Из книги A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, «Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition», Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011 [русский перевод].

5. Уравнения эллиптического типа с двумя независимыми переменными

5.1. Уравнения со степенными нелинейностями

5.1.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=aw+bw^n+cw^{2n-1}$

► *Общие свойства уравнений этого типа описаны в 5.4.1.1, там же рассмотрены решения типа бегущей волны и плоские решения с радиальной симметрией.*

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=kw^n.$

Стационарное уравнение теории массопереноса с объемной реакцией n-го порядка в плоском случае. Это уравнение встречается также в теории горения и является частным случаем уравнения 5.4.1.1 при $f(w)=kw^n$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^2 w(\pm C_1^{n-1}x+C_2,\pm C_1^{n-1}y+C_3),$$
$$w_2=w(x\cos\beta-y\sin\beta,\ x\sin\beta+y\cos\beta),$$

где C_1, C_2, C_3, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$w(x,y)=(Ax+By+C)^{\frac{2}{1-n}},\quad B=\pm\sqrt{\frac{k(n-1)^2}{2(n+1)}-A^2};$$
$$w(x,y)=s\bigl[(x+C_1)^2+(y+C_2)^2\bigr]^{\frac{1}{1-n}},\quad s=\bigl[\tfrac{1}{4}k(1-n)^2\bigr]^{\frac{1}{1-n}},$$

где A, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде (обобщает первое решение из п. 2°):

$$\int\left[D+\frac{2kw^{n+1}}{(n+1)(A^2+B^2)}\right]^{-1/2}dw=Ax+By+C,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные ($n\neq -1$).

4°. Точное решение (обобщает второе решение из п. 2°):

$$w=w(r),\qquad r=\sqrt{(x+C_1)^2+(y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{1}{r}w'_r=kw^n.$$

5°. Автомодельное решение:

$$w(x,y)=(x+C_1)^{\frac{2}{1-n}}u(\xi),\qquad \xi=\frac{y+C_2}{x+C_1},$$

где функция $u(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(1+\xi^2)u''_{\xi\xi}-\frac{2(1+n)}{1-n}\xi u'_\xi+\frac{2(1+n)}{(1-n)^2}u-ku^n=0.$$

6°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов в полярной системе координат (другое представление решения из п. 5°):

$$w(x,y) = r^{\frac{2}{1-n}} U(\theta), \qquad r = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y+C_2}{x+C_1},$$

где функция $U = U(\theta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$U''_{\theta\theta} + \frac{4}{(1-n)^2} U = kU^n.$$

Интегрируя, получим его общее решение в неявном виде

$$\int \left[\frac{2k}{n+1} U^{n+1} - \frac{4}{(n-1)^2} U^2 + C_3 \right]^{-1/2} dU = C_4 \pm \theta,$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные.

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 190).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw + bw^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = aw + bw^n$.

1°. Решения типа бегущей волны при $a > 0$:

$$w(x,y) = \left[\frac{2b \operatorname{sh}^2 z}{a(n+1)} \right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(1-n)(x \sin C_1 + y \cos C_1) + C_2 \quad \text{при } b(n+1) > 0,$$

$$w(x,y) = \left[-\frac{2b \operatorname{ch}^2 z}{a(n+1)} \right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,(1-n)(x \sin C_1 + y \cos C_1) + C_2 \quad \text{при } b(n+1) < 0,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решения типа бегущей волны при $a < 0$ и $b(n+1) > 0$:

$$w(x,y) = \left[-\frac{2b \cos^2 z}{a(n+1)} \right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \tfrac{1}{2}\sqrt{|a|}\,(1-n)(x \sin C_1 + y \cos C_1) + C_2.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw^n + bw^{2n-1}.$

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = aw^n + bw^{2n-1}$.

Точные решения:

$$w(x,y) = \left[\frac{a(1-n)^2}{2(n+1)} (x \sin C_1 + y \cos C_1 + C_2)^2 - \frac{b(n+1)}{2an} \right]^{\frac{1}{1-n}},$$

$$w(x,y) = \left\{ \frac{1}{4} a(1-n)^2 \bigl[(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2\bigr] - \frac{b}{an} \right\}^{\frac{1}{1-n}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw - a(n+1)w^n + bw^{2n-1}.$

1°. Решения типа бегущей волны:

$$w(x,y) = \bigl(\lambda + C_1 \exp z\bigr)^{\frac{1}{1-n}}, \quad z = \sqrt{a}\,(1-n)(x \sin C_2 + y \cos C_2),$$

где $\lambda = \lambda_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $a\lambda^2 - a(n+1)\lambda + b = 0$, а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. См. также уравнение 5.1.1.5, где в котором надо сделать переобозначения: $b \to -a(n+1)$ и $c \to b$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=aw+bw^n+cw^{2n-1}$.

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w)=aw+bw^n+cw^{2n-1}$.

1°. Решения типа бегущей волны при $a>0$:

$$w(x,y)=(A+B\operatorname{ch}z)^{\frac{1}{1-n}},\quad z=\sqrt{a}\,(1-n)(x\sin C_1+y\cos C_1)+C_2,$$
$$A=-\frac{b}{a(n+1)},\quad B=\pm\left[\frac{b^2}{a^2(n+1)^2}-\frac{c}{an}\right]^{1/2};$$
$$w(x,y)=(A+B\operatorname{sh}z)^{\frac{1}{1-n}},\quad z=\sqrt{a}\,(1-n)(x\sin C_1+y\cos C_1)+C_2,$$
$$A=-\frac{b}{a(n+1)},\quad B=\pm\left[\frac{c}{an}-\frac{b^2}{a^2(n+1)^2}\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные (выражения в квадратных скобках должны быть неотрицательны).

2°. Решения типа бегущей волны при $a<0$:

$$w(x,y)=(A+B\cos z)^{\frac{1}{1-n}},\quad z=\sqrt{|a|}\,(1-n)(x\sin C_1+y\cos C_1)+C_2,$$
$$A=-\frac{b}{a(n+1)},\quad B=\pm\left[\frac{b^2}{a^2(n+1)^2}-\frac{c}{an}\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Замена $u=w^{1-n}$ приводит к уравнению вида 5.1.6.7:

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{n}{1-n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]=a(1-n)u^2+b(1-n)u+c(1-n).$$

5.1.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x,y,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a(x^2+y^2)w^n$.

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w)=aw^n$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1^4 w(\pm C_1^{n-1}x,\,\pm C_1^{n-1}y),$$
$$w_2=w(x\cos\beta-y\sin\beta,\,x\sin\beta+y\cos\beta),$$

где C_1, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Преобразование

$$w=U(z,\zeta),\quad z=\tfrac{1}{2}(x^2-y^2),\quad \zeta=xy$$

приводит к более простому уравнению вида 5.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}=aU^n.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=c(ax+by)^k w^n$.

Частный случай уравнения 5.4.1.10 при $f(z,w)=cz^k w^n$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a(x^2+y^2)^k w^n$.

Частный случай уравнения 5.4.1.3 при $f(w)=aw^n$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a(x^2+y^2)(xy)^k w^n$.

Частный случай уравнения 5.4.1.12 при $f(z,w)=az^k w^n$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta x} w^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w) = aw^n$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ke^{ax-by} w^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.5 при $f(w) = kw^n$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k\bigl(w + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + B_1x + B_2y\bigr)^n.$

Частный случай уравнения 5.4.1.14 при $f(u) = ku^n$.

5.1.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\Bigl(x, y, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (a_1x + b_1y + c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y} + kw^n.$

Частный случай уравнения 5.4.2.3 при $f(w) = kw^n$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{b}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = kw^n.$

Частный случай уравнения 5.4.2.5 при $f(\xi, w) = kw^n$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = b\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + cw + sx^n.$

Частный случай уравнения 5.4.2.7 при $f(x) = b$, $g(x) = c$, $h(x) = sx^n$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + \beta x^n y^2 + \gamma x^m y + \mu x^k.$

Частный случай уравнения 5.4.2.9 при $a = b = 1$, $f(x) = \alpha$, $g(x) = h_1(x) = h_0(x) = p(x) = 0$, $q_2(x) = \beta x^n$, $q_1(x) = \gamma x^m$, $q_0(x) = \mu x^k$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + bcw^2 + kw + s.$

Пусть A — корень квадратного уравнения $bcA^2 + kA + s = 0$.

1°. Пусть выполнено неравенство $2Abc + k + ab = \sigma^2 > 0$. Тогда существует решение с обобщенным разделением переменных

$$w(x, y) = A + \bigl[C_1 \exp(\sigma x) + C_2 \exp(-\sigma x)\bigr] \exp\bigl(\pm y\sqrt{-b}\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Пусть выполнено неравенство $2Abc + k + ab = -\sigma^2 < 0$. Тогда существует решение с обобщенным разделением переменных

$$w(x, y) = A + \bigl[C_1 \cos(\sigma x) + C_2 \sin(\sigma x)\bigr] \exp\bigl(\pm y\sqrt{-b}\bigr).$$

3°. О более сложных решениях см. уравнение 5.4.2.8 при $f(x) = c$, $g(x) = k$, $h(x) = s$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cx^n\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + bcx^n w^2 + kx^m w + sx^l.$

Частный случай уравнения 5.4.2.8 при $f(x) = cx^n$, $g(x) = kx^m$, $h(x) = sx^l$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\beta x}\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + bce^{\beta x} w^2 + ke^{\mu x} w + se^{\nu x}.$

Частный случай уравнения 5.4.2.8 при $f(x) = ce^{\beta x}$, $g(x) = ke^{\mu x}$, $h(x) = se^{\nu x}$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw^n \left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right].$

Частный случай уравнения 5.4.2.10 при $f(w) = aw^n$. Замена

$$U = \int \exp\left(-\frac{a}{n+1} w^{n+1} \right) dw$$

приводит к двумерному уравнению Лапласа для функции $U = U(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} \right)^n + \beta \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} \right)^m + kw.$

Частный случай уравнения 5.4.2.11 при $a = b = 1$, $f(x) = \alpha$, $g(y) = \beta$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (a_1 x + b_1 y + c_1) \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} \right)^k + (a_2 x + b_2 y + c_2) \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} \right)^k.$

Частный случай уравнения 5.4.2.13 при $f(w, u, v) = 0$.

5.1.4. Уравнения вида $\frac{\partial}{\partial x}\left[f_1(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f_2(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = g(w)$

► *Уравнения этого вида встречаются в стационарных задачах тепло- и массопереноса и теории горения. Здесь f_1 и f_2 — главные коэффициенты температуропроводности, зависящие от пространственных координат x и y, $g = g(w)$ — функция источника, которая задает закон тепловыделения или теплопоглощения.*

1. $\dfrac{\partial}{\partial x} \left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) + \dfrac{\partial}{\partial y} \left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y} \right) = cw^k.$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w) = cw^k$.

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{k-1}{2-n}} x,\, C_1^{\frac{k-1}{2-m}} y \Big),$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m} \right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} w'_\xi = Bw^k, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $k \neq 1$ допускает точное решение

$$w = \left[\frac{2(1 + k + A - Ak)}{B(1-k)^2} \right]^{\frac{1}{k-1}} \xi^{\frac{2}{1-k}}.$$

3.2. При $m = 4/n$ из (1) получаем точное решение в неявном виде

$$\int \left[C_1 + \frac{2cn^2 w^{k+1}}{ab(k+1)(2-n)^4} \right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. Подстановка $\zeta = \xi^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \frac{B}{(1-A)^2}\zeta^{\frac{2A}{1-A}}w^k. \qquad (2)$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра k приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = cw^m.$

Частный случай уравнения 5.4.3.8 при $f(w) = cw^m$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Big(C_1^{\frac{m-1}{2-n}}x,\ y + \frac{1-m}{\mu}\ln C_1\Big),$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b\mu^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 e^{-\mu y}\big]^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{n}{2-n}\,\frac{1}{\xi}w'_\xi = \frac{4c}{ab\mu^2(2-n)^2}w^m.$$

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = cw^m.$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w) = cw^m$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1 w\Big(x + \frac{1-m}{\beta}\ln C_1,\ y + \frac{1-m}{\mu}\ln C_1\Big),$$

где C_1 — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\big)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi}w'_\xi = Aw^m, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \qquad (1)$$

3°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) допускает точное решение

$$w = \left[\frac{abm\beta^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}}\xi^{\frac{2}{1-m}}.$$

3.2. Подстановка $\zeta = \xi^2$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \tfrac{1}{4}A\zeta^{-1}w^m,$$

решения которого при $m = -1$ и $m = -2$ приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(ay+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(bx+s)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = kw^n.$

Частный случай уравнения 5.4.4.1 при $f(w) = kw^n$.

Уравнение можно записать в более простом виде

$$(ay+c)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+s)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = kw^n.$$

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = kw^n.$

Частный случай уравнения 5.4.4.2 при $f(w) = kw^n$.

5.1.5. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f_1(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f_2(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=g(w)$

► *Уравнения этого вида встречаются в стационарных задачах тепло- и массопереноса и теории горения. Здесь $f_1(w)$ и $f_2(w)$ — зависимости главных коэффициентов температуропроводности от температуры, $g = g(w)$ — функция источника, которая задает закон тепловыделения или теплопоглощения. В данном разделе не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной пространственной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.*

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(\alpha w+\beta)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=0.$

Стационарное уравнение Хохлова–Заболоцкой (при $\alpha = 1$, $\beta = 0$). Встречается в акустике, нелинейной механике и теории тепло- и массопереноса. Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w) = 1$, $g(w) = \alpha w + \beta$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=\frac{C_1^2}{C_2^2}w(C_1x+C_3,C_2y+C_4)+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{C_1^2}{C_2^2}-1\right),$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
w(x,y)&=Ay-\tfrac{1}{2}A^2\alpha x^2+C_1x+C_2,\\
w(x,y)&=(Ax+B)y-\frac{\alpha}{12A^2}(Ax+B)^4+C_1x+C_2,\\
w(x,y)&=-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{y+A}{x+B}\right)^2+\frac{C_1}{x+B}+C_2(x+B)^2-\frac{\beta}{\alpha},\\
w(x,y)&=-\frac{1}{\alpha}\big[\beta+\lambda^2\pm\sqrt{A(y+\lambda x)+B}\,\big],\\
w(x,y)&=(Ax+B)\sqrt{C_1y+C_2}-\frac{\beta}{\alpha},
\end{aligned}$$

где A, B, C_1, C_2, λ — произвольные постоянные. Первые два решения линейны по переменной y, третье решение квадратично по y, четвертое решение является решением типа бегущей волны.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y (обобщает третье решение из п. 2°):

$$w(x,y)=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$, $\chi = \chi(x)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx}+6\alpha\varphi^2=0, \tag{1}$$
$$\psi''_{xx}+6\alpha\varphi\psi=0, \tag{2}$$
$$\chi''_{xx}+2\alpha\varphi\chi=-2\beta\varphi-\alpha\psi^2. \tag{3}$$

Нелинейное автономное уравнение (1) рассматривается независимо от других уравнений; его решение можно выразить с помощью эллиптических интегралов. Уравнения (2) и (3) решаются последовательно (они являются линейными уравнениями относительно искомых функций).

Пятипараметрическое семейство решений системы (1)–(3) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varphi(x)&=-\frac{1}{\alpha(x+A)^2},\\
\psi(x)&=\frac{B_1}{(x+A)^2}+B_2(x+A)^3,\\
\chi(x)&=\frac{C_1}{x+A}+C_2(x+A)^2-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha B_1^2}{4(x+A)^2}-\frac{1}{2}\alpha B_1B_2(x+A)^3-\frac{1}{54}\alpha B_2^2(x+A)^8,
\end{aligned}$$

где A, B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = C_1wt + C_2w + C_3t + C_4,$$
$$y = \tfrac{1}{2}C_1t^2 + C_2t - \tfrac{1}{3}\alpha C_1w^3 - \tfrac{1}{2}(\alpha C_3 + \beta C_1)w^2 - \beta C_3w + C_5.$$

5°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = C_1t^2 + C_2wt + C_3t + C_4w - C_1\bigl(\tfrac{1}{3}\alpha w^3 + \beta w^2\bigr) + C_5,$$
$$y = \tfrac{1}{2}C_2t^2 + C_4t - C_1t\bigl(\alpha w^2 + 2\beta w\bigr) - \tfrac{1}{3}\alpha C_2w^3 - \tfrac{1}{2}(\alpha C_3 + \beta C_2)w^2 - \beta C_3w + C_6.$$

6°. Автомодельное решение (A, B — произвольные постоянные):

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = \frac{x + A}{y + B}$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} + [\zeta^2(\alpha w + \beta)w'_\zeta]'_\zeta = 0.$$

После однократного интегрирования, приняв w за независимую переменную, для функции $\zeta = \zeta(w)$ получим уравнение Риккати (C — произвольная постоянная):

$$C\zeta'_w = (\alpha w + \beta)\zeta^2 + 1,$$

общее решение которого можно выразить через функции Бесселя (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*).

7°. Точное решение (обобщает последнее решение из п. 2°):

$$w(x, y) = \frac{1}{\alpha}f(x)g(y) - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Здесь функции $f(x)$ и $g(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями (A — произвольная постоянная)

$$f''_{xx} = Af^2, \qquad (gg'_y)'_y = -Ag, \tag{4}$$

которые независимы друг от друга. В результате интегрирования получим решения уравнений (4) в неявном виде:

$$C_1 \pm x = \int \bigl(\tfrac{2}{3}Af^3 + B_1\bigr)^{-1/2}df,$$
$$C_2 \pm y = \int g\bigl(-\tfrac{2}{3}Ag^3 + B_2\bigr)^{-1/2}dg,$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8°. Точное решение (A, B, k — произвольные постоянные):

$$w = \frac{1}{\alpha}(x + A)^{2k}F(z) - \frac{\beta}{\alpha}, \quad z = \frac{y + B}{(x + A)^{k+1}},$$

где функция $F = F(z)$ определяется путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$2k(2k - 1)F - (k + 1)(3k - 2)zF'_z + (k + 1)^2z^2F''_{zz} + (FF'_z)'_z = 0,$$

которое допускает понижение порядка.

9°. Точное решение (A, λ — произвольные постоянные):

$$w = \frac{1}{\alpha}e^{-2\lambda x}\Phi(u) - \frac{\beta}{\alpha}, \quad u = (y + A)e^{\lambda x},$$

где функция $\Phi = \Phi(u)$ определяется путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$4\lambda^2\Phi - 3\lambda^2u\Phi'_u + \lambda^2u^2\Phi''_{uu} + (\Phi\Phi'_u)'_u = 0,$$

которое допускает понижение порядка.

10°. Точное решение (A, B, C — произвольные постоянные):

$$w = \frac{1}{\alpha}(\pm x + A)^{-2}\Psi(\xi) - \frac{\beta}{\alpha}, \quad \xi = y + B\ln(\pm x + A) + C,$$

где функция $\Psi = \Psi(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$6\Psi - 5B\Psi'_\xi + B^2\Psi''_{\xi\xi} + (\Psi\Psi'_\xi)'_\xi = 0,$$

которое допускает понижение порядка.

11°. Точное решение:

$$w = U(\eta) - 4\alpha C_1^2 x^2 - 4\alpha C_1 C_2 x, \qquad \eta = y + \alpha C_1 x^2 + \alpha C_2 x,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $U(\eta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$(\alpha U + \beta + \alpha^2 C_2^2) U'_\eta + 2\alpha C_1 U = 8\alpha C_1^2 \eta + C_3.$$

За счет подходящих сдвигов по обеим переменным можно добиться, чтобы уравнение стало однородным (т. е. уравнение интегрируется в квадратурах).

12°. Исходное уравнение можно представить в виде системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -(\alpha w + \beta)\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Преобразование годографа $x = x(w, v)$, $y = y(w, v)$ (w и v принимаются за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные) приводит ее к линейной системе

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \qquad -(\alpha w + \beta)\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}.$$

Исключая отсюда y, для функции $x = x(w, v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + (\alpha w + \beta)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

13°. Пусть $w(x, y)$ — любое решение уравнения Хохлова — Заболоцкой (при $\alpha = 1$, $\beta = 0$). Тогда обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_{tt} = F(t, u), \qquad F(t, u) = \frac{1}{9\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial u} + 3\varphi''_{tt} u + 3\psi'_t\right),$$

где

$$v = -\varphi^{1/3} w(x, y) - \varphi^{-1}(\varphi'_t u + \psi)^2, \quad x = \frac{1}{3}\int \varphi^{-2/3}\,dt, \quad y = \varphi^{-1/3} u - \frac{1}{3}\int \varphi^{-4/3}\psi\,dt,$$

а $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, имеет кубический по производной u'_t первый интеграл.

⦿ *Литература для уравнения* 5.1.5.1: Y. Kodama, J. Gibbons (1989), В. В. Козлов (1995, стр. 379–381), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 193–195).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\alpha w + \beta}\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$

1°. Точные решения:

$$w(x, y) = \frac{-A^2 x^2 + Bx + C}{\alpha(Ay + D)^2} - \frac{\beta}{\alpha},$$

$$w(x, y) = \frac{p^2}{A\alpha}\,\frac{Ax^2 + Bx + C}{\operatorname{ch}^2(py + q)} - \frac{\beta}{\alpha},$$

$$w(x, y) = -\frac{p^2}{A\alpha}\,\frac{Ax^2 + Bx + C}{\operatorname{sh}^2(py + q)} - \frac{\beta}{\alpha},$$

$$w(x, y) = -\frac{p^2}{A\alpha}\,\frac{Ax^2 + Bx + C}{\cos^2(py + q)} - \frac{\beta}{\alpha},$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

2°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = C_1 wt + C_2 w + C_3 t + C_4,$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 t^2 + C_2 t - \frac{C_1}{\alpha} w - \frac{1}{\alpha^2}(\alpha C_3 - \beta C_1)\ln|\alpha w + \beta| + C_5,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

3°. О других точных решениях см. уравнение 5.4.4.8 при $f(w) = 1$ и $g(w) = (\alpha w + \beta)^{-1}$.

4°. Замена $\alpha w + \beta = e^U$ приводит к уравнению вида 5.2.4.1 (в котором сделаны переобозначения координат $x \rightleftarrows y$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^U \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{w+\beta}}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$

Замена $U = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{w+\beta}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

С точностью до переобозначений координат ($x \rightleftarrows y$) и искомой функции это уравнение совпадает с частным случаем 5.1.5.1.

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(\alpha_1 w + \beta_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha_2 w + \beta_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = \gamma.$

1°. Решения типа бегущей волны, линейные по пространственным переменным:

$$w(x,y) = Ax \pm \sqrt{\frac{\gamma - A^2\alpha_1}{\alpha_2}}\,y + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$(A^2\alpha_1 + B^2\alpha_2)w^2 + 2(A^2\beta_1 + B^2\beta_2)w = \gamma(Ax+By)^2 + C_1(Ax+By) + C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. О других решениях уравнения см. 5.4.4.8 при $f(w) = \alpha_1 w + \beta_1,\ g(w) = \alpha_2 w + \beta_2$.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \alpha w^n.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{n-m-1}x + C_2, \pm C_1^{n-m-1}y + C_3),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta,\ x\sin\beta + y\cos\beta),$$

где C_1, C_2, C_3, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. При $m \neq -1$ подстановка $U = w^{m+1}$ приводит к уравнению вида 5.1.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha(m+1)U^{\frac{n}{m+1}}.$$

3°. При $m = -1$ подстановка $w = e^V$ приводит к разрешимому уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \alpha e^{nV}.$$

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(aw^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(bw^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^{-2} w(\pm C_1^n C_2 x + C_3, \pm C_1^m C_2 y + C_4),$$

где C_1, …, C_4 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = f(x)g(y), \tag{1}$$

где функции $f(x)$ и $g(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями (A — произвольная постоянная)

$$(f^n f'_x)'_x = Abf^{m+1}, \qquad (g^m g'_y)'_y = -Aag^{n+1}, \tag{2}$$

которые независимы друг от друга. В результате интегрирования получим решения уравнений (2) в неявном виде:

$$\int f^n\left(\frac{2Ab}{n+m+2}f^{n+m+2} + B_1\right)^{-1/2} df = C_1 \pm x,$$
$$\int g^m\left(-\frac{2Aa}{n+m+2}g^{n+m+2} + B_2\right)^{-1/2} dg = C_2 \pm y,$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $n+m+2 \neq 0$.

3°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = x^{-2k} F(z), \qquad z = yx^{mk-nk-1},$$
$$w(x,y) = x^{\frac{2}{n-m}} G(\xi), \quad \xi = y + k\ln x,$$
$$w(x,y) = e^{2x} H(\eta), \qquad \eta = ye^{(n-m)x},$$

где k — произвольная постоянная.

4°. О других точных решениях исходного уравнения см. уравнение 5.4.4.8 при $f(w) = aw^n$, $g(w) = bw^m$.

7. $\displaystyle a_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(w^n \frac{\partial w}{\partial x}\right) + a_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial y}\right) = bw^k.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = C_1^2 w(\pm C_1^{k-n-1} x + C_2, \pm C_1^{k-m-1} y + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = F(\xi), \quad \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y \qquad \text{(решение типа бегущей волны);}$$
$$w(x,y) = x^{\frac{2}{n-k+1}} U(z), \quad z = yx^{\frac{k-m-1}{n-k+1}} \qquad \text{(автомодельное решение).}$$

5.1.6. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = by^n w^5.$

Частный случай уравнения 5.4.5.1 при $f(y) = by^n$.

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = be^{\beta y} w^5.$

Частный случай уравнения 5.4.5.1 при $f(y) = be^{\beta y}$.

3. $\displaystyle ax^n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^k.$

Частный случай уравнения 5.4.5.5 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^k$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} w'_\xi = Bw^k, \qquad (1)$$

где

$$A = \frac{3nm - 4n - 4m + 4}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) при $k \neq 1$ допускает точное решение

$$w = \left[\frac{2(1+k+A-Ak)}{B(1-k)^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \xi^{\frac{2}{1-k}}.$$

2.2. При $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$ получаем точное решение уравнения (1) в неявном виде

$$\int \left[C_1 + \frac{2c(3n-4)^2 w^{k+1}}{ab(k+1)(2-n)^4}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \xi,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2.3. Подстановка $\zeta = \xi^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \frac{B}{(1-A)^2}\zeta^{\frac{2A}{1-A}} w^k. \tag{2}$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра k приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*).

4. $\boldsymbol{ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^m}$.

Частный случай уравнения 5.4.5.9 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^m$.

5. $\boldsymbol{ae^{\beta x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^m}$.

Частный случай уравнения 5.4.5.7 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^m$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \bigl(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\bigr)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{3}{\xi}w'_\xi = Aw^m, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

2°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

2.1. Уравнение (1) допускает точное решение

$$w(\xi) = \left[\frac{ab(2-m)\beta^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}} \xi^{\frac{2}{1-m}}.$$

2.2. Подстановка $\zeta = \xi^{-2}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \tfrac{1}{4}A\zeta^{-3}w^m,$$

решение которого при $m = 3$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *а*).

6. $\boldsymbol{w\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \alpha w^\beta}$.

Замена $w = e^U$ приводит к уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \alpha e^{(\beta-2)U}.$$

7. $\boldsymbol{w\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \sigma\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = \alpha w^2 + \beta w + \gamma}$.

1°. Решения типа бегущей волны при $\alpha(1+\sigma) > 0$:

$$w(x,y) = A_1 + B_1 \operatorname{ch} z, \quad z = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\sigma}}\,\frac{k_1 x + k_2 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + C,$$

$$A_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1+\sigma}{1+2\sigma}, \quad B_1 = \pm\sqrt{\frac{\beta^2(1+\sigma)^2}{\alpha^2(1+2\sigma)^2} - \frac{\gamma(1+\sigma)}{\alpha\sigma}};$$

$$w(x,y) = A_2 + B_2 \operatorname{sh} z, \quad z = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\sigma}}\,\frac{k_1 x + k_2 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + C,$$

$$A_2 = -\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1+\sigma}{1+2\sigma}, \quad B_2 = \pm\sqrt{\frac{\gamma(1+\sigma)}{\alpha\sigma} - \frac{\beta^2(1+\sigma)^2}{\alpha^2(1+2\sigma)^2}},$$

где k_1, k_2, C — произвольные постоянные.

2°. Решения типа бегущей волны при $\alpha(1+\sigma) < 0$:

$$w(x,y) = A + B\cos z, \quad z = \sqrt{-\frac{\alpha}{1+\sigma}}\,\frac{k_1 x + k_2 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + C,$$

$$A = -\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1+\sigma}{1+2\sigma}, \quad B = \pm\sqrt{\frac{\beta^2(1+\sigma)^2}{\alpha^2(1+2\sigma)^2} - \frac{\gamma(1+\sigma)}{\alpha\sigma}},$$

где k_1, k_2, C — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = w(r), \qquad r = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ww''_{rr} + \frac{1}{r}ww'_r + \sigma\bigl(w'_r\bigr)^2 = \alpha w^2 + \beta w + \gamma.$$

4°. При $\gamma = 0$ помимо решений, приведенных в пп. 1°–3°, можно указать другие точные решения. Для этого в исходном уравнении следует сделать замену $w = u^2$. В результате имеем

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (1+2\sigma)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\alpha u^2 + \tfrac{1}{2}\beta.$$

Это уравнение является частным случаем рассматриваемого уравнения. Поэтому его решения можно получить с помощью приведенных в пп. 1° и 2° формул, в которых следует сделать следующие переобозначения: $w \to u$, $\sigma \to 1+2\sigma$, $\alpha \to \frac{1}{2}\alpha$, $\beta \to 0$, $\gamma \to \frac{1}{2}\beta$.

5°. Точные решения при $\alpha = 0$:

$$w(x,y) = \frac{\beta}{2(1+2\sigma)}\left(\frac{k_1x + k_2y}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} + C\right)^2 - \frac{\gamma(1+2\sigma)}{2\beta\sigma},$$

$$w(x,y) = \frac{\beta}{4(1+\sigma)}\bigl[(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2\bigr] - \frac{\gamma(1+\sigma)}{\beta\sigma},$$

где k_1, k_2, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 5.1.6.7: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 199–200).

8. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1x + b_1y + c_1w + k_1)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2x + b_2y + c_2w + k_2)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.10 при $f(w) = c_1w + k_1$, $g(w) = c_2w + k_2$.

9. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[(a_1x + b_1y + c_1w^n)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(a_2x + b_2y + c_2w^k)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.10 при $f(w) = c_1w^n$, $g(w) = c_2w^k$.

10. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Уравнение стационарного околозвукового течения газа. Частный случай уравнения 5.4.5.17 при $f(u,v) = (au)^{-1}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-3}C_2^2 w(C_1x + C_3, C_2y + C_4) + C_5y + C_6,$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y) = C_1xy + C_2x + C_3y + C_4,$$

$$w(x,y) = -\frac{(x+C_1)^3}{3a(y+C_2)^2} + C_3y + C_4,$$

$$w(x,y) = \frac{a^2C_1^3}{39}(y+A)^{13} + \frac{2}{3}aC_1^2(y+A)^8(x+B) + 3C_1(y+A)^3(x+B)^2 - \frac{(x+B)^3}{3a(y+A)^2},$$

$$w(x,y) = -aC_1y^2 + C_2y + C_3 \pm \frac{4}{3C_1}(C_1x + C_4)^{3/2},$$

$$w(x,y) = -aA^3y^2 - \frac{B^2}{aA^2}x + C_1y + C_2 \pm \frac{4}{3}(Ax + By + C_3)^{3/2},$$

$$w(x,y) = \frac{1}{3}(Ay+B)(2C_1x + C_2)^{3/2} - \frac{aC_1^3}{12A^2}(Ay+B)^4 + C_3y + C_4,$$

$$w(x,y) = -\frac{9aA^2}{y+C_1} + 4A\left(\frac{x+C_2}{y+C_1}\right)^{3/2} - \frac{(x+C_2)^3}{3a(y+C_1)^2} + C_3y + C_4,$$

$$w(x,y) = -\frac{3}{7}aA^2(y+C_1)^7 + 4A(x+C_2)^{3/2}(y+C_1)^{5/2} - \frac{(x+C_2)^3}{3a(y+C_1)^2} + C_3y + C_4,$$

где A, B, $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные (первое решение является вырожденным).

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,y) = y^{-3k-2}U(z), \quad z = xy^k,$$

где k — произвольная постоянная, а функция $U=U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$aU'_z U''_{zz} + k^2 z^2 U''_{zz} - 5k(k+1)zU'_z + 3(k+1)(3k+2)U = 0.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)x^{3/2} + \varphi_3(y)x^3,$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\varphi_1'' + \tfrac{9}{8}a\varphi_2^2 = 0,\\
&\varphi_2'' + \tfrac{45}{4}a\varphi_2\varphi_3 = 0,\\
&\varphi_3'' + 18a\varphi_3^2 = 0,
\end{aligned}$$

штрихи обозначают производные по y. Решение первого уравнения можно записать в неявном виде (выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса).

5°. Решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по x:

$$w(x,y) = \psi_1(y) + \psi_2(y)x + \psi_3(y)x^2 + \psi_4(y)x^3,$$

где функции $\psi_k = \psi_k(y)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1'' + 2a\psi_2\psi_3 = 0,\\
&\psi_2'' + 2a(2\psi_3^2 + 3\psi_2\psi_4) = 0,\\
&\psi_3'' + 18a\psi_3\psi_4 = 0,\\
&\psi_4'' + 18a\psi_4^2 = 0.
\end{aligned}$$

Частное решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
&\psi_1(y) = -2a\int_{y_0}^{y}(y-t)\psi_2(t)\psi_3(t)\,dt + B_1 y + B_2,\\
&\psi_2(y) = C_3(y+A)^{-1} + C_4(y+A)^2 - aC_1^2(y+A)^{-2} - 2aC_1C_2(y+A)^3 - \frac{2}{27}aC_2^2(y+A)^8,\\
&\psi_3(y) = C_1(y+A)^{-2} + C_2(y+A)^3, \quad \psi_4(y) = -\frac{1}{3a}(y+A)^{-2},
\end{aligned}$$

где A, B_1, B_2, $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, y_0 — любое.

6°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \eta(y)\theta(x) - aC_1\int_0^y (y-t)\eta^2(t)\,dt + C_2 y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а функции $\eta(y)$ и $\theta(x)$ удовлетворяют автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям (C_4 — произвольная постоянная)

$$\eta''_{yy} + aC_4\eta^2 = 0, \tag{1}$$
$$\theta'_x\theta''_{xx} = C_4\theta + C_1. \tag{2}$$

Решения уравнений (1) и (2) можно представить в неявном виде:

$$\int\bigl(C_5 - \tfrac{2}{3}aC_4\eta^3\bigr)^{-1/2}d\eta = C_6 \pm y,$$
$$\int\bigl(\tfrac{3}{2}C_4\theta^2 + 3C_1\theta + C_7\bigr)^{-1/3}d\theta = x + C_8,$$

где C_5, C_6, C_7, C_8 — произвольные постоянные.

7°. Преобразование Лежандра

$$u(\xi,\eta)=x\xi+y\eta-w(x,y),\quad \xi=\frac{\partial w}{\partial x},\quad \eta=\frac{\partial w}{\partial y},$$

где u — новая зависимая переменная, а ξ, η — новые независимые переменные, приводит к уравнению Трикоми

$$a\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=0.$$

Точные решения этого линейного уравнения можно найти в книге А. Д. Полянина (2001 b, стр. 463).

⦿ *Литература для уравнения* 5.1.6.10: Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 40–41), С. С. Титов (1988), S. R. Svirshchevskii (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 361–362).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{a}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y}+b\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0.$

Это уравнение при $b<0$ описывает трансзвуковое течение газа.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1^{-3}C_2^2w(C_1x+C_3,C_2y)+C_4y^{1-a}+C_5,$$

где $C_1,\ldots,C_5$ — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y)=-\frac{bC_1}{4(a+1)}y^2+C_2y^{1-a}+C_3\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+C_4)^{3/2},$$

где $C_1,\ldots,C_4$ — произвольные постоянные.

3°. Точное решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=-\frac{9A^2b}{16(n+1)(2n+1+a)}y^{2n+2}+Ay^n(x+C)^{3/2}+\frac{a-3}{9b}\frac{(x+C)^3}{y^2},$$

где A, C — произвольные постоянные, а $n=n_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$n^2+(a-1)n+\tfrac{5}{4}(a-3)=0.$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=(Ay^{1-a}+B)(2C_1x+C_2)^{3/2}+9bC_1^3\theta(y),$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\theta=\theta(y)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\theta''_{yy}+\frac{a}{y}\theta'_y+(Ay^{1-a}+B)^2=0.$$

Интегрируя, получим

$$\theta(y)=-\frac{B^2}{2(a+1)}y^2-\frac{AB}{3-a}y^{3-a}-\frac{A^2}{2(2-a)(3-a)}y^{4-2a}+C_3y^{1-a}+C_4.$$

5°. Автомодельное решение:

$$w(x,y)=y^{-3k-2}U(z),\quad z=xy^k,$$

где k — произвольная постоянная, а функция $U=U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$bU'_zU''_{zz}+k^2z^2U''_{zz}+k(a-5k-5)zU'_z+(3k+2)(3k+3-a)U=0.$$

6°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=\varphi_1(y)+\varphi_2(y)x^{3/2}+\varphi_3(y)x^3,$$

где функции $\varphi_k=\varphi_k(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1''+\frac{a}{y}\varphi_1'+\frac{9}{8}b\varphi_2^2=0,$$
$$\varphi_2''+\frac{a}{y}\varphi_2'+\frac{45}{4}b\varphi_2\varphi_3=0,$$
$$\varphi_3''+\frac{a}{y}\varphi_3'+18b\varphi_3^2=0,$$

штрихи обозначают производные по y.

7°. Решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по x:

$$w(x,y)=\psi_1(y)+\psi_2(y)x+\psi_3(y)x^2+\psi_4(y)x^3,$$

где функции $\psi_k=\psi_k(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1''+\frac{a}{y}\psi_1'+2b\psi_2\psi_3=0,\\
&\psi_2''+\frac{a}{y}\psi_2'+2b(2\psi_3^2+3\psi_2\psi_4)=0,\\
&\psi_3''+\frac{a}{y}\psi_3'+18b\psi_3\psi_4=0,\\
&\psi_4''+\frac{a}{y}\psi_4'+18b\psi_4^2=0.
\end{aligned}$$

8°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=\xi(y)+\eta(y)\theta(x).$$

Здесь функции $\xi(y)$ и $\eta(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\eta_{yy}''+\frac{a}{y}\eta_y'+bC_1\eta^2=0,\\
&\xi_{yy}''+\frac{a}{y}\xi_y'+bC_2\eta^2=0,
\end{aligned}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\theta=\theta(x)$ удовлетворяет автономному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\theta_x'\theta_{xx}''=C_1\theta+C_2.$$

Его решение можно представить в неявном виде:

$$\int\left(\tfrac{3}{2}C_1\theta^2+3C_2\theta+C_3\right)^{-1/3}d\theta=x+C_4,$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература для уравнения* 5.1.6.11: С. С. Титов (1988), S. R. Svirshchevskii (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 363–364).

5.2. Уравнения с экспоненциальными нелинейностями

5.2.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a+be^{\beta w}+ce^{\gamma w}$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=ae^{\beta w}$.

Это уравнение встречается в теории горения и является частным случаем уравнения 5.4.1.1 при $f(w)=ae^{\beta w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$\begin{aligned}
&w_1=w(\pm C_1^\beta x+C_2,\pm C_1^\beta y+C_3)+2\ln|C_1|,\\
&w_2=w(x\cos\lambda-y\sin\lambda,\ x\sin\lambda+y\cos\lambda),
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Точные решения:

$$\begin{aligned}
&w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(A^2+B^2)}{a\beta(Ax+By+C)^2}\right] &&\text{при }\ a\beta>0,\\
&w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(A^2+B^2)}{a\beta\operatorname{sh}^2(Ax+By+C)}\right] &&\text{при }\ a\beta>0,\\
&w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{-2(A^2+B^2)}{a\beta\operatorname{ch}^2(Ax+By+C)}\right] &&\text{при }\ a\beta<0,\\
&w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(A^2+B^2)}{a\beta\cos^2(Ax+By+C)}\right] &&\text{при }\ a\beta>0,\\
&w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{8C}{a\beta}\right)-\frac{2}{\beta}\ln\bigl|(x+A)^2+(y+B)^2-C\bigr|,
\end{aligned}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Первые четыре решения являются решениями типа бегущей волны, а последнее — решением с радиальной симметрией с центром в точке $(-A, -B)$.

Пример. При $a = \beta = 1$ краевая задача для рассматриваемого уравнения в круге $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1$ с граничным условием $w\big|_{r=1} = 0$ имеет два решения (см. последнее решение при $a = \beta = 1$, $A = B = 0$, $C = k$):

$$w(r) = \ln \frac{8k}{(k - r^2)^2}, \quad k = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$

Первое их них ограничено внутри круга $r \leqslant 1$, а второе — имеет сингулярную особенность на окружности $r = \sqrt{k}$.

3°. Точные решения с функциональным разделением переменных:

$$w(x, y) = -\frac{2}{\beta} \ln \left[C_1 e^{ky} \pm \frac{\sqrt{2a\beta}}{2k} \cos(kx + C_2) \right],$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{2k^2(B^2 - A^2)}{a\beta[A \operatorname{ch}(kx + C_1) + B \sin(ky + C_2)]^2},$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{2k^2(A^2 + B^2)}{a\beta[A \operatorname{sh}(kx + C_1) + B \cos(ky + C_2)]^2},$$

где A, B, C_1, C_2, k — произвольные постоянные (в решениях можно поменять местами x и y).

4°. Общее решение:

$$w(x, y) = -\frac{2}{\beta} \ln \frac{\left|1 - 2a\beta \Phi(z) \overline{\Phi(z)}\,\right|}{4|\Phi'_z(z)|},$$

где $\Phi = \Phi(z)$ — произвольная аналитическая (голоморфная) функция комплексного переменного $z = x + iy$ с отличной от нуля производной, чертой обозначена комплексно-сопряженная величина.

5°. Исходное уравнение связано с линейным уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\beta \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\tfrac{1}{2}a\beta\right)^{1/2} \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta w\right) \sin U, \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \tfrac{1}{2}\beta \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\tfrac{1}{2}a\beta\right)^{1/2} \exp\left(\tfrac{1}{2}\beta w\right) \cos U. \tag{3}$$

Пусть имеется (частное) решение $U = U(x, y)$ уравнения Лапласа (1). Тогда (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $w = w(y)$ с параметром x. Оно приводится к линейному уравнению с помощью замены $z = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\beta w\right)$. В результате получим

$$w = -\frac{2}{\beta} F - \frac{2}{\beta} \ln \left[\Psi(x) - k \int e^{-F} \sin U \, dy \right], \qquad F = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dy,$$

при интегрировании x считается параметром, $k = \left(\tfrac{1}{2}a\beta\right)^{1/2}$. Функция $\Psi(x)$ определяется после подстановки этого выражения в уравнение (3).

⊙ *Литература для уравнения* 5.2.1.1: И. Н. Векуа (1960), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), Д. А. Франк-Каменецкий (1987), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 476), С. Н. Аристов (1999), И. Х. Сабитов (2001).

2. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a e^{\beta w} + b e^{2\beta w}}$.

1°. Решение типа бегущей волны при $b\beta > 0$:

$$w(x, y) = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ -\frac{b}{a} + C_1 \exp \left[a \sqrt{\frac{\beta}{b}} \left(x \sin C_2 + y \cos C_2 \right) \right] \right\},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Решение типа бегущей волны (обобщает решение из п. 1°):

$$w(x,y) = -\frac{1}{\beta}\ln\left[-\frac{a\beta}{C_1^2+C_2^2} + C_3\exp(C_1x+C_2y) + \frac{a^2\beta^2 - b\beta(C_1^2+C_2^2)}{4C_3(C_1^2+C_2^2)^2}\exp(-C_1x-C_2y)\right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны:

$$w(x,y) = -\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{a\beta}{C_1^2+C_2^2} + \frac{\sqrt{a^2\beta^2 + b\beta(C_1^2+C_2^2)}}{C_1^2+C_2^2}\sin(C_1x+C_2y+C_3)\right].$$

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 366).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta w} - be^{-\beta w}$.

Преобразование

$$w(x,y) = u(x,y) + k, \quad k = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{b}{a}$$

приводит к уравнению вида 5.3.1.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\sqrt{ab}\,\mathrm{sh}(\beta u).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta w} + be^{-2\beta w}$.

Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x,y) = \frac{1}{\beta}\ln[\varphi(x) + \psi(y)],$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$(\varphi_x')^2 = 2a\beta\varphi^3 + C_1\varphi^2 + C_2\varphi + C_3,$$
$$(\psi_y')^2 = 2a\beta\psi^3 - C_1\psi^2 + C_2\psi - C_3 - b\beta,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Разрешив эти уравнения относительно производных, получим уравнения с разделяющимися переменными.

⊙ *Литература*: A. M. Grundland, E. Infeld (1992), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), R. Z. Zhdanov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a + be^{\beta w} + ce^{2\beta w}$.

Подстановка $u = e^{-\beta w}$ приводит к уравнению с квадратичной нелинейностью вида 5.1.6.7:

$$u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + a\beta u^2 + b\beta u + c\beta = 0.$$

5.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x,y,w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Ae^{\alpha x+\beta y}e^{\mu w}$.

Замена $U = \alpha x + \beta y + \mu w$ приводит к уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = A\mu e^U.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Ae^{\alpha xy+\beta x+\gamma y}e^{\mu w}$.

Замена $U = \alpha xy + \beta x + \gamma y + \mu w$ приводит к уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = A\mu e^U.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=A(x^2+y^2)e^{\beta w}.$

Преобразование

$$w=U(z,\zeta),\quad z=\tfrac{1}{2}(x^2-y^2),\quad \zeta=xy$$

приводит к более простому уравнению вида 5.2.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}=Ae^{\beta U}.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=A(x^2+y^2)^k e^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 5.4.1.3 при $f(w)=Ae^{\beta w}$.

5.2.3. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f_1(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f_2(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=g(w)$

► *Уравнения этого вида встречаются в стационарных задачах тепло- и массопереноса и теории горения. Здесь f_1 и f_2 — главные коэффициенты температуропроводности, зависящие от пространственных координат x и y, $g=g(w)$ — функция источника, которая задает закон тепловыделения или теплопоглощения.*

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)=ce^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w)=ce^{\beta w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w\Big(C^{\frac{2}{2-n}}x,\,C^{\frac{2}{2-m}}y\Big)+\frac{2}{\beta}\ln C,$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq 2$, $m\neq 2$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\big[b(2-m)^2x^{2-n}+a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w=w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_{\xi}=Be^{\beta w},\tag{1}$$

где

$$A=\frac{4-nm}{(2-n)(2-m)},\quad B=\frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $A\neq 1$ допускает точное решение

$$w(\xi)=-\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{B\beta}{2(1-A)}\xi^2\Big].$$

3.2. При $A=0$, что соответствует $m=\dfrac{4}{n}$ и $B=\dfrac{cn^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2}{\beta B(\xi+C)^2}\Big]\qquad \text{при } \beta B>0,$$

$$w(\xi)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2\lambda^2}{\beta B\cos^2(\lambda\xi+C)}\Big]\qquad \text{при } \beta B>0,$$

$$w(\xi)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{2\lambda^2}{\beta B\,\mathrm{sh}^2(\lambda\xi+C)}\Big]\qquad \text{при } \beta B>0,$$

$$w(\xi)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{-2\lambda^2}{\beta B\,\mathrm{ch}^2(\lambda\xi+C)}\Big]\qquad \text{при } \beta B<0,$$

$$w(\xi)=\frac{1}{\beta}\ln\Big[\frac{-8\lambda^2C_1C_2}{\beta B\big(C_1e^{\lambda\xi}+C_2e^{-\lambda\xi}\big)^2}\Big],$$

где λ, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. При $A=1$, что соответствует $m=\dfrac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi)=\frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{8C}{\beta B}\right)-\frac{2}{\beta}\ln(\xi^2+C), \qquad B=\frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

4°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y)=U(z)+\frac{n-2}{\beta}\ln x, \quad z=yx^{\frac{n-2}{2-m}}.$$

2. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=ce^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w)=ce^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w\Big(x-\frac{2}{\beta}\ln C,\ y-\frac{2}{\mu}\ln C\Big)+\frac{2}{\lambda}\ln C,$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w=-\frac{1}{\lambda}\ln\left[c\lambda\left(\frac{e^{-\beta x}}{a\beta^2}+\frac{e^{-\mu y}}{b\mu^2}\right)\right].$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\mu\neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w=w(\xi), \qquad \xi=\big(b\mu^2e^{-\beta x}+a\beta^2e^{-\mu y}\big)^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}w'_\xi=Ae^{\lambda w}, \quad A=\frac{4c}{ab\beta^2\mu^2}.$$

4°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y)=U(z)+\frac{\beta}{\lambda}x, \quad z=y-\frac{\beta}{\mu}x.$$

3. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=ce^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 5.4.3.8 при $f(w)=ce^{\lambda w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w\Big(C^{\frac{2}{2-n}}x,\ y-\frac{2}{\beta}\ln C\Big)+\frac{2}{\lambda}\ln C,$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w=-\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{c\lambda(2-n)}{(1-n)}\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2}\right]\right\}.$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq 2$, $\beta\neq 0$ (обобщает решение из п. 2°):

$$w=w(\xi), \qquad \xi^2=4\left[\frac{x^{2-n}}{a(2-n)^2}+\frac{e^{-\beta y}}{b\beta^2}\right],$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{A}{\xi}w'_\xi=ce^{\lambda w}, \qquad A=\frac{n}{2-n}.$$

4°. Уравнение имеет точное решение вида

$$w(x,y)=U(z)+\frac{n-2}{\lambda}\ln x, \quad z=y+\frac{2-n}{\beta}\ln x.$$

4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(ay+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(bx+s)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=ke^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 5.4.4.1 при $f(w)=ke^{\lambda w}$.

Уравнение можно записать в более простом виде

$$(ay+c)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bx+s)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=ke^{\lambda w}.$$

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=ke^{\lambda w}.$

Частный случай уравнения 5.4.4.2 при $f(w)=ke^{\lambda w}$.

5.2.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f_1(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f_2(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big]=g(w)$

► *Уравнения этого вида встречаются в стационарных задачах тепло- и массопереноса и теории горения. Здесь $f_1(w)$ и $f_2(w)$ — зависимости главных коэффициентов температуропроводности от температуры, $g=g(w)$ — функция источника, которая задает закон тепловыделения или теплопоглощения. В данном разделе не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной пространственной координаты: $w=w(x)$ и $w=w(y)$.*

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(ae^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=0.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(C_1x+C_3,\pm C_1C_2^\beta y+C_4)-2\ln|C_2|,$$

где $C_1,\ldots,C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln(Ay+B)+Cx+D,$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln(-aA^2y^2+By+C)-\frac{2}{\beta}\ln(-aAx+D),$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln(Ay^2+By+C)+\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{aA\operatorname{ch}^2(px+q)}\right],$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln(Ay^2+By+C)+\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\cos^2(px+q)}\right],$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln(Ay^2+By+C)+\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\operatorname{sh}^2(px+q)}\right],$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

3°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$k_1^2w+\frac{ak_2^2}{\beta}e^{\beta w}=C_1(k_1x+k_2y)+C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2 — произвольные постоянные.

4°. Автомодельное решение (A, B — произвольные постоянные):

$$w=u(z),\quad z=\frac{x+A}{y+B},$$

где функция $u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(z^2u'_z)'_z+(ae^{\beta u}u'_z)'_z=0.$$

Последнее допускает первый интеграл

$$\big(z^2+ae^{\beta u}\big)u'_z=C.$$

Принимая u за независимую переменную, для функции $z=z(u)$ получим уравнение Риккати

$$Cz'_u=z^2+ae^{\beta u},$$

решение которого выражается через функции Бесселя.

5°. Точное решение (обобщает решение из п. 4°):

$$w = U(\xi) - \frac{2(k+1)}{\beta}\ln|x|, \qquad \xi = y|x|^k,$$

где k — произвольная постоянная, а функция $U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2(k+1)}{\beta} + k(k-1)\xi U'_\xi + k^2\xi^2 U''_{\xi\xi} + (ae^{\beta U}U'_\xi)'_\xi = 0.$$

6°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = F(\eta) - \frac{2}{\beta}\ln|x|, \qquad \eta = y + k\ln|x|;$$
$$w(x,y) = H(\zeta) - \frac{2}{\beta}x, \qquad \zeta = ye^x;$$

где k — произвольная постоянная.

7°. О других решениях см. уравнение 5.4.4.8 при $f(w) = 1$, $g(w) = ae^{\beta w}$.

⊙ *Литература для уравнения* 5.2.4.1: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, pp. 370–371).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(ae^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = be^{\lambda w}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^\lambda x + C_2, \pm C_1^{\lambda-\beta}y + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = u(z), \qquad z = k_1x + k_2y,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$k_1^2 u''_{zz} + ak_2^2(e^{\beta u}u'_z)'_z = be^{\lambda u}.$$

Подстановка $\Theta(u) = (u'_z)^2$ приводит к линейному уравнению первого порядка

$$(k_1^2 + ak_2^2 e^{\beta u})\Theta'_u + 2ak_2^2\beta e^{\beta u}\Theta = 2be^{\lambda u}.$$

3°. Точное решение:

$$w = U(\xi) - \frac{2}{\lambda}\ln|x|, \qquad \xi = yx^{\frac{\beta-\lambda}{\lambda}},$$

где функция $U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2}{\lambda} + \frac{(\beta-\lambda)(\beta-2\lambda)}{\lambda^2}\xi U'_\xi + \frac{(\beta-\lambda)^2}{\lambda^2}\xi^2 U''_{\xi\xi} + (ae^{\beta U}U'_\xi)'_\xi = be^{\lambda U}.$$

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\gamma w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1C_2^\beta x + C_3, \pm C_1C_2^\gamma y + C_4) - 2\ln|C_2|,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$ak_1^2\beta^{-1}e^{\beta w} + bk_2^2\gamma^{-1}e^{\gamma w} = C_1(k_1x + k_2y) + C_2,$$

где C_1, C_2, k_1, k_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y). \tag{1}$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &\varphi''_{xx} + \beta(\varphi'_x)^2 = Abe^{(\gamma-\beta)\varphi},\\ &\psi''_{yy} + \gamma(\psi'_y)^2 = -Aae^{(\beta-\gamma)\psi}, \end{aligned} \tag{2}$$

которые независимы друг от друга; A — произвольная постоянная.

Интегрируя, получим общие решения уравнений (2) в неявном виде

$$\int e^{\beta\varphi}\left[\frac{2Ab}{\beta+\gamma}e^{(\beta+\gamma)\varphi} + B_1\right]^{-1/2} d\varphi = C_1 \pm x,$$
$$\int e^{\gamma\psi}\left[-\frac{2Aa}{\beta+\gamma}e^{(\beta+\gamma)\psi} + B_2\right]^{-1/2} d\psi = C_2 \pm y,$$

где B_1, B_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\beta+\gamma\neq 0$.

Замечание. Частные решения уравнений (2) имеют вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta-\gamma}\ln\left[\frac{Ab(\beta-\gamma)^2}{2(\beta+\gamma)}(x+C_3)^2\right],$$
$$\psi(y) = \frac{1}{\gamma-\beta}\ln\left[-\frac{Aa(\beta-\gamma)^2}{2(\beta+\gamma)}(y+C_4)^2\right],$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные.

4°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = F(z) + \frac{2k}{\beta-\gamma}\ln|x|, \quad z = y|x|^{k-1};$$
$$w(x,y) = G(\xi) + \frac{2}{\beta-\gamma}\ln|x|, \quad \xi = y + k\ln|x|;$$
$$w(x,y) = H(\eta) + 2x, \quad \eta = ye^{(\beta-\gamma)x};$$

где k — произвольная постоянная.

5°. О других точных решениях исходного уравнения см. 5.4.4.8 при $f(w) = ae^{\beta w}$, $g(w) = be^{\gamma w}$.

4. $\displaystyle a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\beta w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + b\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\gamma w}\frac{\partial w}{\partial y}\right) = ce^{\lambda w}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm C_1^{\lambda-\beta}x + C_2, \pm C_1^{\lambda-\gamma}y + C_3) + 2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Существуют точные решения следующих видов:

$$w(x,y) = F(z), \quad z = k_1x + k_2y;$$
$$w(x,y) = G(\xi) + \frac{2}{\beta-\lambda}\ln|x|, \quad \xi = y|x|^{\frac{\lambda-\gamma}{\beta-\lambda}}.$$

5.2.5. Другие уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{b}{y}\frac{\partial w}{\partial y} = ce^{\beta w}.$

Частный случай уравнения 5.4.2.5 при $f(\xi, w) = ce^{\beta w}$.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=ae^{\beta w}\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$

Частный случай уравнения 5.4.2.10 при $f(w)=ae^{\beta w}$.

Подстановка $U=\displaystyle\int\exp\left(-\frac{a}{\beta}e^{\beta w}\right)dw$ приводит к двумерному уравнению Лапласа для функции $U=U(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ae^{\beta w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \qquad a>0.$

1°. Пусть $w(x,t)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_{\pm}=w(C_1x+C_3,\pm C_1C_2^{\beta}y+C_4,)-2\ln|C_2|,$$

где $C_1,\,\ldots,\,C_4$ — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Точные решения:

$$w(x,y)=Axy+By+Cx+D,$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\operatorname{sh}^2(Bx+C)}\right],\qquad w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\right],$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\cos^2(Bx+C)}\right],\qquad w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\right],$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\right],\qquad w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\right],$$
$$w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\right],\qquad w(x,y)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\right],$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Первое решение является вырожденным, остальные решения можно представить в виде суммы функций разных аргументов.

3°. Автомодельное решение:

$$w=w(z),\qquad z=y/x,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(z^2+ae^{\beta w})w''_{zz}+2zw'_z=0.$$

4°. Точное решение:

$$w=U(\zeta)-\frac{2(k+1)}{\beta}\ln|x+C_1|,\qquad \zeta=(y+C_2)(x+C_1)^k,$$

где C_1, C_2, k — произвольные постоянные, а функция $U=U(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k^2\zeta^2+ae^{\beta U})U''_{\zeta\zeta}+k(k-1)\zeta U'_\zeta+\frac{2(k+1)}{\beta}=0.$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ae^{\beta w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=be^{\lambda w}.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(\pm C_1^{\lambda-\beta}y+C_2,\pm C_1^{\lambda}x+C_3)+2\ln|C_1|,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны:

$$w = u(z), \quad z = k_1 x + k_2 y,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $u(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(k_1^2 + a k_2^2 e^{\beta u}) u''_{zz} = b e^{\lambda u}.$$

Его решение можно записать в неявном виде

$$\int \frac{du}{\sqrt{F(u)}} = C_1 \pm z, \qquad F(u) = 2b \int \frac{e^{\lambda u}\, du}{k_1^2 + a k_2^2 e^{\beta u}} + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Точное решение:

$$w = U(\xi) - \frac{2}{\lambda} \ln|x|, \quad \xi = y|x|^{\frac{\beta-\lambda}{\lambda}},$$

где функция $U(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{2}{\lambda} + \frac{(\beta-\lambda)(\beta-2\lambda)}{\lambda^2} \xi U'_\xi + \frac{(\beta-\lambda)^2}{\lambda^2} \xi^2 U''_{\xi\xi} + a e^{\beta U} U''_{\xi\xi} = b e^{\lambda U}.$$

5. $\boldsymbol{a x^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b y^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c e^{\beta w}}$.

Частный случай уравнения 5.4.5.5 при $k = s = 0$, $f(w) = c e^{\beta w}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\Big(C^{\frac{2}{2-n}} x,\, C^{\frac{2}{2-m}} y\Big) + \frac{2}{\beta} \ln C,$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} w'_\xi = B e^{\beta w}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{3nm - 4n - 4m + 4}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3°. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $A \neq 1$ допускает точное решение

$$w(\xi) = -\frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{B\beta}{2(1-A)} \xi^2\right].$$

3.2. При $A = 0$, что соответствует $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$ и $B = \dfrac{c(3n-4)^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{2\lambda^2}{\beta B \cos^2(\lambda\xi + C)}\right] \quad \text{при} \ \ \beta B > 0,$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{2\lambda^2}{\beta B \operatorname{sh}^2(\lambda\xi + C)}\right] \quad \text{при} \ \ \beta B > 0,$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta} \ln\left[\frac{-2\lambda^2}{\beta B \operatorname{ch}^2(\lambda\xi + C)}\right] \quad \text{при} \ \ \beta B < 0,$$

где C, λ — произвольные постоянные.

3.3. При $A = 1$, что соответствует $m = \dfrac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$w(\xi) = \frac{1}{\beta} \ln\Big(-\frac{8C}{\beta B}\Big) - \frac{2}{\beta} \ln(\xi^2 + C), \qquad B = \frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

6. $a e^{\beta x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b e^{\mu y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c e^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 5.4.5.7 при $k = s = 0$, $f(w) = ce^{\beta w}$.

1°. Пусть $w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = w\Big(x - \frac{2}{\beta}\ln C,\; y - \frac{2}{\mu}\ln C\Big) + \frac{2}{\lambda}\ln C,$$

где C — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\big)^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{3}{\xi} w'_\xi = A e^{\lambda w}, \qquad A = \frac{4c}{ab\beta^2\mu^2},$$

которое допускает точное решение

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\Big(-\frac{1}{4}A\lambda\xi^2\Big).$$

7. $a x^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b e^{\beta y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c e^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 5.4.5.9 при $k = s = 0$, $f(w) = ce^{\lambda w}$.

5.3. Уравнения, содержащие другие нелинейности

5.3.1. Уравнения с гиперболическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\,\mathrm{sh}(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = a\,\mathrm{sh}(\beta w)$.

1°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int \left[D + \frac{2a\,\mathrm{ch}(\beta w)}{\beta(A^2 + B^2)}\right]^{-1/2} dw = Ax + By + C,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Решение с центральной симметрией относительно точки с координатами $(-C_1, -C_2)$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} w'_\xi = a\,\mathrm{sh}(\beta w).$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w(x, y) = \frac{4}{\beta}\,\mathrm{Arth}\big[f(x)g(y)\big], \qquad \mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

Здесь функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$ описываются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\big(f'_x\big)^2 = Af^4 + Bf^2 + C,$$
$$\big(g'_y\big)^2 = -Cg^4 + (a\beta - B)g^2 - A,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

4°. Исходное уравнение связано с уравнением (см. 5.3.3.1)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=a\sin(\beta U)$$

преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}=2\sqrt{\frac{a}{\beta}}\sin\bigl(\tfrac{1}{2}\beta U\bigr)\operatorname{ch}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta w\bigr),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}=2\sqrt{\frac{a}{\beta}}\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\beta U\bigr)\operatorname{sh}\bigl(\tfrac{1}{2}\beta w\bigr).$$

⊙ *Литература для уравнения* 5.3.1.1: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), A. S. Ting, H. H. Cheb, Y. C. Lee (1987), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

2. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\operatorname{sh}(\beta w)+b\operatorname{sh}(2\beta w).$

Введем обозначение: $k=\dfrac{a}{2b}$.

Решения типа бегущей волны:

$$w=\pm\frac{1}{\beta}\operatorname{Arch}\frac{1-k\sin z}{\sin z-k},\qquad z=\sqrt{2b\beta(1-k^2)}\,(x\sin C_1+y\cos C_1+C_2)\quad\text{при}\quad |k|<1;$$
$$w=\pm\frac{2}{\beta}\operatorname{Arth}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\operatorname{th}\frac{\xi}{2}\right),\quad \xi=\sqrt{2b\beta(k^2-1)}\,(x\sin C_1+y\cos C_1+C_2)\quad\text{при}\quad |k|>1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a(x^2+y^2)\operatorname{sh}(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w)=a\operatorname{sh}(\beta w)$.

4. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a(x^2+y^2)\operatorname{ch}(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w)=a\operatorname{ch}(\beta w)$.

5. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=ae^{\beta x}\operatorname{sh}(\lambda w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w)=a\operatorname{sh}(\lambda w)$.

6. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\operatorname{ch}^n(\beta w)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$

Частный случай уравнения 5.4.2.10 при $f(w)=a\operatorname{ch}^n(\beta w)$.

7. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(by^m\frac{\partial w}{\partial y}\right)=k\operatorname{sh}(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w)=k\operatorname{sh}(\beta w)$.

8. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=k\operatorname{sh}(\lambda w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w)=k\operatorname{sh}(\lambda w)$.

9. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left[a\operatorname{ch}(\beta w)\frac{\partial w}{\partial y}\right]=0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w)=1$, $g(w)=a\operatorname{ch}(\beta w)$.

5.3.2. Уравнения с логарифмическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha w \ln(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = \alpha w \ln(\beta w)$.

Сделав замену $U = \ln(\beta w)$, получим уравнение с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \alpha U. \tag{1}$$

1°. Уравнение (1) имеет точные решения, квадратичные по независимым переменным:

$$U(x,y) = \tfrac{1}{4}\alpha(x+A)^2 + \tfrac{1}{4}\alpha(y+B)^2 + 1,$$
$$U(x,y) = A(x+B)^2 \pm \sqrt{A\alpha - 4A^2}\,(x+B)(y+C) + (\tfrac{1}{4}\alpha - A)(y+C)^2 + \tfrac{1}{2},$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2°. Уравнение (1) имеет решение типа бегущей волны:

$$U(x,y) = F(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C.$$

Здесь функция $F = F(\xi)$ задается неявно с помощью формулы

$$\xi = \int \left[De^{-2F} + \frac{\alpha}{A^2 + B^2}(F - \tfrac{1}{2}) \right]^{-1/2} dF,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Уравнение (1) имеет решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$U(x,y) = f(x) + g(y).$$

Здесь функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$ задаются неявно с помощью формул

$$A_1 \pm x = \int \bigl(B_1 e^{-2f} + \alpha f - \tfrac{1}{2}\alpha\bigr)^{-1/2} df,$$
$$A_2 \pm y = \int \bigl(B_2 e^{-2g} + \alpha g - \tfrac{1}{2}\alpha\bigr)^{-1/2} dg,$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — произвольные постоянные.

4°. Исходное уравнение имеет точные решения вида

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta} w'_\zeta = \alpha w \ln(\beta w).$$

⊙ *Литература*: J. A. Shercliff (1977), А. Д. Полянин, А. В. Вязьмин, А. И. Журов, Д. А. Казенин (1998).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw \ln w + (bx^n + cy^k)w.$

Частный случай уравнения 5.4.1.8 при $f(x) = bx^n$, $g(y) = cy^k$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha(x^2 + y^2)\ln(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w) = \alpha \ln(\beta w)$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta x}\ln(\lambda w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w) = a\ln(\lambda w)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=axw+bw\ln|w|.$

Это уравнение используется для описания некоторых течений идеальной стратифицированной жидкости. Оно является частным случаем уравнения 5.3.2.6 при $k=a_2=a_0=0$.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\exp\left[-\frac{a}{b}x+\frac{b}{4}(y+C)^2+\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{2}\right],$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов (обобщает решение из п. 1°):

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx}=b\varphi\ln|\varphi|+(ax+C)\varphi,$$
$$\psi''_{yy}=b\psi\ln|\psi|-C\psi,$$

C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994, стр. 183–185).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{k}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}=(a_2x^2+a_1x+a_0)w+bw\ln|w|.$

Уравнение Грэда — Шафранова при $k=-1$, $a_1=a_0=0$. Это уравнение используется для описания некоторых установившихся осесимметричных движений (с закруткой) идеальной жидкости. Оно встречается также в физике плазмы.

1°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx}+\frac{k}{x}\varphi'_x=b\varphi\ln|\varphi|+(a_2x^2+a_1x+a_0+C)\varphi,$$
$$\psi''_{yy}=b\psi\ln|\psi|-C\psi,$$

C — произвольная постоянная.

2°. Точные решения при $a_1=0$:

$$w(x,y)=\exp\left[Ax^2+\frac{b}{4}(y+B)^2+\frac{2}{b}A(k+1)-\frac{a_0}{b}+\frac{1}{2}\right],\quad A=\frac{1}{8}\left(b\pm\sqrt{b^2+16a_2}\,\right),$$

где B — произвольная постоянная.

3°. Точное решение при $a_1=a_2=0$:

$$w=w(r),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

где функция $w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{k+1}{r}w'_r=a_0w+bw\ln|w|.$$

⊙ *Литература*: G. Rosen (1969), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994, стр. 174–182).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{b}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y}=cw^n\ln(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.2.5 при $f(\xi,w)=cw^n\ln(\beta w)$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\ln^n(\beta w)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$

Частный случай уравнения 5.4.2.10 при $f(w)=a\ln^n(\beta w)$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[a \ln^n(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = 0.$

Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w) = 1$, $g(w) = a\ln^n(\beta w)$.

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a_1 x + b_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(a_2 y + b_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = kw\ln(\beta w).$

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} + \frac{b_1}{a_1^2} + \frac{b_2}{a_2^2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\xi w'_\xi)'_\xi = kw\ln(\beta w).$$

2°. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$[(a_1 x + b_1)\varphi'_x]'_x - k\varphi\ln(\beta\varphi) + C\varphi = 0,$$
$$[(a_2 y + b_2)\psi'_y]'_y - k\psi\ln\psi - C\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a_1 x + b_1 y + c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(a_2 x + b_2 y + c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = kw\ln w.$

Частный случай уравнения 5.4.4.2 при $f(w) = kw\ln w$.

12. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = k\ln(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w) = k\ln(\beta w)$.

13. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = kw\ln w.$

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w) = kw\ln w$ и частный случай уравнения 5.4.3.9 при $f(x) = ax^n$, $g(y) = by^m$.

14. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = k\ln(\lambda w).$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w) = k\ln(\lambda w)$.

15. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = kw\ln w.$

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w) = kw\ln w$ и частный случай уравнения 5.4.3.9 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g(y) = be^{\mu y}$.

5.3.3. Уравнения с тригонометрическими нелинейностями

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha\sin(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.1 при $f(w) = \alpha\sin(\beta w)$.

1°. Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = Ax + By + C,$$

где зависимость $w(z)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int\left[D - \frac{2\alpha\cos(\beta w)}{\beta(A^2 + B^2)}\right]^{-1/2} dw = z,$$

A, B, C, D — произвольные постоянные.

2°. Решение с центральной симметрией относительно точки с координатами $(-C_1, -C_2)$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} w'_\xi = \alpha \sin(\beta w).$$

3°. Решение с функциональным разделением переменных при $\alpha = \beta = 1$:

$$w(x,y) = 4 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} A \frac{\operatorname{ch} F}{\operatorname{ch} G} \right),$$

$$F = \frac{\cos A}{\sqrt{1+B^2}}(x - By), \quad G = \frac{\sin A}{\sqrt{1+B^2}}(y + Bx),$$

где A, B — произвольные постоянные.

4°. Решение с функциональным разделением переменных (обобщает решение из п. 3°):

$$w(x,y) = \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg}\bigl[f(x)g(y)\bigr],$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$ определяются автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\bigl(f'_x\bigr)^2 = Af^4 + Bf^2 + C,$$
$$\bigl(g'_y\bigr)^2 = Cg^4 + (\alpha\beta - B)g^2 + A,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

5°. Автопреобразование Беклунда при ($\alpha = \beta = 1$):

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y} + k \sin \frac{\widetilde{w} + w}{2} + \frac{1}{k} \sin \frac{\widetilde{w} - w}{2},$$

$$-i \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} + k \sin \frac{\widetilde{w} + w}{2} - \frac{1}{k} \sin \frac{\widetilde{w} - w}{2},$$

где $i^2 = -1$.

⦿ *Литература для уравнения* 5.3.3.1: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a \sin(\beta w) + b \sin(2\beta w).$

Введем обозначение: $k = \dfrac{a}{2b}$.

Решения типа бегущей волны:

$$w = \pm \frac{2}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{k+1}{\sqrt{1-k^2}} \operatorname{cth} \frac{z}{2} \right), \quad z = \sqrt{2b\beta(1-k^2)}\,(x \sin C_1 + y \cos C_1 + C_2) \quad \text{при} \quad |k| < 1;$$

$$w = \pm \frac{2}{\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{k+1}{\sqrt{k^2-1}} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right), \quad \xi = \sqrt{2b\beta(k^2-1)}\,(x \sin C_1 + y \cos C_1 + C_2) \quad \text{при} \quad |k| > 1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha \cos(\beta w).$

Замена $\beta w = \beta u + \frac{1}{2}\pi$ приводит к уравнению вида 5.3.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\alpha \sin(\beta u).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha(x^2 + y^2) \sin(\beta w).$

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w) = \alpha \sin(\beta w)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha(x^2 + y^2)\cos(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.2 при $f(w) = \alpha\cos(\beta w)$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\beta x}\sin(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 5.4.1.4 при $f(w) = a\sin(\lambda w)$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\cos(\beta w)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$.

Частный случай уравнения 5.4.2.10 при $f(w) = a\cos(\beta w)$.

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = k\sin(\beta w)$.

Частный случай уравнения 5.4.3.1 при $f(w) = k\sin(\beta w)$.

9. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = k\sin(\lambda w)$.

Частный случай уравнения 5.4.3.6 при $f(w) = k\sin(\lambda w)$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[a\cos^n(\beta w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = 0$.

Частный случай уравнения 5.4.4.8 при $f(w) = 1$, $g(w) = a\cos^n(\beta w)$.

5.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

5.4.1. Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x, y, w)$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w)$.

Стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником.

1°. Пусть $w = w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(\pm x + C_1, \pm y + C_2),$$
$$w_2 = w(x\cos\beta - y\sin\beta,\ x\sin\beta + y\cos\beta),$$

где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения (знаки в w_1 выбираются произвольно).

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int\left[C + \frac{2}{A^2 + B^2}F(w)\right]^{-1/2} dw = Ax + By + D, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Решение с центральной симметрией относительно точки с координатами $(-C_1, -C_2)$:

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = \sqrt{(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta}w'_\zeta = f(w).$$

4°. О точных решениях этого уравнения для некоторых зависимостей $f(w)$ см. разделы 5.1.1 и 5.2.1, а также уравнения 5.3.1.1, 5.3.2.1, 5.3.3.1.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=(x^2+y^2)f(w).$

1°. Пусть $w=w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(x\cos\beta-y\sin\beta,\ x\sin\beta+y\cos\beta),$$

где β — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение с центральной симметрией:

$$w=w(r),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

где функция $w=w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{1}{r}w'_r=r^2f(w).$$

3°. Автомодельное решение:

$$w=w(\zeta),\qquad \zeta=xy.$$

Здесь функция $w=w(\zeta)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\zeta\zeta}=f(w),$$

общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int\bigl[C_1+2F(w)\bigr]^{-1/2}dw=C_2\pm\zeta,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Замечание. Указанное решение является неклассическим (неинвариантным) автомодельным решением, поскольку рассматриваемое уравнение неинвариантно относительно преобразований растяжения (масштабирования).

4°. Решение с функциональным разделением переменных:

$$w=w(z),\qquad z=\tfrac{1}{2}(x^2-y^2).$$

Здесь функция $w=w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz}=f(w),$$

общее решение которого можно представить в неявном виде

$$\int\bigl[C_1+2F(w)\bigr]^{-1/2}dw=C_2\pm z,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5°. Преобразование

$$w=U(z,\zeta),\quad z=\tfrac{1}{2}(x^2-y^2),\quad \zeta=xy$$

приводит к более простому уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}=f(U).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 212), А. Д. Полянин (2004*a*).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^k f(w).$

1°. Пусть $w=w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=w(x\cos\beta-y\sin\beta,\ x\sin\beta+y\cos\beta),$$

где β — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение с центральной симметрией:

$$w=w(r),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

где функция $w=w(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{rr}+\frac{1}{r}w'_r=r^{2k}f(w).$$

3°. Пусть $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ Преобразование

$$\begin{array}{lll} z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), & \zeta = xy & \text{при}\ \ k = 1, \\ z = \frac{1}{3}(x^3 - 3xy^2), & \zeta = \frac{1}{3}(3x^2 y - y^3) & \text{при}\ \ k = 2, \\ z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2), & \zeta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{при}\ \ k = -1, \\ z = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}, & \zeta = \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \text{при}\ \ k = -2 \end{array}$$

приводит к более простому уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = f(w). \tag{1}$$

Это уравнение для произвольной зависимости $f = f(w)$ допускает точное решение типа бегущей волны $w = w(Az + B\zeta)$, где A и B — произвольные постоянные, и решение вида $w = w(z^2 + \zeta^2)$.

В общем случае для любого целого $k \neq -1$, преобразование

$$z = \frac{(x + iy)^{k+1} + (x - iy)^{k+1}}{2(k+1)}, \quad \zeta = \frac{(x + iy)^{k+1} - (x - iy)^{k+1}}{2(k+1)i}, \quad i^2 = -1 \tag{2}$$

приводит к уравнению (1). Из формул (2) следует связь:

$$z^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(k+1)^2}(x^2 + y^2)^{k+1}.$$

4°. Пусть k — произвольная постоянная ($k \neq -1$). Преобразование

$$z = \frac{1}{k+1} r^{k+1} \cos\bigl[(k+1)\varphi\bigr], \quad \zeta = \frac{1}{k+1} r^{k+1} \sin\bigl[(k+1)\varphi\bigr], \tag{3}$$

где $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, приводит к более простому уравнению (1). При $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ преобразование (3) совпадает с преобразованием (2).

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 212–213).

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{\beta x} f(w).$

Преобразование

$$w = W(u, v), \quad u = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\beta y\bigr), \quad v = \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\beta x\bigr)\sin\bigl(\tfrac{1}{2}\beta y\bigr)$$

приводит к более простому уравнению вида 5.4.1.1:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 4\beta^{-2} f(W).$$

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 213).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{ax - by} f(w).$

Представим показатель экспоненты в следующем виде:

$$ax - by = \beta(x\cos\sigma - y\sin\sigma); \quad \beta = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\sigma = a/\beta, \quad \sin\sigma = b/\beta.$$

Преобразование

$$\xi = x\cos\sigma - y\sin\sigma, \quad \eta = x\sin\sigma + y\cos\sigma,$$

приводит к уравнению вида 5.4.1.4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = e^{\beta\xi} f(w).$$

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y)e^{\beta w}.$

Пусть $f(x, y) = \varepsilon |F(z)|^2$, где $F = F(z)$ — заданная аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$.

1°. Общее решение:

$$w(x,y) = -\frac{2}{\beta}\ln\frac{|F(z)||1-2\beta\varepsilon\Phi(z)\overline{\Phi(z)}\,|}{4|\Phi'_z(z)|},$$

где $\Phi = \Phi(z)$ — произвольная аналитическая (голоморфная) функция комплексного переменного $z = x + iy$ с отличной от нуля производной, чертой обозначена комплексно-сопряженная величина.

2°. Другое представление общего решения при $\beta = -2$, $\varepsilon = \pm 1$:

$$w(x,y) = \ln\bigl(|\varphi(z)|^2 + \varepsilon|\psi(z)|^2\bigr).$$

Здесь голоморфные функции $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi = \psi(z)$ задаются формулами

$$\varphi^2 = C\Phi\exp\biggl(\frac{a}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{F}{\Phi}\,dz\biggr), \qquad \psi^2 = \frac{\Phi}{C}\exp\biggl(-\frac{a}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{F}{\Phi}\,dz\biggr),$$

где $|a| = 1$, $C \neq 0$ — любое, z_0 — произвольная точка, $\Phi = \Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция, удовлетворяющая условию, что в любой точке $z = z_*$, в которой $\Phi(z_*) = 0$, должно быть $\Phi'(z_*) = \pm\frac{1}{2}aF(z_*)$. Последнее условие, в частности, означает, что функция Φ может иметь только простые нули.

⊙ *Литература*: И. Х. Сабитов (2001).

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw\ln w + f(x)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{xx} - \bigl[a\ln\varphi + f(x) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$\psi''_{yy} - \bigl(a\ln\psi - C\bigr)\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw\ln w + \bigl[f(x) + g(y)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{xx} - \bigl[a\ln\varphi + f(x) + C\bigr]\varphi = 0,$$
$$\psi''_{yy} - \bigl[a\ln\psi + g(y) - C\bigr]\psi = 0,$$

C — произвольная постоянная.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)w\ln w + \bigl[af(x)y + g(x)\bigr]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = e^{-ay}\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\varphi''_{xx} = f(x)\varphi\ln\varphi + \bigl[g(x) - a^2\bigr]\varphi.$$

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(ax + by, w).$

Точное решение:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = ax + by,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a^2 + b^2)w''_{\xi\xi} = f(\xi, w).$$

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x^2 + y^2, w)$.

1°. Пусть $w = w(x, y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция
$$w_1 = w(x\cos\beta - y\sin\beta,\ x\sin\beta + y\cos\beta),$$
где C_1, C_2, β — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Точное решение с центральной симметрией:
$$w = w(\xi), \qquad \xi = \bigl(x^2 + y^2\bigr)^{1/2},$$
где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$w''_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} w'_\xi = f(\xi^2, w).$$

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) f(xy,\ w)$.

1°. Автомодельное решение:
$$w = w(\zeta), \qquad \zeta = xy,$$
где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$w''_{\zeta\zeta} = f(\zeta, w).$$

2°. Преобразование
$$w = U(z, \zeta), \quad z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$
приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = f(\zeta, U).$$

⦿ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 215).

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) f(x^2 - y^2,\ w)$.

1°. Решение с функциональным разделением переменных:
$$w = w(z), \qquad z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2),$$
где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$w''_{zz} = f(2z, w).$$

2°. Преобразование
$$w = U(z, \zeta), \quad z = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \zeta = xy$$
приводит к более простому уравнению
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = f(2z, U).$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f\bigl(w + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + B_1x + B_2y\bigr)$.

Замена $U = w + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2 + B_1x + B_2y$ приводит к уравнению вида 5.4.1.1:
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(U) + 2A_{11} + 2A_{22}.$$

5.4.2. Уравнения вида $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\Bigl(x, y, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)$

1. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w)$.

Это уравнение описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных (анизотропных) средах. Здесь a и b — главные коэффициенты температуропроводности, $f = f(w)$ — кинетическая функция, которая задает закон тепловыделения.

Преобразование $\xi = x/\sqrt{a}$, $\eta = y/\sqrt{b}$ приводит к уравнению вида 5.4.1.1:
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = f(w).$$

2. $\boldsymbol{ax\dfrac{\partial w}{\partial x}+ay\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-f(w).}$

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\qquad z=k_1x+k_2y,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$azw'_z=(k_1^2+k_2^2)w''_{zz}-f(w).$$

Замечание. Указанное решение является неклассическим (неинвариантным) решением типа бегущей волны, поскольку рассматриваемое уравнение неинвариантно относительно преобразований сдвига.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004*a*).

3. $\boldsymbol{(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-f(w).}$

Это уравнение описывает стационарный массоперенос с объемной химической реакцией в поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(z),\qquad z=a_2x+(k-a_1)y,$$

где k — корень квадратного уравнения

$$k^2-(a_1+b_2)k+a_1b_2-a_2b_1=0,$$

а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[kz+a_2c_1+(k-a_1)c_2\bigr]w'_z=\bigl[a_2^2+(k-a_1)^2\bigr]w''_{zz}-f(w).$$

Замечание. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1+b_2=0$.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 387).

4. $\boldsymbol{a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+cx\dfrac{\partial w}{\partial x}-cy\dfrac{\partial w}{\partial y}=(bx^2+ay^2)f(w).}$

Точное решение:

$$w=w(z),\qquad z=xy,$$

где функция $w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{zz}=f(w).$$

5. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{b}{y}\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(x^2+y^2,w).}$

Точное решение с центральной симметрией:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\bigl(x^2+y^2\bigr)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{a+b+1}{\xi}w'_\xi=f(\xi^2,w).$$

6. $\boldsymbol{a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+f_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}+kw\ln w+\bigl[g_1(x)+g_2(y)\bigr]w.}$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx}=f_1(x)\varphi'_x+k\varphi\ln\varphi+\bigl[g_1(x)+C\bigr]\varphi,$$
$$b\psi''_{yy}=f_2(y)\psi'_y+k\psi\ln\psi+\bigl[g_2(y)-C\bigr]\psi,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + g(x)w + h(x).$

Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x), \qquad (1)$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (аргументы у функций f, g, h не указываются):

$$\varphi''_{xx} = 4f\varphi^2 + g\varphi, \qquad (2)$$
$$\psi''_{xx} = (4f\varphi + g)\psi, \qquad (3)$$
$$\chi''_{xx} = g\chi + f\psi^2 + h - 2a\varphi. \qquad (4)$$

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(x)$ нелинейного уравнения (2), то функции $\psi = \psi(x)$ и $\chi = \chi(x)$ определяются последовательно из уравнений (3) и (4), которые линейны относительно ψ и χ.

Из сопоставления уравнений (2) и (3) видно, что уравнение (3) имеет частное решение $\psi = \varphi(x)$. Поэтому его общее решение дается формулой (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$\psi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\varphi(x)\int \frac{dx}{\varphi^2(x)}, \qquad \varphi \not\equiv 0.$$

Отметим, что уравнение (2) имеет тривиальное частное решение $\varphi(x) \equiv 0$, которому соответствует решение (1), линейное по переменной y. Если функции f и g пропорциональны, то частное решение уравнения (2) определяется формулой $\varphi = -\frac{1}{4}g/f$ ($\varphi = \mathrm{const}$).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + bf(x)w^2 + g(x)w + h(x).$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\exp\bigl(\pm y\sqrt{-b}\bigr), \qquad b<0, \qquad (1)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (аргументы у функций f, g, h не указываются):

$$\varphi''_{xx} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \qquad (2)$$
$$\psi''_{xx} = (2bf\varphi + g + ab)\psi. \qquad (3)$$

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(x)$ уравнения (2), то функцию $\psi = \psi(x)$ можно получить путем решения уравнения (3), которое линейно относительно ψ.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\ \beta = \mathrm{const}),$$

то частные решения уравнения (2) имеют вид

$$\varphi = k_1, \quad \varphi = k_2, \qquad (4)$$

где k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2 + \alpha k + \beta = 0$. В этом случае уравнение (3) записывается так:

$$\psi''_{xx} = \bigl[(2bk_n + \alpha)f + ab\bigr]\psi, \qquad n = 1,\ 2. \qquad (5)$$

В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*) приведено много точных решений линейного уравнения (5) для различных зависимостей $f = f(x)$. В частном случае $f = \mathrm{const}$ общее решение уравнения (5) является суммой экспонент (или синуса и косинуса).

2°. Решение с обобщенным разделением переменных (обобщает решение из п. 1°):

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\bigl[A\exp\bigl(y\sqrt{-b}\bigr) + B\exp\bigl(-y\sqrt{-b}\bigr)\bigr], \qquad b<0, \qquad (6)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx} = bf\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr) + g\varphi + h,$$
$$\psi''_{xx} = 2bf\varphi\psi + g\psi + ab\psi.$$

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{ch}\bigl(y\sqrt{-b}\bigr), \quad A = \tfrac{1}{2}, \quad B = \tfrac{1}{2};$$
$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{sh}\bigl(y\sqrt{-b}\bigr), \quad A = \tfrac{1}{2}, \quad B = -\tfrac{1}{2}.$$

3°. Решение с обобщенным разделением переменных (c — произвольная постоянная):

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\cos\bigl(y\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b > 0,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx} = bf\bigl(\varphi^2 + \psi^2\bigr) + g\varphi + h,$$
$$\psi''_{xx} = 2bf\varphi\psi + g\psi + ab\psi.$$

⊙ *Литература*: V. A. Galaktionov (1995), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 488).

9. $$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + g(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[h_1(x)y + h_0(x)\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + p(x)w + q_2(x)y^2 + q_1(x)y + q_0(x).$$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

10. $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$$

Замена

$$U = \int \frac{dw}{F(w)}, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\left[\int f(w)\,dw\right],$$

приводит к двумерному уравнению Лапласа для функции $U = U(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

11. $$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^n + g(y)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^m + kw.$$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx} - f(x)\bigl(\varphi'_x\bigr)^n - k\varphi = C,$$
$$b\psi''_{yy} - g(y)\bigl(\psi'_y\bigr)^m - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

12. $$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^n + f_2(y)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^m + g_1(x)\frac{\partial w}{\partial x} + g_2(y)\frac{\partial w}{\partial y} + h_1(x) + h_2(y) + kw.$$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx} - f_1(x)\bigl(\varphi'_x\bigr)^n - g_1(x)\varphi'_x - k\varphi - h_1(x) = C,$$
$$b\psi''_{yy} - f_2(y)\bigl(\psi'_y\bigr)^m - g_2(y)\psi'_y - k\psi - h_2(y) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (a_1 x + b_1 y + c_1)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k + {}$

$$+ (a_2 x + b_2 y + c_2)\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^k + f\Big(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y}\Big).$$

Решения ищем в виде бегущей волны

$$w = w(z), \qquad z = Ax + By + C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1 A^k + a_2 B^k = A, \tag{1}$$
$$b_1 A^k + b_2 B^k = B, \tag{2}$$
$$c_1 A^k + c_2 B^k = C. \tag{3}$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из последнего уравнения (3) определяется C. Искомая функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(A^2 + B^2) w''_{zz} = z(w'_z)^k + f\big(w,\ Aw'_z,\ Bw'_z\big).$$

14. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1\Big(x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f_2\Big(y,\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + kw.$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\varphi''_{xx} - f_1\big(x, \varphi'_x\big) - k\varphi = C,$$
$$b\psi''_{yy} - f_2\big(y, \psi'_y\big) - k\psi = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

15. $a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f_1\Big(x,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)w + f_2\Big(y,\ \dfrac{1}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a\frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} - f_1\Big(x,\ \frac{\varphi'_x}{\varphi}\Big) = C,$$
$$b\frac{\psi''_{yy}}{\psi} - f_2\Big(y,\ \frac{\psi'_y}{\psi}\Big) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

5.4.3. Уравнения тепло- и массопереноса вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] = h(w)$

► *Уравнения этого вида описывает стационарные процессы тепло- и массопереноса и горения в неоднородных (анизотропных) средах. Здесь $f = f(x)$ и $g = g(y)$ — зависимости главных коэффициентов температуропроводности от пространственных координат, $h = h(w)$ — кинетическая функция (функция источника), которая задает закон тепловыделения или теплопоглощения. В данном разделе не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной пространственной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.*

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) = f(w).$

1°. Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} w'_{\xi} = Bf(w), \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

При $m = 4/n$ из (1) получаем семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(w)$:

$$\int \left[C_1 + \frac{2n^2}{ab(2-n)^4} F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2°. Подстановка $\zeta = \xi^{1-A}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta} = \frac{B}{(1-A)^2} \zeta^{\frac{2A}{1-A}} f(w). \tag{2}$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f = f(w)$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 485).

2. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x+c)^n \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y+s)^m \frac{\partial w}{\partial y}\right] = f(w).$

Преобразование $\zeta = x + c$, $\eta = y + s$ приводит к уравнению вида 5.4.3.1:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a\zeta^n \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b\eta^m \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = f(w).$$

3. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[a\bigl(|x| + c\bigr)^n \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[b\bigl(|y| + s\bigr)^m \frac{\partial w}{\partial y}\right] = f(w).$

Преобразование $\zeta = |x| + c$, $\eta = |y| + s$ приводит к уравнению вида 5.4.3.1:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a\zeta^n \frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b\eta^m \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = f(w).$$

4. $\displaystyle a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y} \frac{\partial w}{\partial y}\right) = f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных при $\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \bigl[b\mu^2(x + C_1)^2 + 4ae^{-\mu y}\bigr]^{1/2},$$

где C_1 — произвольная постоянная, а функция $w(\xi)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi} = \frac{1}{ab\mu^2} f(w).$$

Общее решение этого уравнения для произвольной кинетической функции $f = f(w)$ определяется неявно с помощью формул

$$\int \left[C_2 + \frac{2}{ab\mu^2} F(w)\right]^{-1/2} dw = C_3 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_2, C_3 — произвольные постоянные.

5. $\displaystyle a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu|y|} \frac{\partial w}{\partial y}\right) = f(w).$

Замена $\zeta = |y|$ приводит к уравнению вида 5.4.3.4.

6. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\mu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left(b\mu^2e^{-\beta x}+a\beta^2e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}w'_{\xi}=Af(w),\qquad A=\frac{4}{ab\beta^2\mu^2}. \tag{1}$$

Подстановка $\zeta=\xi^2$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\zeta\zeta}=\tfrac{1}{4}A\zeta^{-1}f(w),$$

решения которого при $f(w)=(kw+s)^{-1}$ и $f(w)=(kw+s)^{-2}$ $(k,s=\mathrm{const})$ приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 487).

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\beta|x|}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu|y|}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Преобразование $\zeta=|x|$, $\eta=|y|$ приводит к уравнению вида 5.4.3.6.

8. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^{n}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных при $n\neq 2$, $\mu\neq 0$:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=\left[b\mu^2x^{2-n}+a(2-n)^2e^{-\mu y}\right]^{1/2},$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$w''_{\xi\xi}+\frac{n}{2-n}\,\frac{1}{\xi}w'_{\xi}=\frac{4}{ab\mu^2(2-n)^2}f(w).$$

9. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=kw\ln w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$[f(x)\varphi'_x]'_x=k\varphi\ln\varphi+C\varphi,$$
$$[g(y)\psi'_y]'_y=k\psi\ln\psi-C\psi,$$

C — произвольная постоянная.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 221).

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=aw\ln w+bw.$

Частный случай уравнения 5.4.4.6 при $k=a$, $h_1(x)=b$, $h_2(y)=0$.

5.4.4. Уравнения вида $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(x,y,w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y,w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=h(x,y,w)$

1. $(ay+c)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bx+s)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(w).$

Это уравнение можно записать в дивергентном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(ay+c)\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(bx+s)\frac{\partial w}{\partial y}\right]=f(w).$$

При $ab\neq 0$ существует точное решение вида

$$w=w(\xi),\qquad \xi=(a^2b)^{-1/3}x+(ab^2)^{-1/3}y+(a^2b)^{-2/3}c+(ab^2)^{-2/3}s,$$

где функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi}=f(w).$$

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(a_1x+b_1y+c_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(a_2x+b_2y+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=f(w).$

Точные решения ищем в виде бегущей волны

$$w=w(z),\qquad z=Ax+By+C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^2+a_2B^2=A, \tag{1}$$

$$b_1A^2+b_2B^2=B, \tag{2}$$

$$c_1A^2+c_2B^2=C. \tag{3}$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из последнего уравнения (3) определяется C. Искомая функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$zw''_{zz}+(Aa_1+Bb_2)w'_z=f(w).$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\left[f(x)w+g(x)\right]\dfrac{\partial w}{\partial y}\right\}=0.$

1°. Решение с обобщенным разделением переменных, линейное по переменной y:

$$w(x,y)=(Ax+B)y-\int_{x_0}^{x}(x-t)(At+B)^2f(t)\,dt+C_1x+C_2,$$

где A, B, C_1, C_2, x_0 — произвольные постоянные. Это решение является вырожденным.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по переменной y:

$$w(x,y)=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x),$$

где функции $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(x)$, $\chi=\chi(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi''_{xx}+6f\varphi^2=0, \tag{1}$$

$$\psi''_{xx}+6f\varphi\psi=0, \tag{2}$$

$$\chi''_{xx}+2f\varphi\chi+2\varphi g+f\psi^2=0. \tag{3}$$

Нелинейное уравнение (1) рассматривается независимо от других уравнений. При $f\equiv\mathrm{const}$ его решение можно выразить с помощью эллиптических интегралов. При $f=ae^{\lambda x}$ частное решение уравнения (1) имеет вид $\varphi=-\frac{\lambda^2}{6a}e^{-\lambda x}$. Уравнения (2) и (3) можно решать последовательно (они являются линейными уравнениями относительно искомых функций). Так как частное решение уравнения (2) имеет вид $\psi=\varphi(x)$, то соответствующее общее решение дается формулой (см. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*):

$$\psi(x)=C_1\varphi(x)+C_2\varphi(x)\int\frac{dx}{\varphi^2(x)},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{f(y)}{\sqrt{w+a}}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]=0.$

Замена $U=\sqrt{w+a}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[f(y)\frac{\partial U}{\partial y}\right]=0,$$

которое имеет решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по x:

$$U(x,y)=\varphi(y)x+\psi(y),$$

$$U(x,y)=\varphi(y)x^2+\psi(y)x+\chi(y).$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=w(C_1x+C_2,\pm C_1y+C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Вырожденное решение: $w = C_1xy + C_2x + C_3y + C_4$.

3°. Автомодельное решение:

$$w = w(z), \quad z = y/x,$$

где функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[z^2 + f(w)]w''_{zz} + 2zw'_z = 0.$$

6. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = kw\ln w + \big[h_1(x) + h_2(y)\big]w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y) = \exp\big[\varphi(x) + \psi(y)\big].$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$e^{-\varphi}[fe^{\varphi}\varphi'_x]'_x - k\varphi - h_1(x) = C,$$
$$e^{-\psi}[ge^{\psi}\psi'_y]'_y - k\psi - h_2(y) = -C,$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\big[g(x)w + h(x)\big]\frac{\partial w}{\partial y}\right\} = 0.$

Существует точные решения с обобщенным разделением переменных, линейные и квадратичные по y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y + \psi(x),$$
$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

8. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0.$

Стационарное уравнение анизотропного тепло- и массопереноса, $f(w)$ и $g(w)$ — главные коэффициенты теплопроводности.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1 = w(C_1x + C_2, \pm C_1y + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Решение типа бегущей волны в неявном виде:

$$\int\big[A^2f(w) + B^2g(w)\big]\,dw = C_1(Ax + By) + C_2,$$

где A, B, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение (α, β — произвольные постоянные):

$$w = w(\zeta), \quad \zeta = \frac{x+\alpha}{y+\beta},$$

где функция $w(\zeta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w)w'_\zeta]'_\zeta + [\zeta^2g(w)w'_\zeta]'_\zeta = 0. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1) и принимая w за независимую переменную, для функции $\zeta = \zeta(w)$ получим уравнение Риккати (C — произвольная постоянная):

$$C\zeta'_w = g(w)\zeta^2 + f(w), \qquad (2)$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f = f(w)$ и $g = g(w)$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (2001 *a*).

4°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = C_1v^2 + C_2v - \int f(w)[2C_1G(w) + C_3]\,dw + C_4,$$
$$y = -[2C_1G(w) + C_3]v - C_2G(w) + C_5, \quad G(w) = \int g(w)\,dw,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ — произвольные постоянные.

5°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1F(w) + C_2]v + C_3F(w) + C_4, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$y = \frac{1}{2}C_1v^2 + C_3v - \int g(w)[C_1F(w) + C_2]\,dw + C_5.$$

6°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1F(w) + C_2]v^2 + C_3F(w) + C_4 - 2\int\left\{f(w)\int g(w)[C_1F(w) + C_2]\,dw\right\}dw,$$
$$y = \frac{1}{3}C_1v^3 + C_3v - 2v\int g(w)[C_1F(w) + C_2]\,dw + C_5.$$

7°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = (C_1e^{\lambda v} + C_2e^{-\lambda v})H(w) + C_3,$$
$$y = \frac{1}{\lambda}(C_1e^{\lambda v} - C_2e^{-\lambda v})\frac{1}{f(w)}H'_w(w) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные, функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[H] + \lambda^2 g(w)H = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_f$ определяется выражением

$$\mathbf{L}_f[\varphi] \equiv \frac{d}{dw}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{d\varphi}{dw}\right]. \tag{3}$$

8°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [C_1\sin(\lambda v) + C_2\cos(\lambda v)]Z(w) + C_3,$$
$$y = \frac{1}{\lambda}[C_2\sin(\lambda v) - C_1\cos(\lambda v)]\frac{1}{f(w)}Z'_w(w) + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4, \lambda$ — произвольные постоянные, а функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_f[Z] - \lambda^2 g(w)Z = 0$.

9°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = [2C_1F(w) + C_3]v + C_2F(w) + C_5, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$y = C_1v^2 + C_2v - \int g(w)[2C_1F(w) + C_3]\,dw + C_4.$$

10°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{2}C_1v^2 + C_3v - \int f(w)[C_1G(w) + C_2]\,dw + C_5,$$
$$y = -[C_1G(w) + C_2]v - C_3G(w) + C_4, \quad G(w) = \int g(w)\,dw.$$

11°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{3}C_1v^3 + C_3v - 2v\int f(w)[C_1G(w) + C_2]\,dw + C_5,$$
$$y = -[C_1G(w) + C_2]v^2 - C_3G(w) + C_4 + 2\int\left\{g(w)\int f(w)[C_1G(w) + C_2]\,dw\right\}dw.$$

12°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = -\frac{1}{\lambda}(C_1e^{\lambda v} - C_2e^{-\lambda v})\frac{1}{g(w)}H'_w(w) + C_3,$$
$$y = (C_1e^{\lambda v} + C_2e^{-\lambda v})H(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, функция $H = H(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_g[H] + \lambda^2 f(w)H = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_g$ определяется выражением (3) при $f(w) = g(w)$.

13°. Точное решение в параметрической форме:

$$x = -\frac{1}{\lambda}[C_2 \sin(\lambda v) - C_1 \cos(\lambda v)]\frac{1}{g(w)}Z'_w(w) + C_3,$$
$$y = [C_1 \sin(\lambda v) + C_2 \cos(\lambda v)]Z(w) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные, функция $Z = Z(w)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\mathbf{L}_g[Z] - \lambda^2 f(w)Z = 0$, а дифференциальный оператор $\mathbf{L}_g$ определяется выражением (3) при $f(w) = g(w)$.

14°. Исходное уравнение можно представить в виде системы уравнений

$$f(w)\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -g(w)\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Преобразование годографа

$$x = x(w, v), \quad y = y(w, v), \tag{5}$$

(w, v принимаются за независимые переменные, а x, y — за зависимые переменные) приводит (4) к линейной системе

$$f(w)\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad -g(w)\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}. \tag{6}$$

Исключая отсюда y, для функции $x = x(w, v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}\right] + g(w)\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{7}$$

Аналогичным образом из системы (6) для функции $y = y(w, v)$ имеем другое линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{1}{g(w)}\frac{\partial y}{\partial w}\right] + f(w)\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0. \tag{8}$$

Процедура построения точных решений исходного нелинейного уравнения состоит из двух этапов. Сначала строится точное решение линейного уравнения (7) для $x = x(w, v)$. Затем это решение подставляется в линейную систему (6), откуда находится функция $y = y(w, v)$ в виде

$$y = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{f(w)}\frac{\partial x}{\partial w}(w, \xi)\, d\xi - \int_{w_0}^{w} g(\eta)\frac{\partial x}{\partial v}(\eta, v_0)\, d\eta, \tag{9}$$

где w_0 и v_0 — любые. Полученные указанным способом выражения вида (5) будут давать точное решение исходного уравнения в параметрической форме.

Аналогичным образом сначала можно строить точное решение линейного уравнения (8) для $y = y(w, v)$, а затем из (6) определить функцию $x = x(w, v)$ в виде

$$x = -\int_{v_0}^{v} \frac{1}{g(w)}\frac{\partial y}{\partial w}(w, \xi)\, d\xi + \int_{w_0}^{w} f(\eta)\frac{\partial y}{\partial v}(\eta, v_0)\, d\eta,$$

где w_0 и v_0 — любые.

Замечание 1. Пусть $x = \Phi(w, v; f, g)$ — решение уравнения (7). Тогда $y = \Phi(w, v; g, f)$ будет решением уравнения (8).

Замечание 2. Пусть $x = \Phi(w, v; f, g)$, $y = \Psi(w, v; f, g)$ — решение системы уравнений (6). Тогда функции $x = \Psi(w, v; -g, -f)$, $y = \Phi(w, v; -g, -f)$ также будут давать решение этой системы.

15°. Точные решения уравнения (7), содержащие четные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(w)v^{2k}, \tag{10}$$

где функции $\varphi_k = \varphi_k(w)$ определены рекуррентными формулами

$$\varphi_n(w) = A_n F(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\, dw,$$
$$\varphi_{k-1}(w) = A_k F(w) + B_k - 2k(2k-1)\int f(w)\left\{\int g(w)\varphi_k(w)\, dw\right\} dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k = n, \ldots, 1$).

Зависимость $y = y(w, v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (10) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

16°. Точные решения уравнения (7), содержащие нечетные степени v:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(w) v^{2k+1}, \tag{11}$$

где функции $\psi_k = \psi_k(w)$ определены рекуррентными формулами

$$\psi_n(w) = A_n F(w) + B_n, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$
$$\psi_{k-1}(w) = A_k F(w) + B_k - 2k(2k+1) \int f(w) \left\{ \int g(w) \psi_k(w)\,dw \right\} dw,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k = n, \dots, 1$).

Зависимость $y = y(w, v)$ определяется по формуле (9) и вместе с выражением (11) дает решение исходного нелинейного уравнения в параметрической форме.

17°. В частном случае $g(w) = k^2 f(w)$ преобразование

$$\bar{x} = kx, \quad u = \int f(w)\,dw$$

приводит к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

О решениях этого линейного уравнения см. книги А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), А. Д. Полянина (2001 *b*).

⊙ *Литература для уравнения* 5.4.4.8: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002, стр. 223–226).

9. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = ax\frac{\partial w}{\partial x} + ay\frac{\partial w}{\partial y} - h(w).$

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = k_1 x + k_2 y,$$

где k_1, k_2 — произвольные постоянные, а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\varphi(w) w'_z]'_z = azw'_z - h(w), \qquad \varphi(w) = k_1^2 f(w) + k_2^2 g(w).$$

Замечание. Указанное решение является неклассическим (неинвариантным) решением типа бегущей волны, поскольку рассматриваемое уравнение неинвариантно относительно преобразований сдвига.

⊙ *Литература*: А. Д. Полянин (2004 *a*).

10. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = (a_1 x + b_1 y + c_1)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2 x + b_2 y + c_2)\frac{\partial w}{\partial y}.$

Это уравнение описывает стационарный анизотропный тепло- и массоперенос в поступательно-сдвиговом потоке жидкости.

Решение типа бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = a_2 x + (k - a_1) y,$$

где k — корень квадратного уравнения

$$k^2 - (a_1 + b_2)k + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

а функция $w(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[\varphi(w) w'_z]'_z = [kz + a_2 c_1 + (k - a_1) c_2] w'_z, \qquad \varphi(w) = a_2^2 f(w) + (k - a_1)^2 g(w).$$

Замечание 1. В правую часть уравнения можно добавить произвольную функцию $h(w)$.

Замечание 2. В случае несжимаемой жидкости коэффициенты уравнения должны удовлетворять условию $a_1 + b_2 = 0$.

⊙ *Литература*: A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004, p. 399).

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\big[a_1x+b_1y+f(w)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}\right\}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\big[a_2x+b_2y+g(w)\big]\dfrac{\partial w}{\partial y}\right\}=0.$

Точные решения ищем в виде бегущей волны

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^2+a_2B^2=A,\qquad b_1A^2+b_2B^2=B.$$

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (C — произвольная постоянная):

$$\big[\xi+A^2f(w)+B^2g(w)\big]w'_\xi=C.$$

Принимая w за независимую переменную, для функции $\xi=\xi(w)$ получим линейное уравнение первого порядка

$$C\xi'_w=\xi+A^2f(w)+B^2g(w).$$

5.4.5. Другие уравнения

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(y)w^5.$

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функции

$$w_1=C_1w\big(\pm C_1^2x+C_2,\,y\big),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, также будут решениями этого уравнения.

2°. Пусть $u=u(y)$ — любое нетривиальное частное решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{yy}-f(y)u=0. \qquad (1)$$

Преобразование

$$\zeta=\int\frac{dy}{u^2},\quad \xi=\frac{w}{u}$$

сильно упрощает исходное уравнение и приводит его к виду

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+a\xi^4\frac{\partial^2\xi}{\partial\zeta^2}=0. \qquad (2)$$

Это уравнение не зависит от функции f (явно) и имеет вырожденное решение

$$\xi(x,\zeta)=Ax\zeta+B\zeta+Cx+D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Кроме того, уравнение (2) имеет точные решения, например, следующих видов:

$\xi(x,\zeta)=\xi(kx+\lambda\zeta)$ (решение типа бегущей волны),

$\xi(x,\zeta)=g(x)h(\zeta)$ (решение в виде произведения функций разных аргументов),

$\xi(x,\zeta)=x^\beta\varphi(\eta),\ \eta=\zeta x^{-2\beta-1}$ (автомодельное решение),

где k, λ, β — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 489–490).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial}{\partial y}\left(w^n\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=f(y)w^{n+1}+g(x)w.$

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w=\varphi(x)\psi(y),$$

где функции $\psi=\psi(y)$ и $\varphi=\varphi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (C — произвольная постоянная)

$$\varphi''_{xx}-g(x)\varphi+C\varphi^{n+1}=0,$$
$$a(\psi^n\psi'_y)'_y-f(y)\psi^{n+1}-C\psi=0.$$

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = f(y)e^{\lambda w} + g(x).$

Точное решение в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = \varphi(x) + \psi(y),$$

где функции $\psi = \psi(y)$ и $\varphi = \varphi(x)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\varphi''_{xx} - g(x) + Ce^{\lambda\varphi} = 0,$$
$$a(e^{\lambda\psi}\psi'_y)'_y - f(y)e^{\lambda\psi} - C = 0,$$

C — произвольная постоянная. Второе уравнение заменой $U = e^{\lambda\psi}$ приводится к линейному уравнению $aU''_{yy} - \lambda f(y)U - \lambda C = 0$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[f_3(x)w + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)\big]\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = g_2(x)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 +$

$+ g_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[h_1(x)y + h_0(x)\big]\dfrac{\partial w}{\partial y} + s_3(x)w + s_2(x)y^2 + s_1(x)y + s_0(x).$

Существует точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по y:

$$w(x,y) = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

5. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + sy^{m-1}\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных при $n \neq 2$, $m \neq 2$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Aw''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}w'_\xi = f(w), \qquad (1)$$

где

$$A = \tfrac{1}{4}ab(2-n)^2(2-m)^2,$$
$$B = \tfrac{1}{4}(2-n)(2-m)\big[ab(3nm - 4n - 4m + 4) + 2bk(2-m) + 2as(2-n)\big].$$

Решение уравнения (1) в неявном виде при $B = 0$ и произвольной $f = f(w)$:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{A}F(w)\right]^{-1/2}dw = C_2 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 486–487).

6. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kx^{n-1}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + sy^{m-1}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = g(w).$

При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существует точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\big]^{1/2}.$$

7. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ke^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + se^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных при $\beta\mu \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big(b\mu^2e^{-\beta x} + a\beta^2e^{-\mu y}\big)^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Aw''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}w'_\xi = f(w), \qquad (1)$$

где

$$A = \tfrac{1}{4}ab\beta^2\mu^2, \quad B = \tfrac{1}{4}\beta\mu(3ab\beta\mu - 2bk\mu - 2as\beta).$$

Решение уравнения (1) в неявном виде при $B = 0$ и произвольной $f = f(w)$:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{A}F(w)\right]^{-1/2}dw = C_2 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ke^{\beta x} f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + se^{\mu y} f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = g(w).$

При $\beta\mu \neq 0$ существует точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \bigl(b\mu^2 e^{-\beta x} + a\beta^2 e^{-\mu y}\bigr)^{1/2}.$$

9. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + se^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(w).$

Решение с функциональным разделением переменных $n \neq 2$, $\beta \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \bigl[b\beta^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 e^{-\beta y}\bigr]^{1/2}.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Aw''_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}w'_\xi = f(w), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac14 ab\beta^2(2-n)^2, \quad B = \tfrac14\beta(2-n)\bigl[ab\beta(4-3n) + 2bk\beta - 2as(2-n)\bigr].$$

Решение уравнения (1) в неявном виде при $B = 0$ и произвольной $f = f(w)$:

$$\int\left[C_1 + \frac{2}{A}F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \xi, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

⊙ *Литература*: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996, стр. 488).

10. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kx^{n-1} f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + se^{\beta y} f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = g(w).$

При $n \neq 2$, $\beta \neq 0$ существует точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \bigl[b\beta^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 e^{-\beta y}\bigr]^{1/2}.$$

11. $(ay+c)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+s)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f\left(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

Решение с функциональным разделением переменных при $ab \neq 0$:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = (a^2b)^{-1/3}x + (ab^2)^{-1/3}y + (a^2b)^{-2/3}c + (ab^2)^{-2/3}s.$$

Здесь функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} = f\bigl(w,\ \beta w'_\xi,\ \mu w'_\xi\bigr),$$

где $\beta = (a^2b)^{-1/3}$, $\mu = (ab^2)^{-1/3}$.

12. $(a_1x + b_1y + c_1)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_2x + b_2y + c_2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f\left(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\right).$

Точные решения ищем в виде бегущей волны

$$w = w(\xi), \qquad \xi = Ax + By + C,$$

где постоянные A, B, C определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^2 + a_2B^2 = A, \tag{1}$$
$$b_1A^2 + b_2B^2 = B, \tag{2}$$
$$c_1A^2 + c_2B^2 = C. \tag{3}$$

Сначала решаются первые два уравнения (1), (2), затем из последнего уравнения (3) определяется C.

Искомая функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\xi w''_{\xi\xi} = f\bigl(w,\ Aw'_\xi,\ Bw'_\xi\bigr).$$

13. $\boldsymbol{f_1(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f_2(y)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=g_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+g_2(y)\dfrac{\partial w}{\partial y}+kw\ln w+\bigl[h_1(x)+h_2(y)\bigr]w}$.

Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} f_1(x)\varphi''_{xx}&=g_1(x)\varphi'_x+k\varphi\ln\varphi+\bigl[h_1(x)+C\bigr]\varphi,\\ f_2(y)\psi''_{yy}&=g_2(y)\psi'_y+k\psi\ln\psi+\bigl[h_2(y)-C\bigr]\psi, \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

14. $\boldsymbol{\bigl[a_1x+b_1y+f(w)\bigr]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\bigl[a_2x+b_2y+g(w)\bigr]\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=h\Bigl(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)}$.

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$a_1A^2+a_2B^2=A,\qquad b_1A^2+b_2B^2=B,$$

а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\bigl[\xi+A^2f(w)+B^2g(w)\bigr]w''_{\xi\xi}=h\bigl(w,\ Aw'_\xi,\ Bw'_\xi\bigr).$$

15. $\boldsymbol{\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl\{\bigl[a_1x+b_1y+f(w)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr\}+\dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl\{\bigl[a_2x+b_2y+g(w)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr\}=h\Bigl(w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)}$.

Решение типа бегущей волны:

$$w=w(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

где постоянные A и B определяются путем решения алгебраической системы уравнений

$$A^2a_1+B^2a_2=A,\qquad A^2b_1+B^2b_2=B,$$

а функция $w(\xi)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} &\bigl[\varphi(\xi,w)w'_\xi\bigr]'_\xi=h\bigl(w,\ Aw'_\xi,\ Bw'_\xi\bigr),\\ &\varphi(\xi,w)=\xi+A^2f(w)+B^2g(w). \end{aligned}$$

16. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+g(x)\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+h(x)w=0}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1=C_1^{-3}w\bigl(x,\ C_1y+C_2\bigr)+\phi(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $\phi(x)$ определяется обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка $\phi''_{xx}+f(x)\phi'_x+h(x)\phi=0$, также будет решением этого уравнения.

2°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)y^{3/2}+\varphi_3(x)y^3,$$

где функции $\varphi_k=\varphi_k(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi_1''+f(x)\varphi_1'+\tfrac{9}{8}g(x)\varphi_2^2+h(x)\varphi_1=0,\\ &\varphi_2''+f(x)\varphi_2'+\tfrac{45}{4}g(x)\varphi_2\varphi_3+h(x)\varphi_2=0,\\ &\varphi_3''+f(x)\varphi_3'+18g(x)\varphi_3^2+h(x)\varphi_3=0, \end{aligned}$$

штрихи обозначают производные по x.

3°. Решение с обобщенным разделением переменных, кубическое по y:

$$w(x,y) = \psi_1(x) + \psi_2(x)y + \psi_3(x)y^2 + \psi_4(x)y^3,$$

где функции $\psi_k = \psi_k(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi_1'' + f(x)\psi_1' + 2g(x)\psi_2\psi_3 + h(x)\varphi_1 = 0,\\
&\psi_2'' + f(x)\psi_2' + 2g(x)(2\psi_3^2 + 3\psi_2\psi_4) + h(x)\varphi_2 = 0,\\
&\psi_3'' + f(x)\psi_3' + 18g(x)\psi_3\psi_4 + h(x)\varphi_3 = 0,\\
&\psi_4'' + f(x)\psi_4' + 18g(x)\psi_4^2 + h(x)\varphi_4 = 0.
\end{aligned}$$

4°. Решение с обобщенным разделением переменных:

$$w(x,y) = \xi(x) + \eta(x)\theta(y).$$

Здесь функции $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(x)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\eta_{xx}'' + f(x)\eta_x' + ag(x)\eta^2 + h(x)\eta = 0,\\
&\xi_{xx}'' + f(x)\xi_x' + bg(x)\eta^2 + h(x)\xi = 0,
\end{aligned}$$

где a, b — произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(y)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\theta_y'\theta_{yy}'' = a\theta + b,$$

решение которого можно представить в неявном виде.

17. $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0}$.

1°. Пусть $w(x,y)$ — решение рассматриваемого уравнения. Тогда функция

$$w_1 = C_1^{-1} w\bigl(C_1 x + C_2,\, C_1 y + C_3\bigr) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_4, C_4 — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения.

2°. Вырожденное решение:

$$w(x,t) = Axy + Bx + Cy + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

3°. Автомодельное решение:

$$w(x,y) = xu(z), \quad z = y/x,$$

где функция $u(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$z(zu_z' - u)_z' + f(u - zu_z',\, u_z')u_{zz}'' = 0.$$

4°. Преобразование Лежандра

$$u(\xi,\eta) = x\xi + y\eta - w(x,y), \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial y},$$

где u — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные, приводит к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

Точные решения этого уравнения для некоторых функций $f(\xi,\eta)$ можно найти в книге А. Д. Полянина (2001 b).