1. **<u>Об асимптотологии</u>** // Вестник ЛГУ, 1976, № 1. С.69-77.

1. Введение. После того как А.Пуанкаре в 1886 году ввёл понятие асимптотического ряда, в курсах математического анализа появились разделы, посвящённые асимптотическим разложениям. Однако первая половина 20 века не стала периодом расцвета асимптотических методов. К середине века асимптотические главы не только не выросли в монографии, но в большинстве курсов вовсе исчезли. Оканчивая университет, студенты не знали ни метода перевала, ни явлений Стокса.

За последние 20 лет положение коренным образом изменилось. Появились и продолжают выходить десятки монографий по асимптотическим методам. Издаётся межвузовский сборник «Асимптотические методы в теории систем». Во многих курсах анализа, дифференциальных уравнений, комплексной переменной, математической физики асимптотические разделы заняли прочное место. В университетах одновременно читается несколько спецкурсов, раскрывающих роль асимптотических методов в теории колебаний, задачах дифракции, теории рассеяния и других областях прикладной математики.

Стремительный рост литературы по асимптотике – очевидный факт. Причины этого можно связывать с растущим интересом к методологии вообще. Но наша задача – разобраться в сущности и внутренней структуре самих асимптотических методов. Если пытаться систематизировать асимптотическую литературу, то она подразделяется сейчас прежде всего по объектам применения асимптотических методов: асимптотика интегралов, асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру или аргументу, теория возмущений краевых задач и пр. Можно выделять и наиболее развитые асимптотические методы: метод перевала, метод ВКБ, метод пограничного слоя, метод усреднения и пр.

Но назревает ещё один подход к освоению этой растущей информации – методологический. Проблески его уже встречаются у некоторых авторов, которые задумываются над смыслом асимптотики и открывают в ней более глубокие корни. При всём разнообразии асимптотических методов можно выделить в них некоторые общие черты и изучать их независимо от тех объектов, к которым они применяются. Наука о самих асимптотических методах и должна составить предмет асимптотологии. Сегодня её ещё нет. Но уже есть возможность очертить некоторые её контуры.

Цель этой статьи – показать, что уже есть о чём говорить в теории асимптотических методов, есть о чём думать, что изучать, упорядочивать, строить. Пользу этих упражнений можно видеть хотя бы в том, что объединяющее понимание вещей создаёт прекрасные мостики для аналогий. Но не хотелось бы сводить дело к утилитарной точке зрения, ибо существуют и другие аспекты, не менее важные. Коснёмся следующих вопросов, относящихся, на наш взгляд, к асимптотологии: определение понятия асимптотических методов, фундаментальная роль асимптотического подхода, последовательность действий в асимптотическом анализе, расщепление задачи и итерационный процесс, неравномерность асимптотики, интегрирование асимптотических разложений.

2. Определение понятия асимптотических методов. Приступая к определению асимптотических методов, рассмотрим сначала, какие попытки были сделаны в этом направлении. Н.Г. де Брёйн, начиная свою монографию [1] с вопроса «Что такое асимптотика?», замечает, что если пытаться отвечать на него достаточно точно, то «в наше определение или не войдёт многое из того, что стоило бы называть асимптотическими оценками, или войдёт почти весь математический анализ». И автор не находит ничего лучшего, кроме фразы: «Вообще наиболее надёжным и отнюдь не самым неясным является следующее определение: асимптотические оценки – это раздел анализа, имеющий дело с задачами того же типа, что и рассмотренные в этой книге».

К.О.Фридрихс [2] называет асимптотическими явлениями все те, в которых есть разрывы, быстрые переходы, неоднородности и т.д. М.Д. Крускал [3] определяет асимптотику как науку, которая имеет дело с асимптотическими оценками интегралов или решений дифференциальных уравнений и т.д. в различных предельных случаях. Однако М.Д. Крускал вводит ещё термин «асимптотология», понимая под этим нечто более широкое, чем асимптотика, но включающее её. До дальнейшего уточнения он коротко определяет асимптотологию как искусство обращения с прикладными математическими системами в предельных случаях. Отмечая, что в этом искусстве накоплен большой опыт, М.Д. Крускал призывает к тому, чтобы формализовать и стандартизовать этот опыт («неявное знание заслуживает явной формулировки»), чтобы превратить искусство в науку.

Таким образом, хотя чёткое определение асимптотического разложения давно существует, с определением асимптотических методов дело обстоит хуже. Перечисление с многоточием вряд ли можно признать за удовлетворительное определение. Ясно, что асимптотические методы не ограничиваются теми оценками, которые уже формализованы. Но как определить то, что принадлежит скорее к сфере искусства (хотя и математического), чем науки? Должно ли это определение включать в себя ту степень неопределённости, которая характерна для асимптотического опыта?

Попробуем раскрыть суть асимптотических методов безотносительно к объекту асимптотического анализа. Пусть некий объект описывается совокупностью функций $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определённых каким угодно образом. Поведение этих функций, вообще говоря, неоднородно. Существуют области резкого изменения количества, превращающегося в некоторое качество: разрыв, излом, обращение в нуль или бесконечность и пр. Точки, в окрестности которых происходит такое превращение, назовём *особыми* (в широком смысле). Они могут быть изолированными или образовывать линии, поверхности и вообще многообразия с числом измерений $m < n$. Например, в газодинамике особыми являются бесконечно удалённая точка, поверхность обтекаемого тела, ударные волны, тангенциальные разрывы, начальный момент времени, значения параметров $M = 0, 1, \infty$; $Re = 0, \infty$ и т.д.

Явления, характерные для окрестности особых точек, будем называть *асимптотическими явлениями.* Условность, присущая данному определению особых точек и асимптотических явлений, на наш взгляд, естественна, и её не следует устранять, если хотим ухватить суть асимптотического подхода. Асимптотическими методами теперь можно называть методы, приспособленные для исследования асимптотических явлений. Это определение годится в качестве первого приближения, но ещё не раскрывает специфику асимптотических методов.

Асимптотика – это прежде всего упрощение [3]. Упрощение, достигаемое за счёт локализации (в пространстве всех аргументов, включая параметры). Причём точность упрощаемого представления при локализации возрастает. Как отмечал ещё Лаплас (см. [1]), асимптотические методы тем точнее, чем нужнее. Надобность в них появляется там, где тотальные (нелокальные) методы не срабатывают, но именно там, в окрестности особенностей, они и наиболее эффективны. Итак, *асимптотические методы* – это методы исследования асимптотических явлений путём упрощения за счёт локализации, точность которых растёт вместе с локализацией.

Простота и точность обычно встречаются как понятия противоположные, дополнительные. Стремясь к простоте, мы жертвуем точностью; добиваясь точности, не ждём простоты. Однако при локализации эти антиподы сходятся, противоречие разрешается, снимается в синтезе, имя которому – асимптотика.

3. **Фундаментальная роль асимптотического подхода**. «Асимптотическое описание является не только удобным инструментом математического анализа природы, но имеет и более глубокое значение», - утверждает К.О. Фридрихс [2] и подчеркивает для примера парадоксальную связь между классической и квантовой механикой: хотя первая есть асимптотическая аппроксимация второй, вторая не может быть объяснена без обращения к первой. «Тем самым, - пишет Л.А. Сегел [4], - он указал физическое основание точке зрения, что асимптотический подход – больше, чем ещё один приближённый метод, а скорее играет фундаментальную роль в математическом описании физических явлений».

Действительно, мы пользуемся асимптотическими методами не только при решении сформулированных задач, но и при постановке задач и вообще в процессе познания мира. Хотя всё в природе взаимосвязано, связи эти неодинаковы, и благодаря этой неравномерности появляется возможность что-то изучать. Мы выделяем какую-то группу явлений, обособленную от всего остального: от внешних связей и от внутренней мелкомасштабной структуры. Получается замкнутая система, объединяющая величины и отношения определённого порядка. Эффекты меньшего порядка при создании такой модели замораживаются, большего – могут образовывать особенности внутри системы.

Но сами изолированные системы можно рассматривать как особенности в мире всеобщей связи. А выделение их – локализация в пространстве отношений. Так что постановка задачи выглядит как локализация особенности, а уточнённая постановка – исследование окрестности этой особенности. Таким образом, моделирование тоже имеет асимптотический характер, а асимптотика – не только инструмент, но и объект исследования.

Изучение нового обычно начинается с основных особенностей и предельных ситуаций. Важность асимптотического анализа в прикладной математике Л.А.Сегел [4] видит именно в том, что поскольку поведение функции определяется её наихудшей сингулярностью, то и начинать надо с того, чтобы «брать быка за рога». Дихотомия, расчленение на крайности – тоже проявление асимптотического подхода. Отталкиваться от крайностей – значит осуществлять асимптотический принцип простоты.

Таким образом, асимптотические методы – предмет не только математики, но и гносеологии. Вольно или невольно, но мы пользуемся ими очень часто. М.Д. Крускал закончил свой доклад [3] следующим словами: «Один из героев Мольера заметил, что более 50 лет разговаривает прозой, не зная об этом. Несомненно, он извлёк пользу из этого открытия, но я надеюсь, что вы будете более счастливы и не разочаруетесь, открыв, что асимптотология есть то, в чём вы практиковались всё время».

Однако, разумеется, асимптотические методы не универсальны. Не в каждой задаче можно выделить малый параметр. Л.А. Сегел [4] вспоминает историю с одним математиком, который ушёл из метеорологической группы, когда обнаружил, что все члены в уравнениях одного порядка. С другой стороны, владея асимптотическими методами, можно сделать очень много. В [4] вспоминается, как об одном выдающемся учёном говорили: «Всё, что он может делать, - это решать задачи с пограничным слоем… Но, конечно, он может любую задачу поставить как задачу о пограничном слое».

Фундаментальность асимптотического подхода проявляется в том, что он позволяет на многие вещи взглянуть с единой точки зрения.

4. Последовательность действий в асимптотическом анализе. Изучая окрестность некоторой особенности, нужно, прежде всего, знать саму особенность, т. е. предельное состояние объекта. Иначе трудно рассчитывать на возможность упрощения. В окрестности предельного состояния мы ищем более простую модель объекта, которая тем точнее, чем ближе предельное состояние. Если исследуется функция $f(x)$ при $x \to x_0$, то отыскивается более простая функция $\varphi(x)$, которая описывает $f(x)$ с возрастающей точностью. Полезно различать следующие три этапа асимптотического приближения: 1) *Оценки сверху и снизу*. Цель при этом берётся в вилку, которая сужается. Возможно приближение и с одной стороны, чаще – сверху. На этом этапе характерно использование символа O. Соотношение $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, означает, что в некоторой окрестности точки x_0 $|f(x)| \le C|\varphi(x)|$, $C = \text{const}$. 2) *Нахождение точных порядков*. Если одновременно $f(x) = O(\varphi(x))$ и $\varphi(x) = O(f(x))$, то $f(x)$ есть величина порядка в точности $\varphi(x)$ при $x \to x_0$. Запишем этот факт в виде $f(x) = Oe(\varphi(x))$, $x \to x_0$. 3) *Достижение асимптотического равенства*. $f(x) \sim a\varphi(x)$; иными словами, нахождение предела отношения асимптотически эквивалентных функций $a = \lim f(x)/\varphi(x)$, $x \to x_0$, если он существует.

Получаемое таким образом асимптотическое представление можно уточнять, исследуя тем же путём разность $f(x) - a\varphi(x)$. При этом каждый цикл будет давать очередной член асимптотического разложения. Для sin ax при $x \to 0$ указанные этапы таковы: 1) sin ax = O(1), 2) sin ax = Oe(x), 3) sin ax ~ ax. Однако целесообразность расчленения на столь простом примере не видна. В нетривиальных же случаях поэтапное решение задачи приобретает существенное значение, так как действует *принцип лестницы*: каждая ступенька берётся сравнительно легко, а в итоге преодолевается серьёзное препятствие. Такое разделение на этапы важно не только при решении, но и при постановке задач.

Пусть, например, рассматривается возмущение краевой задачи для системы уравнений в частных производных. Упрощение за счёт малости возмущений достигается путём отбрасывания членов высшего порядка малости. Однако относительные порядки возмущённых функций и их производных заранее неизвестны, и пользоваться методом малых возмущений практически непросто. В искусстве асимптотологии существует множество рецептов, советов, как поступать в таких случаях [3, 5]. Формализация этого опыта привела к методу порядковых уравнений [6], который по существу означает постановку задачи на втором этапе асимптотического анализа. Информация о порядках даётся легче, чем о самих возмущениях, а с ней легче преодолевается и третий этап.

5. Расщепление задачи и итерационный процесс. В поисках упрощённого представления мы пытаемся выделить ту часть объекта, которая становится главной при подходе к предельному состоянию. Например, окрестность пика или стационарной точки, эталонное уравнение и т.п. М.Д. Крускал [3] называет три общих способа упрощения: отбрасывание некоторых членов, разложение системы на независимые части, выделение автономной подсистемы. Эти способы воспринимаются как естественные, если помнить, что всякая задача есть часть более общей и получена из неё такими же путями.

Извлечение главной части – эвристический этап асимптотического анализа. Он меньше всего формализован и больше всего требует интуиции и искусства. Здесь заложены источники неединственности асимптотических решений, воплощающей условность, произвольность, неопределённость асимптотического подхода. Но выбросить этот этап из теории невозможно без потери существа асимптотического метода.

После расщепления объекта с выделением простой части, претендующей на главную, наступает оценочный, доказательный этап. Если главная часть оператора угадана правильно, то доказывается, что она содержит главный член асимптотического решения, т. е. остаток действительно является величиной меньшего порядка. Чтобы принцип упрощения торжествовал в полной мере, нужно ещё очистить главный член от всего, что можно отнести в остаток. Таким образом, цикл завершается очистительным этапом.

Далее встаёт вопрос о более точной оценке остатка и построении следующего члена асимптотики. Имея оператор, расщеплённый на асимптотически неэквивалентные части, при отсутствии явного выражения естественно продолжать работу методом итераций. В этой ситуации итерационный процесс, вообще говоря, должен развёртывать асимптотическое разложение автоматически, без дополнительного угадывания (принцип рекуррентности [3]). Для облегчения очистительной работы бывает полезным кратное расщепление оператора.

Однако такая автоматизация не гарантирует от опасностей, поскольку остаточный оператор не обязан давать хороший результат на приближённом решении. Типичная трудность связана с появлением расходимости. При ближайшем рассмотрении оказывается, что имеет место неопределённость, для раскрытия которой приходится отступать к неизвестному более точному решению. Задача при этом снова завязывается, и требуется дополнительное расщепление с учётом сингулярности, ответственной за расходимость. Характерный случай такого рода встречается в [7], где дополнительное разложение в точке расходимости позволило снова развязать задачу.

Роль асимптотического расщепления при постановке задачи демонстрируется работой [8], в которой исследуется возможность уточнения постановки волновой задачи рассеяния путём разделения приходящего и уходящего потоков на больших расстояниях. Оказывается, что интерференция появляется лишь в третьих членах асимптотики и уточнённая постановка задачи действительно возможна. Эта постановка открывает равномерный переход к классическому пределу и допускает оценку условий, при которых коллективное взаимодействие расчленяется на последовательность парных столкновений.

6. Неравномерность асимптотики. Упрощение, достигаемое при $\varepsilon \to 0$, в различных частях пространства $\mathbf{x}$ обычно получается разным. Эта неравномерность асимптотики является скорее правилом, чем исключением. Будучи упрощением за счёт локализации, асимптотика имеет тенденцию к сужению области действия. С упрощением теряется ёмкость, гибкость функций. Поэтому предельное решение часто получается разрывным, а околопредельное содержит переходные слои: внутренние или пограничные. Типичные примеры такого рода даёт газодинамика. Несовпадение аналитического продолжения асимптотики с асимптотикой аналитического продолжения и есть явление Стокса [2]. Исследование структуры неравномерностей составляет главное содержание асимптотического анализа сложных систем.

Рассмотрим характерные свойства окрестности точки перехода в одномерном случае. Пусть функция $f(x,\varepsilon)$ имеет простую асимптотику $\varphi^+(x,\varepsilon)$ при $x > 0$ и другую простую асимптотику $\varphi^-(x,\varepsilon)$ при $x < 0$. Нижняя граница области действия правой асимптотики $x^+(\varepsilon)$ и верхняя граница области действия левой асимптотики $x^-(\varepsilon)$ стремятся к нулю вместе с ε, но скорость их убывания ограничена, т. е. существуют такие функции $x_*^+(\varepsilon)$ и $x_*^-(\varepsilon)$, что $x_*^{+-}(\varepsilon) =$ o($x^{+-}(\varepsilon)$). В ближайшей окрестности точки перехода имеется ещё одна простая асимптотика, которая действует в некоторой узкой области $x_0^-(\varepsilon) \le x \le x_0^+(\varepsilon)$. Так как $x_0^{+-}(\varepsilon) \to$ 0, то исследование этой внутренней асимптотики обычно ведётся в масштабе, растягивающем бесконечно малый промежуток до величины порядка единицы. Однако существенно не растяжение, а соотношение между величинами $x_0^{+-}(\varepsilon)$ и $x_*^{+-}(\varepsilon)$. Если $x_0^{+-}(\varepsilon) = o(x_*^{+-}(\varepsilon))$, то существуют переходные слои x = Oe($x_*^{+-}(\varepsilon)$), разделяющие области действия внутренней и внешних асимптотик. Простейший выбор внутренней асимптотики ведёт именно к такой ситуации.

Если наличие незаполненных переходных слоёв нежелательно, то приходится идти на усложнение внутренней асимптотики, расширяющее область её действия. Типичным представителем усложнённой асимптотики являются функции Эйри, реализующие переход от колебательной асимптотики к экспоненциальной через внутреннюю степенную [9]. В одностороннем случае (x $\ge$ 0) успех достигается также добавлением пограничных членов, которые компенсируют ошибки внешнего разложения при $x < x^+(\varepsilon)$, а при $x > x^+(\varepsilon)$ экспоненциально исчезают [10].

Выход внутренней асимптотики на внешнюю позволяет сращивать их путём переразложения в области перекрывания [11]. Процедура сращивания окупается тогда, когда плата за перекрывание значительно меньше, чем за глобальную равномерность асимптотики, например, при сращивании асимптотик от двух точек перехода.

Если усложнение асимптотики нежелательно, приходится мириться с наличием переходных слоёв. Заманчиво было бы иметь простую асимптотику в сколь угодно малой окрестности точки $x_*^{+-}(\varepsilon)$ и по ней, как по мостику, сращивать простейшую внутреннюю асимптотику с внешней. Однако в общем случае трудно надеяться на существование таких мостов. Структура переходного слоя не должна быть простой. Выигрыш здесь состоит в тонкости слоя, и этим можно будет воспользоваться при интегрировании (см. п.7).

Некоторые важные задачи разрешимы и без полной асимптотики. Например, связь левой и правой внешних асимптотик осуществляется без обращения к функции Эйри посредством выхода в комплексную область (метод Цваана [12]).

7. Интегрирование асимптотик. Во многих задачах наибольший интерес представляют интегральные характеристики решения. Закономерности такого осреднения имеют и самостоятельное методологическое значение, так что проблема интегрирования асимптотик несомненно относится к асимптотологии.

Чем проще асимптотика, тем легче получить интегральный результат в аналитической форме. Но упрощение чревато разрывами, и в общем случае нужно уметь интегрировать неравномерные асимптотики, разделённые переходными слоями. Простые точные оценки интегралов по этим слоям обычно не получаются. Но, благодаря тонкости переходных слоёв, и верхние оценки могут оказаться меньшего порядка, чем учитываемые члены интегральной асимптотики. Такие случаи наиболее благоприятны.

Если переходный слой, несмотря на узость, даёт вклад в главные члены асимптотики, то для получения асимптотического равенства требуются дополнительные действия. Достаточно общим полезным приёмом в такой ситуации является интегрирование по частям, уменьшающее вес подынтегральной функции в переходном слое [13]. При этом соответствующие главные члены автоматически выделяются, а в остающемся интеграле вклад переходного слоя становится пренебрежимо малым.

Можно предложить также следующую постановку задачи на интегрирование несмыкающихся асимптотик. Пусть в области интегрирования имеется переходный слой $x_1(\varepsilon) < x_*(\varepsilon) < x_2(\varepsilon)$, внутри которого простой асимптотики нет. Продолжение левой и правой асимптотик вплоть до встречи в точке $x_*(\varepsilon)$, вообще говоря, ведёт к ошибке в асимптотике интеграла. Допустим, что эта ошибка затрагивает только коэффициент в главном члене асимптотики. Но функция $x_*(\varepsilon)$ определена с точностью до порядка, например, $x_*(\varepsilon) = c_*\varepsilon^\gamma$, и параметр c_* произвольный. Идея состоит в том, чтобы обеспечить правильный коэффициент в асимптотике за счёт подходящего выбора c_*. Иными словами, нужно смыкать простые асимптотики в такой точке переходного слоя, при которой левая и правая ошибки взаимно уничтожаются. Примеры такого рода существуют. Требуется сформулировать условия, в которых указанная возможность реализуется, и найти способ определения c_*. Опираться можно на то, что окончательный результат не должен зависеть от точки смыкания x_*

Оценки толщины переходных слоёв при интегрировании играют не меньшую роль, чем оценки разложений в остальных областях. Поэтому нужно знать точные границы области действия простых асимптотик и при возможности расширять их. К сожалению, на эти границы, как правило, обращают меньше внимания, чем на сами разложения. Правда, это не случайно. Дело в том, что стандартный итерационный процесс, развёртывающий асимптотическое разложение, не даёт уточнения области действия. А начальная оценка слишком груба, так как происходит от той части уравнения, которая содержит неизвестную функцию. В работе [14] предложен метод уточнения границ с помощью разбиения объекта на три асимптотически неравноправные части с неизвестным элементом лишь в наиболее слабой. Исследование возможностей расширения области действия асимптотики привело к асимптотической постановке задачи на собственные значения.

Структура зависимости интегральной асимптотики от остающихся переменных также проявляет некоторые общие закономерности и заслуживает систематизации. Например, в кинетической теории газов часто рассматриваются моменты функции распределения, под интегралом выделяется пикообразная функция и разложение ядра в окрестности пика ведёт к асимптотическому разложению интеграла по параметру. При этом в регулярном случае асимптотика выражается через производные от предельных моментов [15], в нерегулярном добавляются специфические интегралы по переходным слоям [16]. Даже в рамках газодинамики эти закономерности в полной мере не использованы. Например, они подсказывают способ построения вязких течений без решения уравнений Навье-Стокса. Такая постановка задачи по существу содержится в [17], но неразвитость асимптотической точки зрения до сих пор мешает её восприятию и решению.

Литература

1. Де Брёйн Н.Г. Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961, 247 с.
2. Фридрихс К.О. Асимптотические явления в математической физике // Математика, 1957, №2. С.79-94.
3. Kruskal M.D. Asymptotology // Math. Models in Phys. Sciences. N.J.: Prentice-Hall, 1963. P.17-48.
4. Segel. L.A. The importance of asymptotic analysis in applied mathematics // Amer. Math. Monthly, 1966, vol.3, №1. P.7-14.
5. Segel L.A. Simplification and scaling // SIAM Rew., 1972, vol.14, № 4. P.547-571.
6. Баранцев Р.Г., Михайлова И.А., Цителов И.М. К определению порядка возмущающих функций в методе малых возмущений // Инж. Журн. 1961, т.1, №2. С.69-81.
7. Баранцев Р.Г., Петров В.П., Цителов И.М. Асимптотика по к→1 в задаче гиперзвукового обтекания затупленных тел // Вестн. Ленингр. ун-та, 1970, №13. С.83-91.
8. Баранцев Р.Г. К постановке задачи рассеяния на конечном расстоянии // ДАН СССР, 1964, т.157, №5. С.1080-1083.
9. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи матем. наук, 1952, т.7, №6. С.3-96.
10. Васильева А.Б., Бутузов Б.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. М.: Наука, 1973, 272 с.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967, 310 с.
12. Федорюк М.В. Три лекции по элементарным асимптотическим методам. Л.: ЛГУ, 1972, 49 с.
13. Баранцев Р.Г., Цителов И.М. Асимптотика коэффициентов обмена на поверхности при малом потенциале притяжения // Физическая механика. Вып.1. Л.: ЛГУ, 1974. С.63-70.
14. Баранцев Р.Г. Асимптотические итерации с расширением области действия // Асимптотические методы в теории систем. Вып.6. Иркутск, 1974. С.138-140.
15. Баранцев Р.Г. Асимптотические формулы для коэффициентов обмена импульсом и энергией на поверхности тела, обтекаемого разреженным газом // Вестн. Ленингр.ун-та, 1963 №13. С.69-76.
16. Баранцев Р.Г. Асимптотика однократного отражения на слабо шероховатой поверхности // Вестн. Ленингр.ун-та, 1967, №7. С.126-133.
17. Баранцев Р.Г. Об асимптотических решениях кинетического уравнения // Аэродинамика разреженных газов. Вып.1. Л.: ЛГУ, 1963. С.246-266.