$ ,  $\rho$  третьего порядка.

Для моделирования движения тропических циклонов мы обрываем цепочку (6.30)-(6.39) предполагая  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ .

Оборванная цепочка Гюгонио-Маслова для уравнений мелкой воды без учета энергетического обмена получается из уравнений (6.30)-(6.38) после приравнивания к нулю их правых частей.

Предварительный численный анализ (6.30)-(6.39) показал, что у оборванной цепочки существует семейство траекторий близких по параметрам к режиму, описанному в предыдущей главе, но при этом центр особенности может двигаться в меридиональном направлении. На рисунке ниже приводится сравнение траектории системы (6.30)-(6.39) с реальной траекторией тайфуна ODETTE (4-9 декабря 2003). Траектория оборванной цепочки Гюгонио-Маслова находилась с помощью подбора начальных условий для неизвестных функций в системе (6.30)-(6.39), а так же параметров  $\delta$ ,  $c$  и  $k$  так, чтобы траектория приближала траекторию реального тайфуна. Величина

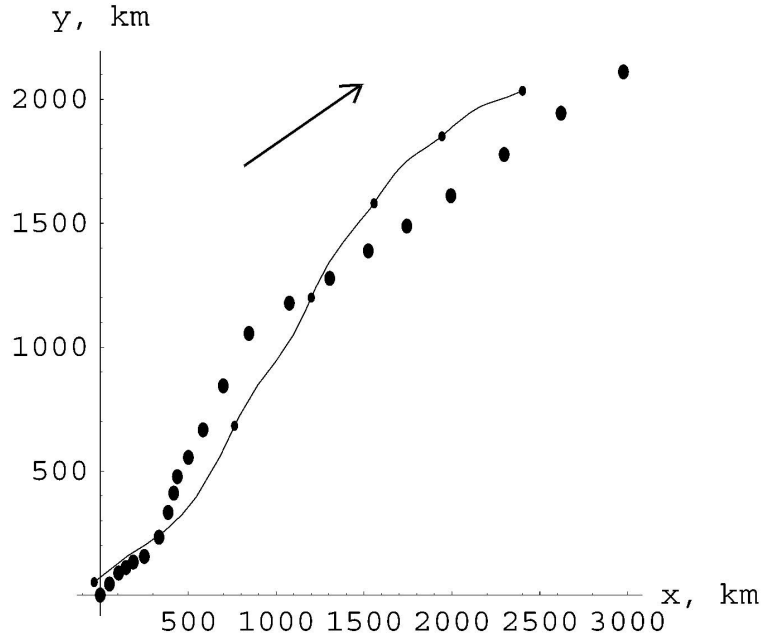


Рис. 6.1: Сравнение траектории тропического шторма ODETTIE (4-9 декабря 2003) (отмеченного точками) и траектории оборванной цепочки Гюгонио-Маслова (в течении 5 суток) для уравнений мелкой воды с учетом энергетического обмена (отмеченной сплошной линией). Точка  $x = y = 0$  соответствует  $12.9^\circ$  северной широты и  $76.20^\circ$  западной долготы.

удвоенной частоты Кориолиса  $\omega_0$  и параметр  $\beta$  брались соответствующие северной широте  $20^\circ$ , высота атмосферы принималась равной 8км. Ниже приведены начальные данные и параметры траектории, приведенной на Рис. 6.1, в безразмерных единицах длины и времени  $\hat{L} = 10^5 \text{м} = 100 \text{км}$ ,  $\hat{T} = 10^5 \text{сек} \sim 1 \text{день}$  в момент времени  $t=0$ :  $\delta = 50$  (соответствует высоте слоя Экмана 5 метров),  $k = .6$ ,  $c = .002$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\beta = .2$ ,  $V = 1. + 1.3i$ ,  $Y = 0.0006 - 4.0907 * 10^{-6}i$ ,  $Z = 0.0002 - 1.07613 * 10^{-6}i$ ,  $W = 0.0002i$ ,  $r = .1111$ ,  $\dot{\mu} = -0.0062$ ,  $\mu = 0.2599$ ,  $\theta_0 = \tau = \xi = 0$ .

# Литература

- [1] Доброхотов С. Ю., Панкрашкин К. В., Семенов Е. С. О гипотезе Маслова о структуре слабых точечных особенностей уравнений мелкой воды// Докл. РАН. - 2001. - 379, № 2. - С. 173-176
- [2] Dobrokhoto S. Yu., Pankrashkin K. V., Semenov E. S. Proof of Maslov's conjecture about the structure of weak point singular solutions of the shallow water equations// Russ. J. Math. Phys. - 2001. - 8, № 1. - С. 25-54
- [3] Семенов Е. С. Об условиях Гюгонио-Маслова для вихревых особых решений системы уравнений мелкой воды// Мат. заметки. - 2002. - 71, № 6. - С. 902-913
- [4] Доброхотов С. Ю., Семенов Е. С., Тироцци Б., Цепочки Гюгонио-Маслова для сингулярных вихревых решений квазилинейных гиперболических систем и траектории тайфунов// Современная математика. Фундаментальные направления. - 2003. - 2. С. 5-44
- [5] Dobrokhoto S. Yu., Pankrashkin K. V., Semenov E. S. On Maslov's conjecture about square root type singular solutions of the shallow water equations, In: *Nonlinear Algebraic Analysis and Applications*, edited by A Delcroix et al. - Cambridge Sci. Publ., 2004
- [6] Доброхотов С. Ю., Семенов Е. С., Тироцци Б., Вычисление интегралов цепочки Гюгонио-Маслова для особых вихревых решений уравнений мелкой воды// Теоретическая и математическая физика. - 2004. - 139, №1. - С. 500-512
- [7] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики// Итоги науки и техн., сер. Совр. пробл. мат., Фундам. напр. - М.: ВИНТИ, 1985. - 3
- [8] Бабич В. М. Фундаментальное решение гиперболических уравнений с переменными коэффициентами// Мат. сборник. - 1960. - 52 (94), № 2. - С. 709-738
- [9] Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Пространственно-временной лучевой метод. - Ленинград: ЛГУ, 1985
- [10] Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Данилов В. Г., Доброхотов С. Ю. Пример вычисления "глаза" тайфуна на основе гипотезы В. П. Маслова// Докл. РАН. - 1994. - 338, № 1. - С. 102-105



- [11] Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические проблемы статистической механики. - М: Наука, 1980
- [12] Гордин В. А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды: аналитические аспекты. - Л.: Гидрометеиздат, 1987
- [13] Гринфельд М. А. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейном упругом материале// Прикл. мат. и мех. - 1978. - 42, № 5. - С. 883-898
- [14] Данилов В. Г., Маслов В. П., Шелкович В. М. Алгебры особенностей обобщенных решений строго гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка// Теор. и мат. физ. - 1998. - 114, № 1. - С. 3-55
- [15] Доброхотов С. Ю. Цепочки Гюгонио-Маслова для траекторий точечных вихревых особенностей уравнений мелкой воды и уравнение Хилла// Докл. РАН. - 1997. - 354, № 5. - С. 600-603
- [16] Доброхотов С. Ю. Редукция к уравнению Хилла цепочки Гюгонио-Маслова для траекторий уединенных вихрей уравнений мелкой воды// Теор. и мат. физ. - 1997. - 112, № 1. - С. 47-66
- [17] Доброхотов С. Ю., Тироцци Б. О свойстве гамильтоновости укороченных цепочек Гюгонио-Маслова для траекторий мезомасштабных вихрей// Докл. РАН. - 2002. - 384, № 6. - С. 741-746
- [18] Должанский Ф. В., Крымов В. А., Манин Д. Ю. Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений// Усп. физ. наук. - 1990. - 160, № 7. - С. 1-47
- [19] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова-Уизема// Докл. АН СССР. - 1983. - 270, № 4. - С. 781-785
- [20] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. - М: Наука, 1981
- [21] Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций// Усп. мат. наук. - 1990. - 45, № 5. - С. 3-40
- [22] Жихарев В. Н. О необходимых условиях существования и единственности типа решения со слабой распространяющейся особенностью, сосредоточенной в точке, для уравнений гидродинамики в случае двух пространственных переменных// Депонировано в ВИНТИ, № В86, 8148. - Москва, 1986
- [23] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Физматлит, 1995
- [24] Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.// Успехи физ.наук. - 1997. -167, № 11. - С. 405-432

- [25] Зубарев Д. Н. Современные методы статистической теории неравновесных процессов, // Итоги науки и техн., сер. Совр. пробл. мат. - М.: ВИНТИ, 1980. - 15. - С. 131-226
- [26] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1989
- [27] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. - М.: МГУ, 1965
- [28] Маслов В. П. О распространении ударной волны в изоэнтропическом невязком газе// Итоги науки и техн., сер. Совр. пробл. мат. - М.: ВИНТИ, 1977. - 8. - С. 199-271
- [29] Маслов В. П. Три алгебры, отвечающие негладким решениям систем квазилинейных гиперболических уравнений// Усп. мат. наук. - 1980. - 35, № 2. - С. 252-253
- [30] Маслов В. П., Омелянов Г. А. Условия типа Гюгонио для бесконечноузких солитонов уравнений простых волн// Сиб. мат. ж. - 1983. - 24, № 5. - С. 787-795
- [31] Монин А.С. Прогноз погоды как задача физики. — М.: Наука, 1965
- [32] Монин, А. С., Жихарев Г., М. Океанические вихри// Успехи Математических Наук. - 1990. - 160, № 5. - С. 1-47
- [33] Обухов А. М. К вопросу о геострафическом ветре// Изв. АН СССР, сер. геогр. - 1949. - 13, № 4. 281-306
- [34] Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. - М.: Мир, 1984
- [35] Рогачев К. А., Гогина Л. В., Вихри течения Ойясио, // Природа. - 2001, № 12 - С.
- [36] Узем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977
- [37] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэф. фициентами и их приложения. - М.: Главная редакция физ.-мат. литературы изд-ва "Наука", 1972. - 720 с.
- [38] Хаин А. П., Сутырин Г. Г. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном, - Л.: Гидрометеиздат, - 1983
- [39] Colombeau J. F., le Roux A. Y. Multiplications of distributions in elasticity and hydrodynamics// J. Math. Phys. - 1988. - 29. - С 315-319
- [40] Danilov, V.G. and Omel'yanov, G.A. Calculation of the singularity dynamics for quadratic nonlinear hyperbolic equations. Example: the Hopf equation// Nonlinear Theory of Generalized Functions (Vienna, 1997, M. Grosser et al., eds.), Res. Notes in Math., Chapman and Hall, London. - 1999. - 401. С - 63-74

- [41] Danilov, V.G., Omel'yanov, and Rozenknop, D. Calculation of the hurricane eye motion based on singularity propagation theory// Electr. Jour. of Differential Equations, 2002. - 16. - C 1-17
- [42] Dobrokhotov S. Yu. Hugoniot-Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations, I, II// Russ. J. Math. Phys. - 1999. - 6, № 2. - C 137-173, № 3. - C 282-313
- [43] Hongyan Zhu, Roger K. Smith, and Wolfgang Ulrich. A Minimal Three-Dimensional Tropical Cyclone Model// Journal Of The Atmospheric Sciences. - 2001. - 58. - C. 1924-1944
- [44] Lions J.-L., Temam, R., and Wang, S. New formulation of the primitive equations of atmosphere and applications// Nonlinearity. - 1992. -5, - C 237-288
- [45] Milnor J. Morse theory// Ann. Math. Stud. - 1993. - № 51
- [46] Ooyama K. V. Conceptual evolution of the theory and modeling of the tropical cyclone// J. Meteor. Soc. Japan. - 1982. - 60. - C. 369-379
- [47] Ravindran R., Prasad P. A new theory of shock dynamics. Part I (II)// Appl. Math. Lett. - 1990. - 3, № 3. - C 77-79
- [48] Reznik G. M., Grimshaw R. Ageostrophic dynamics of an intense localized vortex on a  $\beta$ -plane// J. Fluid Mech. - 2001. - 443. - C 351-376
- [49] Rogers C., Schief W. K. Multi-component Ermakov systems: structure and linearization// J. Math. Anal. Appl. - 1996. - 198, № 1. - C 194-220
- [50] Rogers C., Elliptic Warm-Core Theory: The Pulsatron// Physics Letters A. - 1989. - 6, 7. - C 138
- [51] Shapiro L. J. Potential vorticity asymmetries and tropical cyclone evolution in a moist three-layer model// J. Atm. Sc. - 1999. - 57, № 21. - C 3645-3662
- [52] Shugaev F. V., Shtemenko L. S. Propagation and Reflection of Shock Waves. - Singapore: World Scientific, 1998
- [53] Smith R. K., Ed. The Physics and Parameterization of Moist Atmospheric Convection. - Kluwer, 1997
- [54] Trev F. Propagation of singularities and semi-global existence theorems for (pseudo-) differential operators of principal type// Ann. Math. Stud. - 1978. - № 108. C. - 569-609
- [55] Wang Y. An Explicit Simulation of Tropical Cyclones with a Triply Nested Movable Mesh Primitive Equation Model: TCM3. Part I: Model Description and Control Experiment// Monthly Weather Review. - 2000. - 129. - C. 1370-1394