

Теория оболочек: феноменология и первые принципы в прикладной науке

И. В. Андрианов
Л. И. Маневич



Игорь Васильевич Андрианов, доктор физико-математических наук, профессор Днепропетровского инженерно-строительного института, член Американского математического общества. Область научных интересов — асимптотические методы, теория пластин и оболочек.

Публиковался в «Природе».



Леонид Исаакович Маневич, доктор технических наук, заведующий сектором Института химической физики им. Н. Н. Семёнова РАН, профессор Московского физико-технического института. Основные научные работы посвящены разработке и применению асимптотических методов, теории нелинейных колебаний и волн, физике и механике полимеров. Печатался в «Природе».

В ПРОЦЕСС своего развития каждый раздел науки испытывает воздействие как «внешних», так и внутренних факторов. Первые обычно связывают с запросами практики или других областей науки, вторые — с внутренней логикой развития самой теории, причем процесс их взаимодействия может быть достаточно сложным. Интересно проследить этот процесс на примере какого-либо конкретного раздела прикладной науки — именно потому, что здесь влияние внешних факторов должно быть доминирующим.

На самом деле ситуация оказывается далеко не столь однозначной. Как правило, внешние стимулы отчетливо проявляются в прикладной науке при необходимости решения возникающих практических задач, когда невозможно ждать результатов строгого теоретического анализа. В такой ситуации на первый план выходит «метод гипотез», составляющий основное содержание феноменологического подхода.

Но, с другой стороны, раньше или позже с неизбежностью вступают в действие внутренние стимулы, побуждающие исследователей искать пути обоснованного вывода соответствующих уравнений, как говорят, «из первых принципов». При этом первые принципы не являются однозначно определенными, существует их иерархия в соответствии с различными уровнями теории.

Речь, по существу, идет о двух взаимно дополняющих тенденциях: с одной стороны, непосредственное построение теории на основе принимаемых интуитивно или проверенных гипотез, с другой — попытки вывести ее из теории более высокого уровня. В ходе развития науки эти тенденции причудливым образом сочетаются либо сменяют друг друга, обнаруживая достаточно общие и поучительные закономерности. Их обсуждение и составляет основное содержание данной статьи.

При этом в качестве конкретного при-

© Андрианов И. В., Маневич Л. И. Теория оболочек: феноменология и первые принципы в прикладной науке.

мера прикладной науки мы выбрали теорию пластин и оболочек, имеющую многочисленные и важные приложения в авиационной и ракетной технике, кораблестроении и строительстве. В то же время в силу логики своего развития теория пластин и оболочек способствовала формированию общих идей и понятий современной математической физики. Но вначале — несколько слов об объекте нашего разговора.

Несложный эксперимент над тонким листом бумаги напомнит нам, что бумагу значительно легче изогнуть и смять, чем растянуть. Дело в том, что жесткость такого листа на растяжение-сжатие значительно больше его изгибной жесткости. В теории тонких пластин и оболочек показано, что значение первой величины пропорционально толщине листа, а второй — кубу толщины, поэтому при малой толщине изгибная жесткость существенно меньше жесткости на растяжение-сжатие. Следовательно, задача конструктора, использующего тонкостенные элементы, заключается в том, чтобы заставить их работать в основном на растяжение-сжатие, а не на изгиб.

К сожалению, на практике полностью исключить изгибные (моментные) напряженные состояния, как правило, не удается. И тогда приходит на помощь важная особенность оболочки — способность локализовать моментные напряженные состояния. В то же время конструктор не должен забывать и о недостатках оболочек, являющихся продолжением их достоинств: вследствие тонкостенности реальной опасностью становится потеря устойчивости, которая нарушает работоспособность оболочки из-за больших деформаций и искажения ее формы.

Первоначально возможности широкого применения оболочек были ограничены как технологией, так и отсутствием надежных методов предсказания их поведения. Сделать такое предсказание в рамках теории упругости — задача чаще всего безнадежная. В то же время интуитивно понятно, что пластинку и оболочку можно рассматривать как двумерные объекты, наделенные в отличие от геометрической поверхности конечной жесткостью. Однако развитие двумерной теории шло по извилистому пути.

Можно вспомнить слова одного из создателей теории оболочек А. Лява: «Большинство людей, благодаря исследованиям которых зародилась и сформировалась тео-

рия упругости, интересовалось скорее натуральной философией, чем материальным прогрессом, стремились скорее познать мир, чем сделать его более удобным. Даже в таких проблемах технического характера, как теория стержней и пластинок, внимание было сосредоточено скорее на теоретической, чем на практической стороне этих вопросов. Тот факт, что косвенным результатом исследований, которые велись в таком духе, явились значительные успехи в приложениях, имеет немаловажное значение»¹.

Для тонких оболочек общая схема построения и анализа теории могла бы выглядеть так. Вначале из соотношений физики твердого тела выводится континуальная теория упругости. Затем на основе трехмерной теории упругости строится двумерная теория оболочек. И, наконец, в рамках теории оболочек, остающейся в общем случае достаточно сложной, выводятся приближенные теории, позволяющие решать конкретные задачи. Однако каждый из выделенных этапов связан с преодолением весьма существенных математических и (или) физических трудностей, и развитие теории оболочек на самом деле не следовало указанной идеальной схеме. При ретроспективном анализе разобраться в этом процессе позволяет асимптотический подход². В нашем случае его плодотворность связана с наличием в теории тонких пластин и оболочек естественности малого параметра, каковым является отношение толщины к другому характерному параметру (например, для цилиндрической оболочки — к радиусу поперечного сечения). Именно малость этого отношения определяет в конечном счете специфику тонких упругих тел — прежде всего наличие покровных слоев и краевых эффектов. И, будучи серьезным препятствием при использовании численных методов, эта малость обеспечивает в то же время высокую эффективность асимптотического подхода, предполагающего анализ поведения тонкой оболочки (пластины) при стремлении малого параметра к нулю.

Интерес к теории деформируемых поверхностей возник в начале XIX в. в связи с экспериментами Э. Хладни, который изучал

¹ Ля в А. Математическая теория упругости. М.—Л., 1935.

² А н д р и а н о в И. В., М а н е в и ч Л. И. Две ипостаси асимптотики // Природа. 1987. № 4. С. 85—97; О н и ж е. Асимптотические методы и физические теории. М., 1989.

фигуры, образуемые песком на стеклянной пластинке. Если по краю последней проводить смычком, то при этом визуализируются пространственные формы изгибных колебаний пластинки.

Насущная необходимость быстрейшего объяснения результатов этих экспериментов обусловила феноменологический характер первых теоретических работ. Я. Бернулли (младший), рассматривая пластинку как систему перекрестных балок, получил уравнение изгибных колебаний, позволяющее качественно объяснить эксперименты Хладни, однако не учитывающее взаимодействие балок при кручении. Естественный следующий шаг, связанный с учетом этого фактора,— исходная пластинка рассматривается как поверхность, наделенная заданными свойствами («оснащением»). Такие поверхности в настоящее время называются поверхностями Коссера или оснащенными поверхностями.

Выбор оснащения (жесткостей пластинки, зависящих в действительности от материала и геометрических свойств трехмерного тонкого тела, каковым является пластинка) позволяет получить конкретную двумерную теорию. По этому пути пошли Л. Эйлер, Ж. Лагранж и С. Жермен. Это — чисто геометрический и принципиально феноменологический подход к построению теории пластин и оболочек. Если ограничиться таким уровнем рассмотрения, то свойства оснащения (в данном случае жесткости на изгиб и кручение) должны определяться на основе специальных экспериментов. Но внутренняя логика подсказывает ученым направлять усилия на вывод феноменологических уравнений из первых принципов, при этом одновременно решается и задача определения свойств оснащения.

С. Пуассон и Л. Навье в качестве первых принципов выбрали соотношения молекулярной теории (еще не существовавшей тогда!), опираясь на берущее начало у Ньютона убеждение, что свойство упругости может быть объяснено с точки зрения сил притяжения и отталкивания, действующих между мельчайшими частицами тел. Однако физика в то время еще не была готова к детальному рассмотрению явлений на таком уровне³.

³ Интересно, что уже в наше время подобный подход (естественно, на более высоком уровне) получил развитие в теории тонких пленок, состоящих из одного или нескольких молекулярных слоев. По самой своей сути это — физические объекты, описание которых методами механики трехмерных сплошных сред принципиально невозможно.

С другой стороны, А. Коши и С. Пуассон пытались построить теорию пластин, исходя из трехмерной теории упругости, которая незадолго до этого была впервые сформулирована на основе гипотез, т. е. являлась феноменологической теорией, но представляла собой систему первых принципов для вывода теории пластин. Коши и Пуассон сводили трехмерные уравнения теории упругости к двумерным, раскладывая искомые компоненты перемещений и напряжений по возрастающим степеням толщины. Однако здесь возникали трудности уже математического характера, и после справедливой критики Б. Сен-Венана и Г. Кирхгофа этот метод был надолго забыт. На источнике этих трудностей мы остановимся ниже.

Как стало теперь ясно, шансы на успех первоначально имел лишь феноменологический подход в рамках трехмерной теории упругости. Именно таким образом первую удовлетворительную теорию изгиба пластин построил Г. Кирхгоф, опираясь на следующую систему гипотез:

прямолинейные волокна, перпендикулярные к срединной поверхности пластины до деформации, остаются после деформации прямолинейными и перпендикулярными к изогнутой поверхности, сохраняя при этом свою длину;

отсутствует взаимодействие слоев пластиинки, параллельных срединной поверхности, в нормальном к слоям направлении.

В дальнейшем А. Ляв обобщил эти гипотезы на изогнутые поверхности и построил основные соотношения теории оболочек.

Отметим, что вывод уравнений Кирхгофа — Лява из уравнений теории упругости (т. е. реализация внутренней логики развития теории оболочек) стал возможным лишь в 60—70-е годы нашего столетия, т. е. почти через 100 лет после их феноменологического построения!⁴

Итак, при выводе основных соотношений теории пластин и оболочек четко обозначились четыре подхода:

вывод непосредственно из соотношений молекулярной теории (в этом случае будем говорить об использовании первых принципов первого уровня);

построение соотношений теории оболочек

⁴ Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., 1976.

лочек из уравнений трехмерной теории упругости (вывод из первых принципов второго уровня);

непосредственное построение соответствующих двумерных теорий как теорий оснащенных поверхностей (феноменология первого уровня);

использование системы гипотез в рамках трехмерной теории упругости (феноменология второго уровня).

Единообразная интерпретация всех этих подходов становится возможной в рамках асимптотической методологии. Так, вывод теории пластин (оболочек) из первых принципов обоих уровней могут быть естественным образом реализованы при асимптотическом анализе, включающем процедуру усреднения в том или ином виде (о связи этой процедуры с асимптотикой см. указанные выше работы авторов статьи).

В первом случае усреднение выполняется на масштабах, существенно превышающих расстояние между молекулами (атомами) и позволяет «континуализировать» исходную двумерную систему; такой подход логически оправдан для двумерных молекулярных слоев. Во втором случае усреднение проводится по толщине и сводит тем самым исходную трехмерную систему к двумерной. При этом оказывается, что феноменологические теории суть угаданные асимптотики. Например, гипотезы Кирхгофа — Лява соответствуют первому приближению при выводе теории пластин (оболочек) из соотношений трехмерной теории упругости.

В то же время вывод из первых принципов позволяет выявить эффекты, о которых не может идти речь при феноменологических подходах. Так, континуальная двумерная теория не способна корректно описать распределение деформаций, существенно изменяющееся на расстояниях порядка межатомных. Точно так же на расстояниях порядка толщины оболочки от ее края нельзя рассматривать оболочку как двумерную поверхность. Но при выводе из первых принципов наряду с «угаданными» асимптотиками возникают дополнительные уравнения, как раз и учитывающие локализованные вблизи границы и весьма быстро изменяющиеся состояния (пограничные слои, высококачественные колебания). Невозможность разделения полного напряженно-деформированного состояния на «внутреннее» и «пограничный слой» при использовании формальных разложений по толщине в уравнениях трехмерной теории упругости фактически и предопределила неудачу попытки, предпринятой Пуассоном и Навье.

Задачи теории оболочек представляются достаточно сложными даже в настоящее время, когда большая часть из них может быть решена на ЭВМ численными методами. Насколько же сложными они должны были казаться в XIX в.!

Подходы, применяемые при решении таких задач, условно можно разделить на математический и физический. Первый привел к точным методам либо строго обоснованным приближенным подходам (например, вариационным), не связанным с дальнейшим использованием малых параметров. Второй основывался на принципе соразмерности точности теории и методов ее анализа и попытке снова использовать малые параметры системы. Возникла, однако, та же ситуация, что и при выводе соотношений теории оболочек из трехмерной теории упругости — уровень математики не позволял в сколь-нибудь нетривиальных случаях делать вполне строгие выводы, и была использована феноменология.

Поскольку соотношения теории оболочек в таком контексте можно считать первыми принципами (третьего уровня), соответствующую феноменологию назовем феноменологией третьего уровня. В каком-то смысле аналогия эта феноменология достигла в работах В. З. Власова, построившего целую систему приближенных теорий, практическое значение которых не исчерпано и в настоящее время. Однако начиная еще с работ Рэлея возник вопрос о возможности обоснования гипотез и вывода их из общих уравнений, и вот здесь-то в полной мере и проявилась мощь асимптотической методологии.

С этой точки зрения чрезвычайно полезна дискуссия Рэлея и Лява, касающаяся колебаний цилиндрической оболочки, итог которой подвел сам Ляв: «Рэлей из физических соображений пришел к заключению, что средняя поверхность колеблющейся оболочки не испытывает растяжения; в соответствии с этим условием он определил характер смещения точек средней поверхности. Прямое применение метода Кирхгофа привело к уравнениям движения и граничным условиям, которые нелегко согласовать с теорией Рэлея. Последующие исследования показали, что деформация растяжения может иметь место лишь в узкой области вблизи краев, причем здесь она может быть подобрана так, чтобы соблюдение граничных условий было обеспечено; в то же время большая часть оболочки будет колебаться согласно теории Рэлея».

Разумеется, Рэлей прекрасно понимал приближенность своего подхода, но его в данном случае интересовал прежде всего результат. Сравнение же приближенного решения с экспериментальными данными подтверждало достаточно высокую точность его подхода.

Ляв подходил к этой задаче с другой точки зрения. Рассмотрев оболочку общей геометрической формы и построив на основе обобщенных гипотез Кирхгофа исходные уравнения и граничные условия, он показал, что решение Рэлея не удовлетворяет всем граничным условиям. Построив далее свое решение, свободное от указанного недостатка, Ляв подверг критике решение Рэлея как совершенно неудовлетворительное.

Интересно, что сам Ляв при выводе исходных соотношений теории оболочек опирался на феноменологический подход, обобщив гипотезы Кирхгофа (т. е. действовал как физик), и в то же время при решении требовал полной математической строгости!

Ситуация прояснилась благодаря работам Г. Лэмба и А. Бессета. Ими было построено локализованное у границы напряженное состояние (краевой эффект) и обнаружено разделение оболочки на внутреннюю, где справедливо решение Рэлея, и краевую зоны. По существу, это было первое применение так называемой сингулярной асимптотики⁵ в теории оболочек. (Может быть, правильнее было бы говорить о создании сингулярной асимптотики, поскольку понятие краевого эффекта в теории оболочек появилось раньше, чем понятие пограничного слоя Л. Прандтля в гидромеханике.)

Таким образом, асимптотический подход позволил согласовать две, казалось бы диаметрально противоположные, точки зрения и, кроме того, привел к появлению чрезвычайно важного нового понятия.

Однако полное осознание того факта, что теория оболочек является по самой своей сути асимптотической теорией, и, самое главное, практическая реализация этого принципа началась в середине нашего столетия с работ А. Л. Гольденвейзера, обобщенных в упомянутой монографии.

Вообще для методов расчета оболочек характерным оказался путь от чисто инженерных, основанных на правдоподоб-

ных гипотезах приемов к математически обоснованным приближенным решениям.

Приведем пример. Широкое распространение в современной технике получили конструкции с периодическими неоднородностями формы и структуры: ребристые, гофрированные, складчатые, перфорированные, слоистые и тому подобные пластины и оболочки. Инженеры издавна пользовались методом конструктивной ортотропии, «размазывая» жесткости и плотности неоднородностей по оболочке и переходя к оболочке гладкой, но обладающей различными свойствами в разных направлениях. Эта чисто феноменологическая схема получила обоснование лишь в последние годы в связи с развитием метода усреднения.

Для ребристой оболочки — одного из важнейших объектов инженерной практики — усредненные уравнения можно трактовать как полученные в результате «размазывания» жесткостей и плотностей ребер по поверхности, «быстрое» же решение соответствует изгибу между ребрами. Включение феноменологической схемы конструктивной ортотропии в регулярный асимптотический процесс позволяет находить решение из первых принципов, отправляясь от исходных уравнений теории неоднородных оболочек.

Как было отмечено выше, в качестве естественного «инструмента» эволюции теорий можно рассматривать асимптотический подход. Попробуем сделать некоторые общие выводы. Начнем со случая, когда уравнения или решения находят на основании первых принципов. Сложные модели, которые при этом, как правило, получаются, в дальнейшем претерпевают существенные упрощения. Это связано как с трудностями теоретического анализа сложных моделей, так и с настоятельной потребностью в четком понимании их физического содержания.

Конечно, упрощение, огрубление описания неминуемо односторонне и рано или поздно вступает в противоречие с опытом. Иными словами, грубая модель нуждается в уточнении — должен быть указан алгоритм, позволяющий строить уточняющие поправки, выявлять области применимости, оценивать потерянные эффекты. Естественное всего это можно сделать при помощи асимптотических методов. В результате происходит естественный отбор: слишком сложные теории «вымирают» или «эволюционируют»

⁵ В этом случае старшие производные в уравнениях движения содержат малый параметр, так что формально при стремлении этого параметра к нулю порядок системы уравнений понижается. В связи с таким вырождением (сингулярностью!) возникают локализованные состояния (пограничные слои, краевые эффекты) при асимптотическом анализе соответствующей задачи.

(упрощаются), а грубо приближенные схемы «приспособливаются» за счет усложнения и уточнения. Асимптотический же подход не только играет роль инструмента эволюции, но и позволяет выстраивать иерархию приближенных теорий.

Сложнее обстоит дело с феноменологией. Имеет ли дело физик с асимптотикой, когда строит весьма (на первый взгляд) произвольную систему гипотез? Нам кажется — да, поскольку физическое мышление по сути своей предполагает выделение основных факторов, определяющих главные черты изучаемого явления, и пренебрежение несущественными эффектами.

Иными словами, в этом случае асимптотические оценки делаются на интуитивном уровне. В дальнейшем, естественно, наступает время осознанного применения асимптотического подхода, позволяющего снять противоречия и ввести строгие рамки для систем гипотез.

Несколько слов об обосновании достоверности теорий в прикладных науках. Конечно, совпадение теоретических и экспериментальных результатов дает определенную уверенность, но, как отмечали, например, А. Пуанкаре и Л. Д. Ландау, само по себе ничего не доказывает.

В математике непротиворечивость доказывается сведением к арифметике (непротиворечивость которой считается очевидной). В прикладной науке за такой критерий, по всей видимости, может быть принята асимптотическая выводимость из теории более высокого уровня сложности.

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что феноменология — необходимый элемент любой естественной науки. Дж. фон Нейман писал: «Когда математическая дисциплина отходит достаточно далеко от своего эмпирического источника (например, когда теория оболочек становится «математической теорией оболочек».— Авт.) и лишь косвенно вдохновляется идеями, восходящими к «реальности», над ней нависает весьма серьезная опасность. Она все больше превращается в бесцельное упражнение по эстетике, в искусство ради искусства... При наступлении этого этапа единственный способ исцеления, на мой взгляд, состоит в том, чтобы возвратиться к источнику и впринять более или менее прямо эмпирические идеи»⁶.

⁶ Цит. по: Данилов Ю. А. Джон фон Нейман. М., 1990. С. 13.

НОВЫЕ КНИГИ

Психология

Как вы относитесь к науке?

Выборочный опрос населения об отношении к науке, проведенный английской газетой «Дейли телеграф», показал, что лишь 11 % британцев считают, что «наука несет вред и разрушения». Это свидетельствует о серьезном улучшении «образа» научной деятельности в глазах людей: в 1991 г. такой ответ давали 20 % опрошенных.

Тех, кто видит науку «умеренно» или даже «чрезвычайно» полезной, теперь насчитывается 81 %. Поднялся также процент лиц, «понимающих» науку: на вопрос «к кому вы обратитесь, если захотите узнать, откуда взялась жизнь на Земле?» лишь 20 % ответили: «к священнику», а 37 % — «к биологу».

Не так уж мало — 16 % — англичан полагают, что наука лишает жизнь ее духовного значения, зато огромное большинство — почти 76 % — уверено, что она дает им глубокое

проникновение в суть вещей. Положительно оценивая эти психологические сдвиги, президент Британской ассоциации развития Д. Эттенборо (D. A. Attenborough) все же подчеркнул, что общественный интерес к науке и технике пострадает, если радио и телевидение не приостановят тенденцию отодвигать и на задний план.

New Scientist. 1992. V. 135. N 1836. P. 9 (Великобритания).