УДК 539.3

И. И. Аргатов

Об асимптотическом моделировании*

Простота и точность обычно встречаются
как понятия противоположные, дополнительные.
Стремясь к простоте, мы жертвуем точностью;
добиваясь точности, не ждем простоты.
Однако при локализации эти антиподы сходятся,
противоречие разрешается, снимается в синтезе,
имя которому — асимптотика.
Р. Г. Баранцев

В отличие от термина «асимптотология», словосочетание «асимптотическое моделирование» еще не получило широкого распространения в литературе, хотя термин «асимптотическая модель» в последние годы стал появляться даже в названиях статей и монографий. По-видимому, уже и невозможно выяснить, кто первым употребил эти термины, как и бесполезно пытаться установить авторство созвучных терминов «математическая модель» и «математическое моделирование».

Асимптотической моделью, по определению Н.Н.Моисеева [2; гл.1, §3] называется математическая модель, полученная как частный случай из некоторой более общей модели в результате определенного процесса дедукции. Термин «асимптотическая модель» также употребляется и в узком смысле [3] по отношению к результирующей математической модели, получаемой на основе асимптотического анализа некоторой исходной математической модели.

В своей известной работе «Об асимптотологии» Р.Г.Баранцев в разделе «Фундаментальная роль асимптотического подхода», где речь идет о том, что «мы пользуемся асимптотическими методами не только при решении сформулированных задач, но и при постановке задач и вообще в процессе познания мира», заключает, что «моделирование тоже имеет асимптотический характер, а асимптотика — не только инструмент, но и объект исследования». На наш взгляд в процитированных словах заложен смысл термина «асимптотическое моделирование», понимаемого широко.

Каким же тогда содержанием следует наполнять термин «асимптотическое моделирование», используя его в узком смысле? Ответ на поставленный методологический вопрос можно найти на пути сопоставления асимптотического моделирования с асимптотологией. Напомним [1], что

* **Методология современной науки. Моделирование сложных систем:** Сборник трудов международной научной конференции посвященной 75-летию профессора Рэма Георгиевича Баранцева, г. Киров, 23–26 октября 2006 г. / Под ред. А.В. Шатрова. — Киров: Изд-во ВятГУ, 2007.

предметом асимптотологии является наука о самих асимптотических методах, в которых можно выделить «некоторые общие черты и изучать их независимо от тех объектов, к которым они применяются».

Таким образом, напротив, под асимптотическим моделированием следует понимать применение асимптотических методов при решении сформулированных задач, когда они первостепенно зависят от специфики объектов исследования. При этом результаты применения асимптотических методов облекаются в форму новых математических моделей, лишь подчеркивающих эту специфику. Наконец, от асимптотической модели следует, в первую очередь, требовать точности и простоты, а при перенесении выводов, полученных при ее исследовании, на исходную математическую модель не следует забывать об их локальности.

1. ТОЧНОСТЬ

1.1. Постановка контактной задачи. Рассмотрим упругое тело Ω, закрепленное на участке границы Γ_u. Пусть l — характерный размер тела Ω, а через ε обозначим малый положительный безразмерный параметр. Для простоты предположим, что штамп с плоской подошвой малого диаметра (порядка εl) квазистатически вдавливается в плоский участок поверхности Γ_σ, причем на Γ_σ вне области контакта $\omega(\varepsilon)$ тело Ω свободно от напряжений.

Начало координат совместим центром давления подошвы штампа, направив ось Ox_3 внутрь тела Ω. При этом будем считать, что область $\omega(\varepsilon)$ получается сжатием в ε^{-1} раз некоторой фиксированной области ω, диаметр которой не превосходит величины l.

Постановка контактной задачи линейной теории упругости включает уравнения Ламе

$$L(\nabla_x)u(x)=0, \quad x\in\Omega, \tag{1.1}$$

условия закрепления тела

$$u(x)=0, \quad x\in\Gamma_u, \tag{1.2}$$

условие отсутствие поверхностных нагрузок вне области контакта

$$\sigma^{(n)}(u,x)=0, \quad x\in\Gamma_\sigma\setminus\overline{\omega(\varepsilon)}, \tag{1.3}$$

а также условия контакта

$$u_3(x)=\delta_0, \quad x\in\omega(\varepsilon), \tag{1.4}$$

$$\sigma_{31}(u,x)=\sigma_{32}(u,x)=0, \quad x\in\omega(\varepsilon). \tag{1.5}$$

Здесь $\sigma_{ij}(u,x)$— напряжения, отвечающие вектору u смещений точек упругого тела.

Поясним, что для простоты предполагается, что штамп получает поступательное перемещение величиной δ_0 по нормали к границе. Допущение малых перекосов штампа не привносит принципиальных затруднений в решение задачи (см., в частности, [4,5]). Условие (1.5) выражает отсутствие трения под подошвой штампа. Это предположение упрощает решение контактной задачи для пограничного слоя и позволяет выразить вектор перемещений через один гармонический потенциал Папковича—Нейбера (см. [6,7]). Предположение об уплощении границы Γ_σ в окрестности зоны контакта позволяет не вводить дополнительно локальную криволинейную систему координат и также упрощает асимптотические конструкции (сравните с [8]).

Практический интерес представляет отыскание распределения под подошвой штампа контактного давления

$$p(u, x_1, x_2) = -\sigma_{33}(u, x_1, x_2, 0) \qquad (1.6)$$

и равнодействующей системы сил, прижимающих штамп к поверхности упругого тела,

$$F_3 = \iint_{\omega(\varepsilon)} p(u, y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 \,. \qquad (1.7)$$

Ранее асимптотические (методом «больших λ») решения контактных задач строились для полубесконечных упругих тел, таких как слой [9] и клин [10]. Также рассматривались контактные задачи о давлении штампа в торец полубесконечного цилиндра [11] и в срез шара [12]. Метод сращиваемых асимптотических разложений [13,14] для построения асимптотики решения задачи (1.1)–(1.5) был применен в работе [4], аналогичные результаты были получены в работе [5] методом В.М.Александрова [15,16].

1.2. Построение главных членов асимптотики. Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений. Чтобы описать напряженно-деформированное состояние упругого тела в окрестности концентратора напряжений, перейдем к «растянутым» координатам

$$\xi_i = \varepsilon^{-1} x_i \quad (i = 1,2,3). \qquad (1.8)$$

При этом из уравнения границы области контакта исчезает параметр ε, а решение задачи области «местных возмущений» (см. [17], §133) ищется в форме *внутреннего разложения*

$$u(x) = w^0(\xi) + \varepsilon w^1(\xi) + \ldots. \qquad (1.9)$$

Задача для членов внутреннего разложения $w^r(\xi)$ формулируется в полупространстве:

$$L(\nabla_\xi) w^r(\xi) = 0, \quad \xi_3 \geq 0, \qquad (1.10)$$

$$\sigma_{31}(w^r, \xi) = \sigma_{32}(w^r, \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0, \qquad (1.11)$$

$$\sigma_{33}(w^r, \xi) = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad (\xi_1, \xi_2) \notin \overline{\omega}, \qquad (1.12)$$

$$w_3^0(\xi) = \delta_0, \quad \xi_3 = 0. \qquad (1.13)$$

Ввиду условия закрепления тела на расстояниях порядка $\varepsilon^{-1} l$, формулы (1.10)–(1.13) замыкаются асимптотическим условием

$$w^0(\xi) = o(1), \quad |\xi| \to \infty. \qquad (1.14)$$

Вектор-функция $w^0(\xi)$ представима в виде обобщенного потенциала простого слоя

$$w^0(\xi) = \iint_\omega p^0(\eta) T(\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \xi_3)\, d\eta \,.$$

Здесь $T(\xi)$ — решение задачи Буссинеска (см. [7] и др.). При этом плотность $p^0(\xi_1, \xi_2)$ определяется как решение интегрального уравнения

$$\vartheta \iint_\omega \frac{p^0(\eta) d\eta}{\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}} = \delta_0 \,, \qquad (1.15)$$

где ϑ — упругая постоянная.

Согласно выписанному интегральному представлению для вектор-функции $w^0(\xi)$ при $|\xi| \to \infty$ будем иметь

$$w^0(\xi) = F_3^0 T(\xi) + O(|\xi|^{-2}), \qquad (1.16)$$

где обозначено

$$F_3^0 = \iint_\omega p^0(\eta)\, d\eta \,.$$

Осуществив в разложении (1.16) обратную замену координат, найдем

$$w^0(\varepsilon^{-1} x) = \varepsilon F_3^0 T(x) + O(\varepsilon^2 |x|^{-2}) \,. \qquad (1.17)$$

Поясним, что при выводе соотношения (1.17) существенно использовалось свойство однородности (степени -1) вектор-функции $T(x)$.

Из соотношения (1.17) вытекает, что в области, удаленной от зоны контакта, решение исходной задачи следует разыскивать в форме *внешнего разложения*

$$u(x) = \varepsilon v^1(x) + \varepsilon^2 v^2(x) + \dots \qquad (1.18)$$

Вектор $v^q(x)$ должен удовлетворять уравнению (1.1), краевому условию (1.2) и следующему:

$$\sigma^{(n)}(v^q, x) = 0, \quad x \in \Gamma_\sigma \setminus O. \qquad (1.19)$$

Иными словами, при уменьшении величины ε зона контакта стягивается в точку и вместе с этим краевое условие (1.4) в пределе исчезает.

Подчеркнем, что согласно методу сращиваемых разложений члены внешнего асимптотического разложения могут иметь особенности в точке O, вид которых определяется в процессе сращивания разложения (1.18) с внутренним разложением (1.9).

Итак, особенность для вектора $v^1(x)$ доставляет первое слагаемое в (1.17). Положим

$$v^1(x) = F_3^0 G(x), \qquad (1.20)$$

где $G(x)$ — вектор-функция Грина с полюсом в точке O, т.е. решение задачи, в которую входят соотношения (1.1), (1.2), (1.19) и следующее:

$$G(x) = T(x) + O(1), \quad |x| \to 0. \qquad (1.21)$$

Таким образом, главные члены внутреннего и внешнего асимптотических разложений решения исходной задачи построены. Пропущенные технические детали и схему построения следующих членов асимптотики по методу сращиваемых разложений см. в работах [4,5,18].

1.3. Асимптотическая модель сосредоточенных сил и улучшенный метод сращиваемых разложений. Используя главные члены асимптотики, можно выписать соотношение, связывающее перемещение штампа δ_0 с действующей на него силой $F_3 \cong \varepsilon F_3^0$ в виде

$$F_3^0 = \vartheta^{-1} C \delta_0, \qquad (1.22)$$

где C — имеющая размерность длины поступательная емкость штампа с плоским гладким основанием в форме области ω (см. [6,19] и др.).

Обозначая через $c_\varepsilon = \varepsilon C$ поступательную емкость штампа с основанием $\omega(\varepsilon)$. Из формулы (1.22) получаем следующую приближенную:

$$F_3 = \vartheta^{-1} c_\varepsilon \delta_0. \qquad (1.23)$$

Формула (1.23) может рассматриваться как асимптотическая модель действия сосредоточенной силы на границу трехмерного упругого тела. Известно (см, например, [20], гл.10, §1), что в окрестности точки приложения сосредоточенной силы сингулярное решение $G(x)$ приводит к абсурдным выводам (как напряжения, так и перемещения в точке приложения сосредоточенной силы неограниченны). В то же время формула (1.23) позволяет сопоставить силе F_3 соответствующее обобщенное перемещение δ_0 (сравните с примером 1, §8.9 [21]).

Более того, формула, аналогичная (1.23) и выведенная для случая нескольких штампов, позволяет перенести теоремы строительной механики на случай действия сосредоточенных сил на трехмерное тело.

Теперь обратимся к критике асимптотической модели, основанной на формуле (1.23). Так, первый множитель в правой части формулы (1.23) определяется упругими свойствами материала, из которого изготовлено тело Ω, а второй множитель определяется исключительно геометрической формой и размерами подошвы малого штампа, посредством которого внешняя нагрузка передается на поверхность упругого тела. Тем самым, формула (1.23) не несет никакой информации о форме и размерах самого тела Ω.

В случае нескольких штампов этот дефект асимптотической модели, полученной на основе главных членов асимптотики, будет проявляться в том, что между обобщенными силами будет отсутствовать какое бы то ни было взаимодействие. Поскольку реальные упругие конструкции передают влияние от точки приложения сосредоточенной силы в точку наблюдения, то возникает необходимость построения уточненной асимптотической модели, свободной от отмеченных недостатков.

Асимптотические модели, построенные путем привлечения следующих членов асимптотики, оказываются громоздкими и теряют наглядность. В этой связи, чтобы соблюсти простоту конструкции асимптотической модели, было предложено видоизменить процедуру сращивания путем одновременного учета младших членов асимптотики наряду со старшими. Соответствующая модификация метода получила название *улучшенного метода сращиваемых асимптотических разложений* [22].

Внешнее *асимптотическое представление* $u(x) \cong v(x)$ решения исходной задачи (1.1)–(1.5) назначим в виде (1.20) с неопределенным коэффициентом, т.е. положим

$$v(x) = F_3\, G(x). \qquad (1.24)$$

Воспользуемся представлением

$$G(x) = T(x) + g(x), \qquad (1.25)$$

где $g(x)$ — регулярная часть функции Грина.

Подставляя выражения (1.8), (1.25) в формулу (1.24) , находим

$$u(\varepsilon\xi) \cong \varepsilon^{-1} F_3\, T(\xi) + F_3\, g(0) + O(\varepsilon|\xi|). \qquad (1.26)$$

На основании двух первых членов разложения (1.26) назначим *уточненное условие сращивания* для *внутреннего асимптотического представления* $u(x) \cong w(\xi)$ в виде ($|\xi| \to \infty$)

$$w(\xi) = F_3\, g(0) + \varepsilon^{-1} F_3\, T(\xi) + O(|\xi|^{-2}). \qquad (1.27)$$

Тем самым, вектор-функция $w(\xi)$ представима в виде суммы постоянного вектора $F_3\, g(0)$ и исчезающей на бесконечности вектор-функции.

Опуская несложные выкладки (см. работу [22]), выводим уравнение

$$F_3 = \vartheta^{-1}\varepsilon C\big(\delta_0 - F_3\, g_3(0)\big),$$

которое, вспоминая обозначение $c_\varepsilon = \varepsilon C$, переписываем в виде

$$F_3 = \left(\vartheta\frac{1}{c_\varepsilon} + g_3(0)\right)^{-1}\delta_0. \qquad (1.28)$$

Величина $A_0 = \vartheta^{-1} g_3(0)$ получила название *коэффициента локальной податливости* упругого тела Ω. Ясно, что значение величины A_0 интегрально зависит как от формы и размеров тела Ω, так и от выбора местоположения точки O (см., в частности, [4,5]).

1.4. Точность асимптотической модели. В заключение этого параграфа отметим, что улучшенный метод сращиваемых асимптотических разложений естественным образом приводит к приближенному решению в форме рациональной зависимости от параметра ε в отличие от обычного метода сращиваемых разложений, в результате применения которого получаются полиномиальные аппроксимации. В работе [22] эта связь с аппроксимациями Паде (см. обзор [23]) была подвергнута внимательному рассмотрению и указано на повышение точности асимптотических конструкций типа (1.28).

Ранее, в работе С.А.Назарова [24] был разработан изящный матричный формализм применительно к разложениям и процедуре сращивания, также приводящий к улучшенным асимптотическим конструкциям. В учебном пособии [3] показана взаимосвязь подходов [22] и [24] и обращено некоторое внимание на их родство методу Р.Г.Баранцева [25]. Последнее обстоятельство требует своего отдельного исследования.

Таким образом, стремление к точности в асимптотическом моделировании качественного поведения упругой конструкции при наложении ограничения простоты асимптотических конструкций привело в рассматриваемом случае к асимптотическим формулам повышенной точности. В работе [22] на частном примере показано, что улучшение асимптотического решения, полученного по методу сращиваемых разложений, т.е. построение аппроксимаций Паде на основе полиномиальных разложений, дает вообще говоря худшие результаты, нежели результат непосредственного применения улучшенного метода сращиваемых асимптотических разложений.

2. ЛОКАЛЬНОСТЬ

2.1. Постановка задачи оптимизации контура многосвязного сечения стержня при кручении. Пусть на плоскости выбраны точки $P_1, \ldots, P_n$ с координатами (x_1^j, x_2^j), d — наименьшее расстояние между ними. Пусть еще ω_j — односвязная область с границей Γ_j, содержащаяся в круге диаметром d. Для односвязной области Ω с границей Γ, охватывающей точки $P_1, \ldots, P_n$, определим область Ω_ε с малыми отверстиями $\omega_1(\varepsilon), \ldots, \omega_n(\varepsilon)$ с центрами в этих точках. Контур области $\omega_j(\varepsilon)$, получаемой из ω_j сжатием в ε^{-1} раз, обозначим через $\Gamma_j(\varepsilon)$.

Рассмотрим кручение призматического стержня с поперечным сечением в форме области Ω_ε. Функция напряжений $\Phi(x)$ определяется как решение задачи (см. [26] и др.)

$$-\Delta\Phi(x) = 2,\ x \in \Omega_\varepsilon; \quad \Phi(x) = 0,\ x \in \Gamma; \quad (2.1)$$

$$\Phi(x) = K_j,\ x \in \Gamma_j(\varepsilon) \quad (j = 1, \ldots, n). \quad (2.2)$$

Постоянные $K_1, \ldots, K_n$ согласно теореме циркуляции касательных напряжений определяются из условия $(j = 1, \ldots, n)$

$$\int_{\Gamma_j(\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial n_x}(x)\, ds_x = 2\left|\omega_j(\varepsilon)\right|, \quad (2.3)$$

где $\left|\omega_j(\varepsilon)\right| = \varepsilon^2\left|\omega_j\right|$ — площадь области $\omega_j(\varepsilon)$.

Жесткость при кручении стержня с многосвязным сечением рассчитывается по формуле

$$(2G)^{-1} C = \iint_{\Omega_\varepsilon} \Phi(x)\, dx + \sum_{j=1}^{n} K_j \left|\omega_j(\varepsilon)\right|, \quad (2.4)$$

где G — модуль сдвига.

Задача об определении формы сечения стержня наибольшей жесткости рассматривалась [27,28] при изопериметрическом условии постоянства площади области Ω_ε, т.е.

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} dx = S\,. \qquad (2.5)$$

В качестве условия оптимальности контура в работах [27,28] было получено следующее:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_x}(x) = \lambda, \quad x \in \Gamma\,. \qquad (2.6)$$

Здесь λ — постоянная, значение которой определяется из условия (2.5).

Итак, будем считать, что как расположение центров малых отверстий $\omega_1(\varepsilon),\ldots,\omega_n(\varepsilon)$, так и их формы фиксированы априори. Тогда при заданной величине S требуется определить внешний контур Γ так, чтобы крутильная жесткость стержня многосвязного сечения Ω_ε с цилиндрическими полостями $\omega_1(\varepsilon),\ldots,\omega_n(\varepsilon)$ с диаметрами, пропорциональными малому параметру ε, была бы максимальной.

При ε отверстия в пределе исчезают и соотношения (2.1), (2.5), (2.6) формируют предельную задачу

$$-\Delta\Phi_0(x) = 2,\ x \in \Omega; \quad \Phi_0(x) = 0,\ x \in \Gamma; \quad (2.7)$$

$$\iint_{\Omega} dx = S\,; \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n_x}(x) = \lambda, \quad x \in \Gamma\,. \qquad (2.9)$$

Решение задачи (2.7)–(2.9) хорошо известно (см., например, [27,29]). Именно, максимальную жесткость имеет стержень кругового сечения.

Для построения асимптотики решения задачи (2.1)–(2.6) применим метод сращиваемых разложений [13,14]. Интересно отметить, что мембранная аналогия не помогает при определении структуры асимптотического анзаца. Поэтому результаты асимптотического анализа, проведенного в работах [30,31] (см. также [3]), при решении рассматриваемой задачи непосредственно не применимы.

Ранее разложения по малому параметру в задачах оптимизации скручиваемых упругих тонкостенных стержней строились в работах Н.В.Баничука [28,32].

2.2. Асимптотическая модель оптимизации контура многосвязного сечения стержня при кручении. Итак, решением предельной задачи (2.7)–(2.9), т.е. границей области Ω, является окружность радиусом $R_0 = (S/\pi)^{1/2}$. При этом решение краевой задачи (2.7) очевидно

$$\Phi_0(x) = -\frac{1}{2}\left|x - P_0\right|^2 + \frac{R_0^2}{2}\,. \qquad (2.10)$$

Можно показать, что асимптотика геометрической крутильной жесткости стержня возмущенного поперечного сечения Ω_ε равна

$$C \cong C_0 - 2\pi G \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} \nabla_x \Phi_0(P_j)^T \Psi^j \nabla_x \Phi_0(P_j)\,.$$

Здесь T — знак транспонирования, Ψ^j — матрица поляризации отверстия ω_j.

Подставляя выражение (2.10) в формулу для крутильной жесткости, находим

$$\Delta C \cong -2\pi G \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} (x^j - x^0)^T \Psi^j (x^j - x^0)\,. \quad (2.11)$$

Координаты (x_1^0, x_2^0) центра круга Ω (точки P_0) найдем из условия, чтобы правая часть соотношения (2.11) достигала минимума. Таким образом, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \Psi^j x^0 = \sum_{j=1}^{n} \Psi^j x^j\,. \qquad (2.12)$$

Если хотя бы одна из матриц поляризации не особенная, то, очевидно,

$$x^0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \Psi^j\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \Psi^j x^j\,. \qquad (2.13)$$

Теорема. *Обозначим через* Ψ_1^j *и* Ψ_2^j *собственные числа матрицы поляризации* Ψ^j, *причем* $\Psi_2^j \le \Psi_1^j$. *Положим*

$$x_i^* = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} p_j x_i^j \quad (i = 1,2), \qquad (2.14)$$

где $p_j = (\Psi_2^j + \Psi_1^j)/2$ *— средняя поляризация.*

Предположим, что все точки $P_1, \ldots, P_n$ *накрываются кругом с центром в точке* P_* *с координатами* (2.14) *и радиусом* R_*, *т.е.*

$$\left\| x^j - x^* \right\| \le R_* \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Пусть еще выполняется условие

$$\frac{R_*}{1-\delta} \le R_0, \qquad (2.15)$$

где величина δ *определена формулой*

$$\delta = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} d_j, \quad d_j = \frac{1}{2}(\Psi_1^j - \Psi_2^j).$$

Тогда уравнение (2.12) *имеет единственное решение, определяемое формулой* (2.13). *При этом выполняется неравенство*

$$\left\| x^j - x^0 \right\| \le R_0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

т.е. круг с центром в точке P_0 *и радиусом* R_0 *содержит внутри себя все точки* $P_1, \ldots, P_n$. ■

2.3. Локальность асимптотической модели. На примере стержня кругового поперечного сечения, «ослабленного» системой продольных разрезов, расположенных на концентрических цилиндрических поверхностях, можно пояснить причину введения величины δ. Действительно, такого типа продольные разрезы не оказывают влияния на геометрическую крутильную жесткость (2.4), поскольку функция (2.10) и её нормальная производная постоянны на окружностях, $|x\text{-}P_0| = \mathrm{const}$ т.е. решение задачи о кручении сплошного стержня кругового сечения удовлетворяет краевым условиям (2.2) и (2.3).

В случае указанных разрезов малого поперечного сечения их можно смоделировать малыми прямолинейными разрезами, перпендикулярными радиус-вектору. Матрица поляризации Ψ^j отрезка имеет нулевое собственное число, причем $d_j = p_j$. Значит, в случае системы отрезков имеем $\delta = 1$ и условия теоремы не выполняются (знаменатель дроби в левой части неравенства (2.15) обращается в нуль).

В указанном особенном случае ($\delta = 1$) возможны как неединственность решения результирующей задачи (например, в случае двух параллельных малых прямолинейных разрезов), так и отсутствие решения вообще при фиксированной величине S в изопериметрическом условии (2.5) в зависимости от ориентации разрезов-отрезков. Например, координаты точки пересечения перпендикуляров, восстановленных к двум отрезкам, будут решением результирующей задачи (2.12), однако максимальное расстояние от этой точки до данных отрезков может быть сделано сколь угодно большим (приближением угла между данными отрезками к развернутому) и превышать заданную величину R_0.

Наконец, отметим, что рассматриваемую сингулярно возмущенную задачу оптимизации (2.1)–(2.6) имеет смысл рассматривать лишь при величине S, большей площади выпуклой оболочки множества точек $P_1, \ldots, P_n$. Развитый подход асимптотического моделирования позволяет приближенно построить оптимальный контур Γ, близкий к окружности. Случай, когда множество точек $P_1,\dots,P_n$ нельзя накрыть кругом радиуса $R_0=(S/\pi)^{1/2}$, требует разработки иного асимптотического подхода.

Построенная асимптотическая модель демонстрирует интересные свойства. Открытым остается вопрос, какие из них можно перенести на исходную математическую модель (2.1)–(2.6), поскольку исследования последней в известной автору литературе еще не проводилось.

3. ПРОСТОТА

3.1. Постановка задачи о давлении на упругое полупространство узкого кольцевого штампа. Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур длины $2l$ на плоскости. Обозначим через ε малый положительный параметр и опишем узкое кольцо $\Gamma(\varepsilon)$ толщины $2h=2\varepsilon H$, срединную линию которого образует контур Γ.

При помощи представления Папковича—Нейбера контактная задача о поступательном вдавливании гладкого штампа с плоским основанием в форме области $\Gamma(\varepsilon)$ в упругое полупространство на глубину δ_0 сводится (см. [6,7]) к смешанной краевой задаче теории гармонических функций

$$\Delta\varphi(x)=0,\quad x_3\le 0; \tag{3.1}$$

$$\varphi(x_1,x_2,0)=-\delta_0,\quad (x_1,x_2)\in\Gamma(\varepsilon); \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)=0,\quad (x_1,x_2)\notin\overline{\Gamma(\varepsilon)}; \tag{3.3}$$

$$\varphi(x)=o(1),\quad |\,\mathrm{x}\,|\to\infty. \tag{3.4}$$

Асимптотическое решение контактной задачи для узкого кольцевого штампа впервые было получено В.М.Александровым [33]. Математически строгий асимптотический анализ задач аналогичных (3.1)–(3.4) был проведен в работах М.В.Федорюка [34], В.Г.Мазьи, С.А.Назарова и Б.А.Пламеневского [35]. Следуя работе [36], изложим кратко конструкцию асимптотического решения по методу работ [34,35,37].

3.2. Конструкция асимптотики. На удалении от $\Gamma(\varepsilon)$ гармонический потенциал $\varphi(x)$ в главном представляется в виде потенциала простого слоя, плотность которого сосредоточена на контуре Γ:

$$v(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\gamma(t)\,dt}{\sqrt{(x_1-y_t^1)^2+(x_2-y_t^2)^2+x_3^2}}.$$

Функция $\gamma(s)$ имеет смысл приведенной плотности погонных давлений.

Вблизи контура Γ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$v(x)=\frac{\gamma(s)}{\pi}\left(\ln\frac{r}{2l}-J_0(s)\right)+(J\gamma)(s)+o(1),$$

где введено обозначение

$$(J\gamma)(s)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{R_0(s,t)}dt.$$

Здесь $J_0(s)$ — гладкая функция, $R_0(s,t)$ — расстояние между точками на контуре Γ с координатами s и t, r — расстояние до контура.

В окрестности зоны контакта строится решение типа «плоского» пограничного слоя. С этой целью вводятся «растянутые» координаты

$$(\eta_1,\eta_2)=\varepsilon^{-1}(y_1,y_2), \tag{3.5}$$

где (y_1,y_2)— координаты в плоскостях, ортогональных контуру Γ.

Внутреннее асимптотическое представление $w(s,\eta)$ удовлетворяет следующим соотношениям, куда как параметр входит координата s:

$$\Delta_\eta w(s,\eta)=0,\quad \eta_2\le 0; \qquad (3.6)$$

$$w(s,\eta_1,0)=-\delta_0,\quad |\eta_1|<H; \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta_2}(s,\eta_1,0)=0,\quad |\eta_1|>H. \qquad (3.8)$$

Ввиду выписанного выше асимптотического разложения функции $v(x)$ метод сращиваемых разложений требует логарифмический рост на бесконечности у решения уравнения Лапласа (3.6). Нетрудно проверить, что всем соотношениям (3.6)–(3.8) удовлетворяет функция

$$w(s,\eta)=-\delta_0+2\gamma(s)Y(s),$$

где обозначено $(\eta=\eta_1+i\eta_2)$

$$Y(s)=\frac{1}{\pi}\ln\left(H^{-1}\left|\eta+\sqrt{\eta^2-H^2}\right|\right).$$

При этом имеет место разложение

$$Y(s)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{2|\eta|}{H}+O(|\eta|^{-1}),\quad |\eta|\to\infty. \qquad (3.9)$$

Сращивая внешнее асимптотическое представление $v(x)$ с внутренним асимптотическим представлением $w(s,\eta)$, выводим уравнение для определения искомой плотности $\gamma(s)$:

$$\frac{\gamma(s)}{\pi}\left(\ln\frac{4l}{\varepsilon H}+J_0(s)\right)+(J\gamma)(s)=\delta_0. \qquad (3.10)$$

Свойства интегрального оператора J изучены в работах [34,35]. Показано, что уравнение (3.10) разрешимо не при любой правой части для всех достаточно малых значений параметра ε. Подчеркнем, что исходная контактная задача является корректно поставленной.

3.3. Модификация процедуры сращивания и асимптотическая модель контакта вдоль линии. Следуя работе [38], условие сращивания внутреннего и внешнего асимптотических представлений запишем в виде

$$w(s,\varepsilon^{-1}y)-v(\gamma;y,s)=o(1),\ \frac{|y|}{r_0}\cong\sqrt{\varepsilon},\ \varepsilon\to 0,$$

где r_0^{-1} — минимальная кривизна контура Γ.

Используя асимптотику (3.9), условие сращивания переписываем в эквивалентном виде

$$-\delta_0+\frac{\gamma(s)}{\pi}\ln\frac{2|y|}{\varepsilon H}-v(\gamma;y,s)=o(1).$$

Полагая теперь $y_1=0$, $y_2=\sqrt{\varepsilon}r_0$, находим

$$\frac{\gamma(s)}{\pi}\ln\frac{2r_0}{\sqrt{\varepsilon}H}+(J_\varepsilon\gamma)(s)=\delta_0, \qquad (3.11)$$

где введено обозначение

$$(J_\varepsilon\gamma)(s)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\gamma(t)}{\sqrt{R_0(s,t)^2+\varepsilon r_0^2}}dt.$$

В работе [38] установлена теорема разрешимости уравнения (3.11) при всех достаточно малых значениях параметра ε.

3.4. Простота асимптотической модели. В случае узкого прямоугольного штампа уравнение (3.11), записанное относительно погонной плотности контактных давлений, имеет вид

$$P(s)\ln\frac{4l}{h}+\int_{-l}^{l}\frac{P(t)dt}{\sqrt{(s-t)^2+hl}}=\vartheta^{-1}\delta_0. \qquad (3.12)$$

С другой стороны, на основе гипотезы Л.А.Галина [6], что контактное давление под узким штампом в поперечном направлении распределено в соответствии с решением плоской контактной задачи, т.е.

$$p(s,n)=\frac{P(s)}{\pi\sqrt{h^2-n^2}},$$

получается интегральное уравнение [39]

$$\int_{-l}^{l}P(t)K\left(\frac{s-t}{h}\right)dt=\vartheta^{-1}\delta_0 \qquad (3.13)$$

с ядром ($F(\varphi,k)$ — эллиптический интеграл первого рода)

$$K(t)=\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right).$$

Сопоставляя три математических модели упругого контакта вдоль линии (3.10), (3.12) и (3.13), приходим к выводу, что решение интегрального уравнения (3.12) представляет собой наиболее простую задачу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чтобы ответить на вопрос, как строятся асимптотические модели, воспользуемся предложенной Р.Г.Баранцевым системной триадой «рацио—эмоцио—интуицио» (см. [40], §1.2).

С аналитическим началом триады (*рацио*) естественно следует связать применение асимптотических методов. Именно, чтобы построить асимптотическую модель, необходимо сначала провести асимптотический анализ исходной математической модели.

Второй элемент системной триады (*эмоцио*) указывает на то, что к асимптотическому моделированию нужно относиться как к искусству (в этой связи см. также работу В.М.Бабича и В.С.Булдырева [41]).

С третьим элементом триады (*интуицио*) можно ассоциировать использование опыта, накапливаемого при изучении различных математических моделей. Именно интуиция поможет исследователю облечь результаты асимптотического анализа в форму новой математической модели — модели асимптотической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баранцев Р.Г.** Об асимптотологии // Вестник Ленингр. ун-та, 1976, №1. С.69–76.
2. **Моисеев Н.Н.** Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979.
3. **Аргатов И.И.** Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб.: Политехника, 2004.
4. **Аргатов И.И.** Асимптотическое решение контактной задачи для трехмерного упругого тела конечных размеров // ПММ. 1999. Т.63. Вып.6. С.964–970.
5. **Аргатов И.И.** О характеристиках локальной податливости упругого тела под действием на плоский участок его границы малого штампа // ПМТФ. 2002. Т.43. №1. С.177–185.
6. **Галин Л.А.** Контактные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1953.
7. **Лурье А.И.** Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1955.
8. **Аргатов И.И.** К решению осесимметричной контактной задачи Герца // ПММ. 2006. Т.70. Вып.4. С.684–700.
9. **Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
10. **Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И.** Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т.56. Вып.2. С.286–295.
11. **Бородачев Н.М.** О вдавливании штампа в торец полубесконечного упругого цилиндра // Прикл. механика (Киев). 1967. Т.3. №9. С.83–89.
12. **Александров В.М., Пожарский Д.А**. Об осесимметричной контактной задаче для усеченного шара // ПММ. 1997. Т.61. Вып.2. С.305–311.
13. **Ван-Дайк М.Д**. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
14. **Ильин А.М**. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
15. **Александров В.М.** Некоторые контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.758–764.

16. **Александров В.М., Шматкова А.А.** Вдавливание параболического штампа в упругий слой и двух параболических штампов в упругое полупространство // Изв. РАН. МТТ. 1998. №4. С.149–155.
17. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.–Л., 1935.
18. **Аргатов И.И., Назаров С.А.** Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И.Воровича и В.М.Александрова. М.: Физматлит, 2001. С.73–82.
19. **Аргатов И.И.** Емкостные характеристики штампа с плоским гладким основанием // Изв. вузов. Строительство. 2000. №4. С.26–32.
20. **Рвачев В.Л., Проценко В.С.** Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977.
21. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
22. **Аргатов И.И.** Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2000. Т.40. №4. С.623–632.
23. **Andrianov I.V., Awrejcewicz J.** New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Appl. Mech. Rev. 2001. V.54. P.69–92.
24. **Назаров С.А.** Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых разложений // Тр. Санкт-Петербург. матем. о-ва. 1996. Т.5. С.112–183.
25. **Баранцев Р.Г.** Метод разделения переменных в задаче рассеяния на теле произвольной формы // Докл. АН СССР, 1962. Т.147, №3. С.569–570.
26. **Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.** Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
27. **Баничук Н.В.** Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел // ПММ. 1975. Т.39. Вып.6. С.1082–1092.
28. **Куршин Л.М.** К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости // Докл. АН СССР. 1975. Т.223.С.585–588.
29. **Полиа Г., Сеге Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
30. **Назаров С.А.** Асимптотическое решение задачи с малыми препятствиями // Дифф. ур-я. 1995. Т.31. №6. С.1031–1041.
31. **Аргатов И.И.** Асимптотическое решение задачи о давлении твердого тела на мембрану // ПММ. 2000. Т.64. Вып.4. С.683–690.
32. **Баничук Н.В.** Об одной двумерной задаче оптимизации в теории кручения упругих стержней // Изв. АН СССР. 1976. №6. С.45–52.
33. **Александров В.М.** Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. №4. С.108–116.
34. **Федорюк М.В.** Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Теория кубатурн. формул и приложения функц. анализа к задачам матем. физики. Тр. семинара С.Л.Соболева. 1980. Т.1. С.113–131.
35. **Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А**. Асимптотика решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанной тонкой трубкой // Матем. сб. 1981. Т.116. №2. С.187–217.
36. **Аргатов И.И., Назаров С.А.** Давление на упругое полупространство узкого кольцевого штампа // ПММ. 1996. Т.60. Вып.5. С.810–825.
37. **Назаров С.А., Паукшто М.В.** Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984.
38. **Аргатов И.И.** Давление узкого прямоугольного штампа на упругое основание // Изв. РАН. МТТ. 2002. №2. С.58–67.
39. **Александров В.М., Пожарский Д.А.** Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998.
40. **Баранцев Р.Г.** Синергетика в современном естествознании. М.: Едиториал УРСС, 2003.
41. **Бабич В.М., Булдырев В.С.** Искусство асимптотики// Вестник Ленингр. ун-та, 1977, №13. С.5–12.