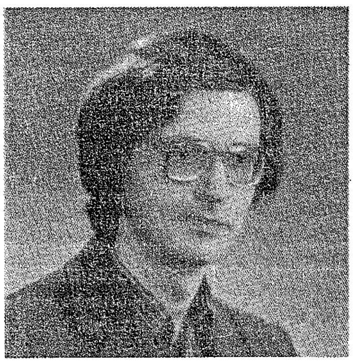
ДВЕ ИПОСТАСИ АСИМПТОТИКИ

И. В. АНДРИАНОВ, Л. И. МАНЕВИЧ



Игорь Васильевич Андрианов, кандидат физико-математических наук, доцент Днепропетровского инженерно-строительного института. Окончил физико-математический факультет Днепропетровского государственного университета в 1971 г. Область научных интересов — применение асимптотических методов в задачах механики. Автор монографии: Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек (совместно с В. А. Лесничей и Л. И. Маневичем). М., 1985.

В последнее время заметно повысился интерес к асимптотическим методам математической физики. Один из признаков этого — появление ряда превосходных книг, причем самых разнообразных: от специальных монографий до популярных брошюр. Асимптотический подход в своих многочисленных модификациях (теория возмущений, метод малого параметра, метод усреднения и др.), берущий начало в классических трудах П. Лапласа, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, переживает сегодня новый этап развития и находит приложения во многих областях физики и механики. Это тем более примечательно, что успехи вычислительной техники, сделавшей возможным численное решение даже весьма сложных задач, казалось бы, должны были привести к противоположной тенденции. Дело, по-видимому, в том, что «асимптотический подход больше, чем еще один приближенный метод, а, скорее, играет фундаментальную роль в описании физических явлений»[1]. Иными словами, асим-

Леонид Исакович Маневич, доктор технических наук, заведующий сектором Института химической физики АН СССР, профессор Московского физико-технического института. Окончил физико-математический факультет Днепропетровского государственного университета в 1959 г. Основные научные работы посвящены разработке и применению асимптотических методов, теории нелинейных колебаний, физике и механике полимеров. Автор ряда монографий, в том числе: Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек; Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела (в соавторстве с С. Г. Кобликом и А. В. Павленко). Киев, 1981.

[1] Segel G. A. // Amer. Math. Monthly. 1966. Vol. 63. № 1. P. 7—14.

птотический подход не только позволяет провести глубокий анализ тех или иных задач, но и способствует формированию принципиально новых понятий и установлению иерархической связи между физическими теориями различного уровня.

Итак, с одной стороны, эффективный способ решения физических задач, с другой — важный методологический принцип — вот те две ипостаси асимптотики, которые обсуждаются в настоящей статье.

ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Почти любая физическая теория, сформулированная в общем виде, очень сложна с математической точки зрения. Поэтому и при создании теории, и в дальнейшем ее развитии особое значение имеют простейшие предельные случаи, допускающие аналитическое решение. Для них обычно уменьшается число уравнений, понижается их порядок, нелинейные уравнения заменяются линейными, в исходной системе производится своего рода усреднение и т. п.

Но за всеми этими идеализациями, сколь бы различными они ни казались, стоит высокая степень симметрии, присущая математической модели рассматриваемого явления в предельной ситуации. Асимптотический подход к сложной, «нерешаемой» задаче состоит, по сути, в трактовке исходной (недостаточно симметричной) системы как близкой к некоторой симметричной. Принципиально важно, что определение поправок, учитывающих отклонения от предельного случая, гораздо проще, чем непосредственное исследование исходной системы.

На первый взгляд, возможности такого подхода ограничены узким диапазоном изменения параметров системы. Однако опыт исследования различных физических задач показывает, что при значительном изменении параметров системы и удалении ее от одного предельного симметричного случая, как правило, существует другая предельная система, часто с менее очевидной симметрией, и возмущенное решение можно строить уже для нее. Это позволяет описать поведение системы во всем диапазоне изменения параметров, опираясь на небольшое число предельных случаев.

Такой подход, в максимальной степени соответствуя физической интуиции и способствуя ее развитию, в то же время приводит к формированию новых физических понятий. Так, важное в гидромеханике понятие пограничного слоя имеет ярко выраженный асимптотический характер и связано с локализацией у границ обтекаемого тела той области, где влиянием вязкости жидкости пренебречь нельзя. Аналогичные явления в механике деформируемого твердого тела и теории электричества называются соответственно краевыми и скин-эффектами. Подобные примеры далеко не единичны.

Не менее важно, что асимптотический метод помогает установить связь между различными физическими теориями. А. Эйнштейн отмечал, что «лучший жребий физической теории — послужить основой для более общей теории, оставаясь в ней предельным случаем»[2]. Выявить соответствие между сменяющими друг друга физическими теориями и определить область применимости «старой» теории — вполне под силу асимптотическому анализу.

ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Для иллюстрации технической стороны асимптотического метода рассмотрим простой алгебраический пример. Биквадратное уравнение

$$x^4-2x^2-8=0$$

заменой $z=x^2$ сводится к квадратному и легко решается ($x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}\,j$, $j=\sqrt{-1}$). Возможность такого упрощения — следствие симметрии уравнения: замена x на $-x$ не меняет его.

Пусть исходное уравнение описывает некоторую физическую систему, и ее параметры претерпевают малые изменения, вследствие чего уравнение приобретает вид:

$$y^4-\varepsilon y^3-2y^2-8=0. \qquad (1)$$

При этом говорят, что система получила малое возмущение, выражение εy^3 называют возмущающим членом, а ε — малым параметром. Отмеченная ранее симметрия нарушилась, и решение нового

---

[2] Цит. по: Мигдал А. Б. В поисках истины. М., 1984. С. 207.

уравнения уже нельзя записать в простой форме. Но корни его y_i ($i=1, 2, 3, 4$) не должны сильно отличаться от x_i, поэтому можно положить $y_i \simeq x_i$. Погрешность такой замены определяется величиной отброшенного члена εy^3. Чтобы уточнить решение, представим его в виде ряда

$$y_i = x_i + \varepsilon y_i^{(1)} + \ldots, \qquad (2)$$

где многоточие соответствует меньшим членам с более высокими степенями ε.

Подставляя это выражение в возмущенное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем

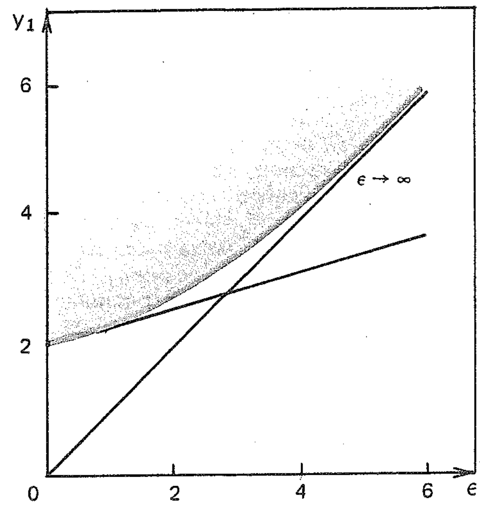
$$y_i^{(1)} = x_i^2/4(x_i^2 - 1);$$

вычисление поправок можно без труда продолжить, но с ростом ε отклонения от точного решения неизбежно будут увеличиваться.

Рассмотрим теперь противоположный случай больших возмущений. Тогда обратная величина ε^{-1} мала, причем корни уравнения (1) разделяются на две группы. При $\varepsilon^{-1} \to 0$ три корня стремятся к нулю, а четвертый неограниченно возрастает. Но для обеих групп по-прежнему можно построить разложения по малому параметру ε^{-1}.

Однако существует область, в которой асимптотика не дает удовлетворительного результата. Это область, где «малые» ε уже велики, а «большие» ε еще малы. Вопрос о построении решения в этой зоне, исходя из имеющихся предельных, один из самых трудных для асимптотических методов, как и вопрос о том, что такое «малое» или «большое» ε. Мы обсудим его в дальнейшем.

Отметим еще, что решения возмущенных задач, представляемые в виде разложений по малому параметру типа ряда (2), в реальных физических задачах не обязательно сходятся к искомому решению. Часто эти разложения оказываются асимптотическими. Отношение каждого последующего члена асимптотического ряда к предыдущему стремится к нулю, когда параметр разложения ε приближается к своему предельному значению, например к нулю. Отклонение же суммы N первых членов такого ряда от представляемой им функции при $\varepsilon \to 0$ имеет порядок ε^{N+1}. (При исследовании сходимости параметр ε полагают фиксированным и находят предел суммы N членов ряда при $N \to \infty$.) В конкретных случаях расходящийся асимптотический ряд (с бесконечным пределом) подчас полезнее сходящегося, если уже несколько начальных его членов дают хорошее приближение.



Зависимость корня y_1 уравнения (1) от параметра ε. Видно, что в области $2<\varepsilon<5$ прямые линии, соответствующие асимптотическим разложениям типа (2), не обеспечивают удовлетворительного приближения к точному решению (цветная кривая), иными словами, при $2<\varepsilon<5$ «малые» ε уже недостаточно малы, чтобы можно было пользоваться асимптотикой для $\varepsilon \to 0$, а «большие» ε еще недостаточно велики, чтобы стала применимой асимптотика для $\varepsilon \to \infty$.

Рассмотрим ниже некоторые типичные ситуации, в которых асимптотический подход оказывается эффективным.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ — РАЗНЫЕ ПОДХОДЫ

Уменьшение размерности системы. Высокий порядок алгебраического или дифференциального уравнения, большое число таких уравнений — все это проявление одной из принципиальных трудностей, возникающих при решении физических задач, которую называют иногда «проклятием размерности». Для ее преодоления разработаны два противоположных по смыслу подхода. Первый из них оказывается эффективным, если отдельные элементы рассматриваемой системы сильно отличаются друг от друга по тем или иным характеристикам. Тогда, вводя малые параметры — отношения соответствующих характеристик разных элементов, удается осуществить асимптотическую редукцию размерности, иными словами, уменьшить число степеней свободы системы, а затем уточнить полученное решение при помощи асимптотического разложения. Типичный пример такой ситуации — задача трех тел в небесной механике. Как правило, массы таких тел (скажем, Солнца, Юпитера и Земли) заметно различаются, и малый параметр — отношение масс — позволяет провести асимптотическую редукцию размерности. На этом основаны классические методы небесной механики, причем в качестве предельного (высокосимметричного) случая выступает точно решаемая задача двух тел. Небесная механика — первая область естествознания, в которой асимптотический метод (теория возмущений) сыграл фундаментальную роль. Более того, сам этот метод фактически был вызван к жизни насущной необходимостью ответа на вопросы, поставленные в небесной механике.

Отметим, что использование асимптотических методов далеко не всегда оговаривается специально, а иногда даже и не осознается до конца. Так, в инженерной практике чрезвычайно широкое распространение получили модельные системы с одной степенью свободы. Ясно, что использование таких моделей всегда предполагает асимптотическую редукцию размерности и принципиальную возможность определения соответствующих поправок, но четкое указание этого факта можно встретить нечасто.

А теперь расскажем о втором способе борьбы с упомянутой трудностью.

Континуализация. Если рассматриваемая система состоит из множества однотипных элементов, то асимптотический подход приводит уже не к редукции размерности, а, напротив, к ее повышению. Так мы приходим к весьма важному классу физических моделей, в котором дискретные системы заменяются континуальными (непрерывными).

Рассмотрим для примера продольные колебания бесконечной цепочки, состоящей из равных масс, соединенных пружинами одинаковой длины L и жесткости b. При плавной форме колебаний, характеризуемых в каждой точке kL ($k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) смещением u_k, эту цепоч-

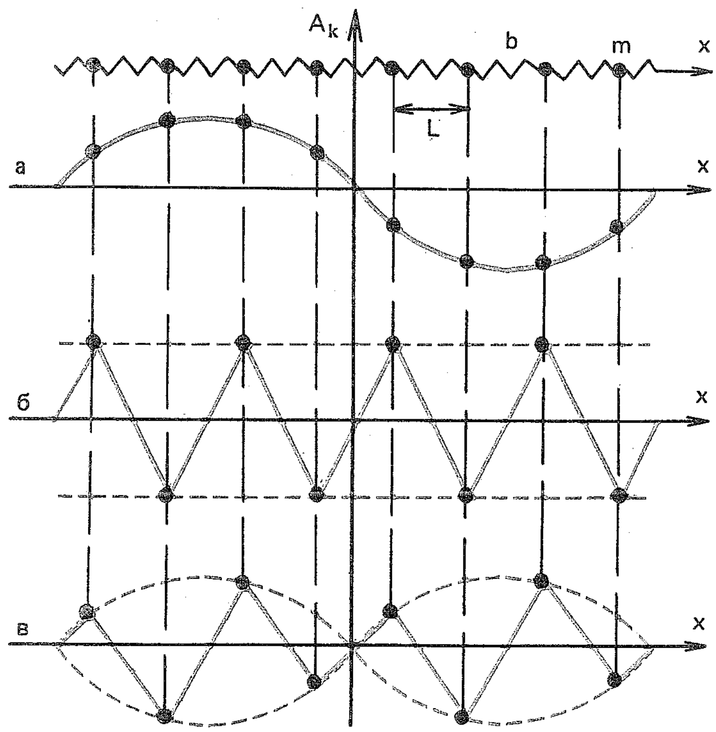


Схема бесконечной цепочки грузов массы m, соединенных пружинами равной длины L и жесткости b (вверху). Форма продольных колебаний этих грузов для больших длин волн (а); в предельном случае минимальной длины волны (б) и асимптотическое решение для случаев, близких к предельному (в). На графиках представлены зависимости от координаты x амплитуды колебаний A_k, связанной со смещением k-го груза соотношением $U_k = A_k \sin \omega t$, где ω (m, b) — частота соответствующего нормального колебания, t — время. Цветным пунктиром показаны огибающие (модулирующие функции) для волн малой длины.

ку можно заменить сплошным стержнем, переходя таким образом от бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\ d^2u_k/dt^2=b(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})$$

к одному уравнению в частных производных

$$\partial^2u/\partial t^2=a^2\partial^2u/\partial x^2,\ a^2=bL^2/m.$$

Степеней свободы стало больше (вместо счетного множества — континуум), а относительная простота этого предельного случая длинноволновых колебаний обусловлена симметрией уравнения в частных производных, не меняющегося при произвольном сдвиге вдоль стержня.

С уменьшением периода колебаний и длины их волны погрешность получаемых таким путем приближенных решений растет. Второй предельный случай для той же системы соответствует колебаниям с минимальной возможной длиной волны. Их форму легко рассчитать и использовать как первое приближение при исследовании коротковолновых колебаний системы. При этом искомое решение ищется в виде произведения предельной «пилообразной» формы на медленную модулирующую функцию, которая находится из уравнения в частных производных.

Переход от дискретных моделей к непрерывным широко применяется в физике; по существу, на этом построена вся механика сплошных сред.

Но далеко не всегда дело обстоит так просто, как в рассмотренном случае. Скажем, в жидкости нельзя выделить периодическую равновесную структуру, относительно которой совершаются колебания. Тем не менее на макроскопическом уровне мы воспринимаем течение жидкости как движение сплошной среды, что передается непрерывной моделью жидкости. В ней, правда, непрерывность достигается благодаря усреднению мелкомасштабных (микроскопических) движений при изучении макроскопических процессов. В результате такого усреднения, сущность которого обсуждается ниже, и происходит переход к непрерывным уравнениям гидродинамики.

Приведем в заключение высказывание Э. Шредингера, образно раскрывающее эффективность этого приема: «Допустим, мы бы рассказали древнему греку... что возможно проследить путь отдельной частички жидкости... Древний эллин не поверил бы, что ограниченный человеческий ум может дать решение столь запутанной задачи... Дело заключается в том, что мы научились владеть всем процессом с помощью одного дифференциального уравнения»[3].

Усреднение. Во многих физических задачах одни переменные меняются медленно, а другие — быстро. Возникает естественная мысль: нельзя ли сначала изучить глобальную структуру рассматриваемой системы, отвлекаясь от ее локальных особенностей, а затем уже исследовать систему локально. На это и направлен метод усреднения, основная идея которого — разделение быстрых и медленных составляющих решения. Не вдаваясь в подробности техники этого метода (тем более, что сейчас он имеет множество модификаций), отметим лишь, что в нем вводятся «медленные» (макроскопические) и «быстрые» (микроскопические) переменные, уравнения для которых разделяются и могут решаться независимо друг от друга или последовательно.

Первоначально этот метод получил широкое распространение в задачах небесной механики и теории нелинейных колебаний, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями[4]. Сегодня он успешно применяется для решения дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами в таких важных для практики дисциплинах, как теория композитов[5] или расчеты ребристых, гофрированных, складчатых и других оболочек[6]. Исходная неоднородная среда либо конструкция сводится к однородной (вообще говоря, анизотропной) с некоторыми эффективными характеристиками. Метод усреднения позволяет не только получать эффективные характеристики, но и исследовать неоднородное распределение механических напряжений в различных материалах и конструкциях, что очень важно для оценки их прочности.

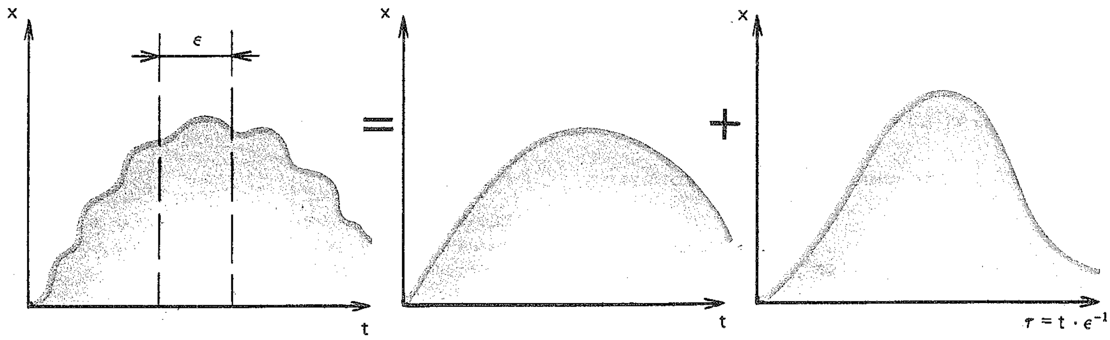
---

[3] Шредингер Э. Новые пути в физике. М., 1971. С. 41—42.

[4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963.

[5] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.

[6] Андрианов И. В., Маневич Л. И. // Усп. механики. 1983. Т. 6. № 3/4. С. 3—29; Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М., 1985.



Графическое представление сути метода усреднения. Изображенный на левом рисунке сложный процесс можно исследовать в два этапа. Сначала на график смотрят «в телескоп», отвлекаясь от быстрых осцилляций с характерным временем ε и заменяя кривую некоторой средней. Затем изучают отдельную неоднородность, увеличивая при этом масштаб в ε^{-1} раз, т. е. глядят на нее «в микроскоп».

Ренормализация. К сожалению, простое усреднение мелкомасштабных движений применимо также не во всех случаях. Встречаются такие задачи, в которых даже на макроскопическом уровне заметно проявляются движения нескольких различных масштабов. К ним относится, например, изучение так называемых критических явлений, связанных с фазовыми переходами, или турбулентности. При этом приходится проводить усреднение последовательно для всех масштабов. Такова суть процедуры ренормализации, составляющей основу метода ренормгруппы. Но строгая реализация этой процедуры сопряжена с огромными техническими трудностями. Один из способов их преодоления подсказывает совершенно неожиданная асимптотика.

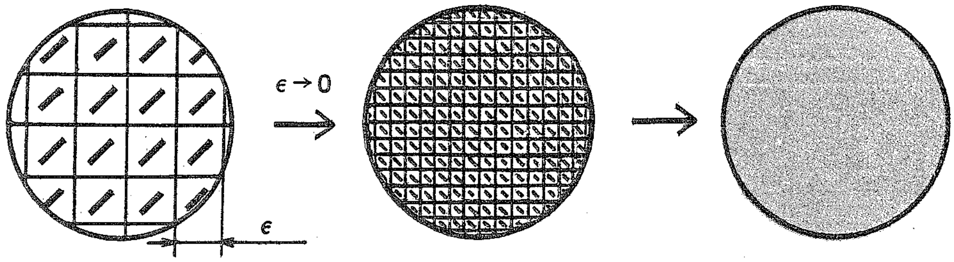
Дело в том, что в воображаемом мире с четырьмя пространственными измерениями эти трудности не возникают и удается осуществить обычное усреднение. Нельзя ли рассматривать этот случай как предельный, а величину $\varepsilon=4-d$ (d — размерность пространства) — как малый параметр? В реальном трехмерном мире $d=3$ и $\varepsilon=1$. И все же асимптотическое разложение по параметру ε оказалось весьма эффективным при решении сложнейших задач физики критических явлений[7].

Локализация. Отклонения реальной системы от предельной (идеальной) могут иметь различный характер. Иногда эти отклонения малы во всем диапазоне изменения параметров системы, но нередко оказывается, что они велики, хотя и локализованы в малой области. Так обстоит дело в уже упоминавшемся примере обтекания тела жидкостью. Другой пример — переход от трехмерной модели упругого тела к двумерной (пластины, оболочки) или одномерной (стержни, балки) моделям. При этом вблизи границ тела существует узкий (порядка толщины пластины или оболочки либо характерного размера поперечного сечения стержня или балки) пограничный слой, в котором проявляется трехмерность исходной задачи. Но и после сведения трехмерной задачи к двумерной удается выделить так называемые краевые эффекты, сосредоточенные у границ оболочки или ее структурных неоднородностей.

С понятием пограничного слоя тесно связан так называемый принцип Сен-Венана в теории упругости, гласящий, что при расчетах конструкции можно отвлекаться от детальных особенностей распределения в ней нагрузок и закрепления ее элементов. На самом деле эти особенности, конечно, существенны, но лишь в узких зонах, протяженность которых определяется характерными размерами поперечных сечений элементов или периодом изменения нагрузки.

С математической точки зрения образование пограничного слоя связано с тем,

[7] См. об этом: Мигдал А. А. Лауреаты Нобелевской премии 1982 года. По физике — К. Вильсон // Природа. 1983. № 1. С. 90—93.



Схема, иллюстрирующая применение метода усреднения при исследовании композитных (неоднородных) материалов. Отвлекаясь от микроструктуры неоднородностей и устремляя их характерный размер ε к нулю, производят усреднение и заменяют неоднородный материал с периодической структурой однородным с некоторыми средними (приведенными) параметрами. В то же время асимптотический подход позволяет оценить и микродеформации (напряжения) в композите, обусловленные периодичностью его структуры.

что упрощенное дифференциальное уравнение имеет меньший порядок, чем исходное. Асимптотика в этом случае называется сингулярной.

Линеаризация. Даже малое число степеней свободы или локализованность решения не гарантирует преодоления математических трудностей, если уравнения физической теории нелинейны. В этом случае на помощь приходит линеаризация — асимптотический метод, использующий представление о процессах малой интенсивности.

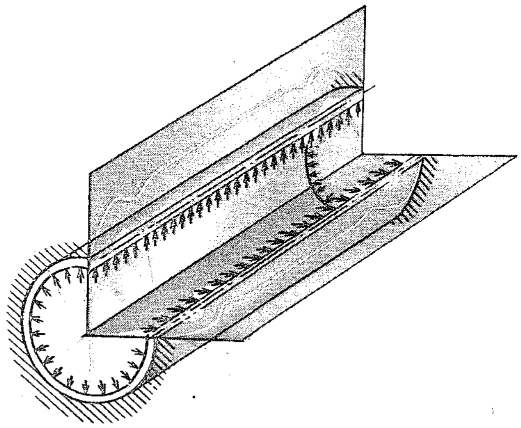
Линейный подход позволил сформулировать столь фундаментальные понятия, как нормальные колебания, собственная функция, спектр. Для линейной системы с n степенями свободы при отсутствии трения всегда можно выбрать такие («нормальные») координаты, в которых она описывается n уравнениями колебаний не связанных между собой маятников. Эти понятия естественно обобщаются и на непрерывные системы. Иными словами, любое движение линейной системы представляется линейной комбинацией нормальных колебаний (или волн) — так называемым фурье-разложением.

Принципиально важно, что колебания эти выделены не только математически, но и физически. Так, под действием периодической внешней силы «резонировать» в системе будут именно нормальные колебания.

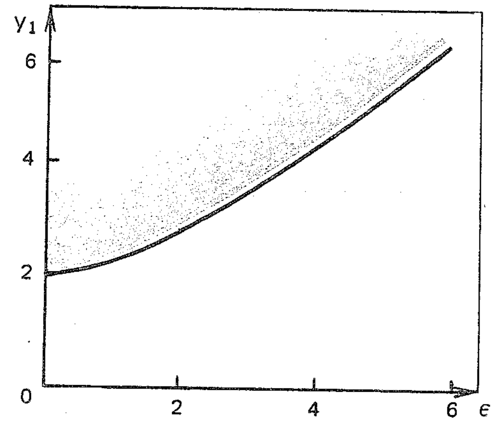
Если рассматривать линейную систему как первое приближение к нелинейной (в этом суть локальной линеаризации), то при учете нелинейных поправок в уравнениях второго и последующих приближений появляются фиктивные внешние нагрузки, вызывающие резонансы нормальных колебаний. Избежать этого удается, «подправив» параметры нормальных линейных колебаний.

Однако нелинейные системы, особенно высокой размерности, часто нельзя корректно описать ни в каком приближении метода локальной линеаризациии. Поэтому до недавнего времени сочетание высокой размерности с сильной нелинейностью выглядело непреодолимой преградой для конструктивного исследования физической системы. Но в последние годы был открыт весьма широкий класс многомерных нелинейных систем, допускающих такое исследование[8]. Эти системы, получившие название интегрируемых, имеют частные решения в виде устойчивых уединенных волн — солитонов, представляющих собой в некотором смысле аналог нормальных колебаний, выделяемых в линейных системах. Возникло нелинейное обобщение метода Фурье — метод обратной задачи рассеяния, в котором солитоны играют фундаментальную роль, заменяя собой привычные фурье-компоненты. Метод обратной задачи рассеяния можно трактовать как нелокальную линеаризацию исходного нелинейного уравнения. Иначе говоря, скрытая симметрия

[8] Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века. М., 1984.



Изображение деформации цилиндрической оболочки, жестко закрепленной в торцах и нагруженной равномерно распределенным давлением изнутри. Если эта оболочка достаточно тонкая, то почти по всей длине ее деформация сводится к равномерному увеличению диаметра. И лишь в пограничных слоях у торцов проявляются локализованные краевые эффекты (на рисунке закрашены), определяющие результирующую форму деформированной оболочки (цветная линия).



Графики точного корня y_1 уравнения (1) (цветная кривая) и его приближения двухточечной аппроксимантой Паде (черная кривая). Видно, что это приближение оказывается удовлетворительным при всех значениях параметра ε.

нелинейного уравнения позволяет найти преобразование, сводящее построение широкого класса решений к анализу линейных уравнений.

Интегрируемые системы в свою очередь могут выступать в качестве приближения при анализе близких к ним (но не интегрируемых) в рамках асимптотического подхода.

Паде-приближение. Итак, мы убедились, что практически любую физическую задачу, среди параметров которой есть переменный параметр ε, как правило, удается приближенно решить при $\varepsilon \to 0$ или $\varepsilon \to \infty$. Как использовать эту «предельную» информацию для изучения системы при промежуточных значениях ε, например $\varepsilon=1$? Этот вопрос — один из самых сложных в асимптотическом анализе. Общего ответа на него, как и на каверзный вопрос о том, до каких значений параметр ε можно считать в данной задаче малым (или большим), нет. Правда, во многих случаях ответить на него помогают так называемые двухточечные аппроксиманты Паде[9]. Это функции вида

$$y(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\varepsilon^i/\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i\varepsilon^i,$$

коэффициенты которых α_i и β_i подбираются из условия, что при разложении функций в ряды при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$ получаются известные асимптотические выражения. Практика показывает, что аппроксиманты Паде действительно часто позволяют «сшить» между собой предельные разложения и найти области «малых» и «больших» ε. Это напоминает известную процедуру интерполяции — восстановление промежуточных значений величины по двум крайним ее значениям. В роли таких известных значений и выступают в данном случае асимптотики при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$.

К примеру, для уравнения (1) аппроксиманта Паде для первого корня

$$y_1 \simeq (2+0{,}573\varepsilon+0{,}12\varepsilon^2)/(1+0{,}12\varepsilon),$$

полученная на основе асимптотик вида (2) при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$, удовлетворительно описывает точное решение при любых значениях ε.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ И ЭВМ

У читателя, вероятно, уже не однажды возникал вопрос: а нужны ли вообще асимптотические методы, если есть ЭВМ, не проще ли запрограммировать исходную

[9] Бейкер Г., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М., 1986.

задачу и решать ее, применяя универсальные численные методы?

Ответить на него можно так. Во-первых, асимптотические методы весьма полезны на предварительном этапе решения задачи даже в тех случаях, когда главной целью остается получение численных результатов. Асимптотический анализ позволяет выбрать наилучший вычислительный прием и разобраться в обширном, но не упорядоченном числовом материале. Во-вторых, эти методы особенно эффективны в тех областях значений параметров, где машинные вычисления встречают серьезные затруднения. Недаром Лаплас говорил, что асимптотические методы «тем точнее, чем нужнее». Возможно и создание таких алгоритмов, в которых гладкие части решений определяются численно, а в тех областях значений параметров, где эти решения резко меняются (скажем, в пограничных слоях), используются асимптотические подходы. Наконец, в-третьих, асимптотические методы всемерно развивают нашу интуицию и играют, как отмечалось, важную роль в формировании мышления современного ученого-естественника или инженера. Поэтому асимптотические и численные методы правильнее рассматривать не как конкурирующие между собой, а как взаимодополняющие.

Кстати, совершенствование ЭВМ весьма способствует и развитию асимптотических методов. Например, одна из самых больших трудностей их применения — построение высших приближений. Как правило, для сложных задач «вручную» удается построить два, от силы — три приближения. Теперь же эту рутинную работу удается переложить на плечи компьютеров.

АСИМПТОТИКА В КОНКРЕТНЫХ ОБЛАСТЯХ ФИЗИКИ

Подчас сам прогресс в той или иной области физики неразрывно связан с существованием характерных асимптотических параметров. В частности, малость знаменитой постоянной тонкой структуры $\alpha=e^2/\hbar c\simeq 1/137$ (e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света) позволяет в рамках квантовой электродинамики с высокой точностью рассчитать взаимодействие фотонов и электронов. Этот безразмерный параметр определяет интенсивность электромагнитных взаимодействий. Все основные результаты квантовой электродинамики, с поразительной точностью описывающие экспериментальные данные, получены именно благодаря возможности применения теории возмущений, в которой решения уравнений ищутся в виде разложений по степеням α. Аналогичные параметры для сильновзаимодействующих частиц — адронов (к которым относятся, например, протоны и нейтроны) превышают α во много раз. Это главная причина принципиальных трудностей, в свое время тормозивших развитие теории сильных взаимодействий. Только открытие кварковой структуры адронов и явления «асимптотической свободы», заключающегося в ослаблении взаимодействия между кварками и связывающими их глюонами на малых расстояниях, резко изменило ситуацию и привело к рождению новой теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики[10].

Однако нередко случается так, что возможности и пути использования присущих конкретной области физики малых или больших параметров осознаются в полной мере далеко не сразу.

Так, зависимость свойств в некоторой точке среды от выбранного направления (анизотропия) или положения (неоднородность) долгое время считалась лишь усложняющим фактором. Действительно, многие методы, развитые ранее для изотропной однородной среды со свойственными только ей симметриями, оказываются в этой ситуации непригодными. Однако, как выяснилось впоследствии, возможны и особые предельные случаи сильной анизотропии или неоднородности, на которые до этого просто не обращали внимания. Разработка и применение соответствующих асимптотических методов вызвали быстрое и всестороннее развитие теории таких сред[11]. Полученные при этом уравнения в ряде случаев выглядят даже проще, чем их «изотропные и однородные» аналоги.

Или другой пример. Известно, что анализ молекулярных систем усложняется с увеличением размера и массы молекул. Но для макромолекул, из которых состоят, в частности, полимеры, характерны свои большие и малые параметры. Последовательный асимптотический подход, использующий разложения по этим параметрам, позволил построить содержательную тео-

[10] См., напр.: Белокуров В. В., Ширков Д. В. Теория взаимодействий частиц. М., 1986.

[11] Маневич Л. И., Коблик С. Г., Павленко А. В. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела. Киев, 1981.

рию, учитывающую сильную анизотропию полимерных систем и рассматривающую в качестве предельного случая «молекулу» с числом атомов $N \to \infty$. Эта теория ориентирована в первую очередь на изучение специфических особенностей полимеров, обусловленных большими размерами и массой составляющих их молекул и сильной анизотропией их свойств и структуры. В то же время в рамках такого подхода удалось выявить глубокие связи между физикой полимеров и рядом наиболее актуальных направлений современной теоретической физики[12].

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Содержательные и глубокие примеры асимптотического соответствия естественно возникают при выявлении связи между фундаментальными физическими теориями. В процессе развития науки каждая новая теория рассматривалась обычно как отрицание уже существующей, т. е. на первый план выдвигалась несовместимость старых и пришедших им на смену представлений и концепций. Лишь после того как сформулированный Н. Бором принцип соответствия сыграл важную конструктивную роль в создании квантовой механики, преемственность научных теорий стала предметом всестороннего изучения физиков и философов. Хотя и сегодня есть различные, в том числе и взаимоисключающие, точки зрения на соотношение сменяющих друг друга теорий, можно непосредственно убедиться в существовании вполне определенной математической связи между ними. Эта связь и выражается асимптотическим соответствием, проявляющимся в разнообразных, зачастую далеко не очевидных формах. Иначе говоря, существуют различные типы предельных переходов от новой теории к старой, как правило, при нулевых или бесконечных значениях некоторых параметров или переменных. Новая теория может рассматриваться как обобщение существующей (вспомним приведенные слова А. Эйнштейна), однако это обобщение не только количественное, но и качественное, поэтому она включает и совершенно непредвиденные в рамках старой теории возможности. Часто такие возможности наиболее отчетливо проявляются в противоположных предельных случаях, когда параметр, полагавшийся малым, становится большим, или, наоборот, эффекты, игравшие ранее главную роль, оказываются теперь несущественными, так что новое содержание физической теории воспринимается, как говорится, «в чистом виде». Попытаемся ниже на некоторых примерах проследить это соответствие для различных физических теорий.

От Аристотеля к Ньютону. Проанализируем в этом аспекте прежде всего переход от теории принудительных движений Аристотеля к механике Ньютона, который дает хороший пример радикального изменения научных концепций, отхода от господствующих длительное время представлений, взглядов и методов. Тем не менее даже при столь революционном изменении обнаруживается асимптотическое соответствие, оставляющее аристотелеву механику действенной для поступательных движений при сильном трении. Но это не так уж удивительно, ведь Аристотель в своих рассуждениях опирался на интуитивные представления, вытекающие из повседневного опыта наблюдений за движущимися объектами в ограниченном диапазоне изменения внешних условий и, безусловно, содержащие зерно истины. Очень интересны в этом плане исследования психологов, которые показывают, что, не зная выводов современной теории или недостаточно глубоко усвоив их, люди и сегодня приходят к объяснениям, типичным для Аристотеля и его последователей[13]. Сюда относятся представления о силе как причине движения, об остановке движущегося тела вследствие исчерпания сообщенной ему движущей силы — «импетуса», о вертикальном падении тела, брошенного с горизонтально движущегося объекта, наконец, о различном времени падения тел разного веса. В упомянутых исследованиях психологов отмечается удивительное сходство взглядов античных или средневековых философов и многих наших современников, взглядов, представляющих собой естественный итог наблюдений в земных условиях.

Как правило, в этих исследованиях делается упор на несовместимость основных представлений Аристотеля с ньютоновской механикой. Между тем в сфере обычного человеческого опыта, т. е. в земных условиях, эти представления не часто тер-

[12] См., напр.: Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Цепные молекулы. М., 1985.

[13] Мак-Клоски М. // В мире науки. 1983. № 6. С. 90—98.

пят фиаско. И такое положение дел можно объяснить с позиций механики Ньютона именно асимптотическим соответствием, о котором шла речь в предыдущем разделе. Это соответствие удается установить, несмотря на глубочайшие идейные различия старой и новой теорий и кардинальное противоречие философских концепций, из которых они проистекали.

В подтверждение сказанного рассмотрим, например, движение тела под действием постоянной силы F в среде с коэффициентом трения η. Аристотель не выделял силу трения как таковую, трение для него было естественным и неотъемлемым атрибутом движения. Он также не формулировал закон движения на математическом языке. Но если это сделать, то «закон движения по Аристотелю» (в предположении линейной зависимости силы сопротивления от скорости) запишется так: $\eta \cdot v=F$. Если сила постоянна, то постоянна и скорость. Увеличение силы вызывает рост скорости, а при отсутствии силы движения нет. Эти выводы в общем-то соответствуют наблюдениям за движением в земных условиях, когда трение достаточно велико.

По Ньютону, сила трения относится к внешним силам, а закон движения материальной точки массы m при тех же предположениях имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F - \eta \cdot v,$$

так что при отсутствии начальной скорости и постоянной силе

$$v = F/\eta \cdot (1 - e^{-\eta t/m}).$$

Спустя некоторое время второе слагаемое окажется пренебрежимо малым по сравнению с единицей, и мы получим «закон Аристотеля». Но как могли оставаться незамеченными отклонения от этого закона при меньших временах? Дело в том, что при большом трении переходный режим, описываемый вторым членом, заканчивается очень быстро после «включения» силы (по сравнению с достаточно длительным временем наблюдения). Остается главное, наиболее заметное, и это главное соответствует механике Аристотеля. Наблюдения за движением при малом трении сразу же показали бы значительные отклонения от постоянной скорости, медленное приближение к ней на большом интервале времени. Но таких наблюдений не было в сфере повседневного опыта древних греков. Лишь идеализированный мысленный эксперимент привел Галилея через 2000 лет к представлению о движении по инерции — одному из основных исходных представлений физики Нового времени.

С физической точки зрения приближение Аристотеля сохраняет значение как асимптотика движения при достаточно больших временах; чем значительнее трение, тем раньше это приближение становится применимым. С математической же точки зрения, мы сталкиваемся здесь с сингулярным возмущением — скорость v нарастает не плавно (постепенно), а бесконечно быстро. В этом случае существует дополнительная асимптотика, которую легко обнаружить, анализируя поведение точного решения при малом показателе экспоненты: $v \simeq Ft/m$. Она описывает равноускоренное движение тела под действием силы в среде без сопротивления. Это решение справедливо при любом трении для достаточно малых времен. Чем меньше коэффициент трения, тем шире область его применимости (и тем позднее мы «выходим» на асимптотику Аристотеля). Соответствующее малым временам уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

представляет собой математическую запись знакомого всем второго закона Ньютона.

Здесь мы попадаем в область механики консервативных, или гамильтоновых, систем (для них справедлив закон сохранения механической энергии), которая допускает и виды движения, абсолютно чуждые механике Аристотеля: колебания, периодические вращения. Теория консервативных систем — важнейшая асимптотика в механике Ньютона, поскольку описываемые ею режимы движения (в частности, периодические и почти периодические) во многих физических системах оказываются очень хорошим приближением к реальности.

Но и приближение Аристотеля имеет свою область применимости, когда трение становится достаточно большим, как, например, при движении молекул полимеров в растворах. Такие системы называют сверхдемпфированными, а динамические процессы в них — релаксационными, т. е. стремящимися к равновесию.

Механика Ньютона и специальная теория относительности. Создание теории относительности привело к ломке глубоко укоренившихся и считавшихся единственно возможными представлений ньютоновской механики о независимости пространства и времени, об абсолютном времени и т. д. Однако механика Ньютона, как и следовало ожидать, не была отвергнута специальной теорией относительности, а стала ее асимптотическим пределом. Характер асимптотического соответствия этих двух теорий легко проследить на примере покоившейся частицы с массой m_0, на которую в момент времени $t=0$ начинает действовать постоянная во времени сила F. Как можно показать, в специальной теории относительности ее скорость в неподвижной системе отсчета

$$v=v_0/\sqrt{1+v_0^2/c^2},$$

где $v_0=Ft/m_0$.

Решение механики Ньютона ($v=v_0$) соответствует асимптотике «малых» времен или скоростей ($v_0/c \ll 1$). Первая поправка к этому решению при $v_0/c \ll 1$ очень мала:

$$v \approx v_0(1-v_0^2/2c^2).$$

В теории относительности есть и дополнительная асимптотика «больших времен», уже не имеющая никакого отношения к ньютоновской механике. Действительно, $v \to c$ при $t \to \infty$, а выражение для скорости при учете первой поправки примет вид

$$v \approx c(1-c^2/2v_0^2).$$

Именно в области «больших времен» отчетливо проявляются основные релятивистские эффекты: новое правило сложения скоростей, новое понятие одновременности, невозможность существования абсолютно твердых тел и т. д., отражающие всю глубину идейного переворота, совершенного теорией относительности.

Геометрическая оптика и волновая. Изучение соотношения между волновой и геометрической оптикой интересно как само по себе, так и для понимания связи между классической и квантовой механикой.

Долгое время считалось, что для описания распространения света достаточно элементарных геометрических построений, лежащих в основе геометрической оптики. После обнаружения дифракции света надолго восторжествовала волновая оптика, при этом геометрическая оптика казалась лишь кустарным рецептом, не отражающим фундаментальных закономерностей природы. Лишь в 20-х годах нашего века удалось четко установить, что переход от волновой оптики к геометрической связан с малой длиной волны λ ($\lambda \to 0$). Поскольку для видимого света $\lambda \approx 10^{-7}$ м, во многих случаях геометрическая оптика оказывается хорошим приближением.

Математически переход от волновой оптики к геометрической осуществляется с помощью так называемого метода ВКБ (Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна). В точке с координатами (x, y, z) составляющая электромагнитного поля в световой волне представляется в виде

$$u=A(x, y, z; \lambda)e^{i\varphi(x, y, z)/\lambda},$$

где $A=A_0+A_1\lambda+\ldots$ — амплитуда волны, а φ — ее фаза.

После подстановки выражения для u в волновое уравнение и группировки членов, содержащих одинаковые степени λ, получается нелинейное дифференциальное уравнение для определения φ, называемое уравнением эйконала. Именно оно и соответствует приближению геометрической оптики. Для определения коэффициентов разложения A_i получается рекуррентная последовательность линейных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями переноса.

В геометрической оптике предполагается, что световые лучи распространяются вдоль определенных кривых. Край пучка кажется резким, однако на самом деле интенсивность света границы меняется хотя и быстро, но непрерывно в пограничном слое, толщина которого порядка длины волны λ.

Асимптотику, описывающую чисто волновое явление дифракции, можно построить, используя понятие пограничного слоя.

Классическая механика и квантовая. Связь между классической механикой и квантовой в определенном смысле аналогична той, что существует между геометрической оптикой и волновой. В квантовой механике волновую функцию квазиклассической, т. е. почти классической, физической системы представляют в виде $\psi=Ae^{iS/\hbar}$, где S — так называемое действие. Роль малого параметра при этом играет отношение $\hbar/S$. Переход от квантовой механики к классической формально описывается методом ВКБ при $\hbar/S \to 0$. Суть такого перехода заключается в том, что центр локализованного волнового пакета — заданного в некоторый начальный момент времени распределения вероятностей координат частицы, перемещается затем по законам классической механики.

При очень малом импульсе частицы p квазиклассическое приближение теряет смысл. Это происходит, в частности, вблизи «точек поворота», в которых $p=0$ и где по законам классической механики частица остановилась бы и стала двигаться в обратном направлении. В квантовой механике возможно принципиально неклассическое явление — туннелирование частицы через потенциальный барьер. Оно также описывается асимптотикой, использующей именно малость импульса.

При создании квантовой механики в наибольшей мере проявилась эвристическая роль асимптотического соответствия. Эта роль особенно возрастает в наше время, когда предпринимаются попытки построения единой теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия природы. В рамках такой теории сами понятия электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного взаимодействий должны стать асимптотическими, имеющими смысл лишь при низких энергиях.

Подчеркнем, что конструктивная роль идеи об асимптотическом соответствии квантовой и классической механики, нашедшей свое отражение в знаменитом принципе соответствия Н. Бора, неоднократно обсуждалась впоследствии в специальной литературе по физике и философии. Тем не менее для полноты картины мы включили в рассмотрение и этот пример.

*

Приведем в заключение высказывание, в котором, как нам кажется, дается верная оценка перспектив развития асимптотического подхода: «Научная литература наполнилась книгами по асимптотике в течение двух-трех десятилетий. Если учесть, что темпы их освоения в современном мире заметно возрастают, то лет через десять асимптотические методы проникнут и в школьные программы»[14]. Речь, конечно, не об очередном формальном введении в школьную (или вузовскую) программу ряда конкретных приемов асимптотического исследования. Важно, на наш взгляд, обучать самим принципам «асимптотического мышления», развивать способность к такому мышлению, причем осознанному, поскольку фактически все специалисты-«естественники» используют элементы асимптотического подхода в своей работе, подчас даже не отдавая себе в этом отчета. Начинать обучение нужно с простых примеров, имеющих наглядную физическую трактовку[15]. При этом необходимо прослеживать и подчеркивать основные идеи — поиск приближенных симметрий, предельные соответствия и взаимосвязи различных приближенных теорий, новые понятия, появившиеся благодаря асимптотике. Все это позволяет исследователям взглянуть на многие явления под другим углом зрения и избежать ряда заблуждений.

[14] Баранцев Р. Г. Предисловие к монографии: Найфэ А. Введение в методы возмущений. М., 1984. С. 6.

[15] Зельдович Я. Б., Яглом И. И. Высшая математика для начинающих физиков и техников. М., 1982. С. 323—327.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Бабич В. М., Булдырев В. С. ИСКУССТВО АСИМПТОТИКИ // Вестник Ленинградского университета. 1977. № 13.

Баранцев Р. Г. ОБ АСИМПТОЛОГИИ // Вестник Ленинградского университета. 1976. № 1.

Моисеев Н. Н. ЧЕЛОВЕК, СРЕДА, ОБЩЕСТВО. М.: Наука, 1982.

Найфэ А. ВВЕДЕНИЕ В МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ. М.: Мир, 1984.

Тер-Крикоров А. М. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА. М.: Знание, 1984.

Мигдал А. Б. В ПОИСКАХ ИСТИНЫ. М.: Молодая гвардия, 1984.